ФИЛОСОФИЯ И НАУКА

О ВОЗМОЖНОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА К ПРОБЛЕМЕ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

И.Г. Иванов

Кафедра философии естественных факультетов
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 1, стр. 51, Москва, 119991

В статье исследуются предпосылки появления геометрической программы обоснования математики. Основными препятствиями для развития исследований в этом направлении являются распространенные представления о ненадежности геометрических измерений в математике. С точки зрения автора, реабилитация геометрии возможна: основные положения ее критики в дискуссиях, посвященных основаниям математики, могут быть оспорены. Для оправдания геометрического подхода к обоснованию математики необходимо прояснить гносеологический характер геометрической интуиции, ее генезис и особую роль в математическом мышлении. Это будет означать возвращение к ряду положений философии математики И. Канта и Р. Декарта.

Ключевые слова: обоснование математики, априоризм, редукция, геометрическая интуиция, логицизм.

Проблема обоснования математики, возникшая в конце XIX века под влиянием открытия теоретико-множественных парадоксов, несмотря на плодотворные исследования в этом направлении и множество полученных результатов, так и не получила окончательного разрешения. В настоящее время задача окончательного построения обоснования математики считается малоперспективной. К середине XX века интерес к ней у исследователей угас: никаких радикально новых подходов к ее решению, сформировавшихся в новую программу обоснования, с этого времени уже больше не появлялось. В период постановки этой проблемы, наибольшего к ней внимания и расцвета дискуссий по основаниям математики (конец XIX — середина XX века) так и не возникло программы обоснования, опирающейся на геометрию. В значительной степени это может быть объяснено имеющей место дискредитацией соображений геометрического характера в математике. Эту дискредитацию геометрической интуиции объясняют рядом причин, хорошо известных математикам.

В качестве одной из важнейших среди этих причин принято считать присутствие в современной математике объектов, самим фактом своего существования совершенно расходящихся с геометрической интуицией. Мы можем привести такие примеры, как неевклидовы геометрии, непрерывные в каждой точке кривые, не имеющие нигде касательной, кривые, «заполняющие» целиком квадрат и множество других математических конструкций такого рода.

Принятая в рамках каждой из трех программ обоснования (логицизма, интуиционизма и формализма) система базисных теорий и принципов, на основе которых должна быть реконструирована математика, оказалась слишком бедной для конструирования на ее основе математического анализа. Некоторые математические положения, необходимые для построения арифметики действительных чисел в рамках логицистской программы (например, аксиома бесконечности), несводимы к логике: они не являются тождественно истинными высказываниями, выводимыми в логицистской системе аксиом. В рамках программы формализма можно обосновать только отдельную часть математики, состоящую из достаточно простых теорий (например, исчисление предикатов и теория групп), но более сложные теории — такие, как формализованные арифметика или теория множеств, не могут быть обоснованы в программе Д. Гильберта.

В 1931 году вышла статья К. Геделя, в которой были доказаны утверждения, известные как первая и вторая теоремы Геделя; одним из их прямых следствий является то, что в гильбертовской финитной метаматематике нельзя обосновать непротиворечивость формальной теории, содержащей в себе арифметику. Интуиционистское обоснование является предельно надежным, поскольку оно опирается на в высшей степени простые и самоочевидные объекты и расширение математической теории в интуиционистской математике возможно только совершенно безупречными методами. Однако в 1952 году Л. Брауэр обосновывает факт, заключающийся в том, что теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предела ограниченной монотонной последовательности, необходимая для построения анализа, не может быть доказана интуиционистскими конструктивными методами. Это означало, что интуиционистская математика, отказавшись от использования логики, оказалась не в состоянии построить заново классический математический анализ в соответствии со своими принципами.

Обосновательный фундамент, к которому редуцируется арифметика действительных чисел, основные программные принципы и положения, регламентирующие способы построения новых объектов и новых математических результатов, для каждой из этих трех программ является принципиально финитным. В рамках фундаментов этих программ оказалось невозможно обосновать и адекватно отразить свойства непрерывности действительных чисел и интуитивно очевидных утверждений анализа, связанных с представлением о бесконечности — например, простейшая теорема анализа о существовании предела монотонной ограниченной последовательности оказалась непреодолимым препятствием для интуиционистской математики, и в середине XX века интуиционисты отказались от попыток ее доказательства методами этой программы. Это дает нам основания для того, чтобы прийти к выводу, заключающемуся в том, что положения анализа, имеющие в своей основе идею бесконечности и являющиеся основополагающими при построении множества действительных чисел и теорем теории пределов, не могут быть полностью редуцированы к конечным множествам и построены «на пальцах» — чисто финитно-дискретно, как, например, теория булевых функций.

По этой причине представляется совершенно обоснованной оценка, данная В.Я. Перминовым значению финитного характера программ обоснования: «Итог исследований в основаниях математики в XX веке можно свести к тому тезису, что бесконечное не может быть обосновано на основе конечного. Мы должны, таким образом, либо отказаться от построения программ обоснования математики вообще, либо некоторым образом реабилитировать бесконечное, поместив его в круг априорных предпосылок математического знания» [3. С. 77].

Альтернативная программа обоснования, в фундаменте которой лежали бы геометрические понятия, могла бы стать более успешной, чем классические три программы, поскольку простейший геометрический объект — отрезок прямой — уже содержит в себе континуум точек и, в определенном смысле, содержит в себе идею непрерывности. Геометрическая программа построения математики, содержащая в своем ядре, к которому редуцируется анализ, геометрию, в случае своей детальной разработки оказалась бы свободной от «узкого места» классических программ — неудачи построения континуума на финитном фундаменте. Принимая во внимание одну из целей создания программ обоснования математики (построение непротиворечивой теории оперирования с бесконечными множествами), появление и развитие новой программы обоснования, уже имеющей в качестве одного из своих базовых объектов модель актуальной бесконечности, является интересным и многообещающим направлением для исследований.

Идея геометрического подхода к обоснованию математики имеет важную особенность, которая является препятствием для его признания как имеющего право на существование альтернативного взгляда на проблему — само принятие идеи о возможности геометрического обоснования анализа требует значительного пересмотра сложившихся распространенных представлений о том, какие методы получения результатов в математике считаются законными. Рассмотрим классический взгляд на строгость математических доказательств и на допустимые в математике способы рассуждений, в рамках которых наше доказательство считается строгим. Предельная надежность финитного доказательства в формализованной непротиворечивой теории не подлежит сомнению.

В качестве примера рассмотрим утверждение теории групп: «группа A5 — простая». Оно выводится из аксиом, лежащих в определении группы, а также логических законов и не опирается ни на что другое, кроме них. A5 — конечная группа, поэтому на каждом шаге доказательства мы делаем промежуточные утверждения, оставаясь исключительно в рамках конечных множеств. Все доказательство представляет собой конечную систему шагов, на каждом из которых мы получаем некий промежуточный результат, используя только аксиомы группы, уже доказанные нами положения, законы логики и при этом мы все время остаемся в рамках суждений о конечных множествах и конечных формульных выражениях.

Именно такого рода доказательства являются примерами, прекрасно иллюстрирующими аподиктичность математики — в доказательстве полностью зафиксировано отсутствие допущений, выходящих за рамки аксиом, уже доказанных теорем и правил вывода, и на каждом шаге доказательства мы используем безупречные соображения. Мы понимаем термин «аподиктичность» в кантовском значении этого термина, то есть аподиктически достоверное утверждение является некоей абсолютно надежной истиной, которая не может быть, в отличие от эмпирических положений, когда-либо впоследствии оказаться скорректированной.

Аподиктичность утверждений теорем формализованной теории, имеющих проверенное и признанное истинным финитное формальное доказательство, несомненна и лежит вне критики. Д. Гильберт, критиковавший философию математики И. Канта, совершенно без колебаний признает финитизм как априорный фундамент математики, обуславливающий аподиктичность ее положений: «Итак, мы видим следующее: в кантовской априорной теории еще содержатся антропоморфные шлаки, от которых ее необходимо очистить, а после их удаления останется лишь та априорная установка, которая лежит в основе чисто математического знания; по существу, это и есть та финитная установка, которую я излагал в различных своих работах» [2. С. 461].

Классический математический анализ на допускает полного финитного обоснования как формальная теория, однако его положения также аподиктичны. Причина этого в том, что при построении анализа в нем содержатся определенные совершенно прозрачные для нас априорные предпосылки, не зафиксированные в аксиомах. Например, мы свободно применяем доказательства от противного к утверждениям о множествах без дополнительного исследования, которое бы исключило возможность возникновения парадокса. Мы понимаем вещественное число как длину отрезка, поэтому теоремы существования, такие, как, например, теорема Ролля или теорема Больцано-Вейерштрасса о существовании предела монотонной ограниченной последовательности, доказывающиеся от противного, представляются нам совершенно корректно доказанными на базе свойств вещественных чисел, зафиксированных как аксиомы.

В математике безусловным идеалом строгости считается формальное доказательство в формализованной теории. Только достаточно простые теории могут быть построены таким образом, поэтому для таких сложных разделов математики, как анализ, допускаются отклонения от абсолютного идеала формального доказательства, т.е. имеют место дополнительные априорные предпосылки методологического характера. С учетом этих методологических предпосылок, доказательства теорем анализа строго вытекают из аксиом и сами эти теоремы анализа аподиктичны. Любые соображения геометрического, механического или физического характера не являются с этой точки зрения подлинно математическими; они могут подсказать нам полезную идею, но чтобы стать доказанной, эта идея должна быть доказана финитно. М. Бунге пишет: «В наше время среди математиков очень немного сторонников чувственной и геометрической интуиции, или способности пространственного представления, потому что было показано раз и навсегда, что интуиции эти настолько же логически обманчивы, насколько эвристически и дидактически плодотворны... Одним из первых примеров ограниченности геометрической интуиции было открытие неевклидовых геометрий... Дополнительные примеры: непрерывные кривые, не имеющие касательной, кривые, сплошь заполняющие целый участок плоскости, взаимно односторонние поверхности, трансфинитные числа и однозначное соответствие между точками отрезка линии и точками поверхности квадрата, противоречащее «интуитивному» представлению о размерности» [1. С. 43]. Эта позиция интересна для нас тем, что система аргументов, выдвигаемых для обоснования ненадежности геометрической интуиции, приводится в контексте проблемы противопоставления строгой точной науки «ненадежному и ненаучному» интуитивному откровению, критике которого и посвящена книга М. Бунге «Интуиция и наука».

Совершенно понятно, что при построении анализа с использованием в его основании геометрических понятий определенные утверждения в рамках этой геометрической программы должны быть получены чисто геометрически. Например, теоремы аналитической геометрии доказываются полностью алгебраически, т.е. геометрия полностью редуцируется к алгебре, в которой полностью заключается в этом случае ее основание. Программа обоснования математики, основанная на геометрии, будет содержательной только если в основании, к которому весь анализ будет редуцироваться, останется геометрия «сама по себе»; если геометрические положения окажутся в итоге редуцированы к арифметике, это будет означать, что геометрия исчезла из обосновательного базиса, и мы опять будем иметь дело с классической финитной программой обоснования. Каким образом мы будем получать утверждения в границах этого «нерастворимого» в арифметике и логике окончательного геометрического фундамента? Ясно, что синтетические геометрические положения получат предельное обоснование в их очевидности и ясности для геометрической интуиции. Когда мы говорим о геометрической интуиции, мы имеем в виду интуицию как «видение истины», благодаря которой мы способны непосредственно постигать геометрические истины без рационального их доказательства. Например, именно благодаря геометрической интуиции мы совершенно отчетливо осознаем, что прямая, пересекающая одну сторону треугольника, пересекает и другую его сторону, и для осознания этого факта нам не требуется какое бы ни было дополнительное доказательство. Все люди способны к такому непосредственному постижению геометрических утверждений, что делает возможным изучение ими геометрии. Действительно, доказательства Евклида сохраняют убедительность и через более чем двухтысячелетний период времени, прошедший с момента написания «Начал». Геометрическая интуиция является одним из автономных источников, на базе которого мы можем получать математические утверждения; евклидова геометрия может быть построена на ее базе, и ее теоремы могут быть последовательно редуцированы к геометрически очевидным простым положениям.

В настоящий момент геометрическая интуиция не имеет полноправного обосновательного статуса в математике; в отличие от финитно-дискретного рассуждения в рамках зафиксированной системы аксиом, геометрическая интуиция не считается аподиктическим источником, на который могли бы опираться математические заключения. Сейчас практически общепринятой является точка зрения, заключающаяся в том, что подлинное математическое доказательство должно иметь исключительно логический характер и представлять собой строгое преобразование формул по правилам логического вывода; именно в этой особенности доказательств заключена суть и причина аподиктичности математики. Таким образом, согласно этой позиции, специфика математики как строгой науки, теоремы которой аподиктичны, заключена именно в принципиально финитно-дискретном характере ее рассуждений, с одной стороны, и в строго логической структуре ее доказательств, с другой стороны.

Геометрическая интуиция — наглядное схватывание сути математического утверждения без рационального логического вывода, таким образом, остается совершенно «за бортом» математики. В рамках такого традиционного взгляда на природу математики, как мы можем видеть, попытки построить геометрическое обоснование анализа не имеют права на существование.

Разумеется, когда мы утверждаем, что эта точка зрения общепринята, совсем не имеется в виду, что других взглядов на этот вопрос не существует. Однако сложно спорить с тем, что возможность построения логически непротиворечивых объектов, противоречащих нашей геометрической интуиции, среди математиков в целом оценивается как несостоятельность именно геометрической интуиции, ее ненадежность, способность привести нас к парадоксу.

В этом отношении очень характерна позиция, высказанная Г. Ханом в работе «Кризис интуиции в математике»: «Поскольку интуиция оказывается столь ненадежной во многих случаях, поскольку утверждения, которые, согласно интуиции, должны быть истинными, часто оказываются ложными при строгой логической проверке, математики стали относиться к интуиции все более подозрительно. Они убедились, что, основываясь на интуиции, верить математическим утверждениям, особенно тем, которые относятся к фундаментальным понятиям, очень опасно. Возникло требование изгнать интуицию из математического рассуждения и полностью формализовать математику. Другими словами, каждое новое математическое понятие должно определяться логически, каждое математическое доказательство должно использовать лишь строгую логику» [5. С. 37].

Если в XVII веке геометрическая интуиция обладала в математике равноправием с арифметикой и логическим выводом, то в конце XIX века она оказалась выброшена за границы чистой математики. Именно этого взгляда на геометрию и придерживались основатели каждой из трех программ обоснования в период их создания.

Г. Фреге, излагая положения программы логицизма, решительно возражает против возможности геометрического понимания понятия числа. «Здесь мне сразу же хотелось бы возразить на попытку, когда число понимают геометрически, как числовую пропорцию длин и площадей, очевидно, полагая облегчить многократные применения арифметики к геометрии тем, что их начала приравниваются в самом тесном отношении» [4. С. 23].

Л. Брауэр, основатель интуиционизма, придерживался точки зрения, что появление неевклидовых геометрий дискредитировало геометрическую интуицию в математике: «Но наиболее серьезным ударом по кантовской теории стало открытие неевклидовой геометрии, непротиворечивой теории, развивающейся на основе набора аксиом, отличающегося от набора аксиом элементарной геометрии только тем, что аксиома о параллельных заменена ее отрицанием» [6. С. 85]. Более того, идея интуиции Л. Брауэром не отрицается: на интуиции времени, причем в кантовском ее понимании, строится наше представление о натуральном ряде, однако априорная интуиция пространства им отвергается. По его мнению, именно геометрическая интуиция дискредитировала кантовский интуиционизм; для его реабилитации нам следует ее отбросить и ограничить сферу априорной интуиции только интуицией времени: «Какие бы недостатки интуиционизма не были обнаружены в процессе развития математики, все они потеряли актуальность и исчезли благодаря отказу от кантовской идеи об априорности пространства, но при этом даже более твердому утверждению идеи априорности времени» [Там же].

Д. Гильберт придерживался позиции, заключающейся в том, что геометрическая интуиция имеет эмпирическую природу: «Теория гравитации Эйнштейна показала со всей очевидностью, что геометрия есть не что иное, как ветвь физики; геометрические истины во всех отношениях устанавливаются так же, как физические истины, и ничем не отличаются от последних... Во времена Канта можно было думать, что существовавшие тогда представления о пространстве и времени обладают такой же степенью общности и так же непосредственно связаны с действительностью, как, например, представления о числе, упорядоченности и величине, которые мы постоянно и привычно используем в математических и физических теориях. При таком подходе теория пространства и времени, в частности геометрия, должна быть чем-то таким, что так же, как и арифметика, предшествует всему естествознанию. Но от точки зрения Канта отказались еще до того, как этого потребовало развитие физики, в частности Риман и Гельмгольц, причем с полным основанием, ибо геометрия есть ни что иное, как та самая часть общей физической системы понятий, которая отображает возможные взаимосвязи между положениями твердых тел в мире реальных вещей» [2. С. 462].

Как можно видеть, с точки зрения Д. Гильберта геометрическая интуиция должна быть совершенно и бесповоротно изгнана из чистой математики. Важно, что в позициях создателей программ обоснования мы совершенно отчетливо замечаем влияние именно отмеченных выше основных факторов критического отношения математиков к геометрической интуиции — открытие неевклидовых геометрий, построение математических объектов, противоречащих геометрической интуиции, и идея понимания математического доказательства исключительно как логически-формального. Достаточно понятно, что радикальное отрицание геометрической интуиции лидерами основных направлений исследований по основаниям математики, сформировавших характер философии математики своего времени, определило отказ от попыток предложить геометрическую программу обоснования в период, когда эта проблема считалась наиболее актуальной (первая половина XX века).

Таким образом, первой необходимой предпосылкой для возникновения геометрической программы построения математического анализа должно стать обоснование надежности геометрической интуиции. Логика и арифметика безоговорочно признаны как аподиктические источники математического знания, и задача будущей программы обоснования математики, в основании которой лежат и геометрические понятия, — уравнять геометрическую интуицию с логикой и арифметикой в этом отношении. Это означает, что от программы обоснования потребуется выйти за рамки непосредственно математического рассуждения и предложить собственную концепцию сущности и природы математики, привести стройную систему аргументов, обосновывающую аподиктичность геометрической интуиции. Эта задача, несомненно, потребует философского анализа генезиса геометрической интуиции, ее гносеологической основы в нашем математическом мышлении и раскрытия ее глубокой связи с категориальным комплексом нашего познания; потребуется определенным образом показать, что геометрическая интуиция лежит в основе самого восприятия предметности.

Возникает естественный вопрос: является ли возможным оправдание геометрической интуиции, если против нее имеется множество аргументов математического характера, неоднократно признававшихся учеными совершенно достаточными для ее ниспровержения как надежного источника математического познания? Тем не менее, мы можем совершенно определенно сказать, что у нас имеются серьезные основания, чтобы ответить на этот вопрос положительно.

Распространено мнение, что существование неевклидовых геометрий противоречит аподиктичности геометрической интуиции. Эту позицию, в частности, полностью разделяли Д. Гильберт и Л. Брауэр — основатели программ формализма и интуиционизма. Однако имеется ряд оснований, чтобы прийти к выводу, что идея, согласно которой неевклидовы геометрии самим фактом своего существования опровергают аподиктичность геометрической интуиции, необоснованна. Эта идея, сформировавшаяся в XIX веке, имела одну важную особенность — ее сторонники, среди которых мы можем назвать Н. Лобачевского, Г. Гельмгольца, Б. Римана, Ф. Клейна и многих других, как правило считали, что геометрическая интуиция имеет опытную природу; они придерживались эмпирического взгляда на математику. И эта эмпирическая позиция критиков геометрической интуиции наложила принципиальный отпечаток на дискуссию об обосновании неевклидовой геометрии, по существу, определив характер этой дискуссии.

В конечном итоге обсуждения, состоявшегося в XIX веке, целью которого было осмыслить изменившийся в связи с открытием неевклидовых геометрий характер математики, сформировался (в нескольких вариантах) хорошо известный эмпирический взгляд на геометрию. Один из его вариантов приводит Л. Брауэр: «Элементарная (евклидова) геометрия просто более подходит, чем неевклидова геометрия, для описания законов кинематики твердых тел и, следовательно, и для описания многих природных явлений; однако, хотя это и потребует больше усилий, является возможным построить объекты, для которых кинематические законы будут иметь более простой вид в терминах неевклидовой геометрии, чем в терминах евклидовой» [6. С. 85].

Кажущаяся аподиктичность геометрической интуиции, с точки зрения этих взглядов, на самом деле является просто следствием привычки: в нашем мире твердые тела в целом сохраняют свою форму при движении и поэтому для нас естественна евклидова геометрия, сформировавшаяся под влиянием постоянно повторяющегося опыта.

При других физических законах для нас, согласно этой точке зрения, неевклидова геометрия могла бы стать такой же естественной и также казаться априорной.

Однако эмпирический взгляд на геометрию по ряду причин не является позицией, в рамках которой мы можем адекватно исследовать вопрос о геометрической интуиции в контексте существования неевклидовых геометрий. Критика с позиции понимания геометрии как опытной науки неспособна по существу затронуть вопрос аподиктичности геометрической интуиции.

К моменту открытия неевклидовых геометрий то, что геометрические суждения такие же надежные, как арифметические, и с не меньшим основанием могут считаться априорными, а сама геометрическая интуиция — обеспечивающим аподиктическую достоверность источником, являлось общепринятой точкой зрения; при этом не имелось никаких математических аргументов для ее радикального отрицания. Однако если мы рассмотрим возможность опровержения аподиктичности арифметики на основе понимания ее суждений как эмпирических, тогда окажется, что эта идея совершенно несостоятельна.

Мы отчетливо осознаем первичность логики и арифметики по отношению ко всем возможным формальным построениям специальных числовых множеств и особых правил вывода для этих множеств; осознаваемая нами всеобщность и необходимость арифметики и логики проводит совершенно отчетливую границу между арифметическими и эмпирическими суждениями. Это означает, что базисная идея, на которую опиралась критика геометрии, заключающаяся в отнесении геометрических суждений к эмпирическим, фактически увела дискуссию в сторону от по-настоящему глубокого исследования вопроса о том, как соотносится идея аподиктичности геометрической очевидности с существованием неевклидовых геометрий. Мы не можем представить себе треугольника на евклидовой плоскости со сторонами, представляющими собой отрезки евклидовой прямой, ибо мы совершенно отчетливо осознаем, что такой треугольник никогда не будет предъявлен: теорема о сумме углов треугольника, таким образом, совершенно не является эмпирическим суждением, если пользоваться восходящим к И. Канту критерием (необходимость и строгая всеобщность). Критика не отражала эту важнейшую особенность геометрической интуиции. Причиной этого, вероятно, является то, что большинство критиков статуса геометрической интуиции (в рамках открытия неевклидовой геометрии) принципиально отрицали философию Канта. Логическая непротиворечивость аксиом неевклидовой геометрии недостаточна, чтобы опровергнуть идею невозможности представить в нашем сознании другое пространство с совершенно другими свойствами, противоречащими нашей геометрической интуиции.

Как известно, свое обоснование неевклидовы геометрии получили при помощи создания их моделей, позволяющих свести вопрос об их непротиворечивости к вопросу непротиворечивости классической геометрии, то есть содержательной интерпретации их понятий в евклидовой геометрии. Существование непротиворечивых неевклидовых геометрий не опровергает явно надежности геометрической интуиции, поскольку не предлагается явного вида парадокса.

Следующий важный комплекс аргументов против геометрической интуиции, то есть против наделения ее «полноправным» обосновательным статусом в математике, наряду с арифметикой и логикой, связан с возможностью введения в математику объектов, законность существования которых обоснована логически, но при этом не имеющих адекватного отражения в геометрической интуиции или, более того, свойства которых противоречат тем свойствам, которыми эти объекты, с точки зрения геометрической интуиции, должны обладать. Классическими примерами являются непрерывная кривая, нигде не имеющая касательной, и непрерывная кривая Пеано, «заполняющая» весь квадрат; корректность их построения может быть строго доказана логически, и мы можем строго, опираясь только на систему аксиом и логику, доказать, что они обладают именно тем свойством, которое противоречит интуитивному представлению о непрерывных кривых. Однако изучение особенностей конструирования этих объектов показывает нам, что для их построения требуется определенным образом расширить классическое определение предела, известное нам из математического анализа. Непрерывная кривая в классическом анализе понимается как непрерывная функция, то есть функция, предел которой при стремлении ее аргумента к точке ***a*** равен значению функции в этой точке.

Понятие кривой, лежащее в основе построения указанных выше двух примеров, является более общим, чем обыкновенное, классическое, понятие непрерывной кривой, поскольку понятие предела, лежащее в основе ее определения, подвергнуто некоторой модификации; и именно поэтому мы не можем согласиться с тем, что подобные примеры опровергают геометрическую интуицию строго, подобно тому, как может быть опровергнута, например, программа формализма в своей первоначальной постановке. Мы имеем дело не с парадоксом в полном смысле этого слова, а с ситуацией расширения и обобщения понятий анализа в направлении большей их абстрактности, когда одно из основных понятий анализа — непрерывная кривая в рамках своего обобщения — допускает новые свойства, которыми она не обладает в своем обычном определении и которые кажутся парадоксальными с точки зрения «классического» представления о непрерывных кривых.

Внимательное рассмотрение основных аргументов, выдвигаемых против надежности геометрической интуиции в математике — существование неевклидовых геометрий и логически корректных объектов, обладающих совершенно парадоксальными (с точки зрения геометрической наглядности) свойствами, — позволяет прийти к следующим выводам. Ни один из таких объектов не является парадоксом в полном смысле слова, т.е. строго математическим фактом, опровергающим геометрическую интуицию в том смысле, в каком это произошло с пифагорейской математикой или формалистской программой Д. Гильберта. Если последние две концепции оказались «убиты» в процессе своего развития, то идея аподиктичности геометрической наглядности не является опровергнутой радикально. Фактически, речь идет о такой возможности обобщений уже известных нам математических объектов, при которой они будут обладать новыми свойствами. Это означает, что в математике существуют объекты, познать свойства которых при помощи геометрической интуиции мы не в состоянии.

Однако мы не можем согласиться с упоминавшимся утверждением Г. Хана: «утверждения, которые, согласно интуиции, должны быть истинными, часто оказываются ложными при строгой логической проверке».

С точки зрения распространенной позиции, которую выражает Хан, возможность расширить понятие предельного перехода так, чтобы в его рамках можно было построить объект, обладающий парадоксальными (с точки зрения геометрической интуиции) свойствами, является таким же эффективным контрпримером, каким для идеи представимости пифагорейцев любой числовой величины как рационального числа явилось доказательство несоизмеримости сторон единичного квадрата и его диагонали, или для логицизма Г. Фреге — открытие парадоксов теории множеств. Однако это совсем не так. То, что при определенном обобщении объект приобретает дополнительные свойства, не поддающиеся исследованию при помощи геометрической интуиции, не может само по себе являться ее опровержением, без исследования характера природы этого обобщения. Зафиксировав определенные границы возможных предельных переходов в анализе, мы можем совершенно быть уверены в том, что никогда не получим парадоксов (это имеет строгое обоснование) с геометричесокй наглядностью.

Возвращаясь к вопросу о реабилитации геометрической очевидности, возвращении ей равных прав в сравнении с арифметикой и признании ее аподиктичности, мы можем, таким образом, прийти к выводу, что основания для этого имеются.

Крайне важно, что геометрическая интуиция не оказалась опровергнута посуществу, хотя наиболее распространенная точка зрения на этот вопрос другая. На современное отношение к геометрической интуиции, принижающее ее, повлияла изначальная философская установка создателей неевклидовых геометрий и ряда других математиков. При построении концепций и выводов, отвергающих геометрическую интуицию, очень многие важнейшие стороны этого вопроса рассматривались поверхностно. Это говорит о том, что у нас есть все основания считать, что будущие исследования в этом направлении приведут к пересмотру современного взгляда на геометрическую интуицию как на несостоятельный источник для математики, и ее аподиктический статус будет ей возвращен.

Вторая необходимая предпосылка, требующаяся для возникновения геометрической программы построения математики, — изменение общепринятого взгляда на природу математического доказательства. Потребуется выйти за рамки представления о математическом доказательстве как о рационально-логическом аналитическом выводе формул.

В самом деле, чистые геометрические доказательства не нуждаются для своей убедительности в том, чтобы быть построенными по этой схеме. Логическая структура геометрии Евклида не является строгой и герметичной, тем не менее, его доказательства сохраняют свою силу. Более того, логическая структура геометрии, с фиксацией аксиом и строгим выводом из них теорем является, в определенном смысле, излишней. Мы имеем в виду, что нам достаточно для доказательства геометрической теоремы просто разбить наше рассуждение на несколько пунктов, таких, что переход от одного к другому геометрически очевиден для нас; при этом от нас не потребуется строго зафиксировать аксиомы и соединить с ними наше доказательство логической «цепочкой». Это означает, что убедительность математического доказательства шире возможности его формального логического построения.

Идеал формального доказательства был строго сформулирован только в начале XX века — и при этом ни одна содержательная теорема евклидовой геометрии и классического математического анализа не оказалась подвергнута серьезной коррекции. Это означает, что в математике есть аподиктические интуитивные принципы, выходящие за рамки формального доказательства, на которых, однако, сложная математическая теория может быть построена строго.

Нет сомнения, что для реализации геометрической программы от нас потребуется признать надлогическое геометрическое видение истины совершенно корректным доказательством. В настоящее время в качестве аргумента против этой позиции приводят соображения о ненадежности геометрической интуиции, лежащей в основе таких доказательств, однако является несомненным, что после ее реабилитации вопрос признания за последовательной геометрически наглядной демонстрацией статуса законного математического доказательства встанет в полную силу. Можно сказать, что если реабилитация геометрической интуиции и признание ее аподиктичности означает возврат к идеям И. Канта, то идея полного признания за ней статуса полноценного и окончательного доказательства является возвратом к воззрениям Р. Декарта — его идее, согласно которой природа математического доказательства заключена не в его формальном построении, а в ясном и отчетливом осознании истинности каждого шага доказательства; причем формальное обоснование является только одним из частных случаев такого доказательства.

Даже люди, отрицающие надежность геометрической интуиции, несомненно, согласятся с ее аподиктическим характером в определенных границах и окончательностью ее доказательств в них (например, в рамках евклидовой геометрии или разделов классического математического анализа, изучающих свойства гладких спрямляемых функций). Этот аподиктический характер геометрической интуиции — важная особенность нашего математического мышления. Исследования в направлении создания геометрической программы перспективны именно по этой причине: геометрическая программа предполагает в качестве главной своей предпосылки просто отражение и точную фиксацию факта непреложности (в определенных границах) геометрической интуиции. Эта непреложность имеет свою причину, и после прояснения ее природы мы можем смело включить геометрические положения в ядро дальнейших исследований по основаниям математики. Таким образом, мы можем прийти к окончательному выводу: реабилитация геометрической наглядности будет означать возможность использования для обоснования математики новых дополнительных соображений, идей и объектов аподиктического характера, связанных с идеей бесконечности и непрерывности. Мы можем, в случае развития исследований в этом направлении, ожидать появления новых программ обоснования математики, имеющих ряд преимуществ перед уже существующими.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Бунге М.* Интуиция и наука. — М., 1967.
[2] *Гильберт Д.* Познание природы и логика // Гильберт Д. Избранные труды. — М., 1998. — Т. 1.
[3] *Перминов В.Я.* Праксеологический априоризм и стратегия обоснования математики // Математика и опыт / Под ред. А.Г. Барабашева. — М., 2003.
[4] *Фреге Г.* Основоположения арифметики. — Томск, 2000.
[5] *Хан Г.* Кризис Интуиции в математике // Математики о математике. — М., 1972.
[6] *Brouwer L.E.J.* Intuitionism and formalism // Brouwer L.E.J. Collected Works. — Vol. 1. — Amsterdam, 1975.

ON POSSIBILITY OF GEOMETRICAL APPROACH TO THE PROBLEM OF SUBSTANTIATION OF MATHEMATICS

I.G. Ivanov

The Department of Philosophy for the MSU Natural Science Faculties
Lomonosov Moscow State University
GSP-2, Leninskie Gory, korp. 1, Moscow, Russia, 119992

In the article there are analyzed the preconditions of appearence of geometrical program of substatiation of mathematics. The main obstacles to the development of research in this field are common views about unreliability of geometrical understanding in mathematics. Reabilitation of geometry is possible and the main propositions of its critics in discussions about the basis of mathematics can be disputed. Though, to establish geometrical approach to substantiation of mathematics it is necessary to clarify gnoseological nature of geometrical intuition, its genesis and special role in mathematical thinking. This will mean the return to the number of propositions of the philosophy of mathematics of I. Kant and R. Descartes.

Key words: substantiation of mathematics, apriorism, reduction, geometrical intuition, logicism.