ПОЯВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ФОРМАЛИЗОВАННЫХ ИНТУИЦИОНИСТСКИХ ТЕОРИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

В.Х. Хаханян

Кафедра прикладной математики-2
Институт экономики и финансов МГУПС (МИИТа)
ул. Образцова, 15, Москва, Россия, 127994

В работе даётся обзор исследований по интуиционистским формализованным теориям математического анализа. Приведены все основные результаты и модели, полученные в конце 60-х, в 70-е и в начале 80-х гг. XX века.

Ключевые слова: математический анализ, интуиционистская логика, бинарный поток, натуральные числа.

В 1930 г. А. Гейтинг предложил формализованные исчисления: интуиционистской логики высказываний IL, интуиционистской логики предикатов IPC и интуиционистской арифметики HA [1]. Такая формализация противоречила основному принципу интуиционизма, утверждающему интуитивную ясность математических доказательств. Но возник ряд вопросов метаматематического характера, решить которые без точного очерчивания границ соответствующих теорий не представлялось возможным. Формализованные теории решали эти задачи успешно. Получались эти теории из соответствующих классических исчислений в результате отказа от закона исключенного третьего.

В данной работе будут изложены результаты, связанные с формализованными теориями действительного числа (математический анализ). Изложение будет неформальным. Система FIM из [2] или [3] (The Foundations of Intuitionistic Mathematics) состоит из расширения языка арифметики HA (о результатах, связанных с HA, см. [4]) новым сортом переменных для функций (функции из натуральных чисел в натуральные числа). Аксиомы и схема аксиом индукции сохраняются (последняя — по всем формулам нового языка), добавляются аксиомы согласованности функций с равенством $x = y \to \alpha(x) = \alpha(y)$ (здесь греческие буквы обозначают переменные по функциям; как всегда, можно замкнуть последнее утверждение кванторами всеобщности по переменным двух видов) и схемой аксиом, выражающей примитивно рекурсивную замкнутость $\exists\alpha\ \forall x\ (\alpha(x) = t(x))$, где $t(x)$ — произвольный терм языка (термы и формулы нашего аналитического языка строятся стандартным образом), не содержащий переменную α. Схема утверждает, что всякая примитивно рекурсивная комбинация функций вновь есть функция. Сформулированная подсистема FIM называется PrAn (примитивно рекурсивный анализ).

Сформулируем дополнительные постулаты. Обозначим $\forall y\ (\alpha(y) = \beta(j(x, y)))$ как $(\alpha = (\beta)_x)$, где j — функция пары и $(\beta)_x = \lambda y \beta(j(x, y))$. В FIM из данных выше двух постулатов выводится $\exists!\alpha(\alpha = \mathrm{F})$, где F — произвольный функтор, не содержащий α (функторы и термы строятся в FIM стандартно [2]).

AC-NC (схема выбора): $\forall x\, \exists\beta\varphi(x, \beta) \to \exists\alpha\forall x\exists\gamma(\gamma = (\alpha)_x \wedge \varphi(x, \gamma))$. Последняя скобка есть сокращение для формулы $\exists\gamma(\gamma = (\alpha)_x \wedge \varphi(x, \gamma) = \varphi(x, (\alpha)_x)$. Отметим, что такая запись не точная, но мы будем ею пользоваться. Более слабые схемы AC-NN и AC-NN! являются выводимыми из AC-NC и имеют вид:

AC-NN: $\forall x\, \exists y\, \varphi(x, y) \to \exists\alpha\, \forall x\, \varphi(x, \alpha(x))$. Если по всякому числу x можно найти число y так, что выполняется свойство $\varphi(x, y)$, то найдется функция α, задающая данное соответствие и осуществляющая выбор одного из y-в.

AC-NN!: $\forall x\, \exists! y\, \varphi(x, y) \to \exists\alpha\, \forall x\, \varphi(x, \alpha(x))$ (тот же принцип AC-NN, но с единственностью в посылке). Теория PrAn + AC-NN! называется EL (элементарный анализ).

Следующим из рассматриваемых принципов является разрешимая бар-индукция BI: $\forall x\, (\varphi(x) \vee \neg\varphi(x)) \wedge \forall\alpha\, \exists x\, \varphi(\alpha^{-}(x)) \wedge \forall x\, (\varphi(x) \to \eta(x)) \wedge \forall x\, (\forall y\, \eta(x{*}y^{\wedge}) \to \to \eta(x)) \to \eta(0)$. Здесь $\alpha^{-}(x) = <\alpha(0), \ldots\, \alpha(x-1)>$ и есть x-членный кортеж и $x^{\wedge} = = <x>$ — номер одночленного кортежа, состоящего из x, а $x{*}y$ обозначает операцию конкатенации (приписывания) кортежа y к кортежу x. Пояснение: пусть φ — разрешимое свойство вершин бинарного потока (первый член посылки), которое «запирает» любую ветвь этого потока, исходящую из начальной вершины (второй член посылки), и пусть в любой вершине потока, где выполняется свойство φ, выполняется и свойство η (третий член посылки) и, наконец, пусть свойство η наследственно вниз (четвертый член посылки). Тогда η выполнено в начальной вершине (заключение).

Принцип разрешимой бар-индукции классически выводим (в EL + закон исключенного третьего). Его следствием в интуиционистском анализе является тот факт, что не все функции в нашей теории являются общерекурсивными.

Через $\mathrm{GR}(\alpha)$ обозначим предложение $\exists y\forall x\exists z(\mathrm{T}_1(y, x, z) \wedge Uz = \alpha(x))$ ($\mathrm{GR}(\alpha)$ утверждает, что α — общерекурсивная функция). В PrAn + BI выводится $\neg\forall\alpha\mathrm{GR}(\alpha)$. Отметим, что утверждение в [2]: «В то же время теория FIM без принципа $\mathrm{BI_D}$ совместна с утверждением $\forall\alpha\mathrm{GR}(\alpha)$» ($\mathrm{BI_D}$ и есть BI в наших обозначениях) является ошибочным по существу, т.к. теория FIM есть PrAn + AC-NC + BI + + BC-C (BC-C — принцип непрерывности для функций, мы его ещё рассмотрим). Так как BC-C входит в FIM, то теория FIM без BI не является совместной с принципом $\forall\alpha\mathrm{GR}(\alpha)$. Вот точное доказательство. Рассмотрим теорию PrAn + AC-NC + + BC-C + $\forall\alpha\mathrm{GR}(\alpha)$. Заменим принцип непрерывности Брауэра для функций BC-C на слабый принцип непрерывности WC-N. Вот комментарий к видам принципа Брауэра.

Предположим, что для всякой функции α: $\mathrm{N} \to \mathrm{N}$ (из натуральных чисел в натуральные числа) можно указать число x такое, что выполняется отношение $\varphi(\alpha, x)$. Принцип непрерывности WC-N утверждает, что этот x можно найти по конечному начальному отрезку значений $\alpha(0), \ldots, \alpha(n)$ функции α. Принцип BC-C для функций утверждает, что если по всякой функции α можно указать функцию β

такую, что выполнено $\varphi(\alpha, \beta)$, то всякий конечный отрезок функции β определяется полностью конечным отрезком функции α, но эта зависимость не является постоянной.

Принцип WC-N выводим в EL из BC-C. Теперь отмеченный выше факт можно доказать так: если $\forall\alpha\, GR(\alpha)$, то, в силу WC-N, $\forall\alpha\, \exists xy\, \forall\beta\, ((\beta(y) = \alpha(y)) \supset$ $\supset \forall z\, \exists e\, (T_1(x, z, e) \wedge U(e) = \beta(z)))$. В качестве α берём теперь функцию, всюду равную нулю, и пусть $\beta_n(x) = 0$, если $x < n$ и $\beta_n(x) = 1$, если $x \geq n$ ($\beta_n(x)$ — функции «ступеньки»). Для всякого y найдется n такой, что на отрезке натуральных чисел до n $\alpha = \beta_n$, но гёделевы номера α и β_n всегда различны. Приведем ещё факты из [2], доказательство которых связано с построением моделей, позволяющих улавливать тонкие различия в рассматриваемых принципах. В FIM имеем $\neg\forall\alpha GR(\alpha)$, но в FIM нельзя вывести $\exists\alpha\neg GR(\alpha)$, т.к. Дж. Московакис в [5] показала, что утверждение $\forall\alpha\neg\neg GR(\alpha)$ совместно с FIM. Отметим, что PrAn + WC-N противоречит классическому анализу, т.к. в этой теории можно дать контрпримеры ко многим законам классической логики предикатов. Теория FIM, рассмотренная С. Клини в [3] в качестве основы, содержит «базисную систему Клини» BSK = PrAn + + AC-NC + BI.

FIM, в которой выводимы все известные факты интуиционистского анализа Л.Я. Брауэра (теорема о веере, теорема о равномерной непрерывности всякой функции действительного переменного) есть BSK + BC-C. Основные результаты метаматематического характера из [3] состоят в том, что построена модель типа реализуемости для доказательства интерпретируемости (и, тем самым, относительной непротиворечивости) FIM в теории BSK (доказательство финитное). Ясно, что BSK допускает и классическую модель, в которой все функции интерпретируются как класс отображений из $N \to N$, но главный вывод состоит в том, что специфически интуиционистская теория приемлема и с классической точки зрения. Клини доказал в [6], что FIM обладает свойствами дизъюнктивности и нумерической экзистенциальности. Ситуация соотношения BSK, FIM и классического анализа сходна с ситуацией соотношения базисной системы арифметики HA и её расширений. То, что не приведено какой-либо теории интуиционистского анализа, отличной от FIM и классического анализа, не означает, что такой теории нет.

Прежде чем привести такой пример, отметим главную особенность (та же особенность, но в менее сложном виде, наблюдается и в ситуации с HA) исследования: большое количество разных вариантов дополнительных принципов порождает большое количество вопросов взаимоотношения этих принципов. Для арифметики мы описали только часть взаимоотношений принципов Черча, Маркова, P и других [4], оставив в стороне некоторые очень интересные модели, которые появились уже после написания [2]. Даже в [2] описание является неполным. Отметим следующее.

А. Принципы с единственностью в посылке выводимы из соответствующих принципов без единственности в посылке, а обратный факт для интуиционистских теорий не имеет места.

Б. Как правило, схемы аксиом, в которых не допускаются свободные переменные по функциям, слабее тех же схем, в которых данное ограничение отсутствует; подобный подход при изучении неклассического анализа (или арифметики, как отмечалось выше) даёт возможность уловить тонкие различия в вопросах эффективного существования объектов в математике: для этого приходится строить специальные понятия неклассической истинности в виде отмеченного выше спектра интуиционистских моделей, в которых выполняются, по-видимому, многие законы интуиционистского анализа, за исключением какого-либо одного, не имеющего места или имеющего место, но в ослабленной форме. Вот два интересных примера результатов такого типа.

1. Если к теории BSK добавить BI, BC-N! и BC-N без параметров (любых!), то принцип BC-N с параметрами все же не выводится [7; 8].

2. Если к BSK добавить BI и BC-N, то все же принцип BC-C не выводится (здесь BC-N есть принцип Брауэра для чисел; в присутствии принципа бар-индукции, несколько более сильного, чем BI, эти принципы эквивалентны, однако принципа BI недостаточно, чтобы из WC-N вывести BC-N).

Пусть $\forall\alpha GR(\alpha)$ — рассмотренный ранее вариант тезиса Черча. Этот принцип опровергается в теории более слабой, чем FIM, но все же некоторая форма, достаточно сильная, тезиса Черча совместна с FIM (для описания модели см. [9]). Эта форма принципа Черча утверждает, что если существует функция α со свойством φ, то такая функция может быть найдена алгоритмически (относительно параметров формулы φ). Отсюда получаем, что схема $\exists\alpha\ \varphi(\alpha) \to \exists\alpha(GR(\alpha) \wedge \varphi(\alpha))$ совместна с FIM (здесь в $\varphi(\alpha)$ α — единственный параметр). Далее, в [6] Клини доказал независимость принципа Маркова от системы FIM, однако более точные взаимоотношения между M^-, M^+ и FIM не исследованы до сих пор. В работе Трулстры [10] доказана допустимость правила Маркова для арифметики второго и более высоких порядков.

Пусть KS — схема Крипке, которая имеет один из следующих видов: KS^+ : $\exists\alpha\ (\exists x\ \alpha(x) \neq 0 \equiv \varphi)$; KS : $\exists\alpha(\forall x\ \alpha(x) = 0 \equiv \neg\varphi) \wedge (\exists x\ \alpha(x) \neq 0 \to \varphi)$ (эта форма схемы Крипке и есть оригинальная, предложенная самим Крипке в качестве формализации теории Брауэра для последовательностей, зависящих от решения проблем или формализации «исторических аргументов Брауэра» (т.н. теория «творящего субъекта»)); KS^-: $\exists\alpha\ (\forall x\ \alpha(x) = 0 \equiv \neg\varphi)$. Схема Крипке KS была впервые опубликована Дж. Майхиллом в [11]. В PrAn имеем: $KS^+ \Rightarrow KS \Rightarrow KS^-$.

Комментарий в пользу схем Крипке таков. Пусть φ — некоторое предложение. Будем рассматривать последовательность моментов времени (дискретную) и вычислять при этом значения функции $\alpha(n)$ так: если к моменту времени с номером n доказано утверждение φ, то $\alpha(n) = 1$; иначе $\alpha(n) = 0$. Если же в некоторый момент времени n доказано утверждение $\neg\varphi$, то для всякого $m \geq n$ полагаем $\alpha(m) = 0$. Такая последовательность α будет обладать нужным свойством. Приведённая аргументация носит очень нетрадиционный характер (время, историческая ситуация решения какой-то проблемы и т.д.).

Схема Крипке (или «исторические аргументы Брауэра») имеет очень важные следствия для развития анализа, и была предпринята попытка формализации анализа схемами Крипке. Схема Крипке позволила получить все требуемые следствия, и для этого уже хватило самой слабой схемы KS^-. Схема Крипке очень близка оригинальным замыслам Брауэра (в понимании идеи свободно становящейся последовательности) и не требует никаких расширений языка и других дополнительных усилий.

В качестве следствия использования схемы Крипке отметим следующий результат: в теории PrAn + BC-N! + KS^- выводится $\neg\forall\alpha(\neg\neg\exists x\, \alpha(x) \neq 0 \to \exists x\alpha(x) \neq 0)$. Это отрицание некоторого варианта принципа конструктивного подбора Маркова. Дадим неформальное обоснование. Предположим противное и пусть $\neg\neg\exists x\, \alpha(x) \neq$ $\neq 0 \to \exists x\, \alpha(x) \neq 0$. Используя схему KS^-, получим β такое, что $\forall x\, \beta(x) = 0 \leftrightarrow$ $\neg\forall x\, \alpha(x) = 0$. Полагаем $\gamma(x) = \alpha(x) = \beta(x)$. Если $\forall x\, \gamma(x) = 0$, то $\forall x\, \alpha(x) = 0$ и $\forall x\, \beta(x) =$ $= 0$, но это невозможно. Итак, $\neg\forall x\, \gamma(x) = 0$, а тогда $\neg\neg\exists x\, \gamma(x) \neq 0$. Используя наш вариант принципа Маркова, получаем $\exists x\, \gamma(x) \neq 0$. Для этого самого x имеем, по определению, $\alpha(x) \neq 0$ или $\beta(x) \neq 0$. В первом случае $\exists x\, \alpha(x) \neq 0$, т.е. $\neg\forall x\, \alpha(x) = 0$. Во втором случае $\forall x\, \alpha(x) = 0$, и мы получаем $\forall\alpha\ (\forall x\, \alpha(x) = 0) \vee \neg\forall x\, \alpha(x) = 0))$, но это утверждение опровергается в присутствии принципа Брауэра для чисел BC-N! [3. С. 119]; интересно отметить, что, как и в арифметике HA, в FIM опровергается пример принципа существования наименьшего элемента [3. С. 122].

Также с помощью схемы Крипке KS^- можно доказать существование не рекурсивной функции [2. С. 166]. В теории PrAn + AC-NC + KS^- можно интерпретировать классический анализ EL° [5; 6]. При этом используется негативная интерпретация Гёделя, но предварительно теорию EL° нужно переформулировать в терминах множеств натуральных чисел. Аксиома AC-NN заменяется аксиомой свертывания (очень существенный момент, т.к. аксиомы вида свертки или свертки с ограничениями очень хорошо выдерживают негативную интерпретацию Гёделя). Теперь предикат $x \in X$ изображается отношением $\neg\neg\exists n\ (\alpha(j(x, n)) \neq 0)$, и для доказательства существования нужного α, которое изображает множество X, используется схема Крипке KS^-. Но сама схема Крипке KS^- несовместна с теорией FIM, а точнее: теория EL + BC-C + KS^- — противоречивая теория [2. С. 167].

Таким образом, мы видим, что последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие схеме Крипке KS^- (и её более сильным вариантам), образуют класс последовательностей, отличный от класса последовательностей, удовлетворяющих постулатам теории FIM. Схема KS^- даёт новый способ образования функций, и здесь наблюдается проявление тонких различий эффективности в анализе. В [12] Майхилл рассмотрел теорию MM = PrAn + AC-NC + BI + BC-N + KS (в [12] эта теория обозначена через M), формализующую свойства класса функций, удовлетворяющих KS. Возникают теории MM^- и MM^+ (для KS^- и KS^+). Отметим, что принцип BC-N отлично контактирует с любой из схем Крипке, чего нельзя сказать о принципе BC-C. Теория MM (и даже слабая MM^-) полностью отражает все особенности интуиционистского анализа Брауэра (все существенные теоремы математического анализа доказуемы в ММ в стиле Брауэра и все оригинальные аргументы Брауэра отражены в ММ). Непротиворечивость теории ММ доказал Кроль в [13] (ранее Московакис в [7] предложила модель фрагмента теории MM^+ с BC-N! вместо BC-N). Кроль построил очень изящную модель для ММ, и он же в [14] доказал, что MM^+ обладает свойствами дизъюнктивности и экзистенциальности.

Ещё одним из вариантов формализации теории математического анализа служит теория IDB (индуктивные определения Брауэра).

В языке IDB много сортов функциональных переменных, среди которых один сорт (функции, заданные законом, далее — ФЗЗ) выделен. Другие сорта переменных называются «собственные» [2. С. 170]. Все постулаты IDB относятся к определению свойств функций, которые есть ФЗЗ. Остальные сорта не определены, и поэтому IDB служит базисной теорией для расширения её с помощью новых аксиом.

В рамках IDB интуитивно говорят, что функция задана законом, если имеется конечное предписание для вычисления любого её значения. Такое предписание можно задать разными способами (например, ФЗЗ есть в точности все общерекурсивные функции или, например, ФЗЗ — это все теоретико-множественные функции), и роль ФЗЗ проявляется в их отношении к другим, собственным, сортам функций. Эта роль формализуется в виде точных законов в расширениях IDB. Т.к. ФЗЗ не могут удовлетворять схеме BI, то классу K непрерывных функционалов нельзя дать то же описание, что и в FIM. Опуская точное описание IDB(U) (U — расширение языка IDB собственными сортами переменных), отметим, что есть группа аксиом арифметических (вся теория HA), аксиомы равенства и индукции, аксиома рекурсивной замкнутости для ФЗЗ, аксиомы для класса непрерывных операторов и схема AC-NC.

Теперь кратко рассмотрим два совершенно различных по свойствам расширения IDB. Первое — это теория для функций, заданных законом, или теория CS (choice sequences). Эта теория была предложена Крайзелем и Трулстрой [15; 16]. В данном случае к IDB(CS) добавлены аксиома рекурсивной замкнутости по всем неконструктивным параметрам (без ФЗЗ), схема AC-NC (по всем сортам переменных) и принцип аналитического задания. Принцип утверждает, что закон образования собственной функции известен не полностью, а лишь с точностью до конструктивного непрерывного оператора, т.е. если для некоторой собственной неконструктивной функции установлено какое-либо свойство, то оно имеет место для всех тех функций, которые не различает некоторый неконструктивный оператор [2. С. 174]. Ещё к IDB(U) добавлен принцип BC-C (только по конструктивным параметрам!) и постулат BC-F: схема выбора для конструктивных функций с единственным неконструктивным параметром, отражающая специфику функций, заданных законом, т.е. закон образования неконструктивной функции может быть и совсем неизвестен исследователю, и указание нужной функции из класса ФЗЗ по собственной функции производится уже по конечному фрагменту этой неконструктивной функции. От BC-C эта схема, конечно, сильно отличается, т.к.

в первом случае значение отрезка сущей функции вычисляется по конечному отрезку исходной, но требуемый для этого отрезок исходной функции всякий раз зависит от аргумента сущей функции. В [16] показано, что все схемы аксиом FIM выводимы в CS. Обратное также верно: если φ не содержит переменных по функциям, заданным законом, и выводима в CS, то она выводима в FIM, т.е. CS в некотором отношении является консервативным расширением FIM (контрпример из [16] является ошибочным). Крайзель и Трулстра доказали непротиворечивость CS относительно IDB и, следовательно, относительно классического анализа.

Второе расширение IDB есть теория LS (lawless sequences) беззаконных последовательностей (БП). Приведем аксиомы LS, не давая формальной записи (для этого см. [2]). Первая группа аксиом включает: аксиому существования БП (для любого конечного кортежа натуральных чисел существует БП, начинающаяся с этого кортежа); принцип полной неопределённости с выделенными неконструктивными параметрами (если БП отлична от других БП, то известно только её начало (всякое свойство БП определяется её начальным отрезком)); принцип разрешимости (если БП α и β задаются одним «источником», порождающим числа (таких источников может быть много, это, собственно, и есть БП), то $\alpha = \beta$, а иначе мы принципиально не можем установить равенство $\alpha = \beta$, что с интуиционистской точки зрения означает $\alpha \neq \beta$); принцип непрерывности BC-N-LS с явно заданными БП-параметрами (этот принцип утверждает, что если по БП $\alpha_0, ..., \alpha_{\mathrm{n}}$ можно указать ФЗЗ x такую, что $\varphi(\alpha_0, ..., \alpha_n, x)$, то найдётся конструктивный оператор, который по начальным отрезкам БП $\alpha_0, ..., \alpha_n$ указывает данное x); аксиома выбора для функций, заданных законом (обсуждение этой аксиомы дано выше для CS, но теперь неконструктивных параметров много). Теории LS сформулирована.

LS была предложена Крайзелем в [17]. Термин «беззаконная последовательность» принадлежит Гёделю. Крайзель показал, что LS полна по отношению к логике высказываний (если формула φ невыводима в интуиционистском исчислении предикатов, то некоторый её пример опровергается в LS). Он дал доказательство непротиворечивости LS относительно IDB. Беззаконные последовательности обладают следующим свойством: две такие последовательности либо равны, либо совершенно не зависят друг от друга.

Завершая описание формализованных теорий интуиционистского анализа, отметим, что разнообразие оттенков толкования последовательностей натуральных чисел представляет из себя ещё более сложную, прямо-таки паутинообразную, картину по сравнению с аналогичной картиной, возникающей около базисной системы арифметики HA. С другой стороны, стратегическая схема исследования в области формализованного интуиционистского математического анализа та же, что и для формализованной интуиционистской арифметики: отыскивается базисное формализованное исчисление (для анализа таких базисных исчислений два: BSK и IDB) и около него строятся различные расширения (в том числе и классического характера!); исследуются соотношения разных принципов, относительная непротиворечивость, сопровождающаяся построением большого количества моделей алгебраического и топологического характера (и не только таких), позволяющих достичь очень тонких различий в толковании свойств эффективности для исследуемых исчислений. При исследовании формализованных теорий множеств, т.е. теорий более высокого порядка, эта стратегическая схема исследования в полной степени сохраняется [4].

Мы описали исследования в формализованном интуиционистском анализе, ориентируясь на монографию А.Г. Драгалина [2] и ряд обзорных работ А. Трулстры, написанных для тома IV «Справочной книги по математической логике» (глава 5).

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Heyting A.* Die formalen Regeln der intuitionistischen Mathematik. Sitzungsber preuss. Akad. Wiss. — Berlin, 1930. — S. 57—71, 158—169.

[2] *Драгалин А.Г.* Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. — М.: Наука, 1979.

[3] *Клини С., Весли Р.* Основания интуиционистской математики. — М.: Наука, 1978.

[4] *Хаханян В.Х.* Об онтологии математики: в каком смысле можно дать обоснование математике (заметки из доклада на Московском семинаре по философии математики 19 октября 2007 г.) // Философия науки. — Вып. № 14: Онтология науки. — М.: ИФРАН, 2009. — С. 64—76.

[5] *Moschovakis J.R.* Can there be no nonrecursive functions? // The Journal of Symbolic Logic. — 1971. — V. 36. — N 2. — P. 309—315.

[6] *Kleene S.C.* Constructive functions in FIM. — In: Logic, Methodology and Philosophy of Sciences III. — Amsterdam, 1968. — P. 137—144.

[7] *Moschovakis J.R.* A topological interpretation of second order intuitionistic arithmetic. math. — 1973. — N 26. — P. 261—275.

[8] *Кроль М.Д.* К топологическим моделям интуиционистского анализа. Один контрпример // Математические заметки. — 1976. — Т. 19. — № 6. — С. 859—862.

[9] *Драгалин А.Г.* Конструктивные модели теорий интуиционистских последовательностей выбора // В кн.: Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам. — М.: Наука, 1974. — С. 214—252.

[10] *Troelstra A.S.* Metamathematical investigations of intuitionistic arithmetic and analysis // Lecture Notes in Math. — 1973. — N 344.

[11] *Myhill J.* Notes towards an axiomatization of intuitionistic analysis // Logique et Analyse. — 1967. — V. 35. — P. 280—297.

[12] *Myhill J.* Formal systems of intuitionistic analysis I. Logic, Methodology and Philosophy of Science III. — North-Holland Public Co. — Amsterdam, 1988. — P. 161—178.

[13] *Krol M.* A topological model for intuitionistic analysis with Kripke'scheme // Z. math. Logik und Grundl. Math. — 1978. — 24. — P. 427—436.

[14] *Кроль М.Д.* Дизъюнктивное и экзистенциальное свойство интуиционистского анализа со схемой Крипке // ДАН СССР. — 1977. — Т. 234. — N 4. — С. 750—753.

[15] *Troelstra A.S.* The theory of choice sequences. In: Proceedings of Congress LMPS III. — Amsterdam, 1968. — P. 201—233.

[16] *Kreisel G., Troelstra A.S.* Formal systems for some branches of intuitionistic analysis // Annals of Math. Logic. — 1970. — V. 1. — P. 229—387.

[17] *Kreisel G.* Lawless sequences of natural numbers // Compositio math. — 1968. — V. 20. — P. 222—248.

APPEARANCE AND DEVELOPMENT OF FORMAL INTUITIONISTIC THEORIES OF MATHEMATICAL ANALYSIS

V.Kh. Khakhanyan

Chair of applied mathematics-2
Institute of economy and finances MSURC (MIIT)
Obraztsova Str., 15, Moscow, Russia, 127994

In the article there is a review of investigations on intuitionistic formal theories of mathematical analysis. All main results and models, obtained at the end of 60-s, 70-s and at the beginning of 80-s of XX c. are given.

Key words: mathematical analysis, intuitionistic logic, binary flow, natural number.