ДИНАМИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ЗНАНИЯ DK_{pr}: ЕЁ МЕТАЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ*

Е.Е. Ледников

Кафедра онтологии и теории познания
Факультет гуманитарных и социальных наук
Российский университет дружбы народов
Ул. Миклухо-Маклая, 10а, Москва, Россия, 117198

В статье показано, что авторская первопорядковая модальная логика знания DK_{pr} является непротиворечивой и полной, что для неё справедливы теоремы компактности, Левенгейма—Сколема и интерполяционная теорема Крейга.

Ключевые слова: динамическая логика, эпистемология, методология, металогика.

В большинстве философско-гносеологических концепций понятие знания используется для выражения итога, конечной цели познания. Но для характеристики *процесса* познания, движения по пути постижения истины, одного понятия знания недостаточно. Вот почему такие глубокие диалектики, как Сократ, Платон и И. Кант привлекали для характеристики познания и другие понятия. Сократ фактически предложил различать *степени* знания, Платон знанию противопоставлял *мнение*, а И. Кант, в дополнение к знанию, использовал понятия *мнения, веры, убеждённости* и *достоверности* [1. С. 98—99].

Нами было предложено характеризовать процесс достижения знания с помощью понятий убежденности, доказательства, веры, мнения, сомнения и опровержения [1. С. 99]. Но чтобы подобная картина познания приняла вид логически строгого философского дискурса, она должна быть дополнена соответствующей логикой, в рамках которой только и возможно её последовательное и непротиворечивое описание. Такая логика, названная нами DK_{pr}-логикой, была построена в виде исчисления гильбертовского типа и в виде аналитических таблиц в [2], а в [3] была предложена для неё семантика.

В настоящей работе исследуются металогические характеристики DK_{pr}-логики, прежде всего её полнота. Доказательство полноты осуществим для аналитико-табличной формулировки DK_{pr}-логики и для формулировки гильбертовского вида.

DK_{pr}-логика является первопорядковой модальной логикой и сформулирована в первопорядковом предикатном модальном языке PL_d. Данный язык содержит в качестве исходных дескриптивных символов счётное множество пропозициональных переменных, индивидных и предикатных переменных, а также логические символы $\{\sim, \&, \vee, \supset, \forall, \exists, =, K\varphi, C\varphi, G\varphi, T\varphi, B\varphi, D\varphi, R\varphi\}$. Символами $K\varphi$, $C\varphi$, $G\varphi$, $T\varphi$, $B\varphi$, $D\varphi$, $R\varphi$ обозначены личностные модальные операторы «субъект φ знает, что...», «субъект φ убеждён в том, что...», «субъект φ доказыва-

* Исследование выполнено при поддержке РГНФ, проект № 07-03-00335а.

ет (обосновывает), что...», «субъект φ верит, что...», «субъект φ полагает, что...», «субъект φ сомневается в том, что...», «субъект φ опровергает, что...» соответственно. Так что если A — произвольная формула классической логики предикатов, φ — индивидный символ для обозначения субъекта знания, убеждённости, доказывания, веры, мнения, сомнения или опровержения, то, CφA, GφA, TφA, BφA, DφA, RφA и их отрицания — формулы рассматриваемой логики. Если F — формула вида □A или её отрицание (где □ — один из модальных операторов DK_{pr}-логики), то все выражения вида KφF, (∀*x*)F, (∃x)F и их отрицания также являются формулами DK_{pr}-логики.

Пусть PL^*_d — расширение языка PL_d за счёт добавления счётного множества новых индивидных переменных. В качестве правил редукции в формулировке DK_{pr}-логики используются правила для α-, β-, γ-, δ-, ε-, ν-, π-типов формул. К правилам редукции классической пропозициональной логики (α-правилам и β-правилам [4. P. 614]) добавляются правила для кванторов (γ-правила и δ-правила), правило для тождества (ε-правило) и правила для сильных (ν-правила) и слабых (π-правила) модальностей.

Правило удаления истинной формулы с внешним квантором общности и ложной формулы с внешним квантором существования:

[γ/γ(*z*)], где *z* — произвольная индивидная переменная языка PL^*_d. Это правило многократного применения.

Правило удаления истинной формулы с внешним квантором существования и ложной формулы с внешним квантором общности:

[δ/δ(*z*)], где *z* — новая индивидная переменная PL^*_d. Это правило однократного применения.

Правило удаления формулы с тождеством (подставимость тождественного):

$[\varepsilon/\varepsilon_0]$ A(*x*, *y*), *x* = *y*/A(*x*, *x*).

Правила удаления сильных модальностей:

$[(K)\nu/\nu_o]$ KφA/A — правило удаления для сильной эпистемической модальности;

правила удаления для сильных модальностей убеждённости $[(C)\nu/\nu_o]$, доказываемости $[(G)\nu/\nu_o]$, веры $[(T)\nu/\nu_o]$, мнения $[(B)\nu/\nu_o]$, сомнения $[(D)\nu/\nu_o]$ и опровержения $[(R)\nu/\nu_o]$ отсутствуют.

А вот как будут выглядеть правила удаления соответствующих слабых модальностей:

$[(K)\pi/\pi_o]$ ~KφA/~A (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме (K)*ν*-формул);

$[(C)\pi/\pi_o]$ ~CφA/~A (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме (K)*ν*-формул и (C)*ν*-формул, а (C)*ν*-формулы заменяют $(C)\nu_o$-формулами);

$[(G)\pi/\pi_o]$ ~GA/~A (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме (K)*ν*-формул, (C)*ν*-формул и (G)*ν*-формул, а (C)*ν*-формулы и (G)*ν*-формулы заменяют $(C)\nu_o$-формулами и $(G)\nu_o$-формулами);

[(T)π/π$_o$] ~TφA/~A (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме (K)v-формул, (C)v-формул, (G)v-формул и (T)v-формул, а (C)v-формулы, (G)v-формулы и (T)v-формулы заменяют (C)v_o-формулами, (G)v_o-формулами и (T)v_o-формулами);

[(B)π/π$_o$] ~BφA/~A (но сначала из столбца вычёркиваются все формулы, кроме (K)v-формул, (C)v-формул, (G)v-формул, (T)v-формул и (B)v-формул, а (C)v-формулы, (G)v-формулы, (T)v-формулы и (B)v-формулы заменяют (C)v_o-формулами, (G)v_o-формулами, (T)v_o-формулами и (B)v_o-формулами);

[(R)π/π$_o$] ~RφA/~A (но сначала из столбца вычеркиваются все формулы, кроме (D)v-формул, а (D)v-формулы заменяют (D)v_o-формулами);

правило удаления слабой модальности сомнения [(D)π/π$_o$] отсутствует.

Столбец аналитической таблицы является замкнутым, если он содержит формулу вида ~($x = x$), либо пару формул вида (A, ~A), либо (KφA, DφA), либо (KφA, RφA), либо (CφA, DφA), либо (CφA, RφA), либо (GφA, DφA), либо (GφA, RφA), либо (TφA, DφA), либо (TφA, RφA).

В доказательстве полноты DK_{pr}-логики будем следовать стратегии, изложенной в [4. P. 615—618]. Прежде всего, важным в этом доказательстве является модальное свойство непротиворечивости той или иной модальной логической теории.

Множество Σ непустых подмножеств формул S_1, S_2, ..., S_n языка PL_d образует DK_{pr}-свойство непротиворечивости, если для каждого $S \in \Sigma$, выполняются правила:

(1.1) если A — атомарная формула, то неверно, что $A \in S$ и $\sim A \in S$;

(1.2) если x — свободная переменная в некоторой ППФ из множества S, то $S \cup \{x = x\} \in \Sigma$;

(2) если $\alpha \in S$, то $S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\} \in \Sigma$;

(3) если $\beta \in S$, то $S \cup \beta_1 \in \Sigma$ или $S \cup \beta_2 \in \Sigma$;

(4) если $\gamma \in S$, то $S \cup \{\gamma(z)\} \in \Sigma$ для произвольной индивидной переменной z языка PL_d^*;

(5) если $\delta \in S$, то $S \cup \{\delta(z)\} \in \Sigma$ для новой индивидной переменной z языка PL_d^*;

(6) если $\varepsilon \in S$, $(x = y) \in S$, то $S \cup \{\varepsilon_0\} \in \Sigma$;

(7) если $\mathrm{K}v \in S$, то $S \cup \{\mathrm{K}v_0\} \in \Sigma$;

(8) если $\mathrm{K}\pi \in S$, то $S_k \cup \{\mathrm{K}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_k = \{v \mid \mathrm{K}v\}$;

(9) если $\mathrm{C}\pi \in S$, то $S_c \cup \{\mathrm{C}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_c = \{v, v_0 \mid \mathrm{K}v, \mathrm{C}v_0\}$;

(10) если $\mathrm{G}\pi \in S$, то $S_g \cup \{\mathrm{G}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_g = \{v, v_0 \mid \mathrm{K}v, \mathrm{C}v_0, \mathrm{G}v_0\}$;

(11) если $\mathrm{T}\pi \in S$, то $S_t \cup \{\mathrm{T}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_t = \{v, v_0 \mid \mathrm{K}v, \mathrm{C}v_0, \mathrm{G}v_0, \mathrm{T}v_0\}$;

(12) если $\mathrm{B}\pi \in S$, то $S_b \cup \{\mathrm{B}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_b = \{v, v_0 \mid \mathrm{K}v, \mathrm{C}v_0, \mathrm{G}v_0, \mathrm{T}v_0, \mathrm{B}v_0\}$;

(13) если $\mathrm{R}\pi \in S$, то $S_r \cup \{\mathrm{R}\pi_0\} \in \Sigma$, где $S_r = \{v_0 \mid \mathrm{D}v_0\}$.

Моделью М DK_{pr}-логики будет структура (U, H, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r, R^k, R^∇, Val), где U — предметная область индивидов *a*, *b*, *c*, *d*... (универсум рассуждения), H — выделенный («реальный» мир), W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r — множества миров (альтернатив) соответствующей индексу динамической модальности, R^k — отношение достижимости на W^k (на эпистемических альтернативах), R^∇ — отношение достижимости на альтернативах остальных видов модальностей, Val — функция приписывания значений выражениям языка PL_d (функция означивания). Отношение R^k обладает свойствами рефлексивности и транзитивности, на отношение R^∇ не наложено никаких ограничений.

Для каждой пары множеств миров W^k, W^∇ существует множество *S* такое, что $\{S\} = \{p, q, r, ..., A_1, ..., A_m\} = \{W^k{}_1\} \cap \{W^k{}_2\} \cap ...\{W^k{}_j\}$ (где *j* — число элементов в W^k), причем $\{S\} \subseteq \{W^\nabla{}_i\}$ для произвольного возможного мира $W^\nabla{}_i$. Другими словами, множество *S* — это общая часть эпистемических альтернатив, которая является подмножеством множества высказываний произвольной альтернативы $W^\nabla{}_i$.

Охарактеризуем теперь с помощью определений функцию означивания Val:

Определение 1. $\mathrm{Val}(x) = a \in \mathrm{U}$, то есть любой индивидной переменной *x* эта функция сопоставляет некоторый индивид *a* из предметной области U.

Определение 2. $\mathrm{Val}(P^n) = V(P^n) = \{\langle a_1, a_2, ..., a_n\rangle, \langle b_1, b_2, ..., b_n\rangle, ...\}$, то есть любой *n*-местной предикатной переменной P^n функция Val сопоставляет объем *V*, состоящий из множеств упорядоченных *n*-ок индивидов из U.

Определение 3. Val(A) = И или Val(A) = Л. Другими словами, любой формуле A языка PL_d функция Val сопоставляет семантический объект «истина» или семантический объект «ложь». Эту же мысль можно выразить как M, $W_i \vDash$ A или M, $W_i \nvDash$ A — как выполнимость (соответственно, невыполнимость) формулы A в возможном мире W_i модели M (разумеется, при функции означивания Val, входящей в определение модели M). Отношение выполнимости $\vDash$ (соответственно, невыполнимости $\nvDash$) определяется следующим образом:

1) для пропозициональной переменной p или её отрицания ~p: M, $W_i \vDash$ p (~p), если p (~p) $\in W_i$;

2) для отрицания произвольного неэлементарного высказывания A, содержащего только те элементарные высказывания, которые принадлежат к W_i: M, $W_i \vDash$ ~A, если M, $W_i \nvDash$ A; M, $W_i \nvDash$ ~A, если M, $W_i \vDash$ A;

3) для α-формул: M, $W_i \vDash \alpha$, если M, $W_i \vDash \alpha_1$ и M, $W_i \vDash \alpha_2$; M, $W_i \nvDash \alpha$, если M, $W_i \nvDash \alpha_1$ или M, $W_i \nvDash \alpha_2$;

4) для β-формул: M, $W_i \vDash \beta$, если M, $W_i \vDash \beta_1$ или M, $W_i \vDash \beta_2$; M, $W_i \nvDash \beta$, если M, $W_i \nvDash \beta_1$ и M, $W_i \nvDash \beta_2$;

5) для Kν-формул: M, $W_i^k \vDash K\nu$, если M, $W_j^k \vDash K\nu_0$ в каждом W_j^k таком, что $W_i^k R^k W_j^k$, иначе M, $W_i^k \nvDash K\nu$;

6) для $\nabla\nu$-формул: M, $W_i^\nabla \vDash \nabla\nu$, если M, $W_j^\nabla \vDash \nabla\nu_0$ в каждом W_j^∇ таком, что $W_i^\nabla R^\nabla W_j^\nabla$, иначе M, $W_i^\nabla \nvDash \nabla\nu$ (1);

7) для $K\pi$-формул: M, $W_i^k \vDash K\pi$, если M, $W_j^k \vDash K\pi_0$ в некотором W_j^k таком, что $W_i^k R^k W_j^k$, иначе M, $W_i^k \nvDash K\pi$;

8) для $\nabla\pi$-формул: M, $W_i^\nabla \vDash \nabla\pi$, если M, $W_j^\nabla \vDash \nabla\pi_0$ в некотором W_j^∇ таком, что $W_i^\nabla R^\nabla W_j^\nabla$, иначе M, $W_i^\nabla \nvDash \nabla\pi$ (2);

9) для элементарной формулы исчисления предикатов $P^n(x_1...x_n)$: M, $W_i \vDash P^n(x_1...x_n)$, если $Val(x_1), ..., Val(x_n) \in V(P^n)$, в противном случае M, $W_i \nvDash P^n(x_1...x_n)$.

10) для γ-формул: M, $W_i \vDash \gamma$, если M, $W_i \vDash \gamma(z)$ для всех z из W_i, иначе M, $W_i \nvDash \gamma$;

11) для δ-формул: M, $W_i \vDash \delta$, если M, $W_i \vDash \delta(z)$ для некоторого z из W_i, иначе M, $W_i \nvDash \delta$.

Высказывание A общезначимо ($\vDash$ A), если M, H, $\vDash$ A во всех своих моделях M.

Приведем далее ключевые моменты доказательства по методу М. Фиттинга.

1. Пусть множество Σ представляет собой DK_{pr}-свойство непротиворечивости, замкнутое относительно объединения цепей. Пусть $S_0 \in \Sigma$, а D_0 представляет собой множество индивидных символов из S_0. Пусть $\{d_1, d_2, d_3, ...\}$ — счётное множество индивидных символов, не входящих в D_0, а $D = D_0 \cup \{d_1, d_2, d_3, ...\}$. Тогда для S_0 существует расширение $S \in \Sigma$, насыщенное вниз относительно D (иначе говоря, модельное множество Хинтикки относительно D).

2. Пусть Σ представляет собой DK_{pr}-свойство непротиворечивости, замкнутое относительно объединения цепей, а S — множество высказываний в языке PL_d, такое, что $S \in \Sigma$. Тогда, используя Σ, можно построить для S модель (в частности, такова предложенная нами модель $M = (U, H, W^k, W^c, W^g, W^t, W^b, W^d, W^r, R^k, R^\nabla, Val)$, в которой S — выполнимо (3).

Теорема о существовании модели позволяет установить полноту DK_{pr}-логики в аксиоматической и табличной формулировке. Так, в первом случае, достаточно установить, что совокупность множеств формул, непротиворечивых в смысле аксиоматической системы DK_{pr}-логики, образует DK_{pr}-свойство непротиворечивости. Рассмотрим некоторую формулу вида ~A из языка PL_d, не являющуюся противоречием. Тогда, очевидно, формула A не будет доказуема в DK_{pr}-логике. Но поскольку формула ~A непротиворечива, она, по теореме М. Фиттинга, выполнима. Мы приходим к следующему условному высказыванию: если формула A недоказуема, то формула ~A выполнима. Откуда, по закону контрапозиции, следует: если формула ~A невыполнима (то есть если $\vDash$ A), то формула A доказуема ($\vdash$ A). Сходное рассуждение справедливо и для табличной формулировки DK_{pr}-логики, если принять во внимание, что множество высказываний языка PL_d является непротиворечивым в том случае, когда ни одна аналитическая таблица для них не является замкнутой.

Как известно, из теоремы М. Фиттинга можно извлечь также доказательство теорем компактности, Лёвенгейма—Сколема и интерполяционной теоремы Крейга. Образцы доказательств можно найти в работе [4. P. 619].

Подведём некоторые итоги. Предложенная нами DK_{pr}-логика обладает не только важными для любой формализованной теории металогическими свойствами, но, что не менее значимо, установленные в ней логические отношения между модальностями, характеризующими этапы, ступени получения знания, находятся в полном согласии с интуитивными представлениями об этих понятиях. Так, вполне естественно, что субъекту познания φ (можно сказать и по-другому — исследователю φ) известны все его умственные состояния, возникающие на пути достижения знания. Другими словами, если субъект φ сомневается в некотором тезисе А, опровергает, полагает его и т.д., то он обязательно знает об этом. Не менее естественной является и упорядоченность всех модальных понятий по их дедуктивной силе, при которой самым сильным является знание, а самым слабым — сомнение. Разумеется, данная логика не подменяет философскую теорию познания как характеристику процесса достижения объективной истины, но может быть для неё полезным подспорьем, придавая философским рассуждениям необходимую логическую строгость и последовательность.

ПРИМЕЧАНИЯ

(1) Разумеется, знак ∇ означает здесь определённый вид сильной модальности, отличной от сильной модальности знания, а не произвольную сильную модальность.

(2) Знак ∇ означает здесь определённый вид слабой модальности, отличной от слабой модальности знания, а не произвольную слабую модальность.

(3) Мы считаем излишним воспроизводить детали доказательства этих двух тезисов, поскольку они с точностью до несущественных различий совпадают с доказательством М. Фиттинга в отношении алетических модальных систем [4. P. 617—618].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ледников Е.Е.* Возможность и предпосылки динамической концепции знания // Вестник РУДН. Серия Философия. — 2008. — № 3. — С. 98—102.

[2] *Ледников Е.Е.* Об одном варианте динамической логики знания // Логические исследования. — М.: Наука, 2007. — Вып. 14. — С. 218—223.

[3] *Ледников Е.Е.* Семантика первопорядковой динамической логики знания // Логические исследования. — М.: Наука, 2009. — Вып. 15. — С. 129—136.

[4] *Fitting Melvin.* Model existence theorems for modal and intuitionistic logics // The journal of symbolic logic. — 1973. — V. 36. — N. 4, Dec. — P. 613—627.

DYNAMIC LOGIC OF KNOWLEDGE DK_{pr}: ITS METALOGICAL PROPERTIES

E.E. Lednikov

Department of Ontology and Epistemology
Faculty of Humanities and Social Sciences
Russian People's Friendship University
Miklucho-Maklay Str., 10a, Moscow, Russia, 117198

The paper shows that the author's first order modal logic of knowledge DK_{pr} is consistent and complete, that compactness theorem, Lewenheim—Skolem theorem and Craig interpolation theorem may be true of it.

Key words: dynamic logic, epistemology, methodology, metalogic.