
АНАЛИЗ СЕМАНТИКИ, ОНТОЛОГИИ И СИНТАКСИСА ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

С.А. Павлов

Институт философии РАН
Волхонка ул., 14, Москва, Россия, 119991

Проведенное исследование и анализ необходимых предпосылок классической логики высказываний показало, что есть возможность их уточнений, связанных с построением синтаксических аналогов семантических правил логики высказываний, с модификацией семантики Фреге для логики высказываний и с формализацией понятий истинности и ложности. По отношению к возможности построения неклассических логик были определены классы логик, удовлетворяющих найденным условиям. В результате имеем одну теорию истины и конечное число неклассических логик, выводимых из нее.

Ключевые слова: классическая логика, семантика, синтаксис, анализ.

1. Введение

Целью данного исследования является анализ семантического и синтаксического построений классической логики высказываний.

Критику классической логики высказываний можно рассматривать как одно из следствий кризиса оснований математики начала XX в., который затронул и логику. Л. Брауэром был подвергнут сомнению и критике закон исключенного третьего. Затем Н. Васильевым был подвергнут сомнению закон непротиворечия, а Я. Лукасевич подверг сомнению принцип бивалентности. Начался период построения неклассических логик. К концу же XX в. было построено бесконечное число формальных (логических) систем. В то же время на вопрос: какой логикой пользоваться в своих рассуждениях? — общепринятого ответа нет. Имеем новый кризис — кризис перепроизводства логик (и «логик»).

В связи с таким положением дел, сложившимся в логике, имеет смысл внимательно, тщательно, критично и детально проанализировать предпосылки классической логики высказываний и все шаги ее построения, а также отметить те положения, которые подвергались критике.

Обычно логика высказываний строится следующим образом:

- 1) во вводных разъяснениях дается представление о языке логики высказываний,
- 2) задается формализованный язык логики высказываний,
- 3) задается семантика языка логики высказываний,
- 4) задаются аксиомы и правила вывода логики высказываний,
- 5) исследуются металогические свойства логики высказываний (сравнить с [3; 1]).

Некоторые авторы меняют последовательность 3-го и 4-го пунктов:

- 3*) задаются аксиомы и правила вывода логики высказываний,
- 4*) задается семантика языка логики высказываний (сравнить с [12]).

Далее кратко воспроизведем построение классической логики высказываний.

«Под высказыванием следует понимать каждое предложение, в отношении которого имеет смысл утверждать, что его содержание истинно или ложно», — пишут Д. Гильберт и В. Аккерман (в [3]). В свою очередь, Чёрч (в [12]) определяет, что «Предложение — это такое соединение слов, которое имеет самостоятельный смысл, т.е. выражает законченную мысль».

Для выражения логической связи высказываний нам достаточно будет 2 знаков: отрицания и импликации.

1. « $\sim X$ (читается «не X») обозначает контрадикторную противоположность X. $\sim X$ обозначает высказывание, которое истинно, если X ложно, и ложно, если X истинно» [3].

2. « $X \supset Y$ (читается «если X, то Y») обозначает высказывание, которое ложно в том и только в том случае, когда X истинно, а Y ложно» [3].

2. Язык логики высказываний и его семантика

Пусть L — язык сентенциальной логики (логики высказываний) CL с отрицанием \sim и импликацией \supset . Сентенциальные переменные: p, q, p_1, q_1, \dots (*Var* — множество переменных).

Правила построения формул стандартные.

Пусть A, B — метапеременные для формул (*For* — множество формул).

Для построения семантики языка логики высказываний вводят истинностные функции, которые определяются с помощью таблиц значений следующего вида [4]:

A	$\sim A$	$(A \supset B)$	истина	ложь
истина	ложь	истина	истина	ложь
ложь	истина	ложь	истина	истина

Гильберт и Аккерман полагают в [3], что «первой задачей логики является: найти такие связи высказываний, которые всегда истинны, т.е. истинны независимо от того, представляют ли основные высказывания истинные или ложные утверждения».

Д. Гильберт и П. Бернайс отмечают в [4]: «будет не важно, что значениями истинностных функций и их аргументов являются именно «истина» и «ложь». Важно будет лишь то, что мы будем иметь дело с вполне определенными функциями, которые, как и их аргументы, способны принимать лишь одни и те же два значения — например α и β ».

Выберем в качестве значений 0 и 1 построим *V*-интерпретацию.

***V*-интерпретация**

Функция оценки v есть отображение множества *For* на множество $\{0, 1\}$ (сокр. $v: For \rightarrow \{0, 1\}$). Выделенное значение: 1.

1. $v: Var \rightarrow \{0, 1\}$.

2. $v(\sim A) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(A) = 1; \\ 1, & \text{если } v(A) = 0. \end{cases}$

3. $v(A \supset B) = \begin{cases} 1, & \text{если } v(A) = 0 \text{ или } v(B) = 1; \\ 0, & \text{если } v(A) = 1 \text{ или } v(B) = 0. \end{cases}$

Далее определяются общезначимые (тождественно-истинные, логические законы, тавтологии) формулы и логическое следование.

Отметим, что критика Лукасевичем принципа бивалентности открыла дверь множеству многозначных интерпретаций для различных неклассических логик, включая бесконечнозначные.

3. Аксиоматическая формулировка и металогические свойства логики высказываний

Выбор нескольких общезначимых формул и правил вывода такой, что в результате все остальные общезначимые формулы станут теоремами (выводимыми формулами), является целью аксиоматической формулировки логики высказываний.

Металогические свойства логики высказываний выражаются в метатеоремах: дедукции, непротиворечивости, семантической полноты и др.

Отметим, что Брауэром был подвергнут критике и отброшен закон исключенного третьего. Вслед за ним были подвергнуты критике все, без исключения, законы логики. С одной стороны, стало возможно строить бесконечно много формальных систем, а с другой — сомнения во всех законах логики с последующим их отбрасыванием было названо аксиоматической пустотой.

4. Синтаксические аналоги семантических правил

В [9] были построены синтаксические аналоги семантических правил логики высказываний и ряда исчислений, имеющих многозначные интерпретации.

Начнем с формулировки теорем классической сентенциальной логики CL, которые являются синтаксическим аналогом семантических правил для этого исчисления.

Конъюнкцию \wedge , дизъюнкцию \vee и эквиваленцию \equiv определяем стандартно.

Введем сокращения для следующих формул.

$$D1.1. \quad v^1 =_{df} (p \supset p)$$

$$D1.2. \quad v^0 =_{df} \sim(p \supset p)$$

Имеем следующие теоремы CL (сведения, редукции) для формул с исходными связками:

$$T1.1. \quad \sim v^1 \equiv v^0$$

$$T1.2. \quad \sim v^0 \equiv v^1$$

$$T2.1. \quad (v^1 \supset v^1) \equiv v^1$$

$$T2.2. \quad (v^1 \supset v^0) \equiv v^0$$

$$T2.3. \quad (v^0 \supset v^1) \equiv v^1$$

$$T2.4. \quad (v^0 \supset v^0) \equiv v^1.$$

Вышеприведенные группы теорем T1—T2 можно рассматривать как синтаксический аналог семантических правил.

Для доказательства метатеорем, аналогичных теоремам о корректности и семантической полноте и использующих только синтаксические выражения, введем определение W-формулы (аналога тождественно истинной формулы, общезначимой формулы, логического закона).

Ппф А будем называть W-формулой е.т.е. ($A \equiv v^1$) выводима в CL при всех возможных подстановках формул v^1 и v^0 вместо входящих в А переменных.

Имеем метатеорему:

MT1. Ппф А есть теорема е.т.е. А есть W-формула (аналог теоремы адекватности).

В то же время без семантики исчисление не является логикой. Семантика в данном случае сводится к положениям о том, что областью определения сентенциальной переменной является множество высказываний, которые являются либо истинными, либо ложными. v^1 — логически истинная формула, логический закон, а v^0 — логически ложная формула. Тогда можно построить семантические правила в соответствии с T1—T2, но, отметим, что необходимость в их построении отпала.

Отметим, что при переходе к рассмотрению неклассических логик имеем теорему:

MT2. *Наличие семантических правил для исчисления не является достаточным условием для построения их синтаксических аналогов.*

Таким образом, такой подход позволяет выделить класс логических систем, для которых возможно построить синтаксические аналоги их семантических правил.

5. Модификация семантики Фреге

Логическая семантика для классической сентенциальной логики с единственным денотатом «истина» была предложена в [5]. В [7; 8] излагаются два обоснования такой семантики, как для классической сентенциальной логики, так и для неклассической.

В логической семантике Фреге понятия истинности и ложности рассматриваются в следующих смыслах: как предикат, как денотат, как абстрактный предмет, как значение (truth value) или аргумент функции.

Особенностью семантики Фреге явилась его идея рассмотрения повествовательных предложений как имен, денотатом (Bedeutung, reference) которых являются абстрактные предметы: либо истина, либо ложь. В [10] Фреге предложил «на каждое утвердительно-повествовательное предложение... смотреть как на собственное имя, причем на такое, значение которого, если оно существует, есть либо истина, либо ложь».

Другими словами, имеется дилемма, гласящая, что всякое предложение А обозначает либо истину, либо А обозначает ложь.

Имеем также равнозначную этой дилемме эквивалентность: А обозначает ложь е.т.е. неверно, что А обозначает истину. Согласно учению Фреге об истинности и ложности всякое истинное предложение обозначает истину, всякое ложное предложение обозначает ложь. Также из положений Фреге следуют дилемма: либо А истинно, либо А ложно, которая выражает принцип бивалентности (двузначности).

Развивая свою семантику далее, Г. Фреге переходит от исходного отношения обозначения и денотатов к функции оценки и ее аргументам и говорит: «значение

нашей функции есть некоторое значение истинности» и затем «Теперь можно рассмотреть некоторые функции, которые для нас важны именно тогда, когда их аргументом является истинностное значение» (см. [11]).

А. Черч отмечает, что есть два семантических отношения: «обозначать» (denoting) и «принимать значение» (having values), о которых он пишет: «при рассмотрении семантических правил формализованного языка мы предполагали понятия «обозначать» и «принимать значения» уже известными и использовали семантические правила для того, чтобы дать содержание прежде не интерпретированной логической системе» (см. [12]).

Исходя из этих двух отношений, можно построить соответствующие две семантики: B -семантику и V -интерпретацию, для языка классической сентенциальной логики (логики высказываний).

Отметим, что V -интерпретация уже построена выше (см. 2).

B -семантика

1. Всякая сентенциальная переменная A либо обозначает истину, либо A обозначает ложь.

2.1. $\sim A$ обозначает ложь е.т.е. A обозначает истину.

2.2. $\sim A$ обозначает истину е.т.е. A обозначает ложь.

3.1. $(A \wedge B)$ обозначает истину е.т.е. A обозначает истину и B обозначает истину.

3.2-4. $(A \wedge B)$ обозначает ложь в остальных случаях.

Имеем следующее соотношение между B -семантикой и V -интерпретацией:

$v(A) = 1$ соответствует тому, что A обозначает истину.

$v(A) = 0$ соответствует тому, что A обозначает ложь.

Затем фразу «Предложение обозначает ложь» в семантических правилах B -семантики заменим фразой «неверно, что предложение обозначает истину», пользуясь вышеприведенной эквивалентностью. Полученную переформулировку B -семантики назовем B^T -семантикой.

B^T -семантика

1. Всякая сентенциальная переменная A либо обозначает истину, либо неверно, что A обозначает истину.

2. $\sim A$ обозначает истину е.т.е. неверно, что A обозначает истину.

3. $(A \wedge B)$ обозначает истину е.т.е. A обозначает истину и B обозначает истину.

Соотношение B^T -семантики и V -интерпретации в этом случае будет следующее:

$v(A) = 1$ соответствует тому, что A обозначает истину.

$v(A) = 0$ соответствует тому, что неверно, что A обозначает истину.

Рассмотрение полученной формулировки B^T -семантики и правой части ее соотношения с V -интерпретацией, в которых не употребляется и не используется денотат «ложь», вызывает вопрос: является ли необходимым положение о существовании денотата «ложь»?

Для построения семантики классической логики ответ отрицательный, то есть утверждение о существовании денотата «ложь» не является необходимым, так как

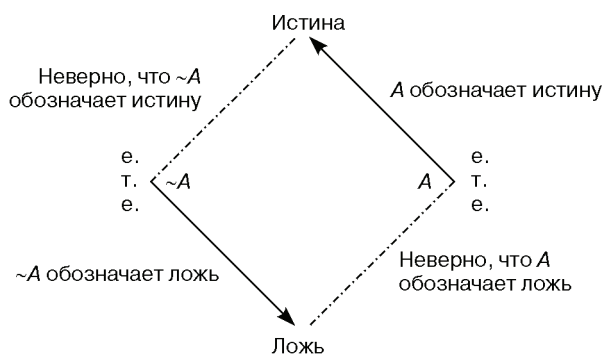
мы уже имеем B^T -семантику и соотношение последней с V -интерпретацией, в которых не используется денотат «ложь». Подчеркнем, что изменение онтологического статуса денотата «ложь» самой V -интерпретации не затрагивает, так как в ней используются аргументы и значения функции из множества $\{0, 1\}$, а не денотаты.

Чтобы эти соотношения и функции можно было рассматривать как функциональную интерпретацию языка логики CL, необходимо продолжить модификацию семантики Фреге. Коррекция будет состоять в отказе от отождествления значений функций, интерпретирующих сентенциальные связки, с денотатами соответствующих формул. Вместо последних в качестве аргументов и значений функций можно взять элементы из множества $\{1, 0\}$.

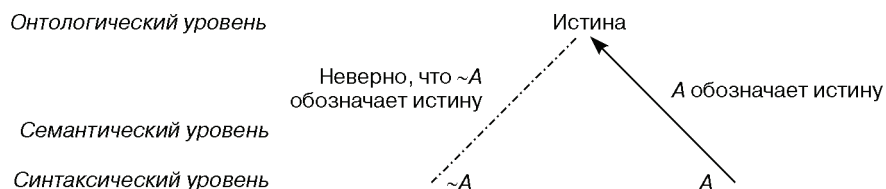
То есть теперь денотат предложения не есть значение функции — они не отождествляются. Следовательно, истина не есть аргумент или значение функции.

Отметим, что подобные же соотношения могут быть получены отбрасыванием денотата «истина». Поэтому у нас есть выбор. Однако уже Аристотель пишет «ложная же речь — это, вообще говоря, речь ни о чем» (Метафизика 1024b 30 [2]). Поэтому предпочтем отбросить как несуществующий денотат «ложь».

Проиллюстрируем вышеприведенное рассмотрение на диаграммах (стрелки символизируют отношение обозначения, пунктирные линии — отсутствие отношения обозначения):



Отбрасывая по одному из двух пар эквивалентных утверждений, получим следующую диаграмму.



Рассмотрение диаграмм показывает, что денотат «истина» является элементом, по крайней мере, трехуровневой структуры.

Таким образом, несмотря на то, что на онтологическом уровне остается только один денотат «истина», на семантическом уровне имеем два вида семантических

высказываний, в которых предложения могут либо обозначать, либо не обозначать истину. Им, в свою очередь, могут быть сопоставлены две оценки предложений.

Этих положений достаточно для обоснования семантических правил. Тем самым, исходя из того, что Фреге был платоником и допускал существование таких абстрактных предметов, как истина и ложь, из предлагаемой модификации следует, что нет необходимости в допущении существования такого абстрактного предмета, как ложь. Поэтому далее будем исходить из того, что истина существует, а ложь не существует (в качестве денотата, конечно) (см. [5; 8]). Полагаем, что У. Оккам согласился бы с таким употреблением своей бритвы: «Не умножать сущностей сверх необходимости».

Что же касается ложных предложений, то они остаются, к сожалению, то есть предикатов остается два: истинно и ложно.

Положения фрегевского учения об истинности и ложности модифицируются следующим образом: первое остается неизменным, а второе звучит так: всякое ложное предложение не обозначает истину.

Возникает вопрос относительно предложений, которые не обозначают истину. Возможны два варианта: первый — рассматривать их как пустые имена (смысл их остается неизменным), второй — полагать, что предложения, подобно понятиям или именам, имеют экстенционал и интенционал. Второй вариант предпочтительнее: не надо предложения рассматривать как имена, но предложения будут иметь пустой экстенционал и непустой интенционал или смысл. Также отметим, что в обоих вариантах все предложения, которые не обозначают истину, равнообъемны (эквивалентны).

В классическом случае имеет место дилемма истины: либо предложение A обозначает истину, либо предложение $\sim A$ обозначает истину. Отметим, что в неклассическом случае принцип бивалентности не имеет места, а значит, не имеет места и дилемма истины. Тем не менее, имеется возможность построения различных семантик, несмотря на наличие только одного денотата «истина», за счет наличия двух типов отрицания и различных семантических условий. Последнее позволяет выделить класс Т-логик, а также интерпретаций, семантически основанных только на истине (единственном денотате «истина»), тем самым исходя из онтологического утверждения Фреге, гласящего что «логика есть наука о наиболее общих законах бытия истины».

6. Неформальность понятия истины в логике высказываний и его формализация в теории истины с оператором истинности

Проведенный анализ исходных предпосылок и положений, лежащих в основе построения классической логики высказываний, позволяет заново поставить вопрос о их формализации. Ведь формализованы только отношения и операции с высказываниями, но о включении в процедуру формализации самих высказываний, определяемых через истинность либо ложность предложений, речи не было. Поэтому представляет интерес провести полную формализацию логики высказываний, включая понятия истинности и ложности. Такая формализация была проведена в теории истины с оператором истинности (см. [6]).

Отметим, что понятие истины в этой теории одно и не расщепляется в зависимости от уровня рассмотрения. Теория истины строится как логическая теория с операторами истинности и ложности, которые включены в язык теории и допускают итерацию. Т-эквивалентность в общем случае не имеет места, а условием ее выполнения является выполнение принципа бивалентности. Отсюда следует, что понятие истины неустранимо (неэлиминируемо) из языка неклассической логики. Одной из ее особенностей является то, что в ней допустимы как классические, так и неклассические соотношения между операторами истинности и ложности.

В отношении классической логики высказываний имеется результат, состоящий в том, что присоединение к аксиомам этой теории принципа бивалентности ведет к логической системе, дедуктивно эквивалентной CL, то есть к классической логике высказываний.

В отношении неклассических логик присоединение к аксиомам этой теории различных положений более слабых, чем принцип бивалентности, ведет к конечному ряду неклассических логик, имеющих трех- и четырехвалентные интерпретации.

Проведенное исследование и анализ необходимых предпосылок классической логики высказываний показало, что еще есть возможность их уточнений, связанных с построением синтаксических аналогов семантических правил логики высказываний, с модификацией семантики Фреге для логики высказываний и с формализацией понятий истинности и ложности. По отношению к возможности построения неклассических логик были определены классы логик, удовлетворяющих найденным условиям. В результате имеем одну теорию истины и конечное число неклассических логик, выводимых из нее.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] *Анисов А.М.* Современная логика. — М., 2002.
- [2] *Аристотель* Метафизика // Сочинения в четырех томах. — М., 1976. — Т. 1.
- [3] *Гильберт Д., Аккерман В.* Основы теоретической логики. — М., 1947.
- [4] *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. — М., 1979.
- [5] *Павлов С.А.* Термины «истинность» и «ложность» в языке // IV Российский философский конгресс: Философия и будущее цивилизации. — М., 2005. — Т. I.
- [6] *Павлов С.А.* Исходные положения теории истины с оператором истинности // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Философия». — № 3. — 2009.
- [7] *Павлов С.А.* Модификация семантики Фреге и многозначные интерпретации // Труды научно-исследовательского семинара логического центра Института философии РАН. — Вып. XIX. — 2009.
- [8] *Павлов С.А.* Семантика с единственным денотатом истина и многозначные интерпретации // Логико-философские исследования. — Вып. 4. — М., 2010.
- [9] Синтаксические аналоги семантических правил // Материалы XI Международной научной конференции. — СПб. 2010.
- [10] *Фреге Г.* О смысле и значении // Логика и логическая семантика. — М., 2000.
- [11] *Фреге Г.* Функция и понятие // Логика и логическая семантика. — М., 2000.
- [12] *Черч А.* Введение в математическую логику. — М., 1960.

ANALYSIS OF SEMANTICS, ONTOLOGY AND SYNTAX OF THE SENTENTIAL LOGIC

Sergey A. Pavlov

Institute of Philosophy, Russian Academy of Science,
Volkhonka str., 14, Moscow, Russia, 119991

The analysis of the necessary preconditions of classical sentential logic shows that there is a possibility of clarification associated with the construction of the syntactic analogues of semantic rules of sentential logic, with a modification of Frege's semantics for sentential logic and the formalization of the concepts of truth and falsity.

Key words: classical logic, semantics, syntax, analysis.