ЛОГИКО-ФИЛОСОФСКИЕ ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

ОНТОЛОГИЯ КВАНТОВОЙ МАТЕМАТИКИ*

В.Л. Васюков

Кафедра истории и философии науки
Институт философии РАН
ул. Волхонка, 14, Москва, Россия, 119991

Утверждение о том, что математика может быть формализована в рамках некоторой неклассической логики, может носить двоякий характер. И причиной тому является то обстоятельство, что онтология (универсум) неклассической математики может быть как глобальной, так и локальной по отношению не только к классической, но и всем иным неклассическим онтологиям математики. Предложенная в статье конструкция квантоса как категорного глобального универсума позволяет распространить это утверждение на случай квантовой математики.

Ключевые слова: онтология, квантовая математика, неклассическая логика, теория множеств, квантосы.

1. Введение: неклассическая логика и неклассическая онтология

Аристотель оставил нам в наследство не одну, но две разных логики: раннюю диалектическую *logoi* «Топики» и формальную силлогистическую логику «Первой Аналитики», более позднюю, которая рассматривает логику таким же образом, как современная символическая логика, т.е. как «отделившуюся от диалектики», а не «искусство мышления». Символическая логика является «теорией общих объектов» (по удачному выражению, «физикой предмета вообще»), так что, как пишет известный историк логики Ю. Бохеньский, «у логики, как её сейчас понимают, предмет тот же, что и у онтологии» [5. P. 288].

При таком подходе можно говорить, что онтология, с современной, достаточно распространенной точки зрения, является разновидностью «пролегомена» к логике. Если онтологию рассматривать как интуитивное, неформальное исследование категориальных аспектов сущностей вообще, то логика занимается систематической формальной, аксиоматической разработкой предварительно обработанного онтологией материала. Помимо этого различия в методе — онтология

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ в рамках научно-исследовательского проекта РГНФ («Логический плюрализм и его онтологические и эпистемологические следствия»), проект № 09-03-00545а.

неформальна и интуитивна, логика формальна и систематична — существует ещё и другое различие, выражающееся в том, что онтология представляет собой наиболее абстрактную теорию реальных объектов, в то время как логика есть общая онтология и реальных и идеальных объектов, т.е. как абстрактных, так и конкретных [5. P. 290].

По мнению некоторых исследователей, примером подобной общей онтологии является *теория типов*, которая весьма похожа на старые томистские воззрения на бытие. Она, в частности, утверждает, что класса всех объектов не существует вообще, а это очень похоже на утверждение, что бытие не является родом. Более того, первые два типа удивительно подобны двум аристотелевским категориям: субстанции и акциденции. Однако, несмотря на все эти параллели, сегодня теория типов не является доминирующей парадигмой.

Эту роль в наши дни выполняет, скорее, теория множеств. Согласно этому взгляду, логика может получать различные интерпретации в различных областях произвольной мощности, но при этом и все области, и все интерпретации являются частями теории множеств. Таким образом, только для различных теоретико-множественных областей и интерпретаций онтология может быть «теорией общих объектов», и только как часть теории множеств она может быть пролегоменом к логике. Отсюда теория множеств содержит и общую онтологию, а согласно сторонникам подобной точки зрения любой философский анализ (и касающийся не только онтологии) может проводиться лишь в рамках различных расширений теории множеств, т.е. в теории множеств с возможными добавлениями конкретных объектов (урэлементов) и эмпирических предикатов [6. P. 37—72].

Первопорядковая классическая логика обычно интерпретируется с помощью моделей (так называемых моделей Тарского), представляющих собой некоторое множество, таким образом, что утверждение значимо тогда и только тогда, когда в любой модели из истинности посылок следует истинность заключения. Совокупность всех множеств, называемая *универсумом* множеств, снабжает нас всевозможными разновидностями моделей, требуемых для интерпретации нашей логики. Отсюда, в некотором смысле, первопорядковая логика детерминируется универсумом множеств (моделей). Действительно, пишет Кит Девлин, «...если наша функциональная иерархия должна снабжать нас „теорией множеств“ некоторого типа, то тогда значения функций должны вести себя как истинностные значения. Но какие разновидности множеств действительно ведут себя как истинностные значения?.. Ответ хорошо известен: булевы алгебры!» [7. P. 132—133].

В частности, если **B** является булевой алгеброй, стандартный метод получения приемлемого «*универсума множеств*» даётся с помощью следующих определений:

$$V_0^{\mathbf{B}} = \varnothing,$$

$$V_{\alpha+1}^{\mathbf{B}} = \left\{ f : f : V_\alpha^{\mathbf{B}} \to \mathbf{B} \right\},$$

$$V_\lambda^{\mathbf{B}} = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha^{\mathbf{B}}, \text{ если } \lambda \text{ есть предельный ординал,}$$

$$V^{\mathbf{B}} = \bigcup_\alpha V_\alpha^{\mathbf{B}}.$$

Элемент $V^{\mathbf{B}}$ называется *булевозначным множеством*, или, более точно, $V^{\mathbf{B}}$ является булевозначным универсумом. По сути дела, здесь принимаются следующие положения: базисным элементом универсума является пустое множество, на следующем шаге в качестве элемента берется булева алгебра, затем множество всех подалгебр булевой алгебры и т.д.

Справедливо ли это в случае неклассической логики, то есть существуют ли такие разновидности множеств, которые ведут себя как истинностные значения неклассических логик? На первый взгляд кажется, что ответ положителен. Но тогда каждая разновидность неклассической логики нуждается в своей разновидности универсума множеств, обеспечивающего поведение значений функций как значений истинности, и мы должны уметь строить такие неклассические универсумы множеств.

Интересно, что подобным образом может быть получен и квантовый универсум, представляющий собой онтологию «квантовых множеств», т.е. универсум моделей квантовой логики. В этом случае [11. P. 310] мы следующим образом определяем $V_{\alpha}^{(\mathbf{Q})}$ по трансфинитной индукции над α и $V^{(\mathbf{Q})} = \bigcup_{\alpha \in On} V_{\alpha}^{(\mathbf{Q})}$, где On есть класс всех ординалов, а $\mathbf{Q}$ — ортомодулярная решётка:

1) $V_0^{(\mathbf{Q})} = \varnothing$;

2) $V_{\alpha+1}^{(\mathbf{Q})} = \left\{ u : u : D(u) \to \mathbf{Q} \text{ и } D(u) \subseteq V_{\alpha}^{(\mathbf{Q})} \right\}$,

где $D(u)$ обозначает область определения u;

3) если α является предельным ординалом, то

$$V_{\alpha}^{(\mathbf{Q})} = \bigcup_{\beta < \alpha} V_{\beta}^{(\mathbf{Q})}.$$

В то же время подобная схема (с соответствующими изменениями распространенная на иные разновидности алгебр, соответствующих неклассических логик) не является единственным способом получения универсумов. Поскольку с формальной точки зрения теория множеств есть не что иное, как элементарная логическая теория, то, изменяя логическую часть этой теории, получаем конструкцию теории множеств, основанной на неклассической логике. Тогда в рамках подобной теории можно попытаться построить кумулятивную иерархию множеств или даже соответствующий «алгеброзначный» универсум. Имеются многочисленные примеры реализации подобного подхода (см. Приложение 1).

Некоторый объединяющий рассматриваемые подходы результат можно обнаружить в работе Гаиси Такеути «Квантовая теория множеств», где доказано, что квантовая теория множеств (сконструированная по той же схеме, что и *FZF*) выполняется в квантовозначном универсуме. Проблема лишь в том, что «...математика, основанная на квантовой логике, имеет очень богатое математическое содержание. Это ясно демонстрируется тем фактом, что имеется много полных булевых алгебр внутри квантовой логики. Для каждой полной булевой алгебры **B** математика, основанная на **B**, как показано... имеет богатое математическое значение. Поскольку математика, основанная на **B**, может рассматриваться как подтеория математики, основанной на квантовой логике, нет никаких сомнений относительно того факта, что математика, основанная на квантовой логике, очень богата. Ситуация, по-видимому, выглядит следующим образом. Математика, основанная на квантовой логике, чересчур огромна, чтобы довести её до конца» [11. P. 303].

2. Глобальные и локальные онтологии

Существует ещё одно обстоятельство, влекущее за собой проблематичность рассматриваемой картины неклассических онтологий. И является оно следствием того, соперничают ли неклассические логики между собой или же они образуют одно огромное дружное семейство. Грэм Прист пишет: «Так или иначе, любая из нестандартных логик... [интуиционистская, многозначная и квантовая, релевантная и паранепротиворечивая, условная и свободная] корректна, их наличие служит нам напоминанием о том, что логика не является множеством принятых истин, но дисциплиной, в которой претендующие на значимость теории соперничают друг с другом» [9. P. 307]. Коль скоро логический плюрализм влечёт за собой онтологический плюрализм (существование многочисленных неклассических теорий множеств, дающих модели для этих неклассических логик), то, как следствие, возникает вопрос о взаимодействии неклассических онтологий, соперничают ли они между собой или, наоборот, дружественны друг к другу.

Имеется и довольно простой аргумент в пользу того, почему логический плюрализм влечёт за собой плюрализм универсумов. Если рассматривать обычные определения операций на множествах

$$x \cup y =_{def} \{a : a \in x \vee a \in y\},$$

$$x \cap y =_{def} \{a : a \in x \wedge a \in y\},$$

$$x - y =_{def} \{a : a \in x \wedge \neg(a \in y)\},$$

то плюралист всегда задаст вопрос о том, какого типа связки $\vee$, $\wedge$, $\neg$ используются в этих определениях. Если это классические связки, то алгебра подмножеств любого множества будет булевой алгеброй и другой (Гейтинга, релевантной, да Косты и т.д.) в противном случае.

Тем утверждением, кажущимся на первый взгляд тривиальным, что алгебра подмножеств любого множества является булевой алгеброй, мы обязаны лежащей в основании классической логике: если мы изменим логику, то, как следствие, рассматриваемая алгебра с необходимостью будет другой. Но что случится, если мы изменим только наши определения операций на множествах, притом таким образом, что они будут основываться на неклассических логических связках $\vee$, $\wedge$, $\neg$, и рассмотрим алгебру с полученными новыми операциями? В сущности, поскольку в модели теоретико-множественные операции ответственны за истинностные значения формул, то это может привести к возможности интерпретации соответствующей неклассической логики в данном множестве. Следовательно, мы получим ситуацию, когда в классическом универсуме у нас существует интерпретация неклассической логики. Но в этом нет ничего необычного: подобного рода процедура как раз типична для неклассической логики. Мы можем освоить в нашем классическом универсуме столько неклассических логик, сколько нам нужно.

Ситуация изменится, если мы возьмем неклассический универсум, а затем введем в нем классические теоретико-множественные операции. В этом случае мы получим интерпретацию классической логики в неклассическом универсуме. Более того, можно продолжить подобное умножение операций путем повторного использования иных неклассических связок, получая новые интерпретации неклассических систем. И в этом случае мы сталкиваемся с ситуацией, когда в рамках неклассического универсума существует интерпретация классической логики наряду с другими логическими системами.

Имеются ли в нашем распоряжении какие-нибудь способы проверить, классичен или неклассичен наш универсум? С точки зрения логического плюрализма ответ будет отрицательным. Мы можем утверждать самое большее только то, что имеется одна лежащая в основании (глобальная) логика, определяющая и определенная нашим универсумом, в то время как существует множество (локальных) логик, населяющих универсум, не определяемый ими. Разумеется, глобальность и локальность в подобном контексте являются просто метафорическими маркерами, фиксирующими состояние дел. Это было бы не так, если бы у нас имелись конструктивные аргументы в пользу выбора той или иной логики в качестве основной или детальные методы этого выбора и оценки его последствий, но, к сожалению, у нас их нет.

3. Теоретико-категорная онтология

В наши дни у теории множеств как основания математики появился конкурент — теория категорий. И если раньше у логики все области и все интерпретации являлись частями теории множеств, то теперь появились интерпретации, которые являются частями теории категорий.

Подобными интерпретациями снабжает нас в первую очередь теория *топосов*, специального вида категорий. Но топосы с самого начала оказались неклассическими конструкциями, образуя конструктивный интуиционистский универсум для математических исследований. Так, например, Роберт Гольдблатт в своей книге «Топосы. Категорный анализ логики» [3] использовал конструкцию топоса функторов из малой категории в категорию множеств Set для построения категорной семантики интуиционистской логики, в которой алгебра Гейтинга играет роль малой категории.

Но, с другой стороны, «налагая на топосы вполне естественные условия (экстенсиональность, существование сечений эпистрелок, существование натурально-числового объекта), мы приходим к топосам, соответствующим в точности моделям классической теории множеств. Поэтому в той же мере, в которой теория множеств служит основанием математики, им же может служить и теория топосов» [3. С. 344]. Здесь, конечно, речь идет о классической математике, основывающейся на классической теории множеств. Однако что означает наложение «вполне естественных условий» на топосы?

Не вдаваясь в детали, здесь сразу можно констатировать, что мы сталкиваемся с ситуацией, когда классический универсум является локальным универсумом (частным случаем топоса общего вида) в отношении элементарного топоса, при-рода которого чисто интуиционистская, т.е. принципиально неклассическая. Таким образом, топосы демонстрируют нам ситуацию в основаниях математики, когда онтология глобально носит существенно неклассический характер, будучи в то же время локально классической.

Можно ли ставить вопрос о локализации других неклассических онтологий при глобальной интуиционистской онтологии? Положительный ответ на этот вопрос мы получаем при обращении к так называемым *изменяющимся* множествам (термин Ф.У. Ловера) или *интенсиональным* множествам, иначе также называемым *теоретико-множественными концептами* (терминология Р. Гольдблатта). Гольдблатт указывает, что интенсионал, обычно рассматриваемый как смысл выражения (что идет ещё от Р. Карнапа), определяет этот смысл как выражаемый им индивидуальный концепт, когда, например, интенсионалом выражения «x есть конечный ординал» является смысл (концепт) понятия конечного ординала. На категорном языке это реализуется в построении категории концептов множеств $\boldsymbol{Set^P}$, когда отдельный концепт представляет собой функтор, сопоставляющий каждому p из $\boldsymbol{P}$ множество индивидов, про которые известно, что они являются конечными ординалами [3. С. 226].

Отсюда, варьируя $\boldsymbol{P}$, мы в состоянии наложить различного рода «естественные ограничения» на множества индивидов, получая теоретико-множественные концепты, описывающие неклассические множества. В частности, это варьирование используется при получении интерпретации квантовой логики в топосах (см. Приложение 2), когда теоретико-множественные концепты описывают квантовые множества.

Работает ли подобный метод при локализации других неклассических онтологий? Ответ также положителен. Подобным же образом можно использовать категорию Set^A функторов из так называемой CN-категории (теоретико-категорный эквивалент алгебры да Косты) в категорию Set [13]. Эта категория также представляет собой топос, и полнота паранепротиворечивой системы логики да Косты C_1 доказывается именно по отношению к подобной разновидности топосов. Аналогичный подход был реализован и для случая релевантной логики R [2].

4. Квантосы (квантовые топосы) как основание математики

Можно ли, однако, глобализировать онтологию, требующуюся для интерпретации квантовой логики? В этом случае мы бы получили квантовый универсум в качестве основания математики, в котором можно было бы локализовать другие неклассические онтологии.

Будем действовать следующим образом: определим категорию, которая структурно будет ориентирована на квантовую логику, но подобна топосу в том отношении, что её «классификатор подобъектов» будет иметь структуру ортомодулярной решётки.

Определение. Категория $\boldsymbol{C}$ представляет собой *квантос* (квантовый топос), если она имеет произведения и копроизведения (соответственно терминальный объект 1 и начальный объект 0) и содержит выделенный объект Ω, который имплицитно является ортомодулярной решёткой, т.е. имеются стрелки *true*: $1 \to \Omega$, *false*: $1 \to \Omega$, ${}^{\perp}$: $\Omega \to \Omega$, $\cap$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$, $\cup$: $\Omega \times \Omega \to \Omega$, выполняющие постулаты ортомодулярной решётки [1. С. 75].

В частности, для постулатов ортодополнения мы получаем:

— $x \wedge x^{\perp} = 0$ на языке стрелок означает, что $\cap \circ (\mathrm{id} \times {}^{\perp}) = false$;

— $x \vee x^{\perp} = 1$ на языке стрелок означает, что $\cup \circ (\mathrm{id} \times {}^{\perp}) = true$;

— $(x^{\perp})^{\perp} = x$ на языке стрелок означает, что ${}^{\perp} \circ {}^{\perp} = \mathrm{id}$;

— $(x \wedge y)^{\perp} = x^{\perp} \vee y^{\perp}$ на языке стрелок означает, что ${}^{\perp} \circ \cap \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{id}) = \cup \circ (({}^{\perp} \circ \mathrm{id}) \times \times ({}^{\perp} \circ \mathrm{id}))$;

— $(x \vee y)^{\perp} = x^{\perp} \wedge y^{\perp}$ на языке стрелок означает, что ${}^{\perp} \circ \cup \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{id}) = \cap \circ (({}^{\perp} \circ \mathrm{id}) \times \times ({}^{\perp} \circ \mathrm{id}))$;

— постулат ортомодулярности «если $x \le y$, то $x \vee (x^{\perp} \wedge y) = y$» на языке стрелок означает, что если $\cap \circ (\mathrm{id}_x \times \mathrm{id}_y) = \mathrm{id}_x$, то имеет место $\cup \circ (\mathrm{id}_x \times \times (\cap \circ (({}^{\perp} \circ \mathrm{id}_x), \mathrm{id}_y))) = \mathrm{id}_y$.

Очевидным образом стрелки *true*, *false*, ${}^{\perp}$, $\cap$, $\cup$ индуцируют на $\boldsymbol{C}(A, \Omega)$ (множестве всех стрелок из A в Ω) алгебраическую структуру ортомодулярной решётки. Действительно, для данных стрелок φ, ψ: $A \to \Omega$ нетрудно доказать, что если $\varphi \cap \psi = \varphi$, то $\varphi \cup (x^{\perp} \cap y) = y$, где для любых φ, ψ: $A \to \Omega$ пишем $\varphi \cap \psi$, $\varphi \cup \varphi$, $\varphi^{\perp}$ вместо $\cap \circ \langle \varphi, \psi \rangle$, $\cup \circ \langle \varphi, \psi \rangle$, ${}^{\perp} \circ \varphi$ и т.п. Используя свойства категорного произведения, мы имеем $\varphi \cap \psi = \cap \circ \langle \varphi, \psi \rangle = \cap \circ (\mathrm{id} \times \mathrm{id}) \circ (\varphi \times \psi) = \mathrm{id} \circ \varphi = \varphi$, откуда $\cap \circ (\mathrm{id}_x \times \mathrm{id}_y) = = \mathrm{id}_x$ $\varphi \cup (\varphi^{\perp} \cap \psi) = \cup \circ \langle \varphi, \varphi^{\perp} \cap \psi \rangle = \cup \circ \langle \varphi, \cap \circ \langle \varphi^{\perp}, \psi \rangle \rangle = \cup \circ \langle \varphi, \cap \circ \langle {}^{\perp} \circ \varphi, \psi \rangle \rangle = = \cup \circ \langle \varphi, \cap \circ ({}^{\perp} \circ \varphi \times \psi) \rangle = \cup \circ (\varphi \times \cap \circ ({}^{\perp} \circ \varphi \times \psi)) = \cup \circ (\mathrm{id} \times (\cap \circ ({}^{\perp} \circ \mathrm{id} \times \mathrm{id}) \circ \langle \varphi, \psi \rangle)) = = \mathrm{id} \circ \psi = \psi$. Аналогичным образом действуем и в случае других постулатов. Для любой пары стрелок f, g: $A \to \Omega$ мы можем определить частичное упорядочение как $\varphi \le \psi$, если и только если $\varphi \cap \psi = \varphi$. Известно, что подобное упорядочение, в свою очередь, задаёт на $\boldsymbol{C}(A, \Omega)$ категорную структуру. Поскольку в каждой ортомодулярной решётке каждая цепь порождает булеву подалгебру [1. С. 76], то следует ожидать, что каждый квантос будет содержать в себе булевы топосы.

Как, однако, убедиться, что квантос действительно даёт нам универсум для интерпретации квантовой логики, учитывая, что подобная логика обладает рядом особенностей, выделяющих её в ряду неклассических логик? Р. Гольдблатт в своей работе «Семантический анализ ортологики» [8] рассматривает логическую систему не как множество правильно построенных формул, но как собрание их упорядоченных пар, удовлетворяющих определенному условию замыкания. Логики такого типа он называет бинарными. Они характеризуются классом орто-, ортомодулярных решёток в том смысле, что $A \vdash B$, если и только если $v(A) \le v(B)$, где v есть функция из множества правильно построенных формул в орторешётку, для которой связки $\neg$ и $\wedge$ интерпретируются как ортодополнение и решёточное пересечение соответственно. Построенная им система ортологики $\boldsymbol{O}$, характеризуемой классом орторешёток, определяется следующей аксиоматикой:

Аксиомы. 1) $\alpha \vdash \alpha$;

2) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$;

3) $\alpha\wedge\beta \vdash \beta$;
4) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$;
5) $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$;
6) $\alpha\wedge\neg\alpha \vdash \beta$.

Правила вывода.

7) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$;

8) $\dfrac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta\wedge\gamma}$;

9) $\dfrac{\alpha \vdash \beta}{\neg\beta \vdash \neg\alpha}$.

В приведённой формулировке $\alpha \vdash \beta$ означает, что β выводима из α.

Если использовать определение $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$, то от ортологики ***O*** можно перейти к квантовой логике ***OM***, характеризуемой классом ортомодулярных решёток, присоединяя к ***O*** дополнительную аксиому

10) $\alpha\wedge(\neg\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)) \vdash \beta$.

Семантика квантовой логики описывается с помощью понятий квантовых фреймов и моделей.

Определение 1. Квантовый фрейм представляет собой тройку $\langle X, \perp, \psi\rangle$, где

1) X является непустым множеством;

2) $\perp$ есть отношение ортогональности на X, т.е. $\perp \subseteq X \times X$ симметрично и иррефлексивно.

3) ψ есть непустое множество *-замкнутых (1) подмножеств X, таких, что
   а) ψ замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения и операции * (см. примечание);
   б) для любых $Y, Z \in \psi$, $Y \subseteq Z$ и $Y^*\cap Z = \varnothing$ влечёт $Y = Z$.

Определение 2. Квантовая модель представляет собой четверку $\langle X, \perp, \psi, v\rangle$, где

1) $\langle X, \perp, \psi\rangle$ есть квантовый фрейм;

2) v есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной α *-замкнутое подмножество $v(\alpha)$ из ψ.

В роли семейства ψ ортогонально замкнутых подмножеств X можно брать ортомодулярную решётку, тем более что условие (б) из определения 1 выполнимо (это следует из того факта, что в орторешётках условие $a \leq b \;\&\; a^{\perp}\wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности [1. С. 77]). Нетрудно убедиться в выполнимости аксиом и правил вывода системы квантовой логики Гольдблатта.

Определим $\boldsymbol{C}$-оценку как функцию V: $\Phi_0 \to \boldsymbol{C}(1, \Omega)$, приписывающую каждой пропозициональной букве π_i некоторое истинностное значение $V(\pi_i)$: $1 \to \Omega$. Эту функцию очевидным образом можно распространить на множество Φ всех формул:

а) $V(\neg\alpha) = {}^{\perp}\circ V(\alpha)$;

б) $V(\alpha\wedge\beta) = \cap\circ\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$;

в) $V(\alpha\vee\beta) = \cup\circ\langle V(\alpha), V(\beta)\rangle$.

Будем говорить, что формула α будет $\mathbf{C}$-значима (записываем $\mathbf{C} \models \alpha$), если $V(\alpha) = true: 1 \to \Omega$ для всех $\mathbf{C}$-оценок V.

Свяжем v и V, полагая $V(\pi_i) = true$, если $v(\pi_i) = 1$, и $V(\pi_i) = false$ в противном случае. Нетрудно доказать, что $V(\alpha) = true$, если и только если $v(\alpha) = 1$, что позволяет получить доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Для любого квантоса* $\mathbf{C}$ $\mathbf{C} \models \alpha$, *если и только если* $\vdash_{OM} \alpha$ (*т.е.* α *доказуема в ОМ*).

Дальнейшее исследование квантоса заключалось бы во введении в нём функторов, призванных интерпретировать кванторы, однако здесь возникают трудности, связанные с формулировкой и пониманием того, что собой представляет первопорядковая квантовая логика (версию подобной логики можно найти в работе [11].

В заключение заметим следующее. В программе первой конференции по неклассической математике, которая состоялась в июне 2009 г. в г. Хейнице, Чехия, говорится: «20-е столетие явилось свидетелем нескольких попыток построить математику (или её часть) на различных основаниях, отличающихся от тех, которые даёт ей классическая логика. Основополагающие интуиционистские и конструктивные построения теории множеств, арифметики, анализа и т.д. позднее сменились подобными же построениями, основанными на релевантной, паранепротиворечивой, модальной и других неклассических логиках. Предмет исследования подобных теорий может быть назван неклассической математикой и формально пониматься как изучение (той части) математики, которая формализована или может быть в принципе формализована в рамках некоторой логики, отличной от классической».

Анализ, проведенный в работе, показал, что утверждение о том, что математика может быть формализована в рамках некоторой неклассической логики, может носить двоякий характер. И причиной тому является то обстоятельство, что онтология (универсум) неклассической математики может быть как глобальной, так и локальной по отношению не только к классической, но и всем иным неклассическим онтологиям математики. Предложенная в статье конструкция квантоса как квантового глобального универсума позволяет распространить это утверждение на случай квантовой математики. По-видимому, в этой связи имеет смысл говорить не только о логическом плюрализме, но и о порожденном им онтологическом плюрализме, учёт которого в основаниях науки мог бы пролить свет на ряд проблем в философии науки.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В качестве иллюстрации формулировки теории множеств, основывающейся на неклассической логике, приведем нечёткую (fuzzy) теорию множеств. *Нечёткая теория множеств* представляет собой разновидность теории множеств, подчиняющуюся нечёткой логике *FL*, для которой постулируется лемма Цорна и аксиома двойного дополнения, откуда можно интерпретировать классическую теорию множеств *ZFC* в подобной теорию множеств *FZF*. Предикатными символами *FZF* являются $\in$ и $=$ ...

Интересующие нас нелогические аксиомы FZF выглядят следующим образом:

2.1. Нелогические аксиомы *FZF*.

A1. *Аксиомы равенства*: $\forall u\, \Box(u = u)$; $\forall u, v\, (u = v \Rightarrow v = u)$,
$\forall u, v, w\, (u = v \wedge v = w \Rightarrow u = w)$;
$\forall u, v, w\, (u = v \wedge u \in w \Rightarrow v \in w)$; $\forall u, v, w\, (u = v \wedge w \in u \Rightarrow w \in v)$.

A2. *Экстенсиональность*: $\forall u, v\, (\forall z(z \in w \leftrightarrow z \in v) \Rightarrow u = v)$.

A3. *Аксиома пары*: $\forall u, v\, \exists x\, \forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z = u \vee z = v)$.

A4. *Объединение*: $\forall u \exists x \forall z(z \in x \Leftrightarrow \exists y \in u(z \in y))$.

A5. *Степень*: $\forall u \exists x \forall z(z \in x \Leftrightarrow \forall y \in z(y \in u))$.

A6. *Индукция*: $\mathrm{Ext}\varphi(x) \wedge \forall x(\forall y \in x \varphi(y) \to \varphi(x)) \Rightarrow \forall x \varphi(x)$.

A6. *Отделение*: $\forall x \exists y \forall z(z \in y \Rightarrow z \in x \wedge \exists z'(z = z' \wedge \varphi(z')))$.

A7. *Аксиома выделения*: $\forall u[\forall y \mathrm{Ext}\varphi(x, y) \to \exists v(\forall x \in u\ \exists y \varphi(x, y) \Rightarrow \forall x \in u \exists y$ $(\Box(y \in v) \wedge \varphi(x, y)))]$.

A8. *Бесконечность*: $\exists x\, \Box(\exists y(y \in x \wedge \forall y \in x(\exists z(y \in z))$.

A8. *Двойное долполнение*: $\forall u \exists x \forall z(z \in x \Leftrightarrow \neg\neg(z \in u))$.

A7. *Лемма Цорна*: $\forall y(\mathrm{Chain}(y, x) \to \cup \forall y \in x \Rightarrow \exists z \mathrm{Max}(z, x)$, где
$\mathrm{Chain}(y, x)$: $\exists t(t \in y \wedge (y \subset x) \wedge \forall t, u \in y(t \subset u \vee u \subset t)$,
$\mathrm{Max}(z, x)$: $z \in x \wedge \forall t \in x(z \subset t \to z = t)$” (здесь $w \Rightarrow u$ означает $\Box(w \to u)$, а $x \Leftrightarrow z$ означает $\Box(x \leftrightarrow z)$) [12. P. 17—18].

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Исходным пунктом для интерпретации квантовой логики в топосах служит то обстоятельство, что для произвольной малой категории ***C*** категория функторов $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}}$ является топосом [3. С. 219]. Если взять ортомодулярную решётку ***E***, которая определяет алгебраическую структуру подавляющего числа квантовых логик, то, как и всякая решётка, она будет представлять собой конечно кополную категорию порядка. Отсюда при построении категории $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{C}}$ можно взять в качестве ***C*** ортомодулярную решётку, т.е. построить категорию $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$.

Неясно, однако, как категорно интерпретировать ортодополнение, которое выражает свойства отрицания в квантовой логике. В случае алгебры Гейтинга такой проблемы не возникает ввиду того, что в алгебре Гейтинга отрицание не является примитивной связкой, но вводится по определению с использованием константы $\perp$ (ложь) и импликации.

Чтобы обойти эту трудность, снабдим рассматриваемую категорию предпорядка функтором, передающим свойства ортодополнения. Сама идея подобного подхода восходит к предложению А. Рискоса и Л.М. Лайты функторно моделировать классическое отрицание в категориях предпорядка [10]. Выбор категорий предпорядка выгоден здесь именно тем, что в силу единственности стрелок мы сразу можем говорить и о дедуктивных исчислениях и о категориях, поскольку мы не будем нуждаться в тождествах на стрелках: все стрелки единственны.

Определение. *Ортокатегория* $\boldsymbol{E}$ представляет собой категорию предпорядка, снабжённую контравариантным функтором $^{\perp}$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$, такую, что:

1) $\boldsymbol{E}$ имеет инициальный объект 0 и терминальный объект 1;

2) $\boldsymbol{E}$ имеет конечные копроизведения [-,-] и конечные произведения ⟨-,-⟩;

3) функтор $^{\perp^2}$ естественно эквивалентен единице в $\boldsymbol{E}$, т.е. $^{\perp^2}a \cong a$ для любого объекта a из $\boldsymbol{E}$;

4) $\langle a, {}^{\perp}a\rangle \cong 0$, $[a, {}^{\perp}a] \cong 1$ для всех объектов a из $\boldsymbol{E}$;

5) $^{\perp}[a, b] \cong \langle {}^{\perp}a, {}^{\perp}b\rangle$, $^{\perp}\langle a, b\rangle \cong [{}^{\perp}a, {}^{\perp}b]$ для любых двух объектов a, b из $\boldsymbol{E}$.

Ортокатегория $\boldsymbol{E}$ является *ортомодулярной* категорией, когда дополнительно выполняется следующее условие:

6) если $a \to b$ есть стрелка в $\boldsymbol{E}$, то $[a, \langle {}^{\perp}a, b\rangle] \cong b$ для любых двух объектов a, b из $\boldsymbol{E}$.

Все пункты данного определения представляют собой теоретико-категорную запись алгебраических свойств ортомодулярной решётки. По сути дела, они не влекут за собой каких-либо категорных «осложнений», поэтому в дальнейшем будем понимать под ортомодулярной решёткой ортомодулярную категорию предпорядка, записывая функтор $^{\perp}$ как алгебраическую операцию (т.е. не слева, а справа от символа).

Рассмотрим наследственные множества в ортомодулярной решётке $\boldsymbol{E}$. Для любого элемента p наследственное множество $[p)$ определяется равенством:

$$[p) = \{q\colon p \le q\}.$$

Ортодополнение $^{\perp}$ в $\boldsymbol{E}$ представляет собой инволютивную перестановку, причем $b^{\perp} \le a^{\perp}$ всякий раз, когда $a \le b$ (a, $b \in \boldsymbol{E}$). В ортомодулярной решётке каждый интервал $[a, b]$ является ортомодулярной решёткой, замкнутой относительно $\wedge$, $\vee$ и операции взятия относительного дополнения $c' = (a \vee c^{\perp}) \wedge b = a \vee (c^{\perp} \wedge b)$ [1. С. 76]. В наследственных множествах верхняя граница интервала равна 1, поэтому $c' = (p \vee c^{\perp}) \wedge 1 = p \vee c^{\perp}$. Следовательно, множество E^{+} наследственных множеств будет представлять собой множество ортомодулярных решёток.

Рассмотрим теперь решётку $\boldsymbol{E}^{+} = (E^{+}, \subseteq)$ наследственных множеств. Чтобы превратить её в ортомодулярную решётку, необходимо определить ортодополнение. В этом случае требуется, чтобы подобная процедура определяла инволютивную операцию на E^{+}. Из определения ортодополнения следует, что если $c' = p \vee c^{\perp}$, то $c' \in [p)$. Естественно определять тогда $[p)'$ как множество таких c, что $c' \in [p)^{\perp}$. В этом случае $p \le c^{\perp}$, а это не что иное, как определение отношения ортогональности, поскольку оно задаётся требованием $a \perp b \Rightarrow a \le b^{\perp}$. Как известно, отношение ортогональности представляет собой симметричное и иррефлексивное отношение.

Определим теперь $x \perp Y$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$, $x \perp y$, и введем операцию * с помощью определения:

$$[p)^{*} = \{x\colon x \perp [p)\}. \tag{1}$$

Множество X называется замкнутым относительно *, если $(X^{*})^{*} = X$.

Однако из определения (1) следует, что $[p)^* = \varnothing$, поскольку $1 \in [p)$, а $x \perp 1$, если $x \leq 0$, т.е. $x = 0$. Чтобы избежать этого, модифицируем определение наследственного множества:

$$[p) = \{q\colon p \leq q \ \&\ q \neq 1\}.$$

Подобные множества называются обычно *квазинаследственными* множествами, однако чтобы не перегружать терминологию, сохраним за ними первоначальное имя наследственных множеств. Нетрудно переформулировать предыдущее определение с учётом принятого ограничения. Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Решётка* $\mathbf{E}^+ = (\mathrm{E}^+, \subseteq, *)$ *замкнутых относительно операции * наследственных множеств является ортомодулярной решёткой.*

Заметим, что полученная подобным образом орторешётка будет на самом деле представлять собой булеву алгебру относительно $\cap$, $\cup$ и * [1. С. 76]. Но можно определить E^+ и как недистрибутивную ортомодулярную решётку. Для этого воспользуемся следующим определением:

$$X \sqcup Y = (X^* \cap Y^*)^*.$$

Как известно, в общем случае $(X^* \cap Y^*)^* > X \cup Y$ [1. С. 167]. Нетрудно убедиться, что $(E^+, \subseteq, \sqcup, \cap, *)$ представляет собой орторешётку. Необходимое и достаточное условие для ортомодулярности E^+ имеет вид: если $[x) \subseteq [y)$ и $[x)^* \cap [y) = \varnothing$, то $[x) = [y)$ [1. С. 77]. Доказательство выполнимости дуального этому условия в E^+ можно найти в книге Л. Берана [4. P. 171].

Заметим, что в случае леммы 1 фактически фигурируют две решётки $\boldsymbol{E}^+_1$ и $\boldsymbol{E}^+_2$, первая из которых дистрибутивна, а вторая — недистрибутивна. В последующем изложении под $\boldsymbol{E}^+$ подразумевается вторая из них. Нам потребуется ещё следующий результат:

Лемма 2. *Решётка* $[p)^+$, *образованная всеми наследственными в* $[p)$ *множествами, замкнутыми относительно *, является ортомодулярной решёткой.*

При построении категории $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$ функтор $\boldsymbol{\Omega}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ определяет множество $\boldsymbol{\Omega}(p) = \boldsymbol{\Omega}_p$ как множество p-корешет, представляющих собой некоторое подмножество $\boldsymbol{S}$ множества $\boldsymbol{E}_p = \{f\colon$ для некоторого q стрелка $f\colon p \to q$ принадлежит $\boldsymbol{E}\}$, замкнутое относительно левого умножения, т.е. если $f \in \boldsymbol{S}$, а $g\colon q \to r$ — произвольная $\boldsymbol{E}$-стрелка, то $g \circ f \in \boldsymbol{S}$. Отождествляя $f\colon p \to q$ с её концом q, получаем $\boldsymbol{E}_p$ как множество $\{q\colon p \leq q\} = [p)$ и $\boldsymbol{\Omega}_p = [p)^+$.

Пусть $\boldsymbol{F}_p$ обозначает значения $\boldsymbol{F}(p)$ функтора $\boldsymbol{F}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ на объекте p. Для любых p и q, таких, что $p \leq q$, функтор $\boldsymbol{F}$ определяет функцию из $\boldsymbol{F}_p$ в $\boldsymbol{F}_q$, обозначаемую через $\boldsymbol{F}_{pq}$. Тогда для p и q, таких, что $p \leq q$, функция $\boldsymbol{\Omega}_p\colon \boldsymbol{\Omega}_p \to \boldsymbol{\Omega}_q$ сопоставляет каждому $\boldsymbol{S} \in [p)^+$ множество $\boldsymbol{S}_q = \boldsymbol{S} \cap [q) \in [q)^+$, т.е. $\boldsymbol{\Omega}_{pq}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{S}_q$.

Конечным объектом категории $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$ служит постоянный функтор $\mathbf{1}\colon \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$, определяемый условием $\mathbf{1}_p = \{0\}$ для $p \in \boldsymbol{E}$ и $\mathbf{1}_{pq} = id_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатором подобъектов $true\colon \mathbf{1} \to \boldsymbol{\Omega}$ является естественное преобразование, p-я компонента которого $true_p$: $\{0\} \to \mathbf{\Omega}_p$ определяется равенством $true_p\,(0) = [p)$, т.е. функция *true* выбирает наибольший элемент из каждой ортомодулярной решётки вида $[p)^+$.

Если τ: $\boldsymbol{F} \dot{\to} \boldsymbol{G}$ — произвольный подобъект $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$ объекта $\boldsymbol{G}$, тогда каждая компонента τ_p инъективна и можно считать её функцией включения $\boldsymbol{F}_p \to \boldsymbol{G}_p$. p-я компонента $(\chi_\tau)_p$: $\boldsymbol{G}_p \to [p)^+$ характеристической стрелки χ_τ: $\boldsymbol{G} \dot{\to} \mathbf{\Omega}$ определяется равенством

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q\colon p \le q \;\&\; \boldsymbol{G}_{pq}(x) \in \boldsymbol{F}_q\}$$

для каждого $x \in \boldsymbol{G}_p$. Выполнимость $\mathbf{\Omega}$-аксиомы получаем так же, как и в случае алгебры Гейтинга [3. С. 231—232], так как при этом используются лишь решёточные свойства наследственных множеств.

Начальный объект $\mathbf{0}$: $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Set}$ в категории $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$ будет представлять собой функтор, такой, что $\mathbf{0}_p = \varnothing$ и $\mathbf{0}_{pq} = id_\varnothing$ для $p \le q$. Компонентами естественного преобразования $\mathbf{0} \dot{\to} \mathbf{1}$ являются включения $\varnothing \subset\to \{0\}$. Стрелка *false* по определению является характеристической стрелкой подобъекта $\mathbf{!}$: $\mathbf{0} \to \mathbf{1}$. Для её компоненты $false_p$: $\{0\} \to \mathbf{\Omega}_p$ имеем

$$false_p\,(0) = \{q\colon p \le q \;\&\; \mathbf{1}_{pq}\,(0) \in \mathbf{0}_q\} = \{q\colon p \le q \;\&\; 0 \in \varnothing\} = \varnothing.$$

Следовательно, естественное преобразование *false* выбирает нулевой элемент из каждой ортомодулярной решётки $[p)^+$. Стрелка *false* мономорфна.

Отрицание можно определить теперь как стрелку $\neg$: $\mathbf{\Omega} \dot{\to} \mathbf{\Omega}$, являющуюся характеристической стрелкой подобъекта *false*. Если отождествить $false_p$ с включением $\{0\} \subseteq \mathbf{\Omega}_p$, то p-я компонента $\neg_p$: $\mathbf{\Omega}_p \to \mathbf{\Omega}_p$ отрицания удовлетворяет равенствам

$$\neg_p(S) = \{q\colon p \le q \;\&\; \mathbf{\Omega}_{pq}(S) \in \{\varnothing\}\} = \{q\colon p \le q \;\&\; S \cap [q) = \varnothing\} = [p) \cap S^* = S_p^*.$$

Таким образом, ортодополнение в $[p)^+$ совпадает с p-й компонентой истинностной стрелки отрицания в $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$.

Конъюнкция и дизъюнкция определяются как и в случае алгебры Гейтинга [3. С. 235]. Для p-й компоненты $\langle true, true\rangle_p$: $\{0\} \to \mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{\Omega}_p$ $\boldsymbol{Set}^{\boldsymbol{E}}$-стрелки $\langle true, true\rangle$: $\mathbf{1} \dot{\to} \mathbf{\Omega} \times \mathbf{\Omega}$ справедливо равенство $\langle true, true\rangle_p\,(0) = \langle [p), [p)\rangle$. Конъюнкция $\cap$: $\mathbf{\Omega} \times \times \mathbf{\Omega} \dot{\to} \mathbf{\Omega}$ является характеристической стрелкой для $\langle true, true\rangle$. Её p-я компонента $\cap_p$: $\mathbf{\Omega}_p \times \mathbf{\Omega}_p \to \mathbf{\Omega}_p$ удовлетворяет равенству

$$\cap_p(\langle S, T\rangle) = \{q\colon p \le q \;\&\; \langle \mathbf{\Omega}_{pq}(S), \mathbf{\Omega}_{pq}(T)\rangle\} = \langle [q), [q)\rangle = S \cap T.$$

В системах квантовой логики обычно дизъюнкция не относится к числу примитивных связок, поэтому её определение можно опустить.

ПРИМЕЧАНИЕ

(1) Операция * была рассмотрена в Приложении 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Биркгоф Г.* Теория решёток. — М.: Наука, 1964.

[2] *Васюков В.Л.* Интерпретация релевантной логики в топосах // Логика и В.Е.К. — М., 2003. — С. 112—121.

[3] *Гольдблатт Р.* Топосы. Категорный анализ логики. — М., 1983.
[4] *Beran L.* Orthomodular Lattices: Algebraic Approach. — Prague: Academia, 1984.
[5] *Bochenski I.M*. Logic and Ontology // Philosophy East and West. — 1974. — 24. — VII(3).
[6] *Cochiarella N.B*. Predication *Versus* Membership in the Distinction between Logic as Language and Logic as Calculus // Synthese. — 1988. — 77. — P. 37—72.
[7] *Devlin K.* The Joy of Sets. Fundamentals of Contemporary Set Theory. Second Edition. Springer-Verlag. — New York; Berlin, 1993. — P. 132—133.
[8] *Goldblatt R.I.* Semantic analysis of orthologic // J. Phil. Log. — 1974. — 3. — No 1—2. — P. 19—35.
[9] *Priest G.* Logic, Nonstandard // Donald M. Borchert (ed.). The Encyclopedia of Philosophy. — P. 307—310. Macmillan Reference, 1996. Supplement to a reprint of the volumes originally published in 1967.
[10] *Riscos A., Laita L.M.* N-categories in logic // Zeitschr. Math. Log. Grundl. Math. — 1987. — Bd. 33. — S. 507—516.
[11] *Takeuti G.* Quantum Set Theory // Current Issues on quantum logic / Beltrametti S., Fraassen B. Van (eds.). — New York; London: Plenum, 1981. — P. 303—322.
[12] *Takeuti G., Titani S.* Fuzzy Logic and fuzzy set theory // Arch. Math. Log. — 1992. — P. 1—32.
[13] *Vasyukov V.* Paraconsistency in Categories // Frontiers of Paraconsistent Logic. D. Batens, C. Mortensen, G. Priest and J.-P. van Bendegem (eds.). Research Studies Press Ltd., Baldock, Hartfordshire (England), 2000. — P. 263—278.

AN ONTOLOGY OF QUANTUM MATHEMATICS

V.L. Vasyukov

Chair of the History and Philosophy of Science
Institute of Philosophy
Russian Academy of Sciences
Volkhonka, 14, Moscow, Russia, 119991

A claim that mathematics would be formalized within the framework of a non-classical logic would be accepted in a twofold manner. It caused by the reason that non-classical mathematics ontology (universe) might be either global or local regarding not only classical but all other non-classical mathematics ontology. The construction of quantos (quantum topos) as categorical global universe allows to extend this claim for the case of quantum mathematics.

Key words: ontology, quantum mathematics, non-classical logic, set theory, quantos.