



**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА**

Том 25 № 3 (2017)

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3

Научный журнал

Издается с 1993 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ No ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Главный редактор

Рыбаков Юрий Петрович — Заслуженный
деятель науки РФ, доктор физико-
математических наук, профессор
РУДН, Россия, rybakov_ur@rudn.university

Заместитель главного редактора

Севастьянов Леонид Антонович — доктор
физико-математических наук, профессор
РУДН, Россия,
sevastianov_la@rudn.university

Члены редколлегии

Ильгисонис Виктор Игоревич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

Самуйлов Константин Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Скубачевский Александр Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

Гупта Субхашини Датта (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

Мартикайнен Олли Эркки (Финляндия) — Ph.D., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

Медведев М. В. (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо (Испания) — профессор Барселонского университета

Саха Биджан (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Чулуунбаатар Очбадрах (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Редактор: *К. В. Зенкин*

Компьютерная вёрстка: *А. В. Королькова*

Адрес редакции:

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Адрес редакционной коллегии

серии «Математика. Информатика. Физика»:

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419

тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

Подписано в печать 24.05.2017. Выход в свет 24.05.2017. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 12,61 Тираж 500 экз. Заказ № 805. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,

тел. (495) 952-04-41, e-mail: ipk@rudn.university

ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский, французский, немецкий, испанский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

Цель и тематика

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски Журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) elibrary.ru.

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru



**RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES
AND PHYSICS**

Volume 25 Number 3 (2017)
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3
Founded in 1993
Founder: RUDN University

Editor-in-Chief

Rybakov Yu. P. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia
RUDN University, Russia,
rybakov_yp@rudn.university

Vice Editor-in-Chief

Sevastianov L. A. — DSc in Physics and Mathematics, professor
RUDN University, Russia,
sevastianov_la@rudn.university

Members of the editorial board

Il'gisonis V. I. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center “Kurchatov Institute”

Samouylov K. E. — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

Skubachevski A. L. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

Gupta Subhasish Dutta (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

Martikainen Olli Erkki (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

Medvedev M. V. (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

Ramirez Inostrozo Orlando Raphael (Spain) – DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

Saha Bijan (Bangladesh) – DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Chuluunbaatar Ochbadrah (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Editor: *K. V. Zenkin*

Computer design: *A. V. Korolkova*

Address of editorial board:

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Address of editorial board

“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “RUDN University”

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES AND PHYSICS

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year

Languages: Russian, English, French, German, Spanish

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>

Aim and Scope

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

Вихрова О. Г. К вычислению вероятностных характеристик СМО ограниченной ёмкости со случайными требованиями к ресурсам 209

Математическое моделирование

Гусев А. А. Метод конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных 217

Кулябов Д. С., Королькова А. В., Велиева Т. Р. Применение метода гармонической линеаризации к исследованию автоколебательного режима систем с управлением 234

Перепелкин Е. Е., Полякова Р. В., Коваленко А. Д., Сысоев П. Н., Садовникова М. Б., Тарелкин А. А., Юдин И. П. Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом в математическом моделировании магнитных систем 253

Физика

Рыбаков Ю. П., Искандар М., Ахмед А. Б. Магнитные возбуждения графена в рамках 8-спинорной реализации киральной модели 266

Рудой Ю. Г., Оладимеджи Е. О. Оператор давления для осциллятора Пёшля–Теллера 276

Чистяков В. В. Об эволюции сходящегося волнового пакета перевёрнутого квантового осциллятора, вынуждаемого однородным гармоническим полем . . 283

Информатика и вычислительная техника

Панкратов А. С., Пшеунов А. Х. Современные технологии интеграции информации из независимых источников и их применение при построении информационной системы, объединяющей транспортные расписания 295

Сведения об авторах 306

Правила оформления статей 308

CONTENTS

Mathematical Theory of Teletraffic and Telecommunication Networks

Vikhrova O. G. About Probability Characteristics Evaluation in Queuing System
with Limited Resources and Random Requirements 209

Mathematical Modeling

Gusev A. A. High-Accuracy Finite Element Method for Solving Boundary-Value
Problems for Elliptic Partial Differential Equations 217

Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Velieva T. R. Application of the Harmonic
Linearization Method to the Study a Control Systems with a Self-Oscillatory Regime 234

**Perepelkin E. E., Polyakova R. V., Kovalenko A. D., Sysoev P. N.,
Sadovnikova M. B., Tarelkin A. A., Yudin I. P.** The Boundary Value
Problem for Elliptic Equation in the Corner Domain in the Numerical Simulation
of Magnetic Systems 253

Physics

Rybakov Yu. P., Iskandar M., Ahmed A. B. Magnetic Excitations of
Graphene in 8-Spinor Realization of Chiral Model 266

Rudoy Yu. G., Oladimeji E. O. Pressure Operator for the Pöeschl–Teller
Oscillator 276

Chistyakov V. V. On the Evolution of Converging Wave Packet of an Inverted
Quantum Oscillator Driven by Homogeneous Harmonic Field 283

Computer Science and Computer Engineering

Pankratov A. S., Psheunov A. Kh. Modern Technologies of Information In-
tegration from Independent Sources and their Application in the Construction of
an Information System that Combines Transport Timetables 295

Information about the authors 306

Guidelines for Authors 308

Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

УДК 519.21;51-74

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-209-216

К вычислению вероятностных характеристик СМО ограниченной ёмкости со случайными требованиями к ресурсам

О. Г. Вихрова

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Для современных сетей связи характерен высокий уровень роста мобильного трафика данных. Устойчивые тенденции роста нагрузки в беспроводных сетях ускоряют развитие технологий и переход к сетям нового поколения (5G). Планируемые улучшения позволят в несколько раз увеличить пропускную способность каналов связи и позволят устройствам одновременно поддерживать как соединения сотовой связи, так и, например, подключение к Wi-Fi сетям, возможна передача данных от устройства к устройству напрямую (device-to-device, D2D). В условиях вынужденной гетерогенности сетей связи предлагается отказаться от традиционной «парной» ассоциации восходящего (ВК) и нисходящего (НК) каналов и разделять их при условии гарантии необходимого уровня качества. Разделение ресурсов в современных гетерогенных сетях предлагается моделировать в виде системы массового обслуживания (СМО) со случайными требованиями. Подобные модели к анализу показателей качества в беспроводных сетях ранее не применялись. Исследуется многолинейная СМО с различными классами заявок, где каждой поступившей заявке выделяется некоторый вектор случайных требований к ресурсам. Было доказано, что при объединении потоков заявок различных классов в один поток со средневзвешенным требованием стационарные вероятности не зависят от порядка поступления заявок, а зависят от их общего числа в системе и объёма занимаемых ресурсов. Получен более простой вид формул для вероятности блокировки и среднего объёма занятых ресурсов, однако аналитические формулы требуют вычисления n -кратных свёрток для всех возможных наборов векторов занимаемых ресурсов, где n — количество заявок в системе. Был разработан эффективный алгоритм вычисления нормировочной константы, с помощью которой получены рекуррентные формулы для стационарных вероятностей и основных вероятностных характеристик СМО.

Ключевые слова: ресурсная СМО, ограниченная ёмкость, требования случайного объёма, нормировочная константа, вероятностные характеристики, рекуррентный алгоритм, гетерогенная сеть

1. Введение

Стремительный рост популярности мобильных приложений, по мнению представителей инфокоммуникационной отрасли, способствует активному развитию технологии 4G и уже к 2020 году приведёт к полномасштабному развёртыванию инфраструктур для технологии поколения 5G [1]. Изменения затронут физический уровень с целью повышения скорости передачи данных, а также коснутся сетевой архитектуры, современные мобильные устройства могут работать в двух режимах — поддерживать сотовое соединения и подключаться к частным сетям малых сот

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.а03.21.0008) и РФФИ в рамках проектов № 15-07-03051, 16-07-00766.

(микро-, пико-, фемтосот) [2]. Новый класс прямых соединений устройств D2D, которые могут осуществляться как внутри полосы пропускания, так и вне выделенной полосы, позволят производить обмен данными минуя базовые станции и не создавать дополнительную нагрузку на существующие каналы [3]. Все предложенные изменения подразумевают более эффективное использование и разделение ресурсов и позволят существенно улучшить пропускную способность беспроводных каналов передачи данных.

Принцип гетерогенности сетей, согласно которому происходит наложение зон покрытия макросот и малых сот, оказался самым доступным и бюджетным способом улучшить пропускную способность сетей LTE. Концепция разделения ВК и НК была предложена в [4] и, по мнению авторов, должна повысить эффективность использования радиоресурсов беспроводных сетей. Приведённые в [5, 6] аналитические исследования и результаты имитационного моделирования свидетельствуют о существенном выигрыше в производительности сети при раздельной ассоциации.

Существующие модели разделения радиоресурсов в гетерогенных сетях позволяют определить параметры сети при фиксированном количестве пользовательских устройств и не принимают во внимание процессы установления новых соединений и завершения существующих. Чтобы иметь возможность наблюдать за показателями качества сети в динамике, в [7] предложена модель разделения ресурсов со следующими предположениями:

- 1) поступивший запрос на установление соединения с базовой станцией требует некоторый случайный объем ресурсов нескольких типов;
- 2) если для обслуживания соединения недостаточно ресурсов, то запрос будет отклонён;
- 3) устройство занимает требуемый объем ресурсов на все время обслуживания и освобождает его по завершении обслуживания.

Модель с требованиями случайного объёма была представлена в [8], её анализ в общем виде предложен автором в [9]. В [10] исследуется общая модель с ограниченным ресурсом и требованиями случайного объёма к различным типам ресурсов. Ресурсы занимают на все время обслуживания, а по его окончании освобождается ровно тот объем ресурсов, который занимался. Случайный процесс, описывающий поведение системы, должен учитывать объёмы занятых ресурсов каждой из заявок, что существенно усложняет его анализ. Было предложено упрощение, согласно которому по завершении обслуживания заявки освобождается некий случайный вектор ресурсов, не зависящий от поведения системы в прошлом при заданной числе заявок и векторе занятых ресурсов.

В [11] и [12] с помощью имитационного моделирования были получены вероятностные характеристики исходной и упрощённой моделей, а также были найдены стационарные вероятности в предположении о пуассоновском входящем потоке заявок и экспоненциальном времени их обслуживания. Было доказано, что полученные значения стационарных вероятностей для обеих моделей эквивалентны. Представленные в работе результаты являются продолжением исследований в [13, 14].

2. Математическая модель

Рассматривается многолинейная СМО ограниченной ёмкости. Число приборов для обслуживания в системе не превышает N , а доступный ресурс ограничен вектором $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_M)$. В систему поступает поток заявок L классов, каждой из заявок класса l для обслуживания необходимо выделить вектор $\mathbf{r}_l = (r_{1l}, \dots, r_{Ml})$ случайных требований к ресурсам M типов. Все значения векторов \mathbf{r}_l независимы от входящего потока и независимы в совокупности. Моменты поступления заявок l -го класса подчинены пуассоновскому распределению с интенсивностью λ_l , а времена обслуживания заявок независимы от процесса поступления заявок, независимы в совокупности и распределены экспоненциально с параметром μ_l .

Заявка l -го класса займёт \mathbf{r}_l единиц ресурсов с вероятностью p_{l,\mathbf{r}_l} . Если выражение $p_{l,\mathbf{r}}^{(k)} = \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{R}} p_{l,\mathbf{j}} p_{l,\mathbf{j}}^{(k-1)}$ является k -кратной свёрткой вероятностей p_{l,\mathbf{r}_l} , тогда все k_l заявок класса l займут \mathbf{r} единиц ресурсов с вероятностью $p_{l,\mathbf{r}}^{(k_l)}$. В [14] было доказано, что распределение стационарных вероятностей рассматриваемой СМО имеет вид (1) с начальным значением (2):

$$q_{1,\dots,L}^n(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L) = q_0 \sum_{k_1+\dots+k_L=n} p_{1,\mathbf{r}_1}^{(k_1)} \dots p_{L,\mathbf{r}_L}^{(k_L)} \frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{\rho_L^{k_L}}{k_L!}, \quad (1)$$

$$q_0 = \left(\sum_{n=0}^N \sum_{k_1+\dots+k_L=n} \sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{R}} p_{1,\mathbf{r}_1}^{(k_1)} \dots p_{L,\mathbf{r}_L}^{(k_L)} \frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{\rho_L^{k_L}}{k_L!} \right)^{-1}. \quad (2)$$

Введём функцию $g_k(\mathbf{r})$, просуммировав вероятности $q_{1,\dots,L}^k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L)$ по всем векторам занятых ресурсов $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_L$:

$$g_k(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!}. \quad (3)$$

Теорема 1. *Распределение стационарных вероятностей СМО с объединённым входящим потоком со средневзвешенным требованием $p_{\mathbf{r}} = \sum_{l=1}^L \frac{\rho_l}{\rho} p_{l,\mathbf{r}_l}$, где $\rho = \sum_{l=1}^L \rho_l$, задаётся формулами:*

$$q_k(\mathbf{r}) = q_0 \frac{\rho^k}{k!} p_{\mathbf{r}}^{(k)}, \quad q_0 = \left(\sum_{k=0}^N \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \frac{\rho^k}{k!} p_{\mathbf{r}}^{(k)} \right)^{-1}. \quad (4)$$

Доказательство. Просуммируем обе части равенства (1) по всем векторам \mathbf{r}_l , $\mathbf{r}_1 + \dots + \mathbf{r}_L = \mathbf{r}$

$$\sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} q_{1,\dots,L}^k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L) = \sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} q_0 p_{1,\mathbf{r}_1}^{(k_1)} \dots p_{L,\mathbf{r}_L}^{(k_L)} \frac{\rho_1^{k_1}}{k_1!} \dots \frac{\rho_L^{k_L}}{k_L!},$$

$$\sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} q_{1,\dots,L}^k(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_L) = q_0 \sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!},$$

$$q_k(\mathbf{r}) = q_0 \sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!}, \quad q_k(\mathbf{r}) = q_0 g_k(\mathbf{r}).$$

Покажем теперь, что $g_k(\mathbf{r})$ является k -кратной свёрткой вероятностей $p_{\mathbf{r}}$ и $g_k(\mathbf{r}) = \frac{\rho^k}{k!} p_{\mathbf{r}}^{(k)}$. Пусть $\mathbf{z}^{\mathbf{r}} = (z_1^{r_1}, \dots, z_M^{r_M})$, тогда производящая функция $\Pi(\mathbf{z})$ для $g_k(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\Pi(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} g_k(\mathbf{r}) \mathbf{z}^{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!} \right) \mathbf{z}^{\mathbf{r}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \left(\sum_{\mathbf{r}_1+\dots+\mathbf{r}_L=\mathbf{r}} \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!} \mathbf{z}^{\mathbf{r}_l} \right) = \sum_{k_1+\dots+k_L=k} \prod_{l=1}^L \frac{\rho_l^{k_l}}{k_l!} \pi_l^{k_l}(\mathbf{z}) = \\
&= \frac{1}{k!} \left(\sum_{k_1+\dots+k_L=k} \frac{k!}{k_1! \dots k_L!} \prod_{l=1}^L (\rho_l \pi_l(\mathbf{z}))^{k_l} \right) = \frac{1}{k!} \left(\sum_{l=1}^L \rho_l \pi_l(\mathbf{z}) \right)^k = \frac{\rho^k}{k!} \left(\sum_{l=1}^L \frac{\rho_l}{\rho} \pi_l(\mathbf{z}) \right)^k,
\end{aligned}$$

где $\pi_l(\mathbf{z}) = \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \sum_{\mathbf{r}_l=0}^{\mathbf{r}} p_{l,\mathbf{r}_l}^{(k_l)} \mathbf{z}^{\mathbf{r}_l}$ также является производящей функцией. Произведение k функций $\pi_l(\mathbf{z})$ является k -кратной свёрткой средневзвешенного требования $p_{\mathbf{r}}$, т.е.

$$g_k(\mathbf{r}) = \frac{\rho^k}{k!} \left(\sum_{l=1}^L \frac{\rho_l}{\rho} p_{l,\mathbf{r}_l} \right)^{(k)} = \frac{\rho^k}{k!} p_{\mathbf{r}}^{(k)}.$$

Теорема 1 позволяет получить аналитические формулы для вероятности блокировки B и среднего объёма занятых ресурсов \mathbf{b} :

$$B = 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}} p_{\mathbf{j}}^{(n+1)}, \quad \mathbf{b} = q_0 \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{j}} \mathbf{j} p_{\mathbf{j}}^{(n)}. \quad (5)$$

3. Рекуррентный алгоритм

Формулы (5) требуют вычисления k -кратных свёрток вероятностей $p_{\mathbf{r}}$ для всех возможных векторов $\mathbf{r} \leq \mathbf{R}$. Чтобы понизить вычислительную сложность формул, был разработан алгоритм для вычисления нормировочной константы $G(N, \mathbf{R}) = q_0^{-1}$, аналогичный алгоритму в [15]. С помощью нормировочной константы были получены рекуррентные формулы для нахождения вероятностных характеристик СМО.

Введём обозначение:

$$G(n, \mathbf{r}) = \sum_{k=0}^n \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}}^{(k)} \frac{\rho^k}{k!}, \quad n \geq 0, \quad \mathbf{r} \geq \mathbf{0}.$$

Теорема 2. Функция $G(n, \mathbf{r})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (6) с начальными условиями (7):

$$G(n, \mathbf{r}) = G(n-1, \mathbf{r}) + \frac{\rho}{n!} \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}} (G(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{j}) - G(n-2, \mathbf{r}-\mathbf{j})), \quad (6)$$

$$G(0, \mathbf{r}) = 1, \quad \mathbf{r} \geq \mathbf{0}, \quad G(1, \mathbf{r}) = 1 + \rho \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{r}} p_{\mathbf{j}}. \quad (7)$$

Доказательство. Зададим шаг индукции:

$$G(n, \mathbf{r}) - G(n-1, \mathbf{r}) = \sum_{n=0}^N \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} \frac{\rho^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} \frac{\rho^n}{n!} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} p_{\mathbf{r}}^{(n)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{r}} \sum_{i=0}^{\mathbf{j}} p_i p_{j-i}^{(n-1)} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^{\mathbf{r}} p_i \sum_{j=\vec{i}}^{\mathbf{r}} p_{j-i}^{(n-1)} = \frac{\rho^n}{n!} \sum_{i=0}^{\mathbf{r}} p_i \left(\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{j=0}^{\mathbf{r}-i} p_j^{(n-1)} \right) = \\
 &= \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{r}} p_j (G(n-1, \mathbf{r}-\mathbf{j}) - G(n-2, \mathbf{r}-\mathbf{j})).
 \end{aligned}$$

Следствие 1. Вероятность блокировки системы B вычисляется по формуле:

$$B = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_j G(N-1, \mathbf{R}-\mathbf{j}). \quad (8)$$

Доказательство. Получим из (4) рекуррентную формулу для вероятности блокировки СМО с учётом (6):

$$\begin{aligned}
 B &= 1 - q_0 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_j^{(n+1)} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} \sum_{i=0}^{\mathbf{j}} p_i p_{j-i}^{(n)} = \\
 &= 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{i=0}^{\mathbf{R}} p_i \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\rho^n}{n!} \sum_{j=0}^{\mathbf{R}-i} p_j^{(n)} = 1 - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{j=0}^{\mathbf{R}} p_j G(N-1, \mathbf{R}-\mathbf{j}).
 \end{aligned}$$

Следствие 2. Средний объем занятых ресурсов \mathbf{b} вычисляется по формуле:

$$\mathbf{b} = \mathbf{R} - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m). \quad (9)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b} &= \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N q_n(\mathbf{j}) = \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{j=r}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N G^{-1}(N, \mathbf{R}) \frac{\rho^n}{n!} p_j^n = \\
 &= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \left(\sum_{j=0}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n - \sum_{j=r}^{\mathbf{R}-r} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_j^n + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) = \\
 &= G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \left(G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{R}-\mathbf{r}) + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_r^n \right) = \\
 &= \mathbf{R} - G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{m=1}^M \mathbf{e}_m \sum_{i=1}^{R_m} G(N, \mathbf{R} - i\mathbf{e}_m).
 \end{aligned}$$

Следствие 3. Второй момент числа занятых ресурсов может быть найден по формуле:

$$\mathbf{b}^{(2)} = 2 \left[\mathbf{b} + G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{r=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) \right], \quad (10)$$

где $\mathbf{b}^2 = (b_1^2, \dots, b_M^2)$. Тогда дисперсия объёма занятых ресурсов $\sigma^2 = \mathbf{b}^{(2)} - \mathbf{b}^2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^{(2)} &= 2 \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{r}}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N q_n(\mathbf{j}) = 2 \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \sum_{\mathbf{j}=\mathbf{r}}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N G^{-1}(N, \mathbf{R}) \frac{\rho^n}{n!} p_{\mathbf{j}}^n = \\ &= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \left(\sum_{\mathbf{j}=\mathbf{r}}^{\mathbf{R}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_{\mathbf{j}}^n - \sum_{\mathbf{j}=0}^{\mathbf{R}-\mathbf{r}} \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_{\mathbf{j}}^n + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_{\mathbf{r}}^n \right) = \\ &= 2G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} \left(G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{R} - \mathbf{j}) + \sum_{n=0}^N \frac{\rho^n}{n!} p_{\mathbf{r}}^n \right) = \\ &= 2 \left[\mathbf{b} + G^{-1}(N, \mathbf{R}) \sum_{\mathbf{r}=0}^{\mathbf{R}} \mathbf{r} (G(N, \mathbf{R}) - G(N, \mathbf{r})) \right]. \end{aligned}$$

4. Заключение

Многолинейную СМО ограниченной ёмкости с вектором случайных требований к ресурсам и несколькими классами заявок предлагается анализировать в виде СМО с объединённым входящим потоком средневзвешенных требований без потери точности. В качестве эффективного метода расчёта стационарных вероятностей и вероятностных характеристик упрощённой СМО был разработан рекуррентный алгоритм вычисления нормировочной константы и получены рекуррентные формулы для вероятности блокировки и среднего объёма и дисперсии занятых ресурсов.

Литература

1. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016-2021. — 2017. — <http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.html>.
2. Femtocells: Past, Present, and Future / J. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, S. Rangan // IEEE JSAC. — 2012. — Vol. 30, No 3. — Pp. 497–508.
3. Device-to-Device Communications for National Security and Public Safety / G. Fodor, S. Parkvall, S. Sorrentino, P. Wallentin, Q. Lu, N. Brahmhi // IEEE Access. — 2014. — Vol. 2, No 1. — Pp. 1510–1520.
4. Why to Decouple the Uplink and Downlink in Cellular Networks and How To Do It / F. Boccardi, J. Andrews, H. Elshaer, M. Dohler, S. Parkvall, P. Popovski, S. Singh // IEEE Communications Magazine. — 2016. — Vol. 54, No 3. — Pp. 110–117.
5. Singh S., Zhang X., Andrews J. Joint Rate and SINR Coverage Analysis for Decoupled Up-link-Downlink Biased Cell Associations in HetNets // IEEE Transactions on Wireless Communication. — 2015. — Vol. 14, No 10. — Pp. 5360–5373.
6. Downlink and Uplink Decoupling: A Disruptive Architectural Design for 5G Networks / H. Elshaer, F. Boccardi, M. Dohler, R. Irmer // Global Communications Conference (GLOBECOM). — 2014. — Pp. 1798–1803.
7. LTE Performance Analysis Using Queuing Systems with Finite Resources and Random Requirements / V. Naumov, K. Samouylov, E. Sopin, N. Yarkina, S. Andreev, A. Samuylov // 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, 6–8 Oct. 2015. — IEEE, 2015. — Pp. 100–103.

8. *Тихоненко О. М.* Определение характеристик систем обслуживания с ограниченной памятью // Автоматика и телемеханика. — 1997. — Вып. 6. — С. 105–110.
9. *Тихоненко О. М.* Обобщенная задача Эрланга для систем обслуживания с ограниченным суммарным объемом // Проблемы передачи информации. — 2005. — Т. 41, вып. 3. — С. 64–75.
10. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е.* О моделировании систем массового обслуживания с множественными ресурсами // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — № 3. — С. 58–62.
11. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Самуйлов А. К.* О суммарном объеме ресурсов, занимаемых обслуживаемыми заявками // Автоматика и телемеханика. — 2016. — Вып. 8. — С. 125–135.
12. Two Approaches to Analysis of Queuing Systems with Limited Resources / V. Naumov, K. Samuoylov, E. Sopin, S. Andreev // Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, 6–8 Oct. 2014. — IEEE, 2014. — Pp. 485–488.
13. *Samouylov K., Sopin E., Vikhrova O.* Analyzing Blocking Probability in LTE Wireless Network via Queuing System with Finite Amount of Resources // Communications in Computer and Information Science. — 2015. — Vol. 564. — Pp. 393–403.
14. *Самуйлов К., Сопин Э., Вихрова О.* К разработке эффективных вычислительных алгоритмов нахождения вероятности блокировки для системы со случайными требованиями // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ–2016): 15-я Международная конференция имени А. Ф. Терпугова. — Т. 1. — Изд-во Том. ун-та, 2016. — С. 192–197.
15. *Buzen J. P.* Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers // Communications of the ACM. — 1973. — Vol. 19, No 9. — Pp. 527–531.

UDC 519.21;51-74

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-209-216

About Probability Characteristics Evaluation in Queuing System with Limited Resources and Random Requirements

O. G. Vikhrova

*Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

Mobile data traffic increases on everyday basis for the last decade and is going to keep this trend in the near future. Exponential growth of data traffic in wireless networks accelerates the development of new technologies and the transition to 5G networks. The ongoing improvements will allow to increase the channels throughput and will allow devices to simultaneously support both cellular and Wi-Fi networks, and even allow direct device-to-device (D2D) connection without any base station involved. Evolving heterogeneous networks promise more efficient radio resources usage by a macro cell traffic offloading to the small cells and uplink and downlink decoupling (DUDe). A resource-sharing model in heterogeneous networks is for the first time proposed to be analyzed in terms of queuing system with random requirements. We suggest a multiserver queuing network with limited resources where each class of customers requires a random vector of resources to be served. It has been proved that stationary probabilities of the system with aggregated flow of customers with mean-weighted requirement are equal to the stationary probabilities of the suggested system. The analytical method for the key probability characteristics evaluation requires calculating all k -fold convolutions for each set of vectors requirements. We propose a recurrent computation algorithm for normalization constant evaluation and efficient formulas for blocking probability, mean volume and variance of the occupied resources.

Key words and phrases: queuing system with limited resources, random requirements, recurrent algorithm, probability characteristics, normalization constant, heterogeneous networks

References

1. Cisco Visual Networking Index: Global Mobile Data Traffic Forecast Update, 2016-2021 (2017).
URL <http://www.cisco.com/c/en/us/solutions/collateral/service-provider/visual-networking-index-vni/mobile-white-paper-c11-520862.html>
2. J. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, S. Rangan, Femtocells: Past, Present, and Future, *IEEE JSAC* 30 (3) (2012) 497–508.
3. G. Fodor, S. Parkvall, S. Sorrentino, P. Wallentin, Q. Lu, N. Brahmi, Device-to-Device Communications for National Security and Public Safety, *IEEE Access* 2 (1) (2014) 1510–1520.
4. F. Boccardi, J. Andrews, H. Elshaer, M. Dohler, S. Parkvall, P. Popovski, S. Singh, Why to Decouple the Uplink and Downlink in Cellular Networks and How To Do It, *IEEE Communications Magazine* 54 (3) (2016) 110–117.
5. S. Singh, X. Zhang, J. Andrews, Joint Rate and SINR Coverage Analysis for Decoupled Up-link-Downlink Biased Cell Associations in HetNets, *IEEE Transactions on Wireless Communication* 14 (10) (2015) 5360–5373.
6. H. Elshaer, F. Boccardi, M. Dohler, R. Irmer, Downlink and Uplink Decoupling: A Disruptive Architectural Design for 5G Networks, *Global Communications Conference (GLOBECOM)* (2014) 1798–1803.
7. V. Naumov, K. Samouylov, E. Sopin, N. Yarkina, S. Andreev, A. Samuylov, LTE Performance Analysis Using Queuing Systems with Finite Resources and Random Requirements, in: *7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*, 6–8 Oct. 2015, IEEE, 2015, pp. 100–103. doi:10.1109/ICUMT.2015.7382412.
8. O. M. Tikhonenko, Destricted Capacity Queuing Systems: Determination of their Characteristics , *Automation and Remote Control* 58 (1997) 969–973.
9. O. M. Tikhonenko, Generalized Erlang Problem for Service Systems with Finite Total Capacity, *Problems of Information Transmission* 41 (2005) 243–253.
10. V. A. Naumov, K. E. Samouylov, On the Modeling of Queuing Systems with Multiple Resources, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2014) 58–62.
11. V. A. Naumov, K. E. Samouylov, A. K. Samouylov, On the Total Amount of Resources Occupied by Serviced Customers, *Automation and Remote Control* 77 (2016) 1419–1427.
12. V. Naumov, K. Samuoylov, E. Sopin, S. Andreev, Two Approaches to Analysis of Queuing Systems with Limited Resources, in: *Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*, 6–8 Oct. 2014, IEEE, 2014, pp. 485–488. doi:10.1109/ICUMT.2014.7002149.
13. K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, Analyzing Blocking Probability in LTE Wireless Network via Queuing System with Finite Amount of Resources, *Communications in Computer and Information Science* 564 (2015) 393–403.
14. K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, On Design of Efficient Algorithm for Blocking Probability Calculation in Queuing System with Random Requirements, in: *Information technologies and mathematical modelling (ITMM–2016): XV International Scientific Conference named after A. F. Terpugov*, Vol. 1, Tomsk State University, 2016, pp. 192–197.
15. J. P. Buzen, Computational Algorithms for Closed Queueing Networks with Exponential Servers, *Communications of the ACM* 19 (9) (1973) 527–531.

Математическое моделирование

УДК 517.958, 530.145.6, 519.632.4

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233

Метод конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных

А. А. Гусев

*Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Предложена новая вычислительная схема метода конечных элементов высокого порядка точности решения краевых задач для эллиптического уравнения в частных производных, сохраняющая непрерывность производных приближенного решения в ограниченной области многомерного евклидова пространства. Кусочно-непрерывный базис метода конечных элементов генерируется с помощью интерполяционных полиномов Эрмита нескольких переменных и обеспечивает непрерывность не только приближенного решения, но и его производных до заданного порядка на границах конечных элементов в зависимости от гладкости переменных коэффициентов уравнения и границы области. Эффективность и порядок точности вычислительной схемы, алгоритма и программы демонстрируется на примере точно-решаемой краевой задачи на собственные значения для треугольной мембраны в зависимости от числа конечных элементов разбиения области и от размерности собственного вектора алгебраической задачи. Показано, что для достижения заданной точности приближенного решения схемой метода конечных элементов с интерполяционными полиномами Эрмита длина собственного вектора примерно в два раза меньше, чем для схем с интерполяционными полиномами Лагранжа, сохраняющих на границах конечных элементов только непрерывность приближенного решения. Вычислительная схема метода конечных элементов высокого порядка точности ориентирована на расчёты спектральных и оптических характеристик квантовомеханических систем.

Ключевые слова: эллиптические уравнения в частных производных, краевые задачи на собственные значения, метод конечных элементов, интерполяционные полиномы

1. Введение

В работах [1, 2] разработаны символьно-численные алгоритмы и программы решения краевых задач для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка методом конечных элементов (МКЭ) высокого порядка точности с применением интерполяционных полиномов Эрмита (ИПЭ). Такая реализация МКЭ в отличие от традиционной с использованием интерполяционных полиномов Лагранжа (ИПЛ) обеспечивает непрерывность производных до заданного порядка приближенного решения не только на конечных элементах сетки, но и на границах конечных элементов [3], т.е. обеспечивает законы сохранения тока носителей заряда в квантово-размерных полупроводниковых системах или тока вероятности в квантовомеханических задачах рассеяния [4]. Вычислительная схема МКЭ решения с высокой точностью краевых задач на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных в ограниченной области двумерного пространства с применением ИПЛ дана в работе [5]. Обобщение вычислительной схемы МКЭ для решения эллиптических краевых задач с применением ИПЭ составляет цель данной работы.

Статья поступила в редакцию 31 марта 2017 г.

Автор благодарит О. Чулуунбаатара, С.И. Виницкого, В.Л. Дербова, В.П. Гердта, А. Гужджа и Л.А. Севастьянова за сотрудничество.

Работа поддержана РФФИ (грант 16-01-00080).

В настоящей работе представлена вычислительная схема МКЭ решения с высокой точностью эллиптических краевых задач в ограниченной области многомерного евклидова пространства, заданного в виде многогранника. Кусочно-непрерывный базис МКЭ генерируется с помощью ИПЭ нескольких переменных и обеспечивает непрерывность не только приближенного решения, но и его производных до заданного порядка в зависимости от гладкости переменных коэффициентов уравнения и границы области. Эффективность вычислительной схемы, алгоритма и программы демонстрируется на примере эталонной точно-решаемой краевой задачи на собственные значения для треугольной мембраны.

Структура работы следующая. В разделе 2 дана постановка задачи. В разделе 3 дана формулировка вычислительной схемы МКЭ с применением ИПЭ нескольких переменных. В разделе 4 представлены результаты расчётов эталонной краевой задачи, демонстрирующие эффективность вычислительной схемы и порядок точности по числу конечных элементов разбиения области и числу кусочно-полиномиальных функций при различных ИПЭ двух переменных. В заключительном разделе даны перспективы развития и применения предложенных вычислительных схем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим самосопряжённую краевую задачу для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка:

$$(D - E)\Phi(z) \equiv \left(-\frac{1}{g_0(z)} \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial}{\partial z_i} g_{ij}(z) \frac{\partial}{\partial z_j} + V(z) - E \right) \Phi(z) = 0. \quad (1)$$

Для коэффициентов главной части (1) выполняется условие равномерной эллиптичности в ограниченной области $z=(z_1, \dots, z_d) \in \Omega$ евклидова пространства \mathcal{R}^d , т.е. существуют константы $\mu > 0$, $\nu > 0$ такие, что

$$\mu \xi^2 \leq \sum_{i,j=1}^d g_{ij}(z) \xi_i \xi_j \leq \nu \xi^2, \quad \xi^2 = \sum_{i=1}^d \xi_i^2 \quad \forall \xi \in \mathcal{R}^d.$$

Также предполагается, что $g_0(z) > 0$, $g_{ji}(z) = g_{ij}(z)$ и $V(z)$ — функции, непрерывные вместе со своими обобщёнными производными до заданного порядка в области, $z \in \Omega = \Omega \cup \partial\Omega$ с кусочно-полиномиальной границей $S = \partial\Omega$, обеспечивают существование нетривиальных решений, подчинённых граничным условиям первого (I), второго (II) или третьего (III) рода [6, 7]:

$$\begin{aligned} (I) : \quad & \Phi(z)|_S = 0, \\ (II) : \quad & \frac{\partial \Phi(z)}{\partial n_D} \Big|_S = 0, \\ (III) : \quad & \frac{\partial \Phi(z)}{\partial n_D} \Big|_S + \sigma(s)\Phi(z)|_S = 0, \quad \frac{\partial \Phi(z)}{\partial n_D} = \sum_{i,j=1}^d (\hat{n}, \hat{e}_i) g_{ij}(z) \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z_j}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\sigma(s) = \sigma(s(z))$ — известная функция на границе области $s(z) \in S$, $\partial \Phi_m(z)/\partial n_D$ — производная по направлению конормали, \hat{n} — внешняя нормаль к границе области $S = \partial\Omega$, \hat{e}_i — единичный вектор вектора $z = \sum_{i=1}^d \hat{e}_i z_i$, (\hat{n}, \hat{e}_i) — скалярное произведение в \mathcal{R}^d .

Для задачи дискретного спектра собственные функции $\Phi_m(z)$ из пространства Соболева $H_2^{s \geq 1}(\Omega)$, $\Phi_m(z) \in H_2^{s \geq 1}(\Omega)$, соответствующие собственным значениям энергии E : $E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_m \leq \dots$ удовлетворяют условиям нормировки и ортогональности

$$\langle \Phi_m(z) | \Phi_{m'}(z) \rangle = \int_{\Omega} g_0(z) \bar{\Phi}_m(z) \Phi_{m'}(z) dz = \delta_{mm'}, \quad dz = dz_1 \dots dz_d. \quad (3)$$

Решение МКЭ краевых задач (1)–(3) сводится к нахождению стационарных точек вариационного функционала [7, 8]

$$\begin{aligned} \Xi(\Phi_m, E_m, z) &\equiv \int_{\Omega} g_0(z) \bar{\Phi}_m(z) (D - E_m) \Phi(z) dz = \\ &= \Pi(\Phi_m, E_m, z) - \oint_S \bar{\Phi}_m(z) \frac{\partial \Phi_m(z)}{\partial n_D} ds, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\Pi(\Phi_m, E_m, z)$ – симметричный квадратичный функционал вида

$$\Pi(\Phi_m, E_m, z) = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^d g_{ij}(z) \frac{\partial \bar{\Phi}_m(z)}{\partial z_i} \frac{\partial \Phi_m(z)}{\partial z_j} + g_0(z) \bar{\Phi}_m(z) \Phi_m(z) (V(z) - E_m) \right] dz. \quad (5)$$

Поверхностный интеграл в (4) вычисляется с учётом (2).

3. Вычислительная схема МКЭ

В МКЭ область $\Omega = \Omega_h(z) = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, заданная в виде многогранника, покрывается конечными элементами, в данном случае симплексами Δ_q с $d+1$ вершинами $\hat{z}_i = (\hat{z}_{i1}, \hat{z}_{i2}, \dots, \hat{z}_{id})$ при $i = 0, \dots, d$. Каждое ребро симплекса Δ_q разбиваем на p равных частей и проводим семейства параллельных гиперплоскостей $H(i, k)$, нумеруя каждую целым числом от $k = 0, \dots, p$, начиная от соответствующей грани, например, как показано при $d = 2$ на рис. 1 (см. также [9, С. 220]). Уравнение гиперплоскости $H(i, k)$: $H(i, z) - k/p = 0$, где $H(i, z)$ – линейная функция от z .

Узловые точки пересечения гиперплоскостей A_r нумеруем наборами целых чисел $[n_0, \dots, n_d]$, $n_i \geq 0$, $n_0 + \dots + n_d = p$, где n_i , $i = 0, 1, \dots, d$ – номера гиперплоскостей, параллельных грани симплекса, не содержащей i -вершину $\hat{z}_i = (\hat{z}_{i1}, \dots, \hat{z}_{id})$. Координаты $\xi_r = (\xi_{r1}, \dots, \xi_{rd})$ узловой точки $A_r \in \Delta_q$ вычисляются по формуле

$$(\xi_{r1}, \dots, \xi_{rd}) = (\hat{z}_{01}, \dots, \hat{z}_{0d})n_0/p + (\hat{z}_{11}, \dots, \hat{z}_{1d})n_1/p + \dots + (\hat{z}_{d1}, \dots, \hat{z}_{dd})n_d/p \quad (6)$$

через координаты вершин $\hat{z}_j = (\hat{z}_{j1}, \dots, \hat{z}_{jd})$. Тогда ИПЛ $\varphi_r(z)$ равные единице в точке A_r с координатами $\xi_r = (\xi_{r1}, \dots, \xi_{rd})$, характеризуемой числами $[n_0, n_1, \dots, n_d]$, и нулю в остальных точках $\xi_{r'}$, т.е. $\varphi_r(\xi_{r'}) = \delta_{rr'}$ имеют вид

$$\varphi_r(z) = \left(\prod_{i=0}^d \prod_{n'_i=0}^{n_i-1} \frac{H(i; z) - n'_i/p}{H(i; \xi_r) - n'_i/p} \right). \quad (7)$$

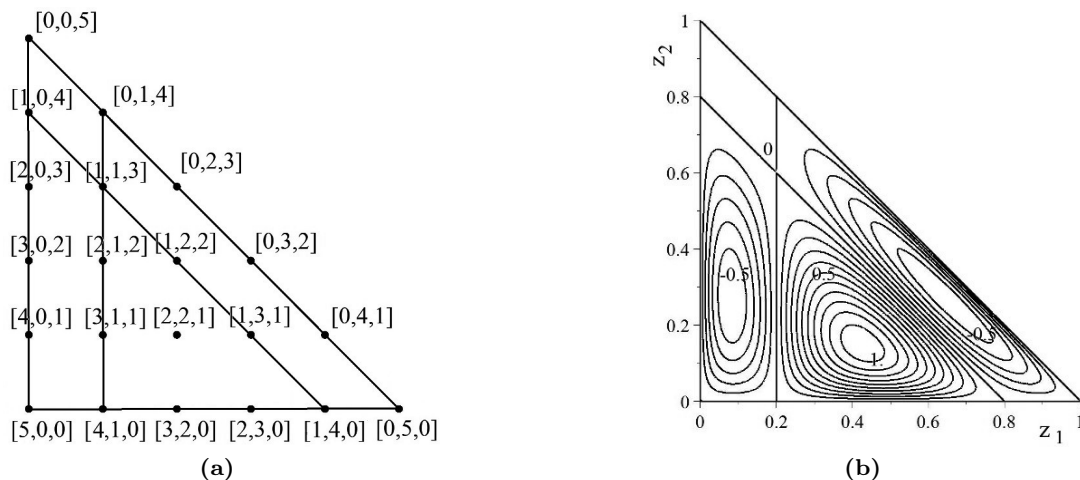


Рис. 1. (а) Нумерация узлов A_r , $r = 1, \dots, (p+1)(p+2)/2$, наборами чисел $[n_0, n_1, n_2]$ стандартного треугольного элемента Δ для схемы с ИПЛ пятого порядка $p' = p = 5$ при $d = 2$; линии (пять пересекающихся прямых) — нули ИПЛ $\varphi_{14}(z')$ из (13), равного единице в точке, пронумерованной тройкой чисел $[n_0, n_1, n_2] = [2, 2, 1]$; (б) изолинии ИПЛ $\varphi_{14}(z')$

Отметим, что построение ИПЭ $\varphi_r^k(z)$ с фиксированными значениями функций $\{\varphi_r^k(\xi_{r'})\}$ и производных $\{\partial_{\bullet}^k \varphi_r^k(z)|_{z=\xi_{r'}}\}$ в узлах $\xi_{r'}$ уже при $d = 2$ приводит к громоздким выражениям, затратным для использования в МКЭ на неравномерных сетках.

Экономичная реализация, принятая в МКЭ, следующая:

- расчёты проводятся в локальных координатах z' , в которых координаты вершин симплекса Δ следующие: $\hat{z}'_j = (\hat{z}'_{j1}, \dots, \hat{z}'_{jd})$, $\hat{z}'_{jk} = \delta_{jk}$,
- ИПЭ в исходных координатах z ищется в виде линейных комбинаций полиномов в локальных координатах z' , при этом переход в исходные координаты выполняется только на этапе численного решения конкретной краевой задачи (1)–(4),
- вычисление интегралов МКЭ выполняется в локальных координатах.

Построим ИПЭ на произвольном d -мерном симплексе Δ_q с $d+1$ вершинами $\hat{z}_i = (\hat{z}_{i1}, \hat{z}_{i2}, \dots, \hat{z}_{id})$, $i = 0, \dots, d$. Для этого введём локальную систему координат $z' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_d) \in \mathcal{R}^d$, в которой координаты вершин симплекса следующие: $\hat{z}'_i = (\hat{z}'_{ik} = \delta_{ik}, k = 1, \dots, d)$. Связь между координатами даётся формулой:

$$z_i = \hat{z}_{0i} + \sum_{j=1}^d (\hat{z}_{ji} - \hat{z}_{0i}) z'_j, \quad i = 1, \dots, d, \quad (8)$$

или в матричном виде

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{z}_{01} \\ \hat{z}_{02} \\ \dots \\ \hat{z}_{0d} \end{pmatrix} + \hat{J} \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_d \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = \begin{pmatrix} \hat{z}_{11} - \hat{z}_{01} & \hat{z}_{21} - \hat{z}_{01} & \dots & \hat{z}_{d1} - \hat{z}_{01} \\ \hat{z}_{12} - \hat{z}_{02} & \hat{z}_{22} - \hat{z}_{02} & \dots & \hat{z}_{d2} - \hat{z}_{02} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{z}_{1d} - \hat{z}_{0d} & \hat{z}_{2d} - \hat{z}_{0d} & \dots & \hat{z}_{dd} - \hat{z}_{0d} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \\ \dots \\ z'_d \end{pmatrix} = \hat{J}^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_d \end{pmatrix} - \hat{J}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{z}_{01} \\ \hat{z}_{02} \\ \dots \\ \hat{z}_{0d} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Отсюда следует связь между операторами дифференцирования

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial z'_d} \end{pmatrix} = \hat{J}^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial z_d} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial z_d} \end{pmatrix} = (\hat{J}^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z'_1} \\ \frac{\partial}{\partial z'_2} \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial z'_d} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Формула (11) применяется для вычисления ИПЭ $\varphi_r^\kappa(z') = \{\check{\varphi}_r^\kappa(z'), Q_s(z')\}$ из (21), удовлетворяющих условиям (14), (18), (19) из следующего раздела, с фиксированными производными до заданного порядка в узлах $\xi_{r'}$. При этом производные по нормали к границе элемента в исходной системе координат в общем случае не являются таковыми в локальных координатах z' . При построении ИПЭ в локальных координатах z' требуется пересчёт фиксированных производных в узлах $\xi_{r'}$ элемента Δ_q в узлы $\xi'_{r'}$ элемента Δ , используя матрицы \hat{J}^{-1} , заданные громоздкими выражениями. Поэтому требуемый пересчёт производных выполняется, используя соотношения (8)–(11), для каждого конечного элемента Δ_q на этапе формирования базиса ИПЭ $\{\varphi_r^\kappa(z')\}_{r=1}^P$ на конечном элементе Δ , который выполняется численно по аналитическим формулам, представленным в следующем разделе.

Интегралы, входящие в вариационный функционал (4) на области $\Omega_h(z) = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, выражаем через интегралы, вычисленные на элементе Δ_q , пересчитанные в локальные координаты z' на элементе Δ ,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_q} g_0(z) \varphi_r^\kappa(z) \varphi_{r'}^{\kappa''}(z) U(z) dz &= J \int_{\Delta} g_0(z(z')) \varphi_r^\kappa(z') \varphi_{r'}^{\kappa''}(z') U(z(z')) dz', \\ \int_{\Delta_q} g_{s_1 s_2}(z) \frac{\partial \varphi_r^\kappa(z)}{\partial z_{s_1}} \frac{\partial \varphi_{r'}^{\kappa''}(z)}{\partial z_{s_2}} dz &= \\ &= J \sum_{t_1, t_2=1}^d (\hat{J}^{-1})_{t_1 s_1} (\hat{J}^{-1})_{t_2 s_2} \int_{\Delta} g_{s_1 s_2}(z(z')) \frac{\partial \varphi_r^\kappa(z')}{\partial z'_{t_1}} \frac{\partial \varphi_{r'}^{\kappa''}(z')}{\partial z'_{t_2}} dz', \end{aligned} \quad (12)$$

где $J = \det \hat{J} > 0$ определитель матрицы \hat{J} , $\varphi_r^\kappa(z') = \{\check{\varphi}_r^\kappa(z'), Q_s(z')\}$ из (21), $dz' = dz'_1 \dots dz'_d$.

3.1. Интерполяционные полиномы Лагранжа

В локальных координатах ИПЛ $\varphi_r(z')$, равные единице в узловой точке ξ'_r , характеризуются числами $[n_0, n_1, \dots, n_d]$, и нулю в остальных узловых точках $\xi'_{r'}$, т.е., $\varphi_r(\xi'_{r'}) = \delta_{rr'}$ определяются по формуле (7) при $H(0; z') = 1 - z'_1 - \dots - z'_d$, $H(i; z') = z'_i$, $i=1, \dots, d$:

$$\varphi_r(z') = \left(\prod_{i=1}^d \prod_{n'_i=0}^{n_i-1} \frac{z'_i - n'_i/p}{n_i/p - n'_i/p} \right) \left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1} \frac{1 - z'_1 - \dots - z'_d - n'_0/p}{n_0/p - n'_0/p} \right). \quad (13)$$

Приравнивание числителей в (13) нулю даёт семейства уравнений прямых, направленных «горизонтально», «вертикально» и «наклонно» в локальной системе координат элемента Δ , которая связана аффинным преобразованием (8) с семействами «наклонно» расположенных прямых элемента Δ_q . На рис. 1 дан пример, иллюстрирующий построение ИПЛ при $d = 2$, $r, r' = 1, \dots, (p+1)(p+2)/2$, $p = 5$ на элементе Δ в виде прямоугольного треугольника с вершинами $\hat{z}'_0 = (\hat{z}'_{01}, \hat{z}'_{02}) = (0, 0)$, $\hat{z}'_1 = (\hat{z}'_{11}, \hat{z}'_{12}) = (1, 0)$, $\hat{z}'_2 = (\hat{z}'_{21}, \hat{z}'_{22}) = (0, 1)$.

Кусочно-полиномиальные функции $P_l(z)$, формирующие конечноэлементный базис $\{P_l(z)\}_{l=1}^P$, которые строятся путём сшивки ИПЛ $\varphi_r(z)$ из (7), получаемых из (13) с помощью преобразования (10), на конечных элементах Δ_q :

$$P_l(z) = \{\varphi_l(z), A_l \in \Delta_q; 0, A_l \notin \Delta_q\},$$

являются непрерывными, но их производные терпят разрывы на границах элементов Δ_q .

3.2. Интерполяционные полиномы Эрмита

Построим ИПЭ порядка p' , сшивкой которых можно получить кусочно-полиномиальные функции (25), сохраняющие непрерывность производных до заданного порядка κ' .

3.2.1. Вспомогательные полиномы (ВП1)

Для построения ИПЭ в локальных координатах z' введём набор вспомогательных полиномов (ВП1)

$$\begin{aligned} \varphi_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d}(\xi'_r) &= \delta_{rr'} \delta_{\kappa_1 0} \dots \delta_{\kappa_d 0}, \\ \frac{\partial^{\mu_1 \dots \mu_d} \varphi_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d}(z')}{\partial z_1^{\mu_1} \dots \partial z_d^{\mu_d}} \Big|_{z'=\xi'_r} &= \delta_{rr'} \delta_{\kappa_1 \mu_1} \dots \delta_{\kappa_d \mu_d}, \\ 0 &\leq \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_d \leq \kappa_{\max} - 1, \\ 0 &\leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_d \leq \kappa_{\max} - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь в узловых точках ξ'_r , определённых согласно (6), в отличие от ИПЛ заданы значения не только функций, но и их производных до порядка $\kappa_{\max} - 1$. ВП1 даются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_r^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_d}(z') &= w_r(z') \sum_{\mu \in \Delta_\kappa} a_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d, \mu_1 \dots \mu_d} (z'_1 - \xi'_{r1})^{\mu_1} \times \dots \times (z'_d - \xi'_{rd})^{\mu_d}, \\ w_r(z') &= \left(\prod_{i=1}^d \prod_{n'_i=0}^{n_i-1} \frac{(z'_i - n'_i/p)^{\kappa_{\max}}}{(n_i/p - n'_i/p)^{\kappa_{\max}}} \right) \left(\prod_{n'_0=0}^{n_0-1} \frac{(1 - z'_1 - \dots - z'_d - n'_0/p)^{\kappa_{\max}}}{(n_0/p - n'_0/p)^{\kappa_{\max}}} \right), \\ w_r(\xi'_r) &= 1, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты $a_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d, \mu_1 \dots \mu_d}$ вычисляются из рекуррентных соотношений, полученных в результате подстановки (15) в условия (14),

$$a_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d, \mu_1 \dots \mu_d} = \begin{cases} 0, & \mu_1 + \dots + \mu_d \leq \kappa_1 + \dots + \kappa_d, (\mu_1, \dots, \mu_d) \neq (\kappa_1, \dots, \kappa_d); \\ \prod_{i=1}^d \frac{1}{\mu_i!}, & (\mu_1, \dots, \mu_d) = (\kappa_1, \dots, \kappa_d); \\ - \sum_{\nu \in \Delta_\nu} \left(\prod_{i=1}^d \frac{1}{(\mu_i - \nu_i)!} \right) g_r^{\mu_1 - \nu_1, \dots, \mu_d - \nu_d}(\xi'_r) a_r^{\kappa_1 \dots \kappa_d, \nu_1 \dots \nu_d}, & \mu_1 + \dots + \mu_d > \kappa_1 + \dots + \kappa_d; \end{cases} \quad (16)$$

$$g^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_d}(z') = \frac{1}{w_r(z')} \frac{\partial^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_d} w_r(z')}{\partial z_1^{\kappa_1} \partial z_2^{\kappa_2} \dots \partial z_d^{\kappa_d}}.$$

При $d > 1$ и $\kappa_{\max} > 1$, число $N_{\kappa_{\max} p'}$ ИПЭ степени p' и кратности узлов κ_{\max} меньше числа полиномов $N_{1p'}$, формирующих базис в пространстве полиномов степени p' (например, ИПЛ из (13)), т.е. полиномы, удовлетворяющие (14), определены неоднозначно.

3.2.2. Вспомогательные полиномы (ВП2 и ВП3)

Для однозначного определения полиномиального базиса введём $K = N_{1p'} - N_{\kappa_{\max} p'}$ вспомогательных полиномов $Q_s(z)$ двух типов: ВП2 и ВП3, линейно-независимых от ВП1 из (15) и удовлетворяющих условиям в узловых точках ξ'_r , ВП1:

$$Q_s(\xi'_r) = 0, \quad \left. \frac{\partial^{\kappa'_1 \kappa'_2 \dots \kappa'_d} Q_s(z')}{\partial z_1^{\mu_1} \partial z_2^{\mu_2} \dots \partial z_d^{\mu_d}} \right|_{z'=\xi'_r} = 0, \quad s = 1, \dots, K, \quad (17)$$

$$0 \leq \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_d \leq \kappa_{\max} - 1, \quad 0 \leq \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_d \leq \kappa_{\max} - 1.$$

Отметим, что для обеспечения непрерывности производных часть полиномов, называемых ВП2, должны удовлетворять условию

$$\left. \frac{\partial^k Q_s(z')}{\partial n_{i(s)}^k} \right|_{z'=\eta'_{s'}} = \delta_{ss'}, \quad s, s' = 1, \dots, T_1(\kappa'), \quad k = k(s'), \quad (18)$$

где $\eta'_{s'} = (\eta'_{s'1}, \dots, \eta'_{s'd})$ – выбранные точки, лежащие на гранях всевозможных размерностей (от 1 до $d - 1$) d -мерного симплекса Δ и не совпадающие с узловыми точками ИПЭ ξ'_r , в которых выполняется (14), $\partial/\partial n_{i(s)}$ – производная по направлению вектора n_i , направленного по нормали к соответствующей i -й грани d -мерного симплекса Δ_q в точке $\eta_{s'}$ в исходной системе координат, который пересчитывается в точку $\eta'_{s'}$ грани симплекса Δ в локальной системе координат, используя соотношения (8)–(11), например, при $d = 2$ см. (23). Вычисляя число $T_1(\kappa)$ независимых параметров, требуемых для обеспечения непрерывности производных до порядка κ , определяем его максимальное значение κ' , которое можно получить для схем с заданными p и κ_{\max} , и, соответственно, дополнительных условий (18).

Остаётся $T_2 = K - T_1(\kappa')$ независимых параметров и, соответственно, добавляется T_2 дополнительных условий, необходимых для однозначного определения полиномов, называемых ВП3,

$$Q_s(\zeta'_{s'}) = \delta_{ss'}, \quad s, s' = T_1(\kappa') + 1, \dots, K, \quad (19)$$

где $\zeta'_s = (\zeta'_{s'1}, \dots, \zeta'_{s'd}) \in \Delta$ выбранные точки, принадлежащие симплексу без границы, но не совпадающие с узловыми точками ВП1 ξ'_r .

Вспомогательные полиномы ВП2 даются выражением

$$Q_s(z') = z_1'^{k_1} \dots z_d'^{k_d} (1 - z_1' - \dots - z_d')^{k_0} \sum_{j_1, \dots, j_d} b_{j_1, \dots, j_d; s} z_1'^{j_1} \dots z_d'^{j_d}, \quad (20)$$

где $k_t = 1$, если точка η_s , в которой заданы дополнительные условия (18), лежит на соответствующей грани симплекса Δ , т.е. $H(t, \eta_s) = 0$, и $k_t = \kappa'$, если $H(t, \eta_s) \neq 0$. Вспомогательные полиномы ВП3 даются выражением (20) при $k_t = \kappa'$. Коэффициенты $b_{j_1, \dots, j_d; s}$ определяются из системы линейных уравнений, полученных в результате подстановки (20) в условия (17)–(19).

В результате получаем требуемый набор базисных ИПЭ

$$\varphi_r^\kappa(z') = \{\check{\varphi}_r^\kappa(z'), Q_s(z')\}, \quad (21)$$

составленных из полиномов $Q_s(z')$ типа ВП2 и ВП3 и полиномов $\check{\varphi}_r^\kappa(z')$ типа ВП1:

$$\check{\varphi}_r^\kappa(z') = \varphi_r^\kappa(z') - \sum_{s=1}^K c_{\kappa; r; s} Q_s(z'), \quad c_{\kappa; r; s} = \begin{cases} \frac{\partial^k \varphi_r^\kappa(z')}{\partial n_{i(s)}^k} \Big|_{z'=\eta'_s}, & Q_s(z') \in \text{ВП2}, \\ \varphi_r^\kappa(\zeta_s), & Q_s(z') \in \text{ВП3}. \end{cases} \quad (22)$$

3.2.3. ИПЭ при $d = 2$

При $d = 2$ степень p' полинома по тангенциальной переменной t на границе треугольника Δ_q совпадает со степенью полинома двух переменных, и для его однозначного определения требуется $p' + 1$ параметр. Производная порядка κ' по нормальной переменной к границе будет полином степени $p' - \kappa'$, и для её однозначного определения потребуется $p' - \kappa' + 1$ параметров. Однако, она определена только $p' - \kappa'(p + 1)$ параметрами: смешанными производными фиксированного порядка κ' по нормальной переменной и порядка от 0 до $\kappa_{\max} - \kappa' - 1$ по тангенциальной переменной, т.е.

$$\frac{\partial^{\kappa'}}{\partial n^{\kappa'}}, \frac{\partial^{\kappa'+1}}{\partial n^{\kappa'} \partial t}, \dots, \frac{\partial^{\kappa_{\max}}}{\partial n^{\kappa'} \partial t^{\kappa_{\max} - \kappa' - 1}}.$$

Таким образом, с учётом того, что у треугольника три стороны, для однозначного определения производных до порядка κ' на границе необходимо $T_1(\kappa') = 3p + \dots + 3\kappa'p = 3p\kappa'(\kappa' + 1)/2$ параметров и, соответственно, дополнительных условий (18).

Например, для $p = 1$ и $\kappa_{\max} = 4$ имеется $K = 6$ дополнительных условий для определения ВП2 и ВП3. Степень $p' = 7$ полинома по тангенциальной переменной t на границе треугольника совпадает со степенью полинома двух переменных, и для его однозначного определения требуется $p' + 1 = 8$ параметров. Производная первого порядка $\kappa' = 1$ по нормальной переменной к границе будет полином степени $p' - \kappa' = 6$, и для её однозначного определения потребуется $p' - \kappa' + 1 = 7$ параметров. Однако она определена только $p' - \kappa'(p + 1) = 6$ параметрами: смешанными производными $\partial/\partial n$, $\partial^2/(\partial n \partial t)$, $\partial^3/(\partial n \partial t^2)$, заданными в двух вершинах. Недостающий параметр можно определить, задавая производную по направлению, перпендикулярному границе треугольника в одной из точек на его стороне (например, посередине). Таким образом, для $p = 1$ и $\kappa_{\max} = 4$ можно построить ИПЭ с фиксированными значениями первой производной на границе треугольника, при этом остаётся $6 - 3 = 3$ свободных параметров.

Производная второго порядка $\kappa' = 2$ по нормальной переменной к границе — полином степени $p' - \kappa' = 5$, и для её однозначного определения потребуется

$p' - \kappa' + 1 = 6$ параметров. Однако она определена только $p' - \kappa'(p + 1) = 4$ параметрами: смешанными производными $\partial^2/\partial n^2$ и $\partial^3/(\partial n^2 \partial t)$, заданными в двух вершинах треугольника. Таким образом, для однозначного определения второй производной потребуется 6 параметров. Это означает, что данным алгоритмом для $p = 1$ и $\kappa_{\max} = 4$ нельзя построить схему МКЭ с непрерывной второй производной. В этом случае следует использовать схему с $\kappa_{\max} > 4$, например, обозначенную [152] из табл. 1 и рис. 2. Тогда оставшиеся три свободных параметра используются для построения ВПЗ. Заметим, что возможно построение схем, обеспечивающих непрерывность вторых производных на некоторых границах конечных элементов. Этот случай в данной работе не рассматривается.

При $d = 2$ производные $\partial/\partial n_i$ по направлению n_i , перпендикулярном к соответствующей грани $i = 0, 1, 2$ в исходной системе координат, даются через частные производные $\partial/\partial z'_j$, $j = 1, 2$ в локальной системе координат Δ , используя (8)–(11), выражениями

$$\frac{\partial}{\partial n_i} = f_{i1} \frac{\partial}{\partial z'_1} + f_{i2} \frac{\partial}{\partial z'_2}, \quad i=1, 2, \quad \frac{\partial}{\partial n_0} = (f_{01} + f_{02}) \frac{\partial}{\partial z'_1} + (f_{01} - f_{02}) \frac{\partial}{\partial z'_2}, \quad (23)$$

где $f_{ij} = f_{ij}(\hat{z}_0, \hat{z}_1, \hat{z}_2)$ – функции от координат вершин $\hat{z}_0, \hat{z}_1, \hat{z}_2$ треугольника Δ_q в исходной системе координат

$$\begin{aligned} f_{11} &= J^{-1}((\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01})^2 + (\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02})^2)^{1/2}, \\ f_{12} &= -\frac{(\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})(\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02}) + (\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01})(\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})}{J((\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01})^2 + (\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02})^2)^{1/2}}, \\ f_{22} &= J^{-1}((\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})^2 + (\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})^2)^{1/2}, \\ f_{21} &= -\frac{(\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})(\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02}) + (\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01})(\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})}{J((\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})^2 + (\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})^2)^{1/2}}, \\ f_{01} &= -(2J)^{-1}((\hat{z}_{22} - \hat{z}_{12})^2 + (\hat{z}_{11} - \hat{z}_{21})^2)^{1/2}, \\ f_{02} &= \frac{(\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})^2 + (\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})^2 - (\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02})^2 - (\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01})^2}{2J((\hat{z}_{22} - \hat{z}_{21})^2 + (\hat{z}_{11} - \hat{z}_{12})^2)^{1/2}}, \\ J &= (\hat{z}_{11} - \hat{z}_{01})(\hat{z}_{22} - \hat{z}_{02}) - (\hat{z}_{12} - \hat{z}_{02})(\hat{z}_{21} - \hat{z}_{01}). \end{aligned} \quad (24)$$

Схематическое изображение реализации условий (14), (17), (18) и (19), с помощью которых построены базисные ИПЭ, показано при $d = 2$ на рис. 2. Характеристики полиномиального базиса из ИПЭ на элементе Δ при $d = 2$ приведены в табл. 1. Выражения для ИПЭ (21) до $p' = 9$ порядка при $d = 2$ представлены в Приложении.

3.2.4. Кусочно-полиномиальные функции

Кусочно-полиномиальные функции $P_l(z)$ с непрерывными производными до порядка κ' строятся путём сшивки полиномов $\varphi_r^\kappa(z) = \{\check{\varphi}_r^\kappa(z), Q_s(z)\}$ из (21), получаемых алгоритмом из Приложения, на конечных элементах $\Delta_q \in \Omega_h(z) = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$:

$$P_l(z) = \left\{ \pm \varphi_{l(l')}^\kappa(z), A_{l(l')} \in \Delta_q; 0, A_{l(l')} \notin \Delta_q \right\}, \quad (25)$$

где знак « \pm » может появиться только для ВП2, когда нужно сшить нормальные производные нечётного порядка.

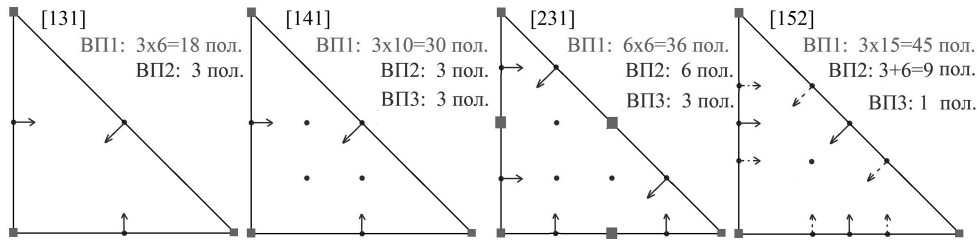


Рис. 2. Схематическое изображение условий на элементе Δ_q для построения базиса ИПЭ $[p\kappa_{\max}\kappa']$: [131], [141], [231], [152]. Квадраты: точки ξ'_r , в которых фиксируются значения функций и их производных согласно условиям (14), (17); сплошные (прерывистые) стрелки: с началом в точках η'_s , в которых фиксируются значения первой (второй) производной по направлению нормали в исходных координатах, согласно условию (18), соответственно; кружки: точки ζ'_s , в которых фиксируются значения функций согласно условию (19)

Таблица 1

Характеристики базиса ИПЭ (21) при $d = 2$

	$[p\kappa_{\max}\kappa']$	[131]	[141]	[231]	[152]
p'	$\kappa_{\max}(p+1) - 1$	5	7	8	9
$N_{\kappa_{\max}p'}$	$(p+1)(p+2)\kappa_{\max}(\kappa_{\max}+1)/4$	18	30	36	45
$N_{1p'}$	$(p'+1)(p'+2)/2$	21	36	45	55
K	$p(p+1)\kappa_{\max}(\kappa_{\max}-1)/4$	3	6	9	10
$T_1(1)$	$3p$	3	3	6	3
$T_1(2)$	$9p$	9	9	18	9
$N(\text{ВП1})$	$N_{\kappa_{\max}p'}$	18	30	36	45
$N(\text{ВП2})$	$T_1(\kappa')$	3	3	6	9
$N(\text{ВП3})$	$K - T_1(\kappa')$	0	3	3	1
Ограничение на порядок производных κ' : $3p\kappa'(\kappa'+1)/2 \leq K$.					

Разложение искомого решения $\Phi_m(z)$ по базису кусочно-полиномиальных функций $P_{l'}(z)$, $\Phi_m^h(z) = \sum_{l'=1}^N P_{l'}(z)\Phi_{l'm}^h$ и подстановка его в вариационный функционал (4) приводит к обобщённой алгебраической задаче на собственные значения, $(A - BE_m^h)\Phi_m^h = 0$, которая решается стандартным методом (см., например, [8]). Элементы симметричных матриц жёсткости A и масс B содержат интегралы типа (4), которые вычисляются на элементах в области $\Delta_q \in \Omega_h(z) = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, пересчитанные в локальные координаты на элементе Δ .

Теоретические оценки погрешностей между точным $E_m, \Phi_m(z) \in \mathcal{H}_2^2(\Omega)$ и приближенным $E_m^h, \Phi_m^h(z) \in \mathcal{H}_2^{\kappa'+1 \geq 1}(\Omega_h)$ решениями следующие [10, 11]:

$$|E_m - E_m^h| \leq c_1 h^{2p'}, \quad \|\Phi_m(z) - \Phi_m^h(z)\|_0 \leq c_2 h^{p'+1}, \quad (26)$$

где

$$\|\Phi_i(z)\|_0^2 = \int_{\Omega} g_0(z) dz \overline{\Phi_i(z)} \Phi_i(z),$$

h — максимальный размер конечного элемента Δ_q , p' — порядок схемы МКЭ, m — номер собственного значения, c_1 и c_2 — коэффициенты, не зависящие от h .

4. Результаты и обсуждение

В качестве примера рассмотрим решение задачи дискретного спектра (1)–(3) при $d = 2$, $g_0(z) = g_{ij}(z) = 1$, и $V(z) = 0$ в области $\Omega_h(z) = \cup_{q=1}^Q \Delta_q$ в виде равностороннего треугольника со стороной $4\pi/3$ с граничными условиями второго типа (II), который разбит на $Q = n^2$ равносторонних треугольников Δ_q со стороной $h = 4\pi/3n$. Собственные значения этой задачи с вырожденным спектром — целые числа $E_m = 0, 1, 1, 3, 4, 4, 7, 7, \dots$

На рис. 3 представлены конечноэлементная сетка с ИПЛ восьмого порядка и профиль четвёртой собственной функции $\Phi_4^h(z)$.

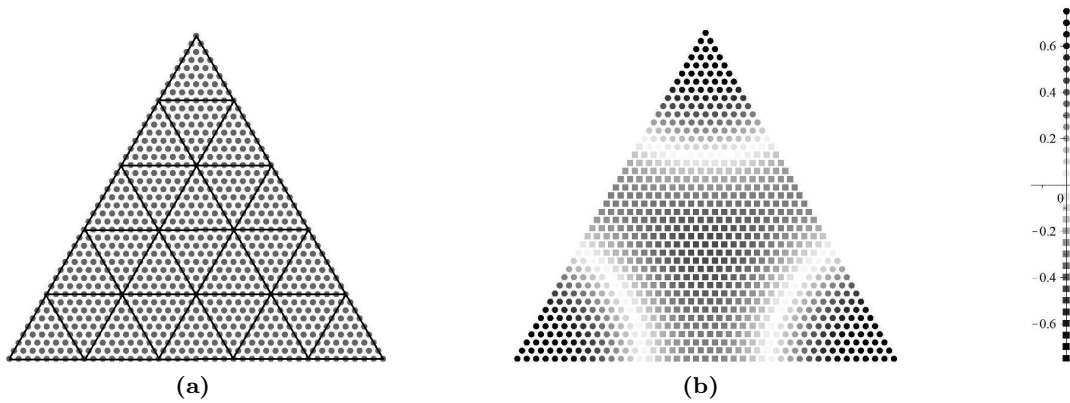


Рис. 3. (а) Сетка на области $\Omega_h(z) = \cup_{q=1}^Q \Delta_q$ треугольной мембраны, составленная из треугольных элементов Δ_q ; (б) профили четвёртой собственной функции $\Phi_4^h(z) = 3$, полученной на ИПЛ порядка $p' = p = 8$

На рис. 4 показаны погрешности $\Delta E_m = E_m^h - E_m$ собственного значения $E_4^h(z)$ в зависимости от числа n (число элементов n^2) и от длины N вектора Φ_m^h алгебраической задачи на собственные значения для схем МКЭ от пятого до девятого порядка точности, использующие ИПЛ, отмеченные метками $[p\kappa_{\max}\kappa'] = [510], \dots, [910]$, и использующие ИПЭ, отмеченные метками [131], [141], [231] и [152] из табл. 1, сохраняющие непрерывность первой и второй производных приближённого решения соответственно.

Как видно из рис. 4, погрешности собственного значения $\Delta E_4^h(z)$ схем МКЭ одного порядка $p' = \kappa_{\max}(p + 1) - 1$ примерно одинаковые и соответствуют теоретическим оценкам (26), но в схемах МКЭ с ИПЭ, сохраняющих непрерывность первой и второй производных приближённого решения, используются матрицы меньшей размерности, соответствующие длине вектора N , в 1,5–2 раза меньшей, чем для схем с ИПЛ, сохраняющих на границах конечных элементов только непрерывность приближённого решения. Вычисления проводились на компьютере 2 x Xeon 3.2 GHz, 4

GB RAM, используя Intel Fortran 77 с четверной точностью real^*16 , с 32 значащими цифрами. Время счёта рассмотренных примеров не превышало 3 минут.

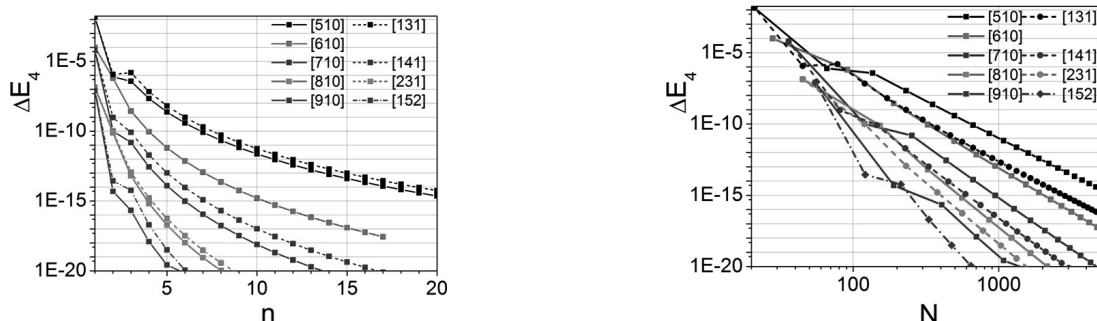


Рис. 4. Зависимости погрешности ΔE_4^h собственного значения E_4^h от числа элементов n и от длины вектора N

5. Заключение

Предложена вычислительная схема МКЭ высокого порядка точности решения задачи на собственные значения для эллиптического уравнения в частных производных в ограниченной области многомерного евклидова пространства, обеспечивающая непрерывность не только приближенного решения, но и его производных до заданного порядка. На примере точно-решаемой краевой задач для треугольной мембраны показано, что для достижения заданной точности приближенного решения, для схем с МКЭ с ИПЭ, обеспечивающих непрерывность первой и второй производных приближенного решения, используются матрицы меньшей размерности, соответствующие длине вектора N , в 1.5–2 раза меньшей, чем для схем с ИПЛ, сохраняющих на границах конечных элементов только непрерывность приближенного решения.

Отметим, что явное выражение для ИПЭ нескольких переменных, в отличие от ИПЛ, достаточно сложное, в локальных координатах z' требуется пересчёт фиксированных производных в узлах $z_{r'}$ элемента Δ_q в узлы $z'_{r'}$ элемента Δ , используя матрицы \hat{J}^{-1} . Поэтому требуемый пересчёт производных выполняется для каждого конечного элемента Δ_q на этапе формирования базиса ИПЭ $\{\varphi_r^k(z')\}_{r=1}^P$ на конечном элементе Δ , который выполняется численно по аналитическим формулам, аналогичным формулам при $d = 2$ из раздела 3.4 и Приложения.

Вычислительные схемы МКЭ ориентированы на расчёты спектральных и оптических характеристик квантовых точек и других квантовомеханических систем. Реализация МКЭ с ИПЭ в пространстве $d \geq 2$ и других областях, отличных от многогранника, будет дана в последующих работах.

6. Приложение

Выражения для ИПЭ в исходных координатах, удовлетворяющие условиям (14), (18), (19), так, что для каждого полинома в правых частях этих условий единица появляется только один раз, громоздки. Их вычисление удобно проводить по алгоритму:

- 1) по формулам (15) и (20) вычисляются ВП1 $\varphi_r^k(z')$, ВП2 и ВП3 $Q_s^k(z')$;
- 2) используя формулу (22), вычисляем базис ИПЭ, состоящий из полиномов $\check{\varphi}_r^k(z')$ и $Q_s^k(z')$, в локальной системе координат;
- 3) ВП1 $\varphi_r^k(z)$ пересчитываются по формулам (11);

4) выполняется преобразование (10).

В табл. 2–5 приведены ВП1 $\varphi_r^k(z')$, ВП2 и ВП3 $Q_s^k(z')$, а соответствующие коэффициенты $c_{\kappa;r;s}$ вычисляются по формулам (22). Обозначения: ξ_r, η_s, ζ_s — координаты узлов в которых правая часть (14), (18) или (19) равна единице, $z_0 = 1 - z_1 - z_2$, f_{ij} определяются из формул (24), при этом аргументы у функций и штрихи у независимых переменных опущены.

Таблица 2

ИПЭ $p = 1, \kappa_{\max} = 3, \kappa' = 1, p' = 5$ (элемент Аргириса [3])

ВП1 : $\xi_1=(0, 1), \xi_2=(1, 0), \xi_3=(0, 0)$		
$\varphi_1^{0,0}=z_2^3(6z_2^2-15z_2+10)$	$\varphi_2^{0,0}=z_1^3(6z_1^2-15z_1+10)$	$\varphi_3^{0,0}=z_0^3(6z_0^2-15z_0+10)$
$\varphi_1^{0,1}=-z_2^3(z_2-1)(3z_2-4)$	$\varphi_2^{0,1}=-z_1^3z_2(3z_1-4)$	$\varphi_3^{0,1}=-z_0^3z_2(3z_0-4)$
$\varphi_1^{1,0}=-z_1z_2^3(3z_2-4)$	$\varphi_2^{1,0}=-z_1^3(z_1-1)(3z_1-4)$	$\varphi_3^{1,0}=-z_0^3z_1(3z_0-4)$
$\varphi_1^{0,2}=z_2^3(z_2-1)^2/2$	$\varphi_2^{0,2}=z_1^3z_2^2/2$	$\varphi_3^{0,2}=z_0^3z_2^2/2$
$\varphi_1^{1,1}=z_1z_2^3(z_2-1)$	$\varphi_2^{1,1}=(z_1-1)z_1^3z_2$	$\varphi_3^{1,1}=z_0^3z_1z_2$
$\varphi_1^{2,0}=z_1^2z_2^3/2$	$\varphi_2^{2,0}=z_1^3(z_1-1)^2/2$	$\varphi_3^{2,0}=z_0^3z_1^2/2$
ВП2 : $\eta_1=(0, 1/2), \eta_2=(1/2, 0), \eta_3=(1/2, 1/2)$		
$Q_1=16z_0^2z_1z_2^2/f_{11}$	$Q_2=16z_0^2z_1^2z_2/f_{22}$	$Q_3=-8z_0z_1^2z_2^2/f_{01}$

Таблица 3

ИПЭ $p=1, \kappa_{\max}=4, \kappa'=1, p'=7$

ВП1 : $\xi_1=(0, 1), \xi_2=(1, 0), \xi_3=(0, 0)$		
$\varphi_1^{0,0}=-z_2^4P_0(z_3)$	$\varphi_2^{0,0}=-z_1^4P_0(z_1)$	$\varphi_3^{0,0}=-z_0^4P_0(z_0)$
$\varphi_1^{0,1}=z_2^4(z_2-1)P_1(z_2)$	$\varphi_2^{0,1}=z_1^4z_2P_1(z_1)$	$\varphi_3^{0,1}=z_0^4z_2P_1(z_0)$
$\varphi_1^{1,0}=z_1z_2^4P_1(z_2)$	$\varphi_2^{1,0}=z_1^4(z_1-1)P_1(z_1)$	$\varphi_3^{1,0}=z_0^4z_1P_1(z_0)$
$\varphi_1^{0,2}=-z_2^4(z_2-1)^2(4z_2-5)/2$	$\varphi_2^{0,2}=-z_1^4z_2^2(4z_1-5)$	$\varphi_3^{0,2}=-z_0^4z_2^2(4z_0-5)/2$
$\varphi_1^{1,1}=-z_1z_2^4(z_2-1)(4z_2-5)$	$\varphi_2^{1,1}=-z_1^4z_2(z_1-1)(4z_1-5)$	$\varphi_3^{1,1}=-z_0^4z_1z_2(4z_0-5)$
$\varphi_1^{2,0}=-z_1^2z_2^4(4z_2-5)/2$	$\varphi_2^{2,0}=-z_1^4(z_1-1)^2(4z_1-5)/2$	$\varphi_3^{2,0}=-z_0^4z_1^2(4z_0-5)/2$
$\varphi_1^{0,3}=z_2^4(z_2-1)^3/6$	$\varphi_2^{0,3}=z_1^4z_2^3/6$	$\varphi_3^{0,3}=z_0^4z_2^3/6$
$\varphi_1^{1,2}=z_1z_2^4(z_2-1)^2/2$	$\varphi_2^{1,2}=z_1^4z_2^2(z_1-1)/2$	$\varphi_3^{1,2}=z_0^4z_1z_2^2/2$
$\varphi_1^{2,1}=z_1^2z_2^4(z_2-1)/2$	$\varphi_2^{2,1}=z_1^4z_2(z_1-1)^2/2$	$\varphi_3^{2,1}=z_0^4z_1^2z_2/2$
$\varphi_1^{3,0}=z_1^3z_2^4/6$	$\varphi_2^{3,0}=z_1^4(z_1-1)^3/6$	$\varphi_3^{3,0}=z_0^4z_1^3/6$
ВП2 : $\eta_1=(0, 1/2), \eta_2=(1/2, 0), \eta_3=(1/2, 1/2)$		
$Q_1=8z_1z_2^2z_0^2(12z_1^2-7z_1-8z_1z_2-8z_2^2+8z_2)/f_{11}$		
$Q_2=-8z_1^2z_2z_0^2(8z_1^2+8z_1z_2-8z_1+7z_2-12z_2^2)/f_{22}$		
$Q_3=4z_1^2z_2^2z_0(12z_2^2-17z_2+5-17z_1+32z_1z_2+12z_1^2)/f_{01}$		
ВП3 : $\zeta_4=(1/4, 1/2), \zeta_5=(1/2, 1/4), \zeta_6=(1/4, 1/4)$		
$Q_4=1024z_0^2z_1^2z_2^2(4z_2-1)$	$Q_5=1024z_0^2z_1^2z_2^2(4z_1-1)$	$Q_6=1024z_0^2z_1^2z_2^2(4z_0-1)$
$P_0(z_j) = (20z_j^3 - 70z_j^2 + 84z_j - 35), P_1(z_j) = (10z_j^2 - 24z_j + 15)$		

Таблица 4

ИПЭ $p=2$, $\kappa_{\max}=3$, $\kappa'=1$, $p'=8$

ВП1 : $\xi_1=(0, 1)$, $\xi_2=(1/2, 1/2)$, $\xi_3=(1, 0)$, $\xi_4=(0, 1/2)$, $\xi_5=(1/2, 0)$, $\xi_6=(0, 0)$		
$\varphi_1^{0,0}=z_2^3(2z_2-1)^3 S_0(z_2)$	$\varphi_3^{0,0}=z_1^3(2z_1-1)^3 S_0(z_1)$	$\varphi_6^{0,0}=z_0^3(2z_0-1)^3 S_0(z_0)$
$\varphi_1^{0,1}=-z_2^3(z_2-1)S_1(z_2)$	$\varphi_3^{0,1}=-z_1^3 z_2 S_1(z_1)$	$\varphi_6^{0,1}=-z_0^3 z_2 S_1(z_0)$
$\varphi_1^{1,0}=-z_1 z_2^3 S_1(z_2)$	$\varphi_3^{1,0}=-z_1^3(z_1-1)S_1(z_1)$	$\varphi_6^{1,0}=-z_0^3 z_1 S_1(z_0)$
$\varphi_1^{0,2}=z_2^3(z_2-1)^2(2z_2-1)^3/2$	$\varphi_3^{0,2}=z_1^3(2z_1-1)^3 z_2^2/2$	$\varphi_6^{0,2}=z_0^3 z_2^2(2z_0-1)^3/2$
$\varphi_1^{1,1}=z_2^3(2z_2-1)^3 z_1(z_2-1)$	$\varphi_3^{1,1}=z_1^3 z_2(z_1-1)(2z_1-1)^3$	$\varphi_6^{1,1}=z_0^3 z_1 z_2(2z_0-1)^3$
$\varphi_1^{2,0}=z_2^3(2z_2-1)^3 z_1^2/2$	$\varphi_3^{2,0}=z_1^3(z_1-1)^2(2z_1-1)^3/2$	$\varphi_6^{2,0}=z_0^3 z_1^2(2z_0-1)^3/2$
$\varphi_2^{0,0}=64z_1^3 z_2^3 S_2(z_0)$	$\varphi_4^{0,0}=64z_0^3 z_2^3 S_2(z_1)$	$\varphi_5^{0,0}=64z_0^3 z_1^3 S_2(z_2)$
$\varphi_2^{0,1}=32z_1^3 z_2^3(2z_2-1)(6z_0+1)$	$\varphi_4^{0,1}=32z_0^3 z_2^3(2z_2-1)(6z_1+1)$	$\varphi_5^{0,1}=64z_0^3 z_1^3 z_2(6z_2+1)$
$\varphi_2^{1,0}=32z_1^3 z_2^3(2z_1-1)(6z_0+1)$	$\varphi_4^{1,0}=64z_0^3 z_1 z_2^3(6z_1+1)$	$\varphi_5^{1,0}=32z_0^3 z_1^3(2z_1-1)(6z_2+1)$
$\varphi_2^{0,2}=8z_1^3 z_2^3(2z_2-1)^2$	$\varphi_4^{0,2}=8z_0^3 z_2^3(2z_2-1)^2$	$\varphi_5^{0,2}=32z_0^3 z_1^3 z_2^2$
$\varphi_2^{1,1}=16z_1^3 z_2^3(2z_1-1)(2z_2-1)$	$\varphi_4^{1,1}=32z_0^3 z_1 z_2^3(2z_2-1)$	$\varphi_5^{1,1}=32z_0^3 z_1^3 z_2(2z_1-1)$
$\varphi_2^{2,0}=8z_1^3 z_2^3(2z_1-1)^2$	$\varphi_4^{2,0}=32z_0^3 z_1^2 z_2^3$	$\varphi_5^{2,0}=8z_0^3 z_1^3(2z_1-1)^2$
ВП2 : $\eta_1=(0, 1/4)$, $\eta_2=(0, 3/4)$, $\eta_3=(1/4, 0)$, $\eta_4=(3/4, 0)$, $\eta_5=(1/4, 3/4)$, $\eta_6=(3/4, 1/4)$		
$Q_1=(512/9)z_0^2 z_1 z_2^2(2z_0-1)(2z_2-1)/f_{11}$	$Q_2=(512/9)z_0^2 z_1 z_2^2(2z_0-1)(4z_0-1)/f_{11}$	$Q_2=(512/9)z_0^2 z_1 z_2^2(2z_0-1)(2z_2-1)(4z_2-1)/f_{11}$
$Q_3=- (512/9)z_0^2 z_1^2 z_2(2z_0-1)(2z_1-1)(4z_0-1)/f_{22}$	$Q_4=- (512/9)z_0^2 z_1^2 z_2(2z_0-1)(4z_0-1)/f_{22}$	$Q_4=- (512/9)z_0^2 z_1^2 z_2(2z_0-1)(2z_1-1)(4z_1-1)/f_{22}$
$Q_5=(256/9)z_0 z_1^2 z_2^2(2z_1-1)(2z_2-1)/f_{01}$	$Q_6=(256/9)z_0 z_1^2 z_2^2(2z_1-1)/f_{01}$	$Q_6=(256/9)z_0 z_1^2 z_2^2(2z_1-1)(2z_2-1)(4z_1-1)/f_{01}$
ВП3 : $\zeta_7=(1/4, 1/2)$, $\zeta_8=(1/2, 1/4)$, $\zeta_9=(1/4, 1/4)$		
$Q_7=4096z_0^2 z_1^2 z_2^2(2z_0-1)(2z_1-1)$	$Q_8=4096z_0^2 z_1^2 z_2^2(2z_0-1)(2z_2-1)$	$Q_9=4096z_0^2 z_1^2 z_2^2(2z_1-1)(2z_2-1)$
$S_0(z_j) = (48z_j^2 - 105z_j + 58)S_1(z_j) = (2z_j - 1)^3(9z_j - 10)S_2(z_j) = (24z_j^2 - 12z_0 z_1 z_2 / z_j + 4)$		

Таблица 5

ИПЭ $p=1, \kappa_{\max}=5, \kappa'=2, p'=9$

ВП1 : $\xi_1=(0, 1), \xi_2=(1, 0), \xi_3=(0, 0)$		
$\varphi_1^{0,0}=z_2^5 T_0(z_2)$	$\varphi_2^{0,0}=z_1^5 T_0(z_1)$	$\varphi_3^{0,0}=z_0^5 T_0(z_0)$
$\varphi_1^{0,1}=-z_2^5(z_2-1)T_1(z_2)$	$\varphi_2^{0,1}=-z_1^5 z_2 T_1(z_1)$	$\varphi_3^{0,1}=-z_0^5 z_2 T_1(z_0)$
$\varphi_1^{1,0}=-z_1 z_2^5 T_1(z_2)$	$\varphi_2^{1,0}=-z_1^5(z_1-1)T_1(z_1)$	$\varphi_3^{1,0}=-z_0^5 z_1 T_1(z_0)$
$\varphi_1^{0,2}=z_2^5(z_2-1)^2 T_2(z_2)/2$	$\varphi_2^{0,2}=z_1^5 z_2^2 T_2(z_1)/2$	$\varphi_3^{0,2}=z_0^5 z_2^2 T_2(z_0)/2$
$\varphi_1^{1,1}=z_1 z_2^5(z_2-1)T_2(z_2)$	$\varphi_2^{1,1}=z_1^5 z_2(z_1-1)T_2(z_1)$	$\varphi_3^{1,1}=z_0^5 z_1 z_2 T_2(z_0)$
$\varphi_1^{2,0}=z_1^2 z_2^5 T_2(z_2)/2$	$\varphi_2^{2,0}=z_1^5(z_1-1)^2 T_2(z_1)/2$	$\varphi_3^{2,0}=z_0^5 z_1^2 T_2(z_0)/2$
$\varphi_1^{0,3}=-z_2^5(z_2-1)^3(5z_2-6)/6$	$\varphi_2^{0,3}=-z_1^5 z_2^3(5z_1-6)/6$	$\varphi_3^{0,3}=-z_0^5 z_2^3(5z_0-6)/6$
$\varphi_1^{1,2}=-z_1 z_2^5(z_2-1)^2(5z_2-6)/2$	$\varphi_2^{1,2}=-z_1^5 z_2^2(z_1-1)(5z_1-6)/2$	$\varphi_3^{1,2}=-z_0^5 z_1 z_2^2(5z_0-6)/2$
$\varphi_1^{2,1}=-z_1^2 z_2^5(z_2-1)(5z_2-6)/2$	$\varphi_2^{2,1}=-z_1^5 z_2(z_1-1)^2(5z_1-6)/2$	$\varphi_3^{2,1}=-z_0^5 z_1^2 z_2(5z_0-6)/2$
$\varphi_1^{3,0}=-z_1^3 z_2^5(5z_2-6)/6$	$\varphi_2^{3,0}=-z_1^5(z_1-1)^3(5z_1-6)/6$	$\varphi_3^{3,0}=-z_0^5 z_1^3(5z_0-6)/6$
$\varphi_1^{0,4}=z_2^5(z_2-1)^4/24$	$\varphi_2^{0,4}=z_1^5 z_2^4/24$	$\varphi_3^{0,4}=z_0^5 z_2^4/24$
$\varphi_1^{1,3}=z_1 z_2^5(z_2-1)^3/6$	$\varphi_2^{1,3}=z_1^5 z_2^3(z_1-1)/6$	$\varphi_3^{1,3}=z_0^5 z_1 z_2^3/6$
$\varphi_1^{2,2}=z_1^2 z_2^5(z_2-1)^2/4$	$\varphi_2^{2,2}=z_1^5 z_2^2(z_1-1)^2/4$	$\varphi_3^{2,2}=z_0^5 z_1^2 z_2^2/4$
$\varphi_1^{3,1}=z_1^3 z_2^5(z_2-1)/6$	$\varphi_2^{3,1}=z_1^5 z_2(z_1-1)^3/6$	$\varphi_3^{3,1}=z_0^5 z_1^3 z_2/6$
$\varphi_1^{4,0}=z_1^4 z_2^5/24$	$\varphi_2^{4,0}=z_1^5(z_1-1)^4/24$	$\varphi_3^{4,0}=z_0^5 z_1^4/24$
ВП2 : $\eta_1=(0, 1/2), \eta_2=(1/2, 0), \eta_3=(1/2, 1/2), \eta_4=(0, 1/3), \eta_5=(0, 2/3),$ $\eta_6=(1/3, 0), \eta_7=(2/3, 0), \eta_8=(1/3, 2/3), \eta_9=(2/3, 1/3)$		
$Q_1=256z_0^3 z_1 z_2^3((3z_1 z_2-5z_1^2-z_2^2+z_2)f_{11}-4z_1(z_2-z_0)f_{12})/f_{11}^2$		
$Q_4=(729/16)z_0^3 z_1^2 z_2^3(3z_0-1)/f_{11}^2$ $Q_5=(729/16)z_0^3 z_1^2 z_2^3(3z_2-1)/f_{11}^2$		
$Q_2=256z_0^3 z_1^3 z_2((3z_1 z_2-5z_2^2-z_1^2+z_1)f_{22}+4z_2(z_1-z_0)f_{21})/f_{22}^2$		
$Q_6=(729/16)z_0^3 z_1^3 z_2^2(3z_0-1)/f_{22}^2$ $Q_7=(729/16)z_0^3 z_1^3 z_2^2(3z_1-1)/f_{22}^2$		
$Q_3=128z_0 z_1^3 z_2^3((7z_0^2-2z_0-z_1 z_2)f_{01}+2z_0(z_1-z_2)f_{02})/f_{01}^2$		
$Q_8=(729/64)z_0^2 z_1^3 z_2^3(3z_2-1)/f_{01}^2$ $Q_9=(729/64)z_0^2 z_1^3 z_2^3(3z_1-1)/f_{01}^2$		
ВП3 : $\zeta_{10}=(1/3, 1/3)$ $Q_{10}=19683z_0^3 z_1^3 z_2^3$		
$T_0(z_j) = (70z_j^4 - 315z_j^3 + 540z_j^2 - 420z_j + 126)$		
$T_1(z_j) = (35z_j^3 - 120z_j^2 + 140z_j - 56), T_2(z_j) = (15z_j^2 - 35z_j + 21)$		

Замечание. При $\kappa' = 1$ на равномерных сетках можно использовать базис с непрерывной первой производной, состоящий из приведённых ИПЭ $\varphi_r^k(z')$ и $Q_s(z')$ при $f_{01} = f_{11} = f_{22} = 1$. При этом производные таких полиномов по нормали к границе в общем случае не удовлетворяют условиям (18).

Литература

1. Symbolic-Numerical Solution of Boundary-Value Problems with Self-Adjoint Second-Order Differential Equation using the Finite Element Method with Interpolation Hermite Polynomials / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky et al. // Lecture Notes in Computer Science. — 2014. — Vol. 8660. — Pp. 138–154.

2. *Gusev A. A., Hai L. L., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I.* Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order. — <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/>.
3. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — Москва: Мир, 1980.
4. *Ramdas Ram-Mohan L.* Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics. — New York: Oxford Univ. Press, 2002.
5. Algorithms for Solving the Parametric Self-Adjoint 2D Elliptic Boundary-Value Problem Using High-Accuracy Finite Element Method / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, A. Gózdź // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, Информатика, Физика. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 36–55.
6. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973.
7. *Шайдуров В. В.* Многосеточные методы конечных элементов. — Москва: Наука, 1989.
8. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. — Москва: Стройиздат, 1982.
9. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы. — Москва: Наука, 1987.
10. *Becker E. B., Carey G. F., Tinsley Oden J.* Finite Elements. An Introduction. Vol. I. — New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1981.
11. *Стрэнг Г., Фикс Г.* Теория метода конечных элементов. — Москва: Мир, 1977.

UDC 517.958, 530.145.6, 519.632.4

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-217-233

High-Accuracy Finite Element Method for Solving Boundary-Value Problems for Elliptic Partial Differential Equations

A. A. Gusev

*Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie St., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

A new computational scheme of the finite element method of a high order of accuracy for solving boundary value problems for an elliptic partial differential equation that preserves the continuity of the derivatives of the approximate solution in a bounded domain of a multidimensional Euclidean space is proposed. A piecewise continuous basis of the finite element method is generated using interpolation Hermite polynomials of several variables and ensures the continuity of not only the approximate solution but also its derivatives up to a given order on the boundaries of finite elements, depending on the smoothness of the variable coefficients of the equation and the boundary of the domain. The efficiency and accuracy order of the computational scheme, algorithm and program are demonstrated by the example of an exactly solvable boundary-value problem for a triangular membrane depending on the number of finite elements of the partition of the domain and the dimension of the eigenvector of the algebraic problem. It was shown that, in order to achieve a given accuracy of the approximate solution, for schemes of the finite element method with Hermite interpolation polynomials the dimension of the eigenvector is approximately two times smaller than for schemes with Lagrange interpolation polynomials that preserve on the boundaries of finite elements only the continuity of the approximate solution. The high-accuracy computational scheme of the finite element method is oriented to calculations of the spectral and optical characteristics of quantum-mechanical systems.

Key words and phrases: elliptic partial differential equations, boundary-value problem, finite element method, interpolation polynomials

References

1. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, et al., Symbolic-Numerical Solution of Boundary-Value Problems with Self-Adjoint Second-Order Differential Equation using the Finite Element Method with Interpolation Hermite Polynomials, Lecture Notes in Computer Science 8660 (2014) 138–154.
2. A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order.
URL <http://www.info.jinr.ru/programs/jinrlib/>
3. P. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-holland Publ. Comp, Amsterdam, 1978.
4. L. Ramdas Ram-Mohan, Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, New York, 2002.
5. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, V. L. Derbov, A. Gózdź, Algorithms for Solving the Parametric Self-Adjoint 2D Elliptic Boundary-Value Problem Using High-Accuracy Finite Element Method, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (1) (2017) 36–55.
6. O. A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Vol. 49, Springer, Berlin, 1985.
7. V. V. Shaidurov, Multigrid Methods for Finite Elements, Springer, Berlin, 1995.
8. K. J. Bathe, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New York, 1982.
9. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, Numerical Methods, Nauka, Moscow, 1987, in Russian.
10. E. B. Becker, G. F. Carey, J. Tinsley Oden, Finite elements. An introduction. Vol. I, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1981.
11. G. Strang, G. J. Fix, An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1973.

УДК 004.021:519.2:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-234-252

Применение метода гармонической линеаризации к исследованию автоколебательного режима систем с управлением

Д. С. Кулябов^{*†}, А. В. Королькова^{*}, Т. Р. Велиева^{*}

^{*} Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей,
Российский университет дружбы народов,
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

[†] Лаборатория информационных технологий,
Объединённый институт ядерных исследований,
ул. Жолио-Кюри 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980

В сетях передачи данных, реализуемых как системы с управлением, может возникать явление глобальной синхронизации. Внешне это явление проявляется как автоколебательный режим в системе, который негативным образом влияет на такие характеристики системы как пропускная способность и задержки передачи. Ранее авторами исследовалась задача нахождения зон возникновения автоколебаний для системы в целом. Авторам представляется актуальной задача выделения элементов системы, ответственных за возникновение автоколебательного режима. Сложность этой задачи вызвана существенно нелинейным характером системы и её элементов. Зачастую для декомпозиции системы применяют метод линеаризации. Но в этом случае пропадает автоколебательный режим. Таким образом возникает необходимость поиска метода декомпозиции, не разрушающего автоколебательный режим системы. В качестве такого метода авторы предлагают использовать метод гармонической линеаризации, применяемый в теории автоматического управления. Однако приходится признать, что данный математический аппарат мало знаком исследователям, специализирующимся на исследовании систем и сетей передачи данных. Авторы постарались как можно более подробно описать применение метода гармонической линеаризации к исследованию влияния функции сброса пакетов по алгоритму RED в системе с управлением на процесс возникновения автоколебательного режима. Таким образом, данный материал носит скорее методический, чем исследовательский характер.

Ключевые слова: активное управление трафиком, теория управления, автоколебательный режим, метод гармонической линеаризации, RED

1. Введение

В статье рассматривается техническая система, представляющая собой сеть передачи данных, передаваемых по протоколу TCP (Transmission Control Protocol). В этой системе выделяется источник пакетов TCP и элемент управления в виде маршрутизатора с модулем управления, работающим по алгоритму типа RED (Random Early Detection) [1–3]. Внутренними параметрами системы являются размер окна TCP и значение мгновенной длины очереди на маршрутизаторе.

По своей природе протокол TCP вызывает такое явление, как глобальная синхронизация. Глобальная синхронизация проявляется в том, что одновременно несколько TCP-хостов уменьшают скорости передачи при возникновении вследствие перегрузки сброса пакетов, а затем снова увеличивают скорость передачи, когда перегрузка системы уменьшается. Внешне это проявляется в виде возникновения в системе автоколебательного режима параметров системы — размера окна и мгновенной длины очереди.

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2017 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.А03.21.0008).

Ранее нами проводились исследования по определению области возникновения автоколебаний [4–6] в системе с управлением. В этих работах была исследована зависимость области возникновения автоколебаний размера окна TCP и размера мгновенной длины очереди от пороговых значений и типов алгоритма RED. Для этого проводилось численное исследование нелинейной модели такой системы. Однако вопрос о причинах возникновения автоколебательного режима не рассматривался, также как и не исследовались значения параметров этих автоколебаний (частотно-амплитудные характеристики). Предполагается, что одной из причин возникновения автоколебательного режима является вид функции сброса пакетов в алгоритме управления.

В данной работе авторы предлагают применить метод гармонической линеаризации к исследованию причин возникновения автоколебательного режима в модели системы с управлением, а также для нахождения частотно-амплитудных характеристик параметров автоколебаний.

В разделе 2 даны необходимые для дальнейшего исследования сведения о блочно-линейном подходе моделирования в теории управления. Затем в разделе 3 приведено описание метода гармонической линеаризации и рассмотрены критерии Найквиста–Михайлова, Рауса–Гурвица и Михайлова определения наличия автоколебательного режима в системе. В разделе 4 приведено формальное описание моделируемой системы. В следующем разделе 5 проводится линеаризация модели исследуемой системы с управлением для получения блочной формы модели, к которой уже в разделе 6 применяется метод гармонической линеаризации и выписываются выражения для нахождения частотно-амплитудных характеристик модели. В том же разделе приведён пример применения метода гармонической линеаризации для конкретных значений параметров модели системы с управлением.

2. Элементы теории управления

В теории управления для моделирования и исследования нелинейных систем применяют так называемый блочно-линейный подход [7]. В таком подходе исходную нелинейную систему линеаризуют и разбивают на блоки, характеризующиеся передаточной функцией, связывающей входные и выходные значения системы. Связь входной x_1 и выходной x_2 функций посредством передаточной функции $H(s)$ записывается следующим образом:

$$x_2(s) = H(s)x_1(s). \quad (1)$$

В графической нотации эта связь приведена на рис. 1.

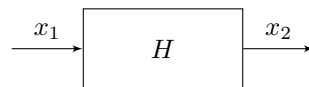


Рис. 1. Передаточная функция

В теории управления при исследовании нелинейных систем для перехода от дифференциальных уравнений к степенным используют преобразования Лапласа. Напомним некоторые определения.

Преобразованием Лапласа функции вещественной переменной $f(t)$ называется такая функция $F(s)$ от комплексной переменной $s = \sigma + i\omega$, что:

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

Обратным преобразованием Лапласа функции $F(s)$ комплексной переменной называется функция $f(t)$ вещественной переменной, такая что:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad (3)$$

где σ_1 — некоторое вещественное число.

Использование преобразования Лапласа позволяет при переходе от дифференциальных уравнений к степенным заменить формально оператор дифференцирования $\frac{d^n}{dt^n}$ на степень переменной s :

$$\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow s^n. \quad (4)$$

Также упрощается работа с функциями с запаздывающим аргументом — запаздывающий аргумент формально преобразуется в мультипликативную экспоненту:

$$f(t - \tau) \rightarrow F(s)e^{-s\tau}. \quad (5)$$

На блочных диаграммах можно выделить несколько типов соединения: последовательное (рис. 2), параллельное (рис. 3) и соединение с помощью обратной связи (рис. 4). Каждое из них можно преобразовать к структуре, изображённой на рис. 1.

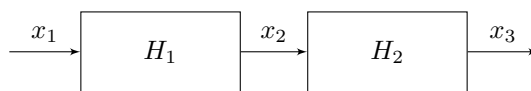


Рис. 2. Последовательное соединение блоков

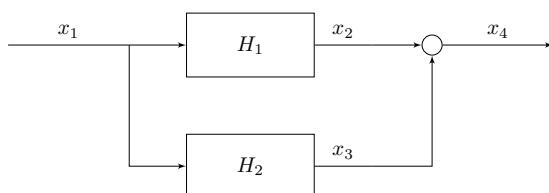


Рис. 3. Параллельное соединение блоков

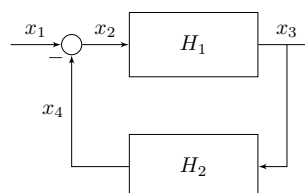


Рис. 4. Обратная связь

Далее для каждого типа соединения выпишем выражения для передаточной функции соединения $H(s)$.

Для последовательного соединения (рис. 2) имеем:

$$x_2(s) = H_1(s)x_1(s), \quad x_3(s) = H_2(s)x_2(s) \Rightarrow x_3(s) = H_2(s)H_1(s)x_1(s).$$

Таким образом, при последовательном соединении передаточная функция соединения будет равна произведению передаточных функций звеньев:

$$H(s) = \prod_{i=1}^n H_i(s). \quad (6)$$

Для параллельного соединения¹ (рис. 3) имеем

$$\begin{aligned} x_2(s) = H_1(s)x_1(s), \quad x_3(s) = H_2(s)x_1(s), \quad x_4(s) = x_2(s) + x_3(s) &\Rightarrow \\ \Rightarrow x_4(s) = (H_1(s) + H_2(s))x_1(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция параллельного соединения будет равна сумме передаточных функций звеньев:

$$H(s) = \sum_{i=1}^n H_i(s). \quad (7)$$

Для отрицательной обратной связи² (рис. 4) имеем:

$$\begin{aligned} x_3(s) = H_1(s)x_2(s), \quad x_4(s) = H_2(s)x_3(s), \quad x_2(s) = x_1(s) - x_4(s) &\Rightarrow \\ \Rightarrow x_3(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}x_1(s). \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция соединения с отрицательной обратной связью имеет вид:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}. \quad (8)$$

3. Метод гармонической линейаризации

Идеология теории автоматического управления наиболее естественно применяется к линейным системам. Однако ситуация ухудшается, если в системе присутствует нелинейный элемент. К особенностям нелинейных систем относятся следующее:

- к нелинейной системе неприменим принцип суперпозиции;
- в нелинейной системе могут возникнуть автоколебания;
- в нелинейной системе возможны несколько состояний равновесия;
- в нелинейной системе могут быть явления скачкообразного резонанса.

Метод гармонической линейаризации является приближённым методом. Он применяется для исследования условий возникновения и определения параметров автоколебаний, анализа и оценки их устойчивости, а также для исследования вынужденных колебаний. Гармонически-линейаризованная система зависит от амплитуд и частот периодических процессов. Это является существенным отличием гармонической линейаризации от обычного способа линейаризации, приводящего к чисто линейным выражениям, что позволяет исследовать основные свойства нелинейных систем.

Для упрощения анализа нелинейной системы её разбивают на нелинейную и линейную части. В состав линейной части системы входят все линейные звенья. В нелинейную часть попадает нелинейный элемент. Причём здесь под нелинейными понимаются не только собственно нелинейные функции, но и разрывные функции, а также функции, имеющие разрывы производных.

Метод гармонической линейаризации основан на предположении, что линейная часть системы является фильтром нижней гармоники, частота которой определяет частоту автоколебаний, т.е. более высокие гармоники не должны проходить на вход нелинейного звена.

Метод гармонической линейаризации применяется для систем определённой структуры (см. рис. 5).

¹Здесь мы использовали элемент «сумматор» (представлен на схеме в виде окружности).

²Здесь мы использовали элемент «сумматор с вычитанием».

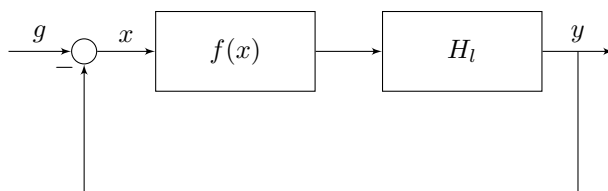


Рис. 5. Блочная структура системы для метода гармонической линейзации

Система состоит из линейного звена H_l и нелинейного звена, заданного функцией $f(x)$ (обычно рассматривают статический нелинейный элемент). Для метода гармонической линейзации предполагается режим свободного движения (входной сигнал $g(t) = 0$).

На вход нелинейного элемента подаются свободные гармонические колебания:

$$x(t) = A \sin(\omega t) \quad (9)$$

(A — амплитуда колебаний, ω — частота колебаний).

На выходе нелинейного элемента $f(x)$ мы получим периодический сигнал, который можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(k\omega t) + b_k \cos(k\omega t)), \quad (10)$$

где коэффициенты ряда Фурье имеют следующий вид:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(k\omega t) d(\omega t), \quad (11)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(k\omega t) d(\omega t), \quad k = \overline{1, \infty}.$$

При этом будем считать, что в (10) $a_0 = 0$, т.е. постоянная составляющая отсутствует.

Линейный элемент представляет собой фильтр низких частот, то есть при увеличении k линейные элементы подавляют высшие гармоники. Ограничимся только первыми гармониками. Тогда (10) переписывается в виде:

$$f(x) = a_1 \sin(\omega t) + b_1 \cos(\omega t), \quad (12)$$

где

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t), \quad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t). \quad (13)$$

Из (9) можно записать:

$$\sin(\omega t) = \frac{x}{A}, \quad \cos(\omega t) = \frac{1}{A\omega} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{A\omega} \frac{d}{dt} x. \quad (14)$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{a_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t), \\ \varkappa'(A) &= \frac{b_1}{A} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t),\end{aligned}\tag{15}$$

перепишем (12) с учётом (14) в виде:

$$f(x) = \left[\varkappa(A) + \frac{\varkappa'(A)}{\omega} \frac{d}{dt} \right] x = H_{nl}(A, \partial_t)x,\tag{16}$$

где $H_{nl}(A, \partial_t)$ — приближенная передаточная функция нелинейного звена, $\varkappa(A)$ и $\varkappa'(A)$ — коэффициенты гармонической линеаризации, определяемые (15).

После нахождения коэффициентов гармонической линеаризации для заданного нелинейного звена возможно провести исследование параметров колебательного режима — амплитуды A и частоты ω колебаний. Существование в нелинейной системе режима автоколебаний соответствует нахождению линеаризованной системы на колебательной границе устойчивости. Тогда A и ω могут быть найдены с помощью критериев устойчивости линейных систем (например, может быть использованы критерии Михайлова, Найквиста–Михайлова, Рауса–Гурвица). Таким образом изучение параметров автоколебаний может быть осуществлено одним из методов определения границы устойчивости линейных систем.

3.1. Критерий Найквиста–Михайлова

Критерий Найквиста–Михайлова [8, 9] позволяет судить об устойчивости замкнутой системы автоматического управления по амплитудно-фазовой характеристике (Nyquist plot) разомкнутой системы. Данный критерий относится в аналитико-графическим критериям. Он интересен наглядным графическим представлением поведения системы и регионов существования автоколебательного режима. Фактически он хорошо иллюстрирует наличие автоколебаний и их характер.

Для использования этого критерия исходное нелинейное уравнение разбивается на две части, одна из которых зависит от амплитуды, а другая — от частоты. В качестве графического представления строятся параметрические графики этих частей. При этом амплитуда и частота играют роль натуральных параметров на этих кривых.

Рассмотрим принцип определения наличия регионов возникновения автоколебаний и их устойчивости в соответствии с критерием Найквиста–Михайлова. Сделаем подстановку $\partial_t \rightarrow i\omega$ и $s \rightarrow \partial_t \rightarrow i\omega$ в передаточных функциях $H_l(s)$ и $H_{nl}(A, \partial_t)$. Тогда незатухающие синусоидальные колебания с постоянной амплитудой будут определяться прохождением амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы через точку $(-1, i0)$. Характеристическая функция системы будет иметь вид:

$$1 + H_o(i\omega) = 0,\tag{17}$$

$$H_o(i\omega) := H_l(i\omega)H_{nl}(A, i\omega).\tag{18}$$

Здесь H_o — передаточная функция разомкнутой системы.

Таким образом:

$$H_l(i\omega)H_{nl}(A, i\omega) = -1.\tag{19}$$

С учётом (16) из (19) имеем равенство:

$$H_l(i\omega) = -\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}, \quad (20)$$

полученное Л.С. Гольдфарбом (см. [10, §7.7, с. 40–42]). Левая часть уравнения (20) — амплитудно-фазовая характеристика линейного звена, а правая часть — обратная амплитудно-фазовая характеристика первой гармоники нелинейного звена (взятая с обратным знаком). А само уравнение (20) является уравнением баланса между частотой и амплитудой.

Уравнение (20), записанное в форме

$$\varkappa(A) + i\varkappa'(A) = -\frac{1}{H_l(i\omega)}, \quad (21)$$

было получено Р. Коченбургером (см. [10, §7.7, с. 40–42]).

По методу Гольдфарба строят амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы $H_l(i\omega)$ и кривую гармонического коэффициента передачи $-\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}$. В точках пересечения кривых с помощью интерполяции находят значения частоты и амплитуды автоколебаний.

По методу Коченбургера значения частоты и амплитуды автоколебаний находят по пересечениям кривых $H_l(i\omega)$ и $-(\varkappa(A) + i\varkappa'(A))$.

Л.С. Гольдфарб, используя критерий Найквиста, получил следующий критерий определения устойчивости автоколебаний. При движении по кривой $-\frac{1}{\varkappa(A) + i\varkappa'(A)}$ в направлении возрастания амплитуды точке входа в контур амплитудно-фазовой характеристики $H_l(i\omega)$ будет соответствовать неустойчивое периодическое решение, а точке выхода — устойчивое решение. При чем точка выхода из контура определяет параметры автоколебаний.

При использовании метода Коченбургера также осуществляется движение по соответствующей кривой в сторону увеличения амплитуды колебаний. При этом устойчивые колебания соответствуют точке входа в контур, а неустойчивые — точке в выхода из контура.

3.2. Критерий Рауса–Гурвица

Данный критерий является алгебраическим критерием устойчивости [11, 12]. Этот критерий удобен тем, что исследование сводится к анализу полинома, который удобно проводить средствами систем компьютерной алгебры.

Передаточная функция замкнутой системы (рис. 5) с учётом (8) имеет вид:

$$H_c(s) = \frac{H_l(s)}{1 + H_l(s)H_{nl}(s)} := \frac{P_n(s)}{P_d(s)}. \quad (22)$$

Уравнение $P_d(s) = 0$ будет характеристическим уравнением системы. Представим его в виде полинома:

$$P_d(s) := a_0s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n. \quad (23)$$

Из коэффициентов характеристического уравнения построим определитель Гурвица Δ по следующему алгоритму:

- по главной диагонали слева направо выставляются все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n ;
- от каждого элемента диагонали вверх и вниз достраиваются столбцы так, чтобы индексы убывали сверху вниз;

– на место коэффициентов с индексами меньше нуля или больше n ставятся нули. Таким образом, определитель Гурвица будет выглядеть следующим образом [13]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}. \quad (24)$$

По критерию Гурвица, для того, чтобы динамическая система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все n главных диагональных миноров определителя Гурвица были положительны при $a_0 > 0$. Эти миноры называются определителями Гурвица.

При $a_n = 0$ система находится на границе аperiodической устойчивости.

Если предпоследний определитель Гурвица (минор определителя Рауса–Гурвица) $\Delta_{n-1} = 0$, то система находится на границе колебательной устойчивости. Собственно, данное выражение и необходимо нам для определения условий возникновения и параметров автоколебаний.

3.3. Критерий Михайлова

Данный критерий является вариацией критерия Найквиста–Михайлова [9] (собственно, из-за этого в названии раздела 3.1 мы добавляем к критерию Найквиста вторую фамилию).

Для применения этого критерия необходимо записать характеристическое уравнение замкнутой системы (22) (рис. 5) с учётом замены $s \rightarrow \partial_t \rightarrow i\omega$:

$$P_d(i\omega, A) = 0. \quad (25)$$

После явного выделения действительной и комплексной частей уравнение (25) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{P_d(i\omega, A)\} &= 0, \\ \operatorname{Im}\{P_d(i\omega, A)\} &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Тогда параметры автоколебаний можно определить из уравнения (26) (подробнее см. [14, § 6.3, с. 143–148], [15, §3.6, с. 139–144]).

Критерий устойчивости Михайлова [15, §3.6, с. 139–144]: для того чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы вектор кривой Михайлова $P_d(i\omega) = \operatorname{Re}\{P_d(i\omega)\} + i \operatorname{Im}\{P_d(i\omega)\} = P_d(\omega)e^{i\psi(\omega)}$ при изменении частоты ω от 0 до ∞ повернулся, нигде не обращаясь в ноль, вокруг начала координат против часовой стрелки на угол $n\pi/2$, где n — порядок характеристического уравнения.

4. Модель системы с управлением по алгоритму RED

В этом разделе приведём описание моделируемой системы.

Система представляет собой сеть передачи данных, передаваемых по протоколу TCP Reno [16] от источника до маршрутизатора с модулем управления, работающим по алгоритму типа RED [1–3, 17, 18].

Алгоритм RED [1] использует экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди \hat{Q} в качестве фактора, определяющего вероятность отбрасывания пакета $p(\hat{Q})$ (см. (27)). Для управления функцией сброса используются два пороговых значения средневзвешенной длины очереди, влияющих на функционирование алгоритма (рис. 6):

$$p(\hat{Q}) = \begin{cases} 0, & 0 < \hat{Q} \leq Q_{\min}, \\ \frac{\hat{Q} - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} p_{\max}, & Q_{\min} < \hat{Q} \leq Q_{\max}, \\ 1, & \hat{Q} > Q_{\max}. \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $p(\hat{Q})$ — функция сброса пакета, \hat{Q} — экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди, Q_{\min} и Q_{\max} — пороговые значения средневзвешенного значения длины очереди, p_{\max} — максимальный уровень сброса пакетов.

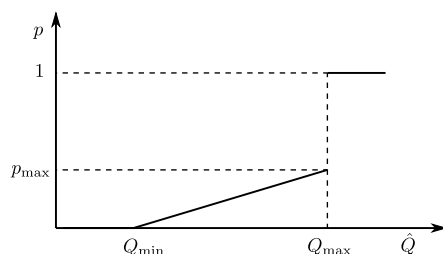


Рис. 6. Функция сброса алгоритма RED

Алгоритм RED благодаря простоте своей реализации в сетевом оборудовании достаточно эффективен, но обладает рядом недостатков. В частности, при некоторых значениях параметров возникает устойчивый автоколебательный режим функционирования системы, что негативным образом сказывается на показателях качества обслуживания сети [19–21]. К сожалению, отсутствуют чёткие критерии выбора значений параметров RED, при которых система не входила бы в автоколебательный режим.

Для описания системы с управлением по алгоритму типа RED по аналогии с работами [6, 22–28] будем использовать непрерывную модель:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{T(Q, t)} - \frac{W(t)W(t - T(Q, t))}{2T(t - T(Q, t))} p(t - T(Q, t)); \\ \dot{Q}(t) = \frac{W(t)}{T(Q, t)} N(t) - C; \\ \dot{\hat{Q}}(t) = -w_q C \hat{Q}(t) + w_q C Q(t). \end{cases} \quad (28)$$

Здесь используются следующие обозначения:

- W — размер окна TCP Reno;
- Q — значение длины очереди;
- \hat{Q} — экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди (EWMA, Exponentially Weighted Moving Average);
- w_q — весовой коэффициент, определяемый алгоритмом EWMA ($0 < w_q < 1$);
- C — интенсивность обслуживания очереди;

- T — полное время двойного оборота (RTT, Round-Trip Time); $T = T_p + \frac{Q}{C}$, где T_p — время двойного оборота свободной сети (без учёта задержек в оборудовании); $\frac{Q}{C}$ — время нахождения пакета в очереди;
- N — количество сессий TCP Reno;
- p — функция сброса пакетов.

Для этой модели примем следующие упрощающие предположения:

- модель записана в моментах;
- модель описывает только фазу избежания перегрузок протокола TCP Reno [16];
- в модели рассматривается только сброс при получении 3-х последовательных подтверждений ACK протокола TCP Reno.

5. Линеаризация модели системы с управлением по алгоритму RED

Для записи модели (28) в блочно-линейном подходе нам необходимо сначала её линеаризовать. Будем придерживаться методики, изложенной в статье [25], однако проведём все вычисления подробно.

Обозначим для краткости переменные: $W := W(t)$, $W_T := W(t - T(Q, t))$, $Q := Q(t)$, $\hat{Q} := \hat{Q}(t)$, $p := p(t - T(Q, t))$, $T = T(Q, t)$, $N(t) = N$.

Будем проводить линеаризацию в районе точки равновесия. Обозначим точку равновесия индексом f .

В точке равновесия производные по времени обращаются в ноль, поэтому система уравнений (28) примет следующий вид:

$$\begin{cases} 0 = \frac{1}{T_f} - \frac{W_f^2}{2T_f} p_f; \\ 0 = \frac{W_f}{T_f} N_f - C; \\ 0 = -w_q C \hat{Q}_f + w_q C Q_f. \end{cases} \quad (29)$$

Из системы уравнений (29) получим уравнения связи на равновесные значения переменных:

$$\begin{cases} p_f = \frac{2}{W_f^2}; \\ W_f = \frac{CT_f}{N_f}; \\ \hat{Q}_f = Q_f. \end{cases} \quad (30)$$

Запишем правые части системы (28):

$$\begin{cases} L_W(W, W_T, Q, p) = \frac{1}{T} - \frac{WW_T}{2T} p; \\ L_Q(W, Q) = \frac{W}{T} N - C; \\ L_{\hat{Q}}(\hat{Q}, Q) = -w_q C \hat{Q} + w_q C Q. \end{cases} \quad (31)$$

Проварьируем правые части (31) по всем переменным в окрестности точки равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f &= -\frac{W_T}{2T} p \Big|_f = -\frac{W_f}{2T_f} p_f; & \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f &= -\frac{W}{2T} p \Big|_f = -\frac{W_f}{2T_f} p_f; \\ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{T^2} \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} + \frac{W W_T}{2T^2} p \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{CT_f^2} + \frac{W_f^2}{2CT_f^2} p_f; \\ \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f &= -\frac{W W_T}{2T} \Big|_f = -\frac{W_f^2}{2T_f}; & \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f &= \frac{1}{T} N \Big|_f = \frac{N}{T_f}; \\ \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{W}{T^2} N \frac{\delta T}{\delta Q} \Big|_f = -\frac{W}{T^2} N \frac{\delta \left(\frac{Q}{C} + T_p \right)}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{W}{CT^2} N \Big|_f = -\frac{W_f}{CT_f^2} N; \\ \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f &= -w_q C \Big|_f = -w_q C; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f &= w_q C \Big|_f = w_q C. \end{aligned}$$

Учитывая уравнения связи (30), перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f &= -\frac{W_f}{2T_f} \frac{2}{W_f^2} = -\frac{1}{W_f T_f} = -\frac{N}{CT_f^2}; \\ \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f &= -\frac{W_f}{2T_f} \frac{2}{W_f^2} = -\frac{1}{W_f T_f} = -\frac{N}{CT_f^2}; \\ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{1}{CT_f^2} + \frac{2}{2CT_f^2} = 0; & \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f &= -\frac{C^2 T_f^2}{N^2} \frac{1}{2T_f} = -\frac{C^2 T_f}{2N^2}; \\ \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f &= \frac{N}{T_f}; & \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f &= -\frac{CT_f}{N} \frac{N}{CT_f^2} = -\frac{1}{T_f}; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f &= -w_q C; & \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f &= w_q C. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили из исходной системы (28) линеаризованную систему:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \dot{W}(t) &= \frac{\delta L_W}{\delta W} \Big|_f \delta W(t) + \frac{\delta L_W}{\delta W_T} \Big|_f \delta W(t - T_f) + \\ &+ \frac{\delta L_W}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) + \frac{\delta L_W}{\delta p} \Big|_f \delta p(t - T_f) = \\ &= -\frac{N}{CT_f^2} (\delta W(t) + \delta W(t - T_f)) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(t - T_f); \\ \delta \dot{Q}(t) &= \frac{\delta L_Q}{\delta W} \Big|_f \delta W(t) + \frac{\delta L_Q}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) = \frac{N}{T_f} \delta W(t) - \frac{1}{T_f} \delta Q(t); \\ \delta \dot{\hat{Q}}(t) &= \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta \hat{Q}} \Big|_f \delta \hat{Q}(t) + \frac{\delta L_{\hat{Q}}}{\delta Q} \Big|_f \delta Q(t) = -w_q C \delta \hat{Q}(t) + w_q C \delta Q(t). \end{aligned} \right. \quad (32)$$

Кроме того, линеаризуем функцию сброса (27):

$$P_{\text{RED}} \delta \hat{Q}(t) := \delta p(\hat{Q}, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \hat{Q} \leq Q_{\min}, \\ \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \delta \hat{Q}(t), & Q_{\min} < \hat{Q} \leq Q_{\max}, \\ 0, & \hat{Q} > Q_{\max}. \end{cases} \quad (33)$$

Выполним над (32) преобразования (4) и (5).

$$\begin{cases} s \delta W(s) = -\frac{N}{CT_f^2} (\delta W(s) + \delta W(s) e^{-sT_f}) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(s) e^{-sT_f} = \\ \quad = -\frac{N}{CT_f^2} (1 + e^{-sT_f}) \delta W(s) - \frac{C^2 T_f}{2N^2} \delta p(s) e^{-sT_f}; \\ s \delta Q(s) = \frac{N}{T_f} \delta W(s) - \frac{1}{T_f} \delta Q(s). \\ s \delta \hat{Q}(s) = -w_q C \delta \hat{Q}(s) + w_q C \delta Q(s). \end{cases} \quad (34)$$

Приведём в (34) подобные:

$$\begin{cases} \delta W(s) = -\frac{1}{s + \frac{N}{CT_f^2} (1 + e^{-sT_f})} \frac{C^2 T_f}{2N^2} e^{-sT_f} \delta p(s); \\ \delta Q(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{N}{T_f} \delta W(s); \\ \delta \hat{Q}(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \delta Q(s). \end{cases} \quad (35)$$

Учитывая выражение для $\delta \hat{Q}(s)$ из системы уравнений (35), запишем (33) в следующем виде:

$$\delta p(s) = P_{\text{RED}} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \delta Q(s). \quad (36)$$

Функция P_{RED} имеет вид, приведённый на рис. 7.

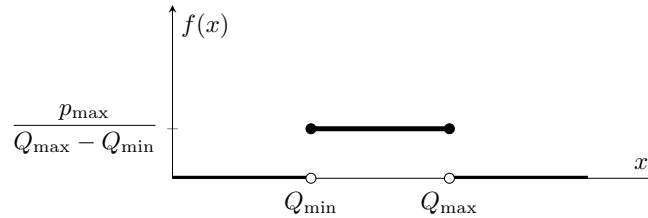


Рис. 7. Функция P_{RED}

На основании (35) и (36) построим блочное представление линеаризованной модели RED (рис. 8).

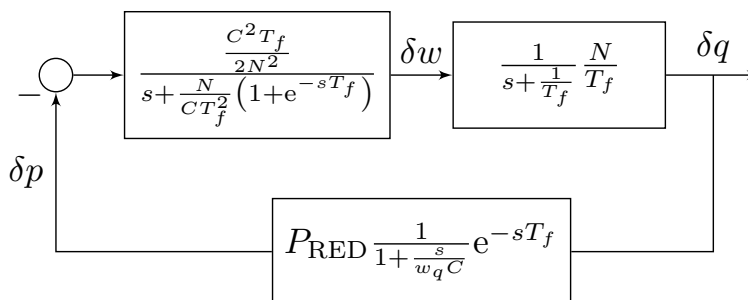


Рис. 8. Блочное представление линеаризованной модели RED

6. Гармоническая линеаризация линеаризованной модели системы с управлением по алгоритму RED

Приведём блочную схему линеаризованной модели (рис. 8) к виду, необходимому для гармонической линеаризации.

В качестве статической нелинейной функции будем использовать P_{RED} (33). Линеаризованную часть получим из (35) и (36) с помощью преобразования (6).

$$\begin{aligned}
 H_l &= \frac{1}{s + \frac{N}{C T_f^2} (1 + e^{-s T_f})} \frac{C^2 T_f}{2 N^2} e^{-s T_f} \times \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{N}{T_f} \times \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} = \\
 &= \frac{1}{s + \frac{N}{C T_f^2} (1 + e^{-s T_f})} \frac{1}{s + \frac{1}{T_f}} \frac{1}{1 + \frac{s}{w_q C}} \frac{C^2}{2 N} e^{-s T_f}. \quad (37)
 \end{aligned}$$

В блочном представлении схема на рис. 8 перейдёт в вид, приведённый на рис. 9

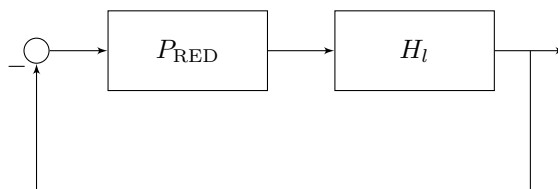


Рис. 9. Блочное представление линеаризованной модели RED для гармонической линеаризации

Вычислим коэффициенты гармонической линеаризации $\varkappa(a)$ и $\varkappa'(a)$ (15) для статической нелинейности P_{RED} :

$$\begin{aligned}
 \varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \int_0^{\pi/2} P_{\text{RED}}(A \sin(\omega t)) \sin(\omega t) d(\omega t); \\
 \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \int_0^{\pi/2} P_{\text{RED}}(A \sin(\omega t)) \cos(\omega t) d(\omega t).
 \end{aligned} \quad (38)$$

С учётом (33) получим:

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \sin(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} - \cos(\omega t) \Big|_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} = \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} (\cos \alpha_{\min} - \cos \alpha_{\max}); \\ \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \cos(\omega t) d(\omega t) = \\ &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \sin(\omega t) \Big|_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} = \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} (\sin \alpha_{\max} - \sin \alpha_{\min}).\end{aligned}\quad (39)$$

Найдём значения \sin и \cos от пределов интегрирования α_{\min} и α_{\max} :

$$\begin{aligned}x = A \sin \alpha_{\min} = Q_{\min}, \quad \sin \alpha_{\min} = \frac{Q_{\min}}{A}; \quad \cos \alpha_{\min} = \sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}}; \\ x = A \sin \alpha_{\max} = Q_{\max}, \quad \sin \alpha_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A}; \quad \cos \alpha_{\max} = \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}}.\end{aligned}\quad (40)$$

Таким образом, из (39) с учётом (40) получим:

$$\begin{aligned}\varkappa(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \left(\sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}} \right); \\ \varkappa'(A) &= \frac{4}{A\pi} \frac{p_{\max}}{Q_{\max} - Q_{\min}} \frac{Q_{\max} - Q_{\min}}{A} = \frac{4p_{\max}}{A^2\pi}.\end{aligned}\quad (41)$$

Таким образом, из (20), (37) и (41) получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\omega + \frac{N}{CT_f^2}(1 + e^{-i\omega T_f})} \frac{1}{i\omega + \frac{1}{T_f}} \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{w_q C}} \frac{C^2}{2N} e^{-i\omega T_f} = \\ = -\frac{A\pi}{4p_{\max}} \left[\frac{1}{Q_{\max} - Q_{\min}} \left(\sqrt{1 - \frac{Q_{\min}^2}{A^2}} - \sqrt{1 - \frac{Q_{\max}^2}{A^2}} \right) + i\frac{1}{A} \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (42)$$

Далее приведём пример нахождения характеристик моделируемой системы с помощью метода гармонической линеаризации.

Для численного эксперимента нами были выбраны следующие параметры: $Q_{\min} = 100$ [пакеты], $Q_{\max} = 150$ [пакеты], $p_{\max} = 0.1$, $T_p = 0.0075$ с, $w_q = 0.002$, $C = 2000$ [пакеты]/с, $N = 60$ (количество сессий ТСП).

В результате расчётов получены следующие значения для амплитуды и циклической частоты: $A = 1.89$ [пакетов], $\omega = 16.55$ с⁻¹.

Для наглядности можно построить параметрические графики на комплексной плоскости отдельно для левой $H_l(i\omega)$ и правой $-1/H_{nl}(A)$ частей уравнения (42) (от ω и от A соответственно) (см. рис. 10 и 11). Пересечение кривых даёт точку возникновения автоколебаний.

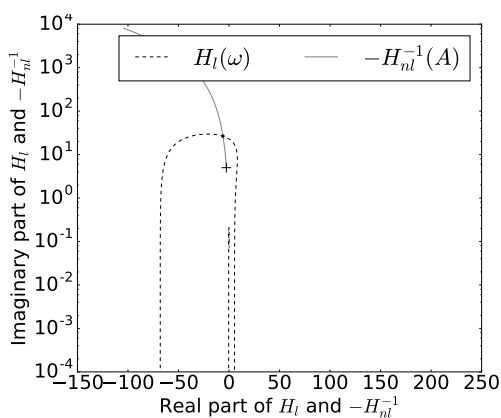


Рис. 10. Амплитудно-фазовая частотная характеристика для системы (42)

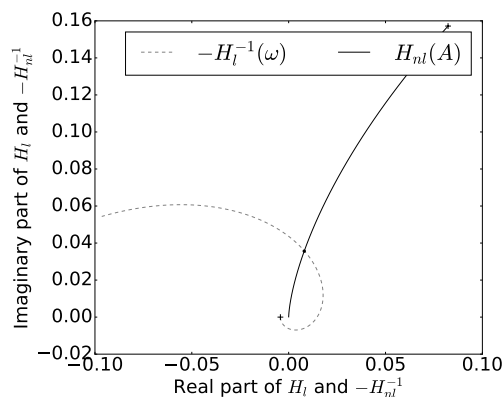


Рис. 11. Амплитудно-фазовая частотная характеристика для системы (21)

Поведение графика можно продемонстрировать с помощью эталонного средства имитационного моделирования компьютерных сетей NS-2 [29, 30]. При выбранных нами данных мы получим график изменения окна на источнике (рис. 12) и колебаний длины очереди на маршрутизаторе с алгоритмом управления RED (рис. 13).

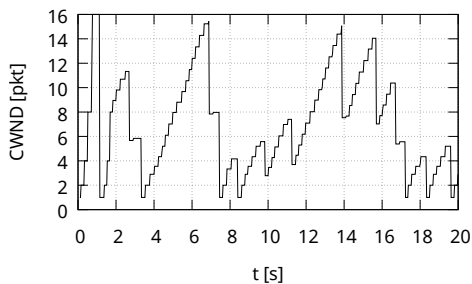


Рис. 12. Изменение размера скользящего окна на источнике

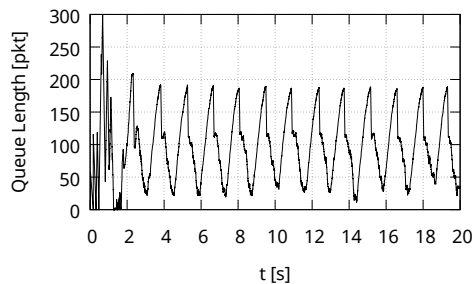


Рис. 13. Колебание очереди на маршрутизаторе с RED

В дальнейшем предполагается исследовать результаты, полученные с помощью системы NS-2 для нахождения параметров автоколебаний, а именно частоты и амплитуды. Эти результаты предполагается сравнить с теоретическими, полученными методом гармонической линеаризации.

7. Заключение

Авторами была продемонстрирована методика исследования колебательных режимов систем с управлением. Впрочем, эта демонстрация является скорее доказательством концепции, чем конкретными вычислениями. Авторы постарались изложить эту методику понятным образом для математиков, незнакомых с формализмом теории управления.

В дальнейшем предполагается применить данную методику к исследованию широкого спектра алгоритмов активного управления трафиком. Также представляется интересным сравнить эти результаты с ранее полученными результатами по областям возникновения автоколебаний в системах с управлением.

Литература

1. *Floyd S., Jacobson V.* Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Vol. 1, No 4. — Pp. 397–413.
2. *Jacobson V.* Congestion Avoidance and Control // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 1988. — Vol. 18, No 4. — Pp. 314–329.
3. *Королькова А. В., Кулябов Д. С., Черноуванов А. И.* К вопросу о классификации алгоритмов RED // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2009. — № 3. — С. 34–46.
4. *Королькова А. В., Кулябов Д. С.* Математическая модель динамики поведения параметров систем типа RED // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2010. — № 1. — С. 54–64.
5. Модель управления очередями на маршрутизаторах / Т. Р. Велиева, А. В. Королькова, Д. С. Кулябов, Б. А. Сантуш // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — Т. 2. — С. 81–92.
6. *Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S.* Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3 // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — Pp. 570–577.
7. *Aström K. J., Murray R. M.* Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers. — Princeton University Press, 2008. — 408 p.
8. *Nyquist H.* Regeneration Theory // Bell System Technical Journal. — 1932. — Vol. 11, No 1. — Pp. 126–147.
9. *Сю Д. С., Мейер А. У.* Современная теория автоматического управления и ее применение. — Москва: Машиностроение, 1972. — 552 с.
10. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. II. Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А. А. Воронов, Д. П. Ким, В. М. Лохин и др.; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. издание. — М.: Высш. шк, 1986.
11. *Routh E. J.* A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion. — Macmillan, 1877.
12. *Hurwitz A.* Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt // Mathematische Annalen. — 1895. — Bd. 46, No 2. — Ss. 273–284.
13. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 5-е издание. — Москва: Физматлит, 2010.
14. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.
15. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2-х ч. Ч. I. Теория линейных систем автоматического управления / Н. А. Бабаков, А. А. Воронов, А. А. Воронова и др.; под ред. А. А. Воронова. — 2-е изд., перераб. и доп. издание. — М.: Высш. шк, 1986.
16. *Allman M., Paxson V., Blanton E.* TCP Congestion Control: Techrep. — 2009.
17. *Kushwaha V., Gupta R.* Congestion Control for High-Speed Wired Network: A Systematic Literature Review // Journal of Network and Computer Applications. — 2014. — Vol. 45. — Pp. 62–78.
18. *Adams R.* Active Queue Management: A Survey // IEEE Communications Surveys Tutorials. — 2013. — Vol. 15, No 3. — Pp. 1425–1476.
19. *Jenkins A.* Self-Oscillation // Physics Reports. — 2013. — Vol. 525, No 2. — Pp. 167–222.
20. *Ren F., Lin C., Wei B.* A Nonlinear Control Theoretic Analysis to TCP-RED System // Computer Networks. — 2005. — Vol. 49, No 4. — Pp. 580–592.
21. *Lautenschlaeger W., Francini A.* Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links // Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015. — Budapest, Hungary:

- 2015.
22. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior // Proceedings of PERFORMANCE. — 1999. — Vol. 99.
 23. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30, No 4. — Pp. 151–160.
 24. On Designing Improved Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows / C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, Wei-Bo Gong // Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213). — Vol. 3. — IEEE, 2001. — Pp. 1726–1734.
 25. *Hollot C. V. V., Misra V., Towsley D.* A Control Theoretic Analysis of RED // Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213). — Vol. 3, No 2. — IEEE, 2001. — Pp. 1510–1519.
 26. *Korolkova A. V., Kulyabov D. S., Sevastianov L. A.* Combinatorial and Operator Approaches to RED Modeling // Mathematical Modelling and Geometry. — 2015. — Vol. 3, No 3. — Pp. 1–18.
 27. Hybrid Simulation Of Active Traffic Management / A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — 2016. — Pp. 685–691.
 28. *Brockett R.* Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304). — Vol. 3. — IEEE, 1999. — Pp. 3077–3082.
 29. *Altman E., Jiménez T.* NS Simulator for Beginners // Synthesis Lectures on Communication Networks. — 2012. — Vol. 5, No 1. — Pp. 1–184.
 30. *Issariyakul T., Hossain E.* Introduction to Network Simulator NS2. — 2012. — Vol. 9781461414, 510 p.

UDC 004.021:519.2:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-234-252

Application of the Harmonic Linearization Method to the Study a Control Systems with a Self-Oscillatory Regime

D. S. Kulyabov*[†], A. V. Korolkova*, T. R. Velieva*

** Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

*[†] Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie St., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

In data transmission networks implemented as systems with control, the phenomenon of global synchronization can occur. Outwardly, this phenomenon manifests itself as a self-oscillating mode in the system. This mode negatively affects the characteristics of the entire system, such as throughput and transmission delays. Relevant is the problem of finding the areas of occurrence of self-oscillation. The authors investigated this problem for the system as a whole. Also, the problem of isolating the elements of the system responsible for the appearance of an autooscillatory regime is urgent. The complexity of this problem is caused by the essentially nonlinear character of the system and its elements. Often, the linearization method is used for the decomposition of the system. But with the linearization, the self-oscillatory regime disappears. There is a need to find a method of decomposition, non-destructive self-oscillating mode of the system. As such a method, the authors suggest using the method of harmonic linearization. This method is used in the control theory. However, we must admit that this

mathematical apparatus is little known to researchers specializing in the study of networks. The authors tried to describe in as much detail the process of research using the method of harmonic linearization. The method is used to study the influence of the form of RED-type function on the occurrence of self-oscillation mode. Thus, this material is more methodical than exploratory one.

Key words and phrases: traffic active management, control theory, self-oscillating mode, method of harmonic linearization, RED

References

1. S. Floyd, V. Jacobson, Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance, *IEEE/ACM Transactions on Networking* 1 (4) (1993) 397–413. doi:10.1109/90.251892.
2. V. Jacobson, Congestion Avoidance and Control, *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* 18 (4) (1988) 314–329. arXiv:arXiv:1011.1669v3, doi:10.1145/52325.52356.
3. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, A. I. Chernoiyanov, On the Classification of RED Algorithms, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2009) 34–46, in Russian.
4. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, Mathematical Model of the Dynamic Behavior of RED-Like System Parameters, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (1) (2010) 54–64, in Russian.
5. T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, B. A. Dos Santos, Model Queue Management on Routers, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* 2 (2014) 81–92, in Russian.
6. T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3, in: *6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT)*, IEEE Computer Society, 2015, pp. 570–577. arXiv:1504.02324, doi:10.1109/ICUMT.2014.7002164.
7. K. J. Aström, R. M. Murray, *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*, Princeton University Press, 2008.
8. H. Nyquist, Regeneration Theory, *Bell System Technical Journal* 11 (1) (1932) 126–147. doi:10.1002/j.1538-7305.1932.tb02344.x.
9. J. Hsu, A. Meyer, *Modern Control Principles and Applications*, McGraw-Hill, 1968.
10. A. A. Voronov, D. P. Kim, V. M. Lokhin, et al., *Theory of Automatic Control: Textbook for High Schools on the Specialty "Automation and telemechanics"*. In two parts. Part II. Theory of Nonlinear and Special Systems of Automatic Control, 2nd Edition, High School, Moscow, 1986, in Russian.
11. E. J. Routh, *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*, Macmillan, 1877.
12. A. Hurwitz, Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, *Mathematische Annalen* 46 (2) (1895) 273–284. doi:10.1007/BF01446812.
13. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Pub. Co., 1959.
14. V. A. Besekerskiy, E. P. Popov, *Theory of Automatic Control Systems*, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
15. N. A. Babakov, A. A. Voronov, A. A. Voronova, et al., *Theory of Automatic Control: Textbook for High Schools on the Specialty "Automation and telemechanics"*. In two parts. Part. I. Theory of Linear Systems of Automatic Control, 2nd Edition, High School, Moscow, 1986, in Russian.
16. M. Allman, V. Paxson, E. Blanton, TCP Congestion Control, Tech. rep. (sep 2009). doi:10.17487/rfc5681.

17. V. Kushwaha, R. Gupta, Congestion Control for High-Speed Wired Network: A Systematic Literature Review, *Journal of Network and Computer Applications* 45 (2014) 62–78. doi:10.1016/j.jnca.2014.07.005.
18. R. Adams, Active Queue Management: A Survey, *IEEE Communications Surveys Tutorials* 15 (3) (2013) 1425–1476. doi:10.1109/SURV.2012.082212.00018.
19. A. Jenkins, Self-Oscillation, *Physics Reports* 525 (2) (2013) 167–222. arXiv:1109.6640, doi:10.1016/j.physrep.2012.10.007.
20. F. Ren, C. Lin, B. Wei, A Nonlinear Control Theoretic Analysis to TCP-RED System, *Computer Networks* 49 (4) (2005) 580–592. doi:10.1016/j.comnet.2005.01.016.
21. W. Lautenschlaeger, A. Francini, Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links, in: *Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015, Budapest, Hungary, 2015*. arXiv:1602.05333.
22. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior, *Proceedings of PERFORMANCE 99*.
23. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED, *ACM SIGCOMM Computer Communication Review* 30 (4) (2000) 151–160. doi:10.1145/347057.347421.
24. C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, Wei-Bo Gong, On Designing Improved Controllers for AQM Routers Supporting TCP Flows, in: *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213), Vol. 3, IEEE, 2001, pp. 1726–1734*. doi:10.1109/INFCOM.2001.916670.
25. C. V. V. Hollot, V. Misra, D. Towsley, A Control Theoretic Analysis of RED, in: *Proceedings IEEE INFOCOM 2001. Conference on Computer Communications. Twentieth Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Society (Cat. No.01CH37213), Vol. 3, IEEE, 2001, pp. 1510–1519*. doi:10.1109/INFCOM.2001.916647.
26. A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastianov, Combinatorial and Operator Approaches to RED Modeling, *Mathematical Modelling and Geometry* 3 (3) (2015) 1–18.
27. A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, Hybrid Simulation Of Active Traffic Management, *Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation (2016) 685–691* doi:10.7148/2016-0685.
28. R. Brockett, Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems, in: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304), Vol. 3, IEEE, 1999, pp. 3077–3082*. doi:10.1109/CDC.1999.831407.
29. E. Altman, T. Jiménez, NS Simulator for Beginners, *Synthesis Lectures on Communication Networks* 5 (1) (2012) 1–184. doi:10.2200/S00397ED1V01Y201112CNT010.
30. T. Issariyakul, E. Hossain, *Introduction to Network Simulator NS2*, Vol. 9781461414, 2012. doi:10.1007/978-1-4614-1406-3.

UDC 539.12

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-253-265

The Boundary Value Problem for Elliptic Equation in the Corner Domain in the Numerical Simulation of Magnetic Systems

E. E. Perepelkin*, R. V. Polyakova[†], A. D. Kovalenko[†], P. N. Sysoev*,
M. B. Sadovnikova*, A. A. Tarelkin*, I. P. Yudin[†]

* *Lomonosov Moscow State University
GSP-1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation*

[†] *Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie St., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

Modern accelerator systems and detectors contain magnetic systems of complex geometrical configuration. Design and optimization of the magnetic systems demands solving a nonlinear boundary-value problem of magnetostatic.

The region in which the boundary-value problem is solved, consists of two sub-domains: a domain of vacuum and a domain of ferromagnetic. In view of the complex geometrical configuration of magnetic systems, the ferromagnetic/vacuum boundary can be nonsmooth, i.e. it contains a corner point near of which the boundary is formed by two smooth curves crossed in a corner point at some angle.

Thereby, the solution of such a problem has to be found by numerical methods, a question arises about the behavior of the boundary value problem solution around the angular point of the ferromagnetic. This work shows that if the magnetic permeability function meets certain requirements, the corresponding solution of the boundary value problem will have a limited gradient. In this paper, an upper estimate of maximum possible growth of the magnetic field in the corner domain is given.

In terms of this estimate, a method of condensing the differential mesh near the corner domain is proposed. This work represents an algorithm of constructing an adaptive mesh in the domain with a boundary corner point of ferromagnetic taking into account the character of behavior of the solution of the boundary value problem. An example of calculating a model problem in the domain containing a corner point is given.

Key words and phrases: magnet systems, mathematical modeling, boundary value problem, elliptic equations, the behavior of solutions in the corner domain

1. Introduction

Many physics research facilities use magnetic systems of various configurations, e.g., a system of spectrometric magnets. It is very important to know with a good accuracy the distribution of the magnetic field generated by this system. The problem is actually reduced to formulation of a magnetostatics problem of finding the distribution of the magnetic field generated by the magnetic system under consideration. Since the magnetic system has a complicated configuration, the solution of the problem is usually sought using numerical methods. The domain in which the boundary value problem is solved during calculations of a particular magnetic system often has a piecewise smooth boundary. In this case, the solution of the problem or the derivative solutions can have a singularity. Therefore, the numerical search for the solution requires the use of special methods.

2. Formulation of the Boundary Value Problem

The problem to be formulated is the magnetostatics problem of the magnetic field distribution in the corner domain of a ferromagnetic (see Fig. 1). From the Maxwell's

equations and boundary relations (no currents are supposed to be in the region under consideration) it follows that

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B}(p) &= 0, \quad \operatorname{curl} \vec{H}(p) = 0, \quad p \in \Omega; \\ \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) &= 0, \quad \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = 0, \quad p \in \Gamma, \end{aligned}$$

where Ω is the ferromagnetic and the vacuum region (on Figs. 1, 2 region $\Omega_1 = \Omega_v$ and region $\Omega_2 = \Omega_f$); Γ is the boundary; and \vec{B} and \vec{H} are the magnetic field induction and strength vectors, respectively.

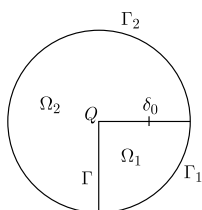


Figure 1. The corner domain

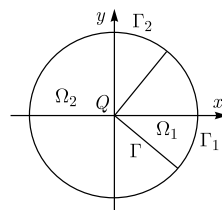


Figure 2. The angular sector

For the ferromagnetic region Ω_2 , we can write $\vec{B} = \mu_0 \mu(H) \vec{H}$, where $H = |\vec{H}|$, $\mu(H)$ is the permeability, and μ_0 is the vacuum permeability. For the vacuum region Ω_1 , we have $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Since there are no current sources in the region $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, the field is potential, and thus the following representation holds:

$$\vec{H}(p) = -\nabla u(p), \quad p \in \Omega, \quad u(p) = \begin{cases} u_1(p), & p \in \Omega_1, \\ u_2(p), & p \in \Omega_2, \end{cases}$$

where $u(p)$ is the scalar potential. The consequent formulation of the boundary value problem is

$$\begin{aligned} \operatorname{div} [\mu(|\nabla u_1(p)|) \nabla u_2(p)] &= 0, \quad p \in \Omega_2, \quad \Delta u_1(p) = 0, \quad p \in \Omega_1, \\ u_1|_{\Gamma_-} &= u_1|_{\Gamma_+}, \quad \mu(|\nabla u_2(p)|) \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \\ u_1|_{\Gamma_1} &= \Psi_1; \quad u_2|_{\Gamma_2} = \Psi_2, \end{aligned} \quad (1)$$

where the function $\mu(H)$ satisfies the conditions:

1. $\mu(H) \in C^{(1)} [0, +\infty)$;
2. $\mu(H) > 1$ for $H \in [0, +\infty)$;
3. $\mu(H) \xrightarrow{H \rightarrow +\infty} 1$.

Let us consider the function $\bar{\mu}(H)$, an analogue of the function $\mu(H)$, for which conditions 2 and 3 are replaced by $\bar{\mu}(H') = 1$ for $H' \geq H_0$, where H_0 is “large enough”. In what follows we will assume that the solution to (1) is $u \in C(\Omega \cup \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2)$, and thus it follows that $\exists C_0 > 0 \forall p \in \Omega \cup \Gamma \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 : |u(p)| < C_0$.

3. On a Certain Boundary Value Problem

Before proceeding to the main statements of the paper, we consider an auxiliary problem that is discussed in detail in [1], namely, the boundary value problem (see Fig. 2)

$$\begin{cases} \operatorname{div} [q \nabla u(p)] = 0, & p \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_-} = u|_{\Gamma_+}, \\ q_2 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = q_1 \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, & \text{where } q = \begin{cases} q_1, & p \in \Omega_1, \\ q_2, & p \in \Omega_2, \end{cases} \\ u|_{\Gamma_1} = \Psi_1; \quad u|_{\Gamma_2} = \Psi_2, \\ \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 = \{(r, \phi) : 0 < r < r_0, \quad |\phi| < \pi/4\}, \\ \Omega_2 = \{(r, \phi) : 0 < r < r_0, \quad |\phi| > \pi/4\}, \end{cases}$$

where $\Psi_i \in C^{(1)}(\Gamma_i), i = 1, 2$, (see Fig. 2). Let us introduce the polar coordinate system. The solution is sought by the method of separation of variables: $u \sim R(r) \cdot \Phi(\varphi)$. As a result, we have $\Phi'' + \lambda^2 \Phi = 0, r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0$.

Thus, by virtue of boundedness of $u(p)$ at the origin, the solution for $R(r)$ will be $R(r) \sim r^\lambda$, and for $\Phi(\varphi)$ there will be eigenfunctions divided into two groups, symmetric about $\varphi = 0$ and antisymmetric about $\varphi = 0$. In the former case, the eigenfunctions take the form

$$\Phi_\lambda^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} \cos(\lambda\varphi), & |\varphi| < \pi/4, \\ a_\lambda \cos(\lambda(\pi - \varphi)), & |\varphi| > \pi/4. \end{cases}$$

Here the constant a_λ is determined from the boundary ratio for normal derivatives

$$a_\lambda = - \left[q_1 \sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) \right] / \left[q_2 \sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right) \right],$$

and the eigenvalues λ can be determined using the continuity relation for the solution $u(r, \varphi)$ at the boundary

$$-\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Thus, either $\operatorname{tg}\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) = 0$ and hence $\lambda = 4n$, or $\lambda = \pm\lambda_1 \pm 4n$, where λ_1 is the smallest root of the equation

$$-\frac{q_1}{q_2} = \left[3 - \tan^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) \right] / \left[1 - 3 \tan^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) \right]. \tag{2}$$

The singularity is introduced in the solution by the series term $r^{\lambda_1} \Phi_{\lambda_1}(\varphi)$ at $\lambda_1 < 1$. From (2) it follows that

$$\lambda_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_2. \tag{3}$$

This means that if $q_1 = q_2, |\nabla u(p)|$ will be limited.

4. Behavior of the Solution of the Boundary Value Problem

Let us consider boundary value problem (1) with the permeability function $\bar{\mu}$, region Ω (see Fig. 1).

Statement 1.

$$\exists K > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < \rho(p, Q) < \delta : |\nabla u(p)| < K,$$

where $\rho(p, Q)$ is the distance between the points p and Q , and by boundedness on Γ is meant boundedness on Γ_+ and Γ_- .

Proof. We will prove it by contradiction. Let us assume that it is not true. Then

$$\exists K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \rho(p, Q) < \delta : |\nabla u(p)| \geq K.$$

Let us take $K = \max(H_0, 4C_0\sqrt{\pi})$, $0 < \delta_0 < \delta$, then for $p : 0 < \rho(p, Q) \leq \delta_0$ the condition

$$|\nabla u(p)| \geq H_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}(H) = 1. \quad (4)$$

should hold.

We introduce a polar coordinate system with the origin at the point Q . Let $u(r, \varphi)$ be the solution of our boundary value problem satisfying condition (4). Then on Γ_{\pm} it should satisfy the conditions

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi) \right|_{\varphi=0+} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi) \right|_{\varphi=0-}, \quad (5)$$

and by virtue of continuity of $u(\delta_0, \varphi)$

$$u(\delta_0, \varphi)|_{\varphi=0+} = u(\delta_0, \varphi)|_{\varphi=0-} = u(\delta_0, 0) \quad (6)$$

should hold. It follows from (5) and (6) that

$$\exists \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, 0) = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi) \right|_{\varphi=0+} = \left. \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi) \right|_{\varphi=0-}.$$

Thus, putting

$$\bar{\Psi}_i(\phi) = u_i(\delta_0, \phi), \quad i = 1, 2, \quad \bar{\Psi} = \begin{cases} \bar{\Psi}_1, & \bar{\Gamma}_1, \\ \bar{\Psi}_2, & \bar{\Gamma}_2, \end{cases}$$

$$\bar{\Gamma} = \{(\delta_0, \phi) : 0 < \phi \leq 2\pi\},$$

in the δ_0 -vicinity of the point Q , we obtain the boundary value problem

$$\begin{aligned} \Delta u_1(p) = 0, \quad p \in \Omega_1, \quad \Delta u_2(p) = 0, \quad p \in \Omega_2, \\ \left. \frac{\partial u_2}{\partial n} \right|_{\Gamma_+} = \left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{\Gamma_-}, \quad u_1|_{\Gamma_-} = u_2|_{\Gamma_+}, \quad u|_{\bar{\Gamma}} = \bar{\Psi}, \end{aligned} \quad (7)$$

where $\bar{\Psi} \in C^{(1)}(\bar{\Gamma})$. From (3) (and also from [1]) we find that (7) has no singularities, i.e., $\lim_{p \rightarrow Q} |\nabla u(p)| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \leq 4C_0\sqrt{\pi} = K$, where a_1 and b_1 are the Fourier series coefficients for the function $u(p)$ at the boundary of $\bar{\Gamma}$. Consequently, we have arrived at a contradiction, which proves our statement. \square

Thus, it follows from the statement that the magnetic field is bounded in the corner domain provided that the permeability function satisfies the conditions:

- 1) $\bar{\mu}(H) \in C^{(1)}[0, +\infty)$;
- 2) $\exists H_0 > 0 \ \forall H' \geq H_0 : \bar{\mu}(H') = 1$.

Note an interesting fact. Let us solve boundary value problem (1) and let its solution have unbounded $|\nabla u|$. This means that in the vicinity of the point Q the permeability function $\mu(|\nabla u|)$ will tend to unity. Since the number of figures in the mantissa is limited, it will turn out that in a certain small vicinity of the point Q the function $\mu(|\nabla u|)$ will be equal to 1. That is, there arises boundary value problem (1) with the permeability function $\bar{\mu}(H)$ that has bounded $|\nabla u|$ and thus we get a contradiction. Consequently, numerical calculations cannot “theoretically” yield a solution with the infinitely growing $|\nabla u|$, and we will seek the solution of another boundary value problem, namely, problem (1) with $\bar{\mu}(H)$, where $|\nabla u|$ is limited. But the solution of problem (1) with $\bar{\mu}(H)$ does not coincide in the general case with the solution of initial problem (7) with $\mu(H)$. It is therefore necessary to use special methods for solving this problem. One of these methods is considered in [2, 3] for the solution of the equation $\operatorname{div} [\mu(|\nabla u|) \nabla u] = 0$ in the corner domain.

5. Estimation of the Magnetic Field Growth

Let us show that the magnetic field in the corner domain of a ferromagnetic satisfies the condition

$$H(s) \leq C_0 \ln \frac{1}{r_s} + w(s), \quad (8)$$

where C_0 is a constant; $w(s)$ is a bounded function; and r_s is the distance to the corner. The integral formulation of the magnetostatic problem allows the magnetic field to be represented as

$$\vec{H}(s) = \vec{H}_C(s) - \nabla_s \int_{\Omega_f} \left(\vec{M}(p), \nabla_P \Psi(s, p) \right) dv_p, \quad (9)$$

where \vec{H}_C is the field from the current sources; \vec{M} is the ferromagnetic magnetization vector; the function $\Psi(s, p)$ is equal to $\frac{1}{4\pi r_{sp}}$ or $\frac{1}{2\pi} \ln r_{sp}$ for the three-dimensional and the two-dimensional case, respectively; and Ω_f is the ferromagnetic domain (see Fig. 2: region $\Omega_1 = \Omega_v$ and region $\Omega_2 = \Omega_f$). The magnetization vector is defined as $\vec{M} = \mu_0 \chi(H) \vec{H} = \mu_0 (\mu(H) - 1) \vec{H}$, where μ_0 is a constant; $\chi(H)$ is the magnetic susceptibility; and $\mu(H)$ is the permeability of the ferromagnetic. Given high fields ($H \rightarrow \infty$), the representation $\mu(H) = 1 + \frac{A}{H} - \frac{B}{H^2}$, $H \rightarrow \infty$ is valid, where A and B are positive constants. Consequently, when $H \rightarrow \infty$, $M = |\vec{M}|$ is limited by a constant $M_0 = \mu_0 A$. Let us consider the 2D case. From (9) we obtain

$$\vec{H}(s) = \vec{H}_C(s) - \frac{1}{2\pi} \nabla_s \int_{\Omega_f} \left(\vec{M}(p), \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) dv_p.$$

Here the first term is limited, and we therefore estimate the second term

$$\left| \nabla_s \int_{\Omega_f} \left(\vec{M}(p), \frac{\vec{r}_{sp}}{r_{sp}^2} \right) dv_p \right| \leq 2 \int_{\Omega_f} \frac{2r_{sp}^2 |M^{(x)}| + 2r_{sp}^2 |M^{(y)}|}{r_{sp}^4} dv_p \leq 8M_0 \int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p.$$

We calculate the integral

$$\int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p = \int_{v_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p + \int_{\Omega_f \setminus v_\delta} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p,$$

where $v_\delta = \Omega_f \cap S_\delta(Q)$ is the angular sector at the v_δ corner point Q (see Fig. 2).

The integral over the domain Ω_f/v_δ will be limited, and we therefore consider only the integral over the domain v_δ

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p &= \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \int_0^\delta \frac{r_p dr_p}{r_p^2 + r_s^2 - 2r_p r_s \cos \varphi_{sp}} = \\ &= \int_0^{\omega_0} d\varphi_p \left(\int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2-2t \cos \varphi_{sp}} + \int_1^{\delta/r_s} \frac{tdt}{1+t^2-2t \cos \varphi_{sp}} \right), \quad t = \frac{r_p}{r_s}. \end{aligned}$$

Then we use the expression for the generating function

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t \cos \varphi_{sp}}} = \begin{cases} \sum_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos \varphi_{sp}) t^m, & |t| < 1, \\ \sum_{m=0}^{+\infty} P_m(\cos \varphi_{sp}) t^{-m-1}, & |t| < 1, \end{cases}$$

and obtain

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \frac{1}{r_{sp}^2} dv_p &= \omega_0 \ln \frac{\delta}{r_s} + \sum_{m,k=0}^{+\infty} P_m P_k \frac{\alpha_{m,k}}{m+k+2} + \sum_{m+k \neq 0}^{+\infty} P_m P_k \frac{\alpha_{m,k}}{m+k} \left(\left(\frac{r_s}{\delta} \right)^{m+k} - 1 \right) = \\ &= C_1 \ln \frac{1}{r_s} + w_1(s), \end{aligned}$$

where

$$\alpha_{m,k} = \int_0^{\omega_0} P_m(\cos \varphi_{sp}) P_k(\cos \varphi_{sp}) d\varphi_p,$$

C_1 is a constant, and $w_1(s)$ is a bounded function. Thus, the validity of expression (8) is ascertained.

6. Method of Mesh Condensing in the Corner Domain

In [4,5] there are examples of constructing a differential mesh for some boundary value problems in corner domains. The main idea is to condense the differential mesh or finite

elements for obtaining an admissible problem approximation error. This error involves integrals over elementary domains estimated by the quantities of the form $Ch_i^\beta \|u\|_{k,j}$, where h_i is the diameter of the i elementary domain or mesh cell; β is a positive number; $\|u\|_{k,j}$ is the norm of the function with the k th derivative in this domain; and C is a constant independent of all these factors. Then we can require, for example, that quantities $Ch_i^\beta \|u\|_{k,j}$ be identical in the domain under consideration. To this end, h_i^β can be decreased in inverse proportion to $\|u\|_{k,j}$ on approach to the singular points. We demonstrate the validity of the following statement.

Let $\vec{V}(s)$ be the solution of the magnetostatic problem in the integral formulation found by a numerical method and $\vec{H}(s)$ be the exact solution. Then the following estimate is valid:

$$\left\| \vec{V} - \vec{H} \right\|_{L_2(D)}^2 < h^2 (c_1 \ln^2 h + c_2 \ln h + c_3), \quad (10)$$

where c_1 , c_2 , and c_3 are positive constants and h is the diameter of the domain D , which is a differential grid cell containing the ferromagnetic corner.

By virtue of (9), the following expression for $\vec{V}(s)$ holds:

$$\vec{V}(s) = \vec{H}_C(s) - \frac{1}{2\pi} \nabla_s \sum_{j=1}^N \int \left(\vec{M}(\vec{H}_j), \frac{\vec{r}_{sp_j}}{r_{sp_j}^2} \right) dv, \quad (11)$$

where \vec{H}_j is the field in the cell Ω_j , $j = 1 \dots N$; $\bigcup_{j=1}^N \Omega_j = \Omega_f$; and r_{sp_j} is the distance from the point s to the point $p_j \in \Omega_j$. We consider the difference

$$\vec{V}(s) - \vec{H}(s) = -\frac{1}{2\pi} \nabla_s \sum_{j=1}^N \int \left(\vec{M}(\vec{H}_j) - \vec{M}(\vec{H}(p_j)), \frac{\vec{r}_{sp_j}}{r_{sp_j}^2} \right) dv.$$

Since the quantity $|\vec{M}| < M_0$ is limited, it follows that $|\vec{M}(\vec{H}_j) - \vec{M}(\vec{H}(p_j))| < 2M_0$ for $j = 1 \dots N$. Thus, we obtain

$$\left| \vec{V}(s) - \vec{H}(s) \right| < \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int \frac{dv}{r_{sp_j}^2} = \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j \cap S_\delta(Q)} \frac{dv}{r_{sp_j}^2} + \frac{8M_0}{\pi} \sum_{j=1}^N \int_{\Omega_j \setminus S_\delta(Q)} \frac{dv}{r_{sp_j}^2}.$$

As a result, using the estimate obtained above, we arrive at the expression

$$\left| \vec{V}(s) - \vec{H}(s) \right| < C_2 \ln \frac{1}{r_s} + w_2(s). \quad (12)$$

It remains to estimate $\left\| \vec{V} - \vec{H} \right\|_{L_2(D)}^2$, where the domain D is the $S_\delta(Q)$ — δ -domain of the corner point Q . Using (12), we obtain

$$\left\| \vec{V} - \vec{H} \right\|_{L_2(D)}^2 = \int_D \left| \vec{V}(s) - \vec{H}(s) \right|^2 dv < h^2 (c_1 \ln^2 h + c_2 \ln h + c_3),$$

where $h = 2\delta$, and c_1, c_2 , and c_3 are constants. The result corresponds to (10). Based on the aforesaid and inequality (10), we propose a differential mesh condensing method

$$\int_0^{h_1} \left| \ln \frac{1}{x} \right| dx = d_0, \quad \int_{x_{m-1}}^{x_m} \left| \ln \frac{1}{x} \right|^2 dx = d_0, \quad x_m - x_{m-1} = h_m, \quad m = 1, 2, \dots, M.$$

Here d_0 is a constant; M is the number of partitions along the coordinate axis (OX or OY) in the corner domain; h_m is the grid spacing; and x_m is the coordinate of the grid node along the OX or OY axis (the origin of the coordinates is at the corner point), $|x| < 1$.

7. Calculation of the Magnetic Field in the Corner Domain

In Section 5 we gave the upper estimate of the admissible magnetic field growth in the corner domain of a ferromagnetic. In Section 6, based on this estimate, we proposed a method of condensing the differential mesh in the corner domain. In this section we present numerical calculations of a magnetic system using this method. It is evident from the calculations that the above mesh condensing method substantially improves the accuracy of the calculated magnetic field distribution. We considered a magnetic system depicted in Fig. 2. The domain Ω_v corresponds to the vacuum, and the domain Ω_f is filled with a ferromagnetic. A boundary value problem

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} v \frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} v \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0, & p \in \Omega_f \cup \Omega_v = \Omega, \\ A_z|_{\Gamma_-} = A_z|_{\Gamma_+}, & v \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \\ A_z|_{x=0} = C, & A_z|_{x=x_2} = -C, & \frac{\partial A_z}{\partial n} \Big|_{y=0, y_1} = 0, \end{cases} \quad (13)$$

corresponding to the formulation of the magnetostatic problem with respect to the vector potential A_z , was solved in the domain under consideration. The function ϑ is defined as $\vartheta = 1/\mu(B)$, where $\mu(B)$ is the permeability of the ferromagnetic; B is the modulus of the magnetic induction vector $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$; Γ_{\pm} is the interface; and C is a constant. The efficiency of the differential mesh condensing method described in Section 6 was estimated by the following calculations:

Variante 1. The solution to problem (13) was found on a sequence of $(10k) \times (10k)$ meshes, where $k = 1, 2, 4, 8, 10, 20, 40$; that is, $10 \times 10, 20 \times 20, \dots, 400 \times 400$ meshes were obtained. The mesh spacing in the corner domain Π_Q was uniform.

Variante 2. Problem (13) was calculated on the same sequence of meshes at $k = 1, 2, 4, 8$, but the mesh spacing in the domain Π_Q was chosen using the differential mesh condensing method described in Section 6. In the domain Ω/Π_Q the mesh spacing was not changed as compared with the previous variant. The number of node points in the domain Π_Q was the same, and only their distribution was changed.

The results of the variant 1 calculations were taken to be a sort of reference because the accuracy of the calculated solution was assumed to increase with increasing number of partitions, except probably for a particular corner domain. Then the results of the variant 2 calculations were compared with the results of the variant 1 calculations. Figures 3–6 shows distributions $B_y(x)$ at $y = y_1$ for different meshes. In all figures the reference distribution $B_y(x)$ calculated on the 400×400 mesh is designated as trace 1.

The plots of traces 2 and 3 are the distributions $B_y(x)$ calculated by variants 1 and 2, respectively. The distributions in Figs. 3–6 are calculated on the 10×10 , 20×20 , 400×400 , and 80×80 meshes, respectively. It is evident from Figs. 3 that the accuracy of the variant 2 calculations (nonuniform mesh) is substantially higher than that of the variant 1 calculations (uniform mesh). Thus, it follows that the proposed method of constructing a differential mesh in the corner domain is worth using and yields results comparable in accuracy with the results obtained only on meshes with the number of nodes in each axis four to five times greater than in the initial mesh. An algorithm of thickening differential mesh near the corner point has been developed. It allows one to significantly reduce the computation time and simultaneously to increase the accuracy of the solution of the boundary value problem. Variant 1 — maximum of relative error is 11.085%; variant 2 — maximum of relative error is 1.091%.

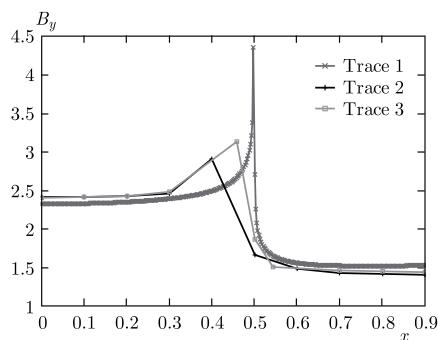


Figure 3. Distributions $B_y(x)$ at $y = y_1$. Mesh 10×10

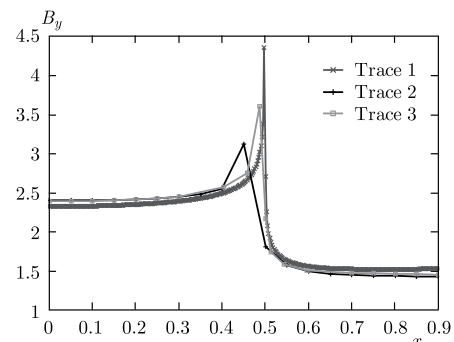


Figure 4. Distributions $B_y(x)$ at $y = y_1$. Mesh 20×20

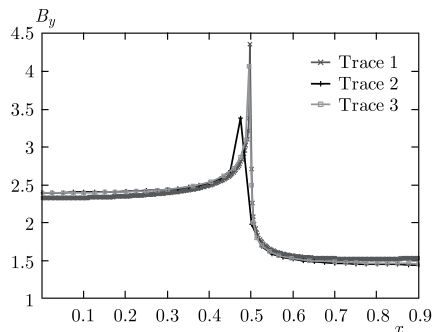


Figure 5. Distributions $B_y(x)$ at $y = y_1$. Mesh 400×400

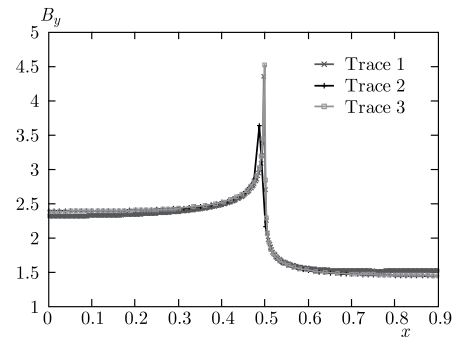


Figure 6. Distributions $B_y(x)$ at $y = y_1$. Mesh 80×80

8. Results of Modeling of Some Magnetic Systems

The significance of numerical modeling at the investigating of magnetic systems is defined by not only known dignities of computational experiment but also that the measurement of magnetic field is labor-intensive and expensive problem. The process of the mathematical modeling of magnetic systems (see Figs. 7 and 8), as the authors of this work have presented, should be divided into two large stages.

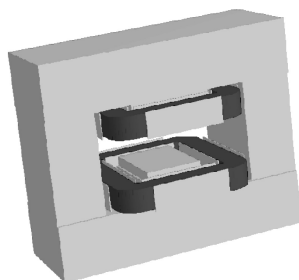


Figure 7. General view of spectrometric magnet 1SP-40-4B

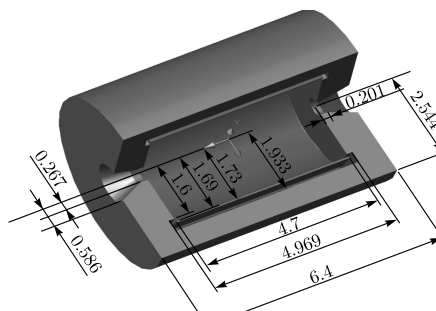


Figure 8. Type of solenoidal magnet

8.1. Results of modeling magnetic systems SP-94 and 1SP-40-4B

In the experiment performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energy Physics, JINR, the SP-94 [6] magnet is used. It was necessary to select the configuration of the core and the current coils such that the quantity $\int_{-\infty}^{+\infty} B_y(0, 0, z) dz$ had the maximum value. Fig. 9a presents the distribution of B_y in the XOZ plane for this configuration of the magnet $SP = 94$ (variant 1). First, the initial configuration (variant 1) was calculated. Here $\int_{-L}^L B_y(0, 0, z) dz = 2.314$, where $L = 1.5$ m is the dimension along the OZ axis of the region where the magnetic field was calculated for variant 1. Second, the initial configuration (variant 2) was calculated. Fig. 9b presents the distribution of B_y in the XOZ plane for configuration of the magnet $SP = 94$ (variant 2). Here $\int_{-L}^L B_y(0, 0, z) dz = 2.987$, which is 1.291 times greater than for the initial configuration in variant 1.

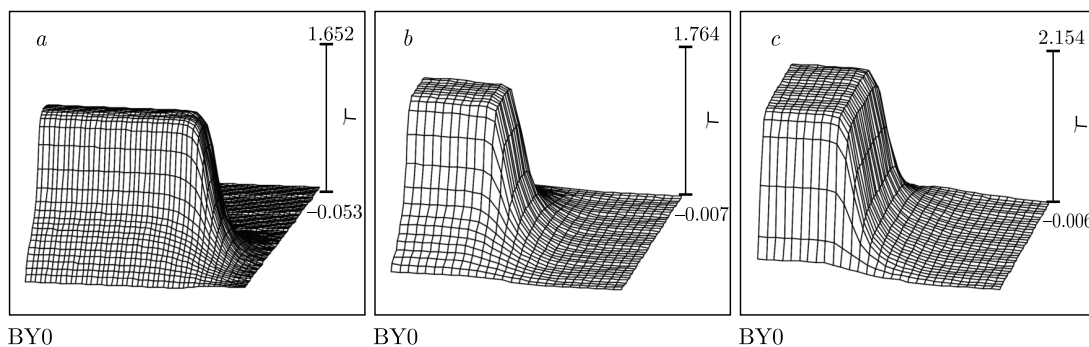


Figure 9. Distribution of B_y for three configurations of the magnet SP-94

Two configurations of the magnet 1SP-40-4B NIS (variant 1, 2, respectively) for which the numerical computations of the magnetic fields were performed, i.e., in fact, a nonlinear inverse problem of magnetostatics were solved. The purpose of the simulation is to find by a calculation method such a magnet geometry that the region of the homogeneity of the magnetic field would be essentially larger as compared to the existing magnet

configuration. Fig. 10 present distributions of the components of the magnetic field for our two variants of configurations of the magnet 1SP-40-4B in a 3D case. Clearly, for variant 2 the distributions of the components got more smooth.

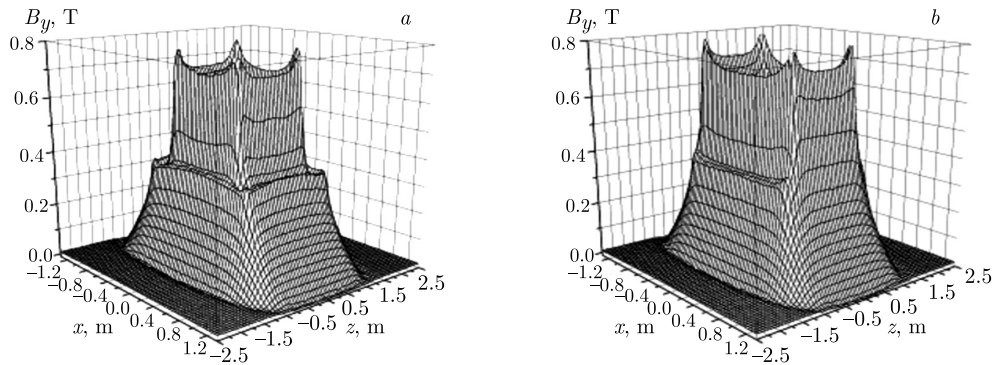


Figure 10. Dependences $B_y(x, 0.3, z)$ for two configurations of the magnet, current 1100 A

8.2. The Solenoid Type Magnetic Field Detector Modeling

Magnetic systems are very important parts [7, 8]. To create the necessary configuration of magnetic field, the repeated solution of nonlinear boundary value problem of magnetostatics is needed. In the present work, we consider the problem of creation of homogeneous map of magnetic system of solenoidal type (see Fig. 8). As a result of optimization, the geometric parameters of magnetic system were chosen in such a way so as to get maximal size of the domain of homogeneity of the magnetic field.

Due to symmetry, only 1/24 part of the geometry with corresponding boundary conditions is modeled. The calculations were performed (using two software products: TOSCA and native MFC) by the method of finite elements on tetrahedral mesh with 5 000 000 elements.

In Figs. 11 and 12 the domains with the degrees of homogeneity of magnetic field are of 0.1% and 0.5%, respectively. The black continuous line shows that the homogeneity of 0.1% is needed. In Fig. 11, the scale of magnetic field has site from 0.99–1.001 T, in Fig. 12 from 0.998–1.002 T.

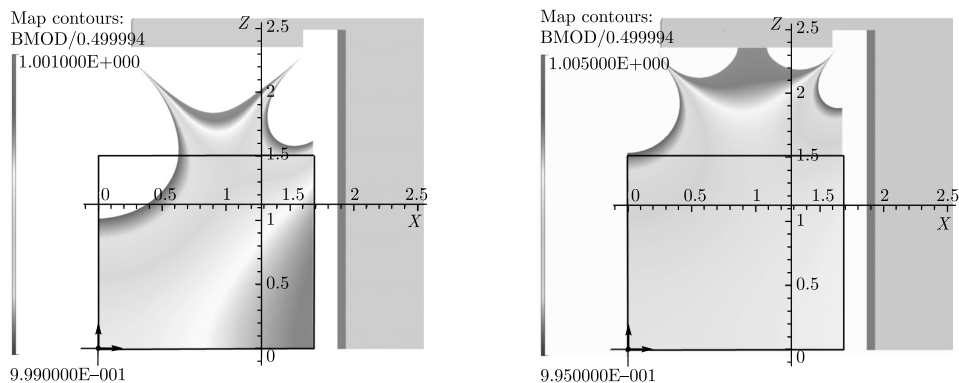


Figure 11. Field homogeneity is $\pm 0.1\%$ **Figure 12.** Field homogeneity is $\pm 0.5\%$

9. Conclusions

1. The upper estimate for the admissible growth of the magnetic field $\vec{H}(p)$ in the corner domain

$$H(p) \leq C_0 \ln \frac{1}{r_p} + w(p),$$

where C_0 is a constant, $w(p)$ is a bounded function, and r_p is the distance to the corner, is asymptotically obtained for the case of $\mu(H) \rightarrow 1$ when $H \rightarrow \infty$.

2. A method of condensing the differential mesh in the corner domain is proposed, which appreciably improves the accuracy of the calculated solution.

3. The numerical modeling results are presented for the SP-94 magnet system in the Delta-Sigma experiment performed within the Topical Plan of JINR on international collaboration. Two-dimensional and three-dimensional modeling of the configuration of the magnet core and current coils was performed to obtain the maximum value of the integral

$$\int_{-L}^L B_y(0, 0, z) dz.$$

4. By a numerical method a configuration of the magnet 1SP-40-4B VBLHEP, JINR has been selected for which the width of the domain of the homogeneity of the magnetic field has grown up from 0.5 m to 1.0 m, i.e., twice. This growth considerably increases the accuracy of regenerating the pulses of decay particles in the physical reaction under study (search for pentaquarks).

5. As a result of optimization, the geometric parameters of the solenoid type magnetic field detector were chosen in such a way so as to get maximal size of the domain of homogeneity of the magnetic field.

References

1. G. Strang, G. Fix, An Analysis of the Finite Element Method. Second edition, Wellesley-Cambridge Press, 2008.
2. E. P. Zhidkov, E. E. Perepelkin, An analytical approach for Quasi-Linear Equation in Secondary Order, Computational Methods in Applied Mathematics 1 (2001) 285–297.
3. E. E. Perepelkin, R. V. Polyakova, I. P. Yudin, The Boundary Value Problem for Elliptic Equation in the Corner Domain, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia (2) (2014) 410–414, in Russian.
4. E. A. Volkov, Method of meshes and infinite domains with a piecewise smooth boundary, Dokl. Akad. Nauk SSSR 168(3) (1966) 978–981, in Russian.
5. V. V. Shaidurov, Numerical Solution of the Dirichlet Problem in a Domain with Angles, Nauka, Novosibirsk, 1982, in Russian.
6. I. P. Yudin, V. A. Panacik, E. E. Perepelkin, R. V. Polyakova, A. N. Petersky, Peculiar Features of Numerical Modeling of the Modified Spectrometer Magnet Field, Computer Research and Modeling 7 (1) (2015) 93–105.
7. E. Perepelkin, et al., The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider, Vol. 3, Aad, JINST, 2008.
8. E. Perepelkin, et al., Commissioning of the Magnetic Field in the ATLAS Spectrometer, Vol. 177–178, 2008.

УДК 539.12

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-253-265

Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом в математическом моделировании магнитных систем**Е. Е. Перепелкин***, **Р. В. Полякова†**, **А. Д. Коваленко†**, **П. Н. Сысоев***,
М. Б. Садовникова*, **А.А. Тарелкин***, **И. П. Юдин†**

* ФГОУ ВПО МГУ им. М.В. Ломоносова

Ленинские горы, д. 1, Москва, Россия, 119991

† Объединённый институт ядерных исследований

ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980

Современные ускорительные системы и детекторы содержат магнитные системы сложной геометрической конфигурации. Проектирование и оптимизация магнитных систем требует решения нелинейной краевой задачи магнитостатики.

Область, в которой решается краевая задача, состоит из двух подобластей: область вакуума и область ферромагнетика. Из-за сложной геометрической конфигурации магнитных систем граница раздела сред ферромагнетик/вакуум может являться негладкой, то есть содержать угловую точку, в окрестности которой граница образована двумя гладкими кривыми, пересекающимися в угловой точке под некоторым углом.

В связи с тем, что решение краевой задачи приходится искать численными методами, встает вопрос о поведении решения в окрестности угловой точки ферромагнетика. Показано, что если функция магнитной проницаемости удовлетворяет определенным условиям, то соответствующее решение краевой задачи будет иметь ограниченный градиент.

Дается верхняя оценка допустимого роста магнитного поля в окрестности угловой точки. На основании полученной оценки предлагается метод сгущения разностной сетки вблизи угловой точки, учитывающий характер поведения решения краевой задачи. Приводятся примеры расчета магнитных систем в области, содержащей «угловую точку».

Ключевые слова: магнитные системы, математическое моделирование, краевая задача, эллиптические уравнения, поведение решения в угловой точке

Литература

1. *Strang G., Fix G.* An Analysis of the Finite Element Method. Second edition. — Wellesley-Cambridge Press, 2008.
2. *Zhidkov E. P., Perepelkin E. E.* An analytical approach for Quasi-Linear Equation in Secondary Order // Computational Methods in Applied Mathematics. — 2001. — Vol. 1, issue 3. — Pp. 285–297.
3. *Перепелкин Е. Е., Полякова Р. В., Юдин И. П.* Краевая задача для эллиптических уравнений в области с «угловой точкой» // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — Т. 2. — С. 410–414.
4. *Волков Е. А.* Метод сеток и бесконечных доменов с кусочно-гладкой границей // Доклады академии наук СССР. — 1966. — Т. 168(3). — С. 978–981.
5. *Шайдуров В. В.* Численное решение задачи Дирихле в области с углами // Вычислительные методы в прикладной математике. — Новосибирск: Наука, 1982.
6. Peculiar Features of Numerical Modeling of the Modified Spectrometer Magnet Field / I. P. Yudin, V. A. Panacik, E. E. Perepelkin, R. V. Polyakova, A. N. Petersky // Computer Research and Modeling. — 2015. — Vol. 7, No 1. — Pp. 93–105.
7. *Perepelkin E. et al.* The ATLAS Experiment at the CERN Large Hadron Collider. — Aad, JINST, 2008. — Vol. 3, 437 p.
8. *Perepelkin E. et al.* Commissioning of the Magnetic Field in the ATLAS Spectrometer. — 2008. — Vol. 177–178, Pp. 265–266.

© Perepelkin E. E., Polyakova R. V., Kovalenko A. D., Sysoev P. N., Sadovnikova M. B., Tarelkin A. A., Yudin I. P., 2017

Magnetic Excitations of Graphene in 8-Spinor Realization of Chiral Model

Yu. P. Rybakov, M. Iskandar, A. B. Ahmed

*Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The simplest scalar chiral model of graphene suggested earlier and based on the $SU(2)$ order parameter is generalized by including 8-spinor field as an additional order parameter for the description of spin (magnetic) excitations in graphene. As an illustration we study the interaction of the graphene layer with the external magnetic field. In the case of the magnetic field parallel to the graphene plane the diamagnetic effect is predicted, that is the weakening of the magnetic intensity in the volume of the material. However, for the case of the magnetic field orthogonal to the graphene plane the strengthening of the magnetic intensity is revealed in the central domain (at small r). Thus, the magnetic properties of the graphene prove to be strongly anisotropic.

Key words and phrases: graphene, spin excitations, chiral model, 8-spinor

1. Introduction. Scalar Chiral Model

Since the very discovery of mono-atomic carbon layers called graphenes [1, 2] this material attracted deep interest of researchers due to its extraordinary properties concerning magnetism, stiffness and high electric and thermal conductivity [3–5]. The interesting connection of graphene was revealed with nano-tubes and fullerenes [6]. A very simple explanation of these unusual properties of graphene was suggested in [7], where the idea of massless Dirac-like excitations of honeycomb carbon lattice was discussed, the latter one being considered as a superposition of two triangular sub-lattices. Some phenomenological development of this idea was realized in [8, 9].

As is well known, the carbon atom possesses of four valence electrons in the so-called hybridized sp^2 -states, the one of them being “free” in graphene lattice and all others forming sp -bonds with the neighbors. It appears natural to introduce scalar a_0 and 3-vector \mathbf{a} fields corresponding to the s -orbital and the p -orbital states of the “free” electron respectively. These two fields can be combined into the unitary matrix $U \in SU(2)$ considered as the order parameter of the model in question, the long-wave approximation being adopted, i. e.

$$U = a_0 \tau_0 + i \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

where τ_0 is the unit 2×2 -matrix and $\boldsymbol{\tau}$ are the three Pauli matrices, with the $SU(2)$ -condition

$$a_0^2 + \mathbf{a}^2 = 1 \quad (2)$$

being imposed. It is convenient to construct via the differentiation of the chiral field (1) the so-called left chiral current

$$l_\mu = U^+ \partial_\mu U, \quad (3)$$

the index μ running 0, 1, 2, 3 and denoting the derivatives with respect to the time $x^0 = ct$ and the space coordinates x^i , $i = 1, 2, 3$. Then the simplest Lagrangian density reads

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}I \text{Sp}(l_\mu l^\mu) - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{a}^2 \quad (4)$$

and corresponds to the sigma-model approach in the field theory with the mass term. Here the constant model parameters I and λ are introduced. Comparing the Lagrangian density (4) with that of the Landau–Lifshits theory corresponding to the quasiclassical long-wave approximation to the Heisenberg magnetic model [10], one can interpret the parameter I in (4) as the exchange energy between the atoms (per spacing).

Inserting (1) into (3) and (4) and taking into account the condition (2), one easily finds the following Lagrangian density:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I (\partial_\mu a_0 \partial^\mu a_0 + \partial_\mu \mathbf{a} \cdot \partial^\mu \mathbf{a}) - \frac{1}{2}\lambda^2 \mathbf{a}^2. \quad (5)$$

For the case of small \mathbf{a} -excitations the equations of motion generated by (5) read as

$$\square \mathbf{a} - (\lambda^2/I)\mathbf{a} = 0$$

and correspond to the dispersion law

$$\omega = k_0 c, \quad k_0^2 = \mathbf{k}^2 + \lambda^2/I,$$

which in the high-frequency approximation has the linear photon-like form.

First we begin with the static 1D configuration corresponding to the ideal graphene plane, the normal being oriented along the z -axis. In this case the order parameter has the form

$$U = \exp(i\Theta\tau_3), \quad \Theta = \Theta(z),$$

with the Lagrangian density being

$$\mathcal{L} = -\frac{I}{2}\Theta'^2 - \frac{\lambda^2}{2}\sin^2\Theta. \quad (6)$$

The Lagrangian (6) yields the equation of motion

$$2I\Theta'' - \lambda^2\sin 2\Theta = 0. \quad (7)$$

The solution to (7) satisfying the natural boundary conditions

$$\Theta(-\infty) = \pi, \quad \Theta(+\infty) = 0$$

has the well-known kink-like (or domain-wall) form:

$$\Theta_0(z) = 2 \arctan \exp(-z/\ell), \quad (8)$$

with the characteristic thickness (length parameter)

$$\ell = \sqrt{I}/\lambda \quad (9)$$

and the energy per unit area

$$E = \frac{1}{2} \int dz \left(I\Theta_0'^2 + \lambda^2 \sin^2 \Theta_0 \right) = 2\lambda\sqrt{I}.$$

2. Spinor Chiral Model of Graphene

Now we intend to include in the model the interaction with the electromagnetic field for the description of conductivity and magnetic properties. To this end, we suggest 8-spinor generalization of the scalar chiral model and use the gauge invariance principle for introducing the electromagnetic interaction. The motivation for such a generalization is the following.

For the description of spin and quasi-spin excitations in graphene, the latter ones corresponding to independent excitation modes of the two triangular sub-lattices of graphene, we introduce the two Dirac spinors ψ_1, ψ_2 and consider the combined spinor field Ψ as a new order parameter:

$$\Psi = \xi \otimes (\psi_1 \oplus \psi_2), \quad (10)$$

where ξ stands for the first column of the unitary matrix (1). The Lagrangian density of the model

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2} \overline{D_\mu \Psi} P D^\mu \Psi + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{a}^2 j_\mu j^\mu + i\mu_0 \mathbf{a}^2 \overline{\Psi} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi \quad (11)$$

contains the projector $P = \gamma^\nu j_\nu$ on the positive energy states, where $j_\mu = \overline{\Psi} \gamma_\mu \psi$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, designates the Dirac current, $\overline{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma_0$ and γ_μ stands for the Dirac matrix. The model contains the two constant parameters of the previous scalar model: the exchange energy I per lattice spacing and some characteristic inverse length $\sqrt{\lambda}$. The interaction with the electromagnetic field is realized through the extension of the derivative:

$$D_\mu = \partial_\mu - ie_0 A_\mu \Gamma_e,$$

with $e_0 > 0$ being the coupling constant and $\Gamma_e = (1 - \tau_3)/2$ being the charge operator chosen in accordance with the natural boundary condition at infinity: $a_0(\infty) = 1$. However, the additional interaction term of the Pauli type should be added to take into account the proper magnetic moments of the electrons. Here

$$\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/4, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

and $\mu_0 > 0$ denotes the Bohr magneton per lattice spacing cubed.

Let us consider as an illustration the interaction of the mono-atomic carbon layer $z = 0$ with the static uniform magnetic field \mathbf{B}_0 oriented along the x axis. We introduce first the vector potential $A_y = A(z)$, with the intensity of the magnetic field being

$$B_x = B(z) = -A'(z)$$

and the natural boundary condition at infinity: $A \rightarrow -B_0 z$.

The model in question admits the evident symmetry $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$, γ_0 — invariance $\Psi \Rightarrow \gamma_0 \Psi$ and also the discrete symmetry:

$$\psi_i \Leftrightarrow \psi_i^*; \quad a_{2,3} \Rightarrow -a_{2,3}.$$

Therefore, one can introduce the chiral angle $\Theta(z)$:

$$a_0 = \cos \Theta, \quad a_1 = \sin \Theta$$

and the real 2-spinor $\varphi(z) = \text{col}(u, -u)$, where $\psi_1 = \psi_2 = \text{col}(\varphi, -\varphi)$. As a result the new Lagrangian density takes the form:

$$\mathcal{L} = -2IU'^2 - 8IU^2(\Theta'^2 + e_0^2 A^2 \sin^2 \Theta) - 4U \sin^2 \Theta (2\lambda^2 U + \mu_0 A') - A'^2/(8\pi), \quad (12)$$

where the new variable is introduced: $U = |\varphi|^2 = 2u^2$. Taking into account that $j^2 = 16U^2$, one can deduce from (12) and the boundary conditions at infinity:

$$j^2(\infty) = 1, \quad \Theta(\infty) = 0, \quad A'(\infty) = -B_0$$

the following “energy” integral:

$$E = -2IU'^2 - 8IU^2(\Theta'^2 - e_0^2 A^2 \sin^2 \Theta) + 8\lambda^2 U^2 \sin^2 \Theta - A'^2/(8\pi) = -B_0^2/(8\pi),$$

that implies the Hamilton–Jacobi equation for the “action” S :

$$\begin{aligned} \frac{1}{8I} \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)^2 + \frac{1}{32IU^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \Theta} \right)^2 + 2\pi \left(\frac{\partial S}{\partial A} + 4\mu_0 U \sin^2 \Theta \right)^2 = \\ = \frac{B_0^2}{8\pi} + 8U^2 \sin^2 \Theta (\lambda^2 + I e_0^2 A^2). \end{aligned} \quad (13)$$

Here the following definitions of the Jacobi momentums are used:

$$\frac{\partial S}{\partial U} = -4IU'; \quad \frac{\partial S}{\partial \Theta} = -16IU^2\Theta'; \quad \frac{\partial S}{\partial A} = -4\mu_0 U \sin^2 \Theta - A'/(4\pi). \quad (14)$$

Let us study the behavior of solution to the equations (13) and (14) in the asymptotic domain $z \rightarrow \infty$, where $A \approx -B_0 z$. In the first approximation one gets:

$$S \approx \left(\frac{B_0}{4\pi} - 8e_0 I U^2 \sin^2 \Theta \right) A. \quad (15)$$

Inserting (15) into (14), one derives the differential equation

$$U' = 4U\Theta' \tan \Theta$$

with the evident integral $4U = \cos^{-4} \Theta$ corresponding to the boundary condition $U(\infty) = 1/4$. In view of (14) this fact permits one to obtain the equation for $\Theta(z)$:

$$\frac{2\Theta'}{\sin 2\Theta} = e_0 A \approx -e_0 B_0 z$$

with the solution of the form:

$$\tan \Theta = \tan \Theta_0 \exp(-e_0 B_0 z^2/2), \quad (16)$$

where Θ_0 stands for the integration constant. Finally, combining (16) and the last relation in (14), one can find the magnetic field intensity in the asymptotic domain $z \rightarrow \infty$:

$$B = -A' \approx B_0 - 2\pi(e_0 I - 2\mu_0) \tan^2 \Theta_0 \exp(-e_0 B_0 z^2). \quad (17)$$

As can be seen from (17), the effect of weakening of the magnetic field is revealed for the positive value of the constant $e_0 I - 2\mu_0$, this effect being similar to that of London “screening” caused by the second term in the electromagnetic current:

$$J_\mu = e_0 I \text{Im}(\bar{\Psi} P \Gamma_e \partial_\mu \Psi) - e_0^2 I j^2 (a_1^2 + a_2^2) A_\mu + 2i\mu_0 \partial^\nu (\mathbf{a}^2 \bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \Psi). \quad (18)$$

The current (18) contains beyond the standard conduction term, the diamagnetic current and the Pauli magnetization-polarization one. As follows from (17), for the

negative value of the constant $e_0 I - 2\mu_0$ the paramagnetic behavior of the material takes place.

3. Interaction with Magnetic Field Orthogonal to Graphene Plane

Let us now study the case with the orientation of the magnetic field \mathbf{B}_0 along the z -axis. Using the cylindrical coordinates r, ϕ, z , we introduce the vector potential $A_\phi = A$, with the intensity of the magnetic field being

$$B_z = \partial_r(r A)/r, \quad B_r = -\partial_z A,$$

and the natural boundary condition at infinity being imposed: $A(z \rightarrow \infty) = B_0 r/2$.

The model in question admits the evident symmetry $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ and γ_0 — invariance $\Psi \Rightarrow \gamma_0 \Psi$, that permits one to introduce 2-spinor φ by putting

$$\psi_1 = \psi_2 = \text{col}(\varphi, \varphi), \quad \varphi = \text{col}(w, u).$$

To simplify the calculations, let us suppose the smallness of the radial magnetic field:

$$B_r \ll B_z.$$

In this approximation the new discrete symmetry holds:

$$\varphi \Rightarrow -\sigma_3 \varphi, \quad w \Rightarrow -w, \quad u \Rightarrow u^*, \quad a_{2,3} \Rightarrow -a_{2,3},$$

that permits one to introduce the chiral angle Θ :

$$a_0 = \cos \Theta, \quad a_1 = \sin \Theta$$

and consider the axially-symmetric configuration:

$$u = u(r, z), \quad \Theta = \Theta(r, z).$$

As a result the new Lagrangian density takes the form:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = -8I \left[R^2 (\partial_\perp \Theta)^2 + \frac{1}{4} (\partial_\perp R)^2 + e_0^2 R^2 A^2 \sin^2 \Theta \right] - 8\lambda^2 R^2 \sin^2 \Theta + \\ + 8\mu_0 R \sin^2 \Theta \frac{1}{r} \partial_r(r A) - \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1}{r^2} (\partial_r(r A))^2 + (\partial_z A)^2 \right], \quad (19) \end{aligned}$$

where the new variable is introduced: $R = u^2$ and ∂_\perp signifies the differentiation with respect to r and z . The equations of motion corresponding to (19) read:

$$\begin{aligned} I \left[\frac{1}{r} \partial_r(r \partial_r R) + \partial_z^2 R - 4R (\partial_\perp \Theta)^2 - 4e_0^2 R A^2 \sin^2 \Theta \right] = \\ = 2 \sin^2 \Theta \left[2\lambda^2 R - \mu_0 \frac{1}{r} \partial_r(r A) \right], \quad (20) \end{aligned}$$

$$I \left[\frac{2}{r} \partial_r(r R^2 \partial_r \Theta) + 2\partial_z (R^2 \partial_z \Theta) - e_0^2 R^2 A^2 \sin 2\Theta \right] =$$

$$= R \sin 2\Theta \left[\lambda^2 R - \mu_0 \frac{1}{r} \partial_r (r A) \right], \quad (21)$$

$$\frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r A) + \partial_z^2 A - \frac{A}{r^2} \right] = 16 I e_0^2 R^2 A \sin^2 \Theta + 8\mu_0 \partial_r (R \sin^2 \Theta). \quad (22)$$

Let us now search for solutions to the equations (20), (21), (22) in the asymptotic domain $z \rightarrow \infty$, where

$$\Theta \rightarrow 0; \quad R = 1/4 + \zeta, \quad \zeta \rightarrow 0; \quad A = B_0 r/2 + \alpha, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Thus, the equation (21) takes the form:

$$I \left[\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \Theta) + \partial_z^2 \Theta - \frac{1}{4} e_0^2 B_0^2 r^2 \Theta \right] = \Theta (\lambda^2 - 4\mu_0 B_0),$$

and its solution can be found by separating variables:

$$\Theta = \Theta_0 \exp(-\nu r^2 - \kappa z), \quad \Theta_0 = \text{const}, \quad (23)$$

with the following constant parameters:

$$\nu = e_0 B_0/4; \quad I \kappa^2 = B_0 (e_0 I - 4\mu_0) + \lambda^2. \quad (24)$$

Inserting (23) into (20) and (22), one gets the inhomogeneous equations for ζ and α :

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \zeta) + \partial_z^2 \zeta = (\partial_\perp)^2 + \left[\frac{1}{4} e_0^2 B_0^2 r^2 + \frac{1}{I} (\lambda^2 - 2\mu_0 B_0) \right] \Theta^2, \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \alpha) + \partial_z^2 \alpha - \frac{\alpha}{r^2} = 2\pi e_0 B_0 (e_0 I - 4\mu_0) r \Theta^2 \equiv \delta r \Theta^2 \quad (26)$$

with the solutions of the form:

$$\zeta = \Theta_0^2 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z) N(r); \quad \alpha = \delta \Theta_0^2 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z) K(r), \quad (27)$$

where the radial functions $N(r)$ and $K(r)$ satisfy the following equations:

$$\begin{aligned} N'' + N' \left(\frac{1}{r} - 8\nu r \right) + N \left[2 B_0 \left(e_0 - 8 \frac{\mu_0}{I} \right) + 4 \frac{\lambda^2}{I} + e_0^2 B_0^2 r^2 \right] = \\ = \frac{1}{2} e_0^2 B_0^2 r^2 + e_0 B_0 + \frac{2}{I} (\lambda^2 - 3\mu_0 B_0), \end{aligned} \quad (28)$$

$$K'' + K' \left(\frac{1}{r} - 8\nu r \right) + K \left(4\kappa^2 - 8\nu + 16\nu^2 r^2 - \frac{1}{r^2} \right) = r. \quad (29)$$

Let us now estimate the magnetic intensity:

$$B_z = B_0 + b_z, \quad b_z = \frac{1}{r} \partial_r (r \alpha), \quad B_r = b_r = -\partial_z \alpha.$$

Taking into account that due to (29) $K \approx (e_0^2 B_0^2 r)^{-1}$ as $r \rightarrow \infty$, one gets from (27):

$$b_z = -2\pi (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z), \quad (30)$$

$$b_r = \frac{4\pi\kappa}{e_0 B_0 r} (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z), \quad (31)$$

However, at small $r \rightarrow 0$ one finds from (29) that $K \approx r^3/8$, and therefore the intensity of the magnetic field reads:

$$b_z = \pi e_0 B_0 (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 r^2 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z), \quad (32)$$

$$b_r = \frac{\pi\kappa}{2} e_0 B_0 (e_0 I - 4\mu_0) \Theta_0^2 r^3 \exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z). \quad (33)$$

As can be seen from (30)–(33), according to the sign of the multiplier $e_0 I - 4\mu_0$ our graphene material reveals diamagnetic or paramagnetic behavior. Therefore, it would be interesting to obtain numerical estimates for the parameters of the model. In view of definitions adopted one has

$$e_0 = \frac{e}{\hbar c}, \quad \mu_0 = \frac{e\hbar}{2m_e c a^3}, \quad I = \frac{E_{\text{exch}}}{a},$$

where the exchange energy is usually adopted as $E_{\text{exch}} = 2.9$ eV and the lattice spacing as $a = 3.56 \cdot 10^{-8}$ cm, with e being the absolute value of the electron charge. Finally, one can find the following numerical values:

$$e_0 I = 2 \cdot 10^3 \text{ Gauss}, \quad \mu_0 = 2 \cdot 10^2 \text{ Gauss}.$$

It means that the parameter $e_0 I - 4\mu_0$ is positive and the weakening of the magnetic field inside the graphene is predicted in accordance with (17), (30) and (31) for large r and its strengthening for small r in accordance with (32) and (33).

In view of the importance of the latter conclusion it would be desirable to investigate the magnetic field behavior in the central domain of the graphene material, i. e. at small r but arbitrary z . To this end, we consider the extrapolation of the configuration (23) to the domain wall structure of the form:

$$\Theta = 2 \arctan [\exp(-2\nu r^2 - 2\kappa z)]. \quad (34)$$

Later it will be shown that this approximation is valid in the small field limit $B_0 \rightarrow 0$. To start with, we insert (34) and $A = B_0 r/2 + \alpha$, $R \approx 1/4$ into (23), this amounting to the equation:

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \alpha) + \partial_z^2 \alpha - \frac{\alpha}{r^2} = 2\pi r e_0 B_0 \sin^2 \Theta [e_0 I - 4\mu_0 \tanh(\nu r^2 + \kappa z)] \equiv 2\pi r j. \quad (35)$$

Solution to the equation (35) satisfying boundary condition $\alpha(r = 0) = 0$ can be found by Green's function method:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp[i s(z - z')] \int_0^r dr' r' j' [I_1(s r) K_1(s r') - K_1(s r) I_1(s r')], \quad (36)$$

where I_1 and K_1 stand for the modified Bessel functions of the imaginary argument. Taking into account their asymptotic behavior as $x \rightarrow 0$:

$$I_1(x) \approx x/2, \quad K_1(x) \approx x^{-1},$$

one finds from (35) and (36) that at small r :

$$\alpha(r, z) \approx \frac{\pi r^3 e_0 B_0}{4 \cosh^2(\nu r^2 + \kappa z)} [e_0 I - 4\mu_0 \tanh(\nu r^2 + \kappa z)], \quad (37)$$

that confirms the paramagnetic behavior of the graphene in the central domain.

Finally, inserting (37) and $R = 1/4 + \zeta$, $A \approx B_0 r/2$ into (20), one gets the equation:

$$\frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r \zeta) + \partial_z^2 \zeta = \sin^2 \Theta \left[\frac{2}{I} (\lambda^2 - 3\mu_0 B_0) + e_0 B_0 \left(1 + \frac{1}{2} e_0 B_0 r^2 \right) \right] \equiv j_1. \quad (38)$$

Solution to (38) can be found also by Green's function method along similar lines as for (35):

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_{-\infty}^{\infty} ds \exp[\iota s(z - z')] \int_0^r dr' r' j_1' [K_0(sr)I_0(sr') - I_0(sr)K_0(sr')]. \quad (39)$$

Taking into account the asymptotic behavior of the Bessel functions as $x \rightarrow 0$:

$$I_0(x) \approx 1 + x, \quad K_0(x) \approx \log[2/x],$$

one finds from (38) and (39) that in the central domain

$$\zeta(r, z) \approx -\frac{r^2}{4 \cosh^2(\nu r^2 + \kappa z)} \left[\frac{2}{I} (\lambda^2 - 3\mu_0 B_0) + e_0 B_0 \left(1 + \frac{1}{2} e_0 B_0 r^2 \right) \right]. \quad (40)$$

Using (40), one can verify the validity of the approximation (34) as solution to (21) for the central domain in the small field limit, that is if the following strong inequalities hold:

$$\lambda^2/I \gg e_0 B_0, \quad e_0 B_0 r^2 \ll 1, \quad \kappa^2 r^2 \ll 1.$$

4. Conclusions

We analyzed the two phenomenological approaches to the description of the graphene: the simplest scalar chiral model and its 8-spinor generalization. The scalar model admits very simple domain-wall solution describing one layer graphene configuration. On the opposite, the 8-spinor chiral model contains all previous results of the scalar model and also permits one to describe graphene interaction with the electromagnetic field. Magnetic excitations in graphene, for the case of the external magnetic field parallel to the graphene plane, reveal the evident diamagnetic effect: the weakening of the magnetic field within the graphene sample. As for the case of the magnetic field orthogonal to the graphene plane, the strengthening of the magnetic intensity inside the material is revealed in the central domain (at small r).

References

1. K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov, Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films, *Science* 306 (2004) 666–669.
2. A. K. Geim, Graphene: Status and Prospects, *Science* 324 (2009) 1530–1534.
3. C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone, Measurement of Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene, *Science* 321 (2008) 385–388.

4. A. A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan, F. Miao, C. N. Lau, Superior Thermal Conductivity of Single-Layer Graphene, *Nano Lett.* (8) (2008) 902–907.
5. K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, H. L. Stormer, Ultrahigh Electron Mobility in Suspended Graphene, *Solid State Commun.* 146 (2008) 351–355.
6. D. Yu, L. Dai, Self-Assembled Graphene/Carbon Nanotube Hybrid Films for Super-Capacitors, *J. Phys. Chem. Lett.* 1 (2010) 467–470.
7. G. W. Semenov, Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly, *Phys. Rev. Lett.* 53 (1984) 2449–2452.
8. Yu. P. Rybakov, On Chiral Model of Graphene, *Solid State Phenomena* 190 (2012) 59–62.
9. Yu. P. Rybakov, Spin Excitations in Chiral Model of Graphene, *Solid State Phenomena* 233–234 (2015) 16–19.
10. A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, A. S. Kovalev, *Nonlinear Magnetization Waves. Dynamical and Topological Solitons*, Naukova Dumka, Kiev, 1983, in Russian.

УДК 538.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-266-275

Магнитные возбуждения графена в рамках 8-спинорной реализации киральной модели

Ю. П. Рыбаков, М. Искандар, А. Б. Ахмед

*Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Простейшая киральная модель графена, предложенная ранее и основанная на $SU(2)$ параметре порядка, обобщается путем введения 8-спинорного поля как дополнительного параметра порядка для описания спиновых (магнитных) возбуждений в графене. В качестве иллюстрации мы изучаем взаимодействие графенового слоя с внешним магнитным полем. В случае магнитного поля, параллельного графеновой плоскости, предсказывается диамагнитный эффект, т. е. ослабление магнитной индукции внутри образца. Однако в случае магнитного поля, ортогонального графеновой плоскости, обнаруживается усиление магнитной индукции в центральной области (при малых r). Таким образом, магнитные свойства графена оказываются сильно анизотропными.

Ключевые слова: графен, спиновые возбуждения, киральная модель, 8-спинор

Литература

1. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, A. A. Firsov // *Science*. — 2004. — Vol. 306. — Pp. 666–669.
2. *Geim A. K.* Graphene: Status and Prospects // *Science*. — 2009. — Vol. 324. — Pp. 1530–1534.
3. Measurement of Elastic Properties and Intrinsic Strength of Monolayer Graphene / C. Lee, X. Wei, J. W. Kysar, J. Hone // *Science*. — 2008. — Vol. 321. — Pp. 385–388.
4. Superior Thermal Conductivity of Single-Layer Graphene / A. A. Balandin, S. Ghosh, W. Bao, I. Calizo, D. Teweldebrhan, F. Miao, C. N. Lau // *Nano Lett.* — 2008. — No 8. — Pp. 902–907.
5. Ultrahigh Electron Mobility in Suspended Graphene / K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, H. L. Stormer // *Solid State Commun.* — 2008. — Vol. 146. — Pp. 351–355.

6. *Yu D., Dai L.* Self-Assembled Graphene/Carbon Nanotube Hybrid Films for Super-Capacitors // *J. Phys. Chem. Lett.* — 2010. — Vol. 1. — Pp. 467–470.
7. *Semenoff G. W.* Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly // *Phys. Rev. Lett.* — 1984. — Vol. 53. — Pp. 2449–2452.
8. *Rybakov Yu. P.* On Chiral Model of Graphene // *Solid State Phenomena.* — 2012. — Vol. 190. — Pp. 59–62.
9. *Rybakov Yu. P.* Spin Excitations in Chiral Model of Graphene // *Solid State Phenomena.* — 2015. — Vol. 233–234. — Pp. 16–19.
10. *Косевич А. М., Иванов Б. А., Ковалев А. С.* Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. — Киев: Наукова думка, 1983. — 190 с.

© Rybakov Yu. P., Iskandar M., Ahmed A. B., 2017

UDC 532.11; 539.19

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-276-282

Pressure Operator for the Pöeschl–Teller Oscillator

Yu. G. Rudoy, E. O. Oladimeji

*Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The quantum-mechanical properties of the strongly non-linear quantum oscillator in the Pöeschl–Teller model are considered. In the first place, the energy spectrum and its dependence upon the confinement parameter (i.e., the width of the “box”) are studied. Moreover, on the grounds of the Hellman–Feynman theorem the pressure operator in this model is obtained and (along with the energy spectrum) is studied in two main approximations: the “particle in the box” and “linear (harmonic) oscillator” for large and low values of the main quantum number; the critical value is also evaluated. Semi-classical approximation as well as perturbation theory for the Pöeschl–Teller are also considered. The results obtained here are intended for future thermodynamic calculations: first of all, for the generalization of the well-known Bloch result for the linear harmonic oscillator in the thermostat. To this end, the density matrix for the Pöeschl–Teller oscillator will be calculated and the full Carnot cycle conducted.

Key words and phrases: Bloch and Pöeschl–Teller quantum oscillator, pressure operator, Hellman–Feynman theorem, quasi-classical approximation, harmonic oscillator, particle in a box

1. Formation of the Model

Some decades ago Pöeschl and Teller [1] introduced a family of anharmonic PT-potentials $\mathcal{U}(x)$, which allowed the exact solutions of the one-dimensional Schrödinger equation in the coordinate, or x -representation [2,3]. One of the most interesting member of the PT-family is the symmetric trigonometric potential, which is even in the variable x , where $-L < x < L$.

$$\mathcal{U}(x, L) = \mathcal{U}(-x, L) = \mathcal{U}_0 \operatorname{tg}^2[\alpha(L)x], \quad (1)$$

$$\alpha(L) = \pi/2L.$$

At $x = \pm L$ the potential becomes singular, which physically means the presence of a pair of impenetrable walls. They confine the movement of the non-relativistic particle with positive constant mass m . The parameters \mathcal{U}_0 and L are also positive, though the limits $\mathcal{U}_0 \rightarrow 0$ and $L \rightarrow \infty$ are also allowable and will be considered properly.

The presence of the walls is of specific interest for the future thermodynamic description of this model, placed into some thermostat. In contrast to ordinary harmonic oscillator (HO) for the PT-oscillator (PTO) it is possible to introduce the pressure operator $\hat{P}(\hat{x}, \hat{p}, L)$ which according to Hellmann and Feynman [4,5] is connected with the energy operator or the Hamiltonian $\hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, L) = (\frac{\hat{p}^2}{2m}) + \mathcal{U}(x, L)$ by the formal relation:

$$\hat{P}(\hat{x}, \hat{p}, L) = -\frac{\partial}{\partial L} \hat{H}(\hat{x}, \hat{p}, L). \quad (2)$$

Strictly speaking, one should differentiate in (2) with the volume $\mathcal{U} = L^d$, where d is dimension of the coordinate space, where $d = 1$ will be held here everywhere. The

important point is that the operation $\left(\frac{\partial}{\partial L}\right)$ may be fulfilled only after the operator \hat{H} has acted upon some wave function ϕ — as a rule, upon the eigenfunction $\phi_n(x)$ of \hat{H} with eigenvalue E_n (see, e.g., the detailed analysis in [4, 5]). The importance of this sequence of operations is directly connected with the account of boundary conditions $\psi_n(\pm L) = 0$ at all values of n . In this case the formal definition (2) acquires more definite sense:

$$P_n(\hat{L}) = -\frac{\partial E_n}{\partial L}, \quad (3)$$

if $\hat{H}\psi_n(x, L) = E_n\psi_n(L)$.

Note, that in this paper we won't be engaged with the eigenfunctions $\psi_n(\pm L)$ — it is sufficient to know that all of them contain the factor $\cos \alpha x$, which ensures the fulfillment of zero boundary condition at the walls $x = \pm \frac{\pi}{2\alpha} = \pm L$. Following (7) one may see, in particular, that if the energy spectrum $E_n(L)$ is a uniform function of L (e.g. $E_n(L) \sim L^{-s} > 0$) so that $P_n(L) = \left(\frac{s}{L}\right) E_n(L)$, or in the operator form:

$$\hat{P}(L) = s\hat{h}(L), \quad (4)$$

where $\hat{h}(L) = \frac{\hat{H}(L)}{L}$ is the (linear) density of the energy; the last relation is the well known barocaloric equation of state for the ideal gas. Note that by obtaining (4) we have used Euler's uniformity property $\left(\frac{d}{dL}\right) \alpha^m(L) = \left(\frac{m}{L}\right) \alpha^m(L)$ valid for any real value of m .

2. Exact Energy and Pressure Spectra

It is remarkable that the complication potential (2), leads to an exact solution of the Schrödinger equation with potential (1) with fully discrete positive energy levels $E_n(L) > 0$ (including the ground levels $E_1(L)$):

$$E_n^{\text{PT}}(L) = E_n^{\text{FP}}(L) + E_n^{\text{HO}}(L), \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

obviously, the spectrum $E_n(L)$ is unbounded from above.

Two terms in (5) look like the free particle in the box and harmonic oscillator respectively:

$$E_n^{\text{FP}}(L) = T(L)n^2, \quad E_n^{\text{HO}}(L) = \hbar\omega(L)\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad (6)$$

note, that (6) doesn't contain terms of higher order in n than quadratic one.

The quantity $T(L)$ is equal to the well known minimal kinetic energy of the *FP* in the box with dimensions $[-L, L]$:

$$T(L) = E_1^{\text{FP}}(L) = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2(L), \quad \alpha(L) = \frac{\pi}{2L}. \quad (7)$$

The $\omega(L)$ quantity is the frequency of some HO, and depends upon $\alpha(L)$ in much more complicated way than (7).

In this paper we won't be engaged with the eigenfunctions $\varphi_n(x)$ — it is sufficient to know that all of them contain the factor $\cos \alpha x$, which ensures the fulfillment of zero boundary condition at the walls $x = \pm \frac{\pi}{2\alpha} = \pm L$.

Complicated method:

$$\hbar\omega(L) = T(L)\lambda(L), \lambda(L) = \left[\left(\frac{2}{\pi\zeta(L)} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} - 1, \quad (8)$$

$$\zeta^2(L) = \frac{1}{\pi^2} \frac{T(L)}{\mathcal{U}_0} = \left(\frac{\hbar}{\pi} \right)^2 \frac{1}{2m\mathcal{U}_0} \alpha^2(L). \quad (9)$$

Obviously, that the formal structure of the parameter $\lambda(L)$ resemble the kinetic energy of the free relativistic particle with rest mass in $((\zeta(L))$ is the like p , where p is the particle's momentum) $\lambda(L) \geq 0$ $\lambda(L) = 0$ only at the point $\frac{1}{\zeta(L)} = \frac{1}{\alpha(L)} = 0$ in the limit $L \rightarrow \infty$).

Following the definition (3), one finds from (5) the exact diagonal matrix elements of the pressure operator (2):

$$P_n^{\text{PT}}(L) = P_n^{\text{FP}}(L) + P_n^{\text{HO}}(L), \quad P_n^{\text{FP}}(L) = \frac{2}{L} E_n^{\text{FP}}(L), \quad (10)$$

$$P_n^{\text{HO}}(L) = \frac{2}{L} E_n^{\text{HO}}(L) - \frac{1}{L} T(L) \psi(L) \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad (11)$$

the Euler's uniformity property:

$$\psi(L) = [\lambda(L) + 1] \{ 1 - [\lambda(L) + 1]^{-2} \} \geq 0, \quad (12)$$

where we have used Euler's $\left(\frac{d}{dL} \right) \alpha^m(L) = \left(\frac{m}{L} \right) \alpha^m(L)$

The expressions (E^{HO}) and (P^{HO}) are rather complicated since $\lambda(L)$ is *non-uniform* function of L pressure operator $\hat{P}(L)$ for PTO is in general not proportional to the energy operator $\hat{H}(L)$, but in extreme case (FP and H-parts) this property is restored.

At fixed L , the relative contribution of the FP and HO depends upon n and it's determined by the ratio:

$$\eta_n(L) = \frac{E_n^{\text{FP}}(L)}{E_n^{\text{HO}}(L)} = \frac{n}{n_{cr}(L)}, \quad n_{cr}(L) = \frac{1}{\lambda(L)}. \quad (13)$$

Clearly, at $\eta_n(L) \ll 1$, $n \ll n_{cr}(L)$ i.e for lower energy levels, the HO-part dominates, whereas at $\eta_{cr}(L) \gg 1$, $n \gg n_{cr}(L)$, i.e, for higher energy levels, the FP-part dominates. This is easy to understand, because at V_0 and L held constant the growth of the particle's energy E makes the potential (1) more and more the limiting potential $\mathcal{U}(x, L) = \delta(x - L) + \delta(x + L)$, which characterizes the FP in the box.

In the last case we obtain the fully free particle without any "box", so the particle's energy is not quantized at all. The same limit at fixed n is achieved at $V_0 = 0$.

Moreover, the FP-limit full at fixed n is achieved also at the limiting point $\alpha(L) = 0$ or $\frac{1}{L} = 0$, because in this case the potential (1) also is identically equal to zero. However, one should note that the limit of small, but finite $\alpha(L) \ll 1$ resembles more not the FP-, but the HO-case.

3. FP- and HO-Limits for the Energy and Pressure Spectra

It is instructive to consider the expressions (5) and (10) at fixed values of n in two basic limiting cases, i.e. FP in the box and HO-limits.

3.1. FP in the Box Limit: $L = \text{const}$, $V_0 \rightarrow 0$, $\pi\zeta(L) \rightarrow \infty$

In this case, $T(L)$ is large compared to V_0 , so $\frac{1}{(\pi\zeta(L))} = V_0 T(L) \ll 1$, thus:

$$\lambda(L) \approx \frac{2}{(\pi\zeta(L))^2} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{2}{(\pi\zeta(L))^2} \right], \quad \lambda(L) \ll 1. \quad (14)$$

Due to the general definition (8), the effective frequency is of the form:

$$\hbar\omega(L) \approx 2V_0 \left[1 - \frac{2V_0^2}{T(L)} \right]$$

and tends to zero with V_0 .

For the pressure operator \hat{P} in this limit the whole term (11) is negligible, so for \hat{P}^{FP} the linear operation, equation of state (4) holds, where $s = 2$ and

$$\hat{H}_{(x,p)}^{\text{FP}} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + [\delta(x-L) + \delta(x+L)].$$

3.2. HO-Limit: $V_0 = \text{const}$, $L \rightarrow \infty$, $\pi\zeta(L) \sim \alpha(L) \rightarrow 0$

In this case, $T(L) \sim \alpha^2(L)$ is small compared to the effective frequency in the lowest order HO-approximation $\hbar\omega(L) = T(L) \sim \lambda_0 \alpha^2(L)$ here:

$$\lambda(L) \approx \frac{2}{\pi\zeta(L)} \sim \frac{1}{\alpha(L)}$$

is a large quantity. More precisely, from (8) follows that

$$\lambda(L) \approx \tilde{\lambda}(L) \left[1 - \frac{1}{\tilde{\lambda}(L)} + \frac{1}{2} \frac{1}{(\tilde{\lambda}(L))^2} \right], \quad \lambda(L) \ll 1,$$

further, using again (8), one obtains

$$\hbar\omega(L) \approx \hbar\tilde{\omega}(L) - T(L) + \frac{1}{2} \frac{T(L)}{\hbar\omega(L)}. \quad (15)$$

Here

$$\hbar\tilde{\omega}(L) = T(L)\tilde{\lambda}(L) = 2[V_0 T(L)]^{\frac{1}{2}} = \alpha(L) \left[\frac{2V_0 \hbar^2}{m} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

is of order $\alpha(L)$, while the second and third term in (15) are of the order $\alpha^2(L)$ and $\alpha^3(L)$ accordingly.

The pressure operator \hat{P} in this limit may be found from (15) by noticing that both terms in the rhs of the equation make contributions of opposite sign, but of the same

(lowest) order $\alpha(L)$. Indeed, in this limit $T(L)\psi(L) \approx T(L)\lambda(L) = \hbar\tilde{\omega}(L)$ and

$$E_n^{\text{HO}}(L) \approx \tilde{E}_n^{\text{HO}}(L) = \hbar\tilde{\omega}(L)\left(n - \frac{1}{2}\right). \quad (17)$$

Combining relations (16) and (17)) one finds for the pressure operator \tilde{P}^{HO} , as well as for \tilde{P}^{FP} , the linear operator equation of state (4) holds, but now with $s = 1$ and effective Hamiltonian:

$$\tilde{H}_{(\hat{x}, \hat{p})}^{\text{HO}} = \frac{\hat{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2(L)x^2,$$

which describes some “confined” HO.

4. Approximations for the Energy Spectrum

4.1. Quasi-Classical Approximation (QC)

It is instructive to compare the exact energy spectrum (5) with its QC-counterpart, for which the quantization rule states that for $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathfrak{I}(E) = 2 \int_{-x_0(E)}^{x_0(E)} p(x, E) dx = 2\pi\hbar\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad (18)$$

here $\mathfrak{I}(E)$ is the classical action for the PT oscillator with the potential energy (1) while $p(x, E)$ is the classical momentum

$$p(x, E) = \sqrt{2m} [E - \mathcal{U}_0 \text{tg}^2 \alpha(L)x]^{\frac{1}{2}}, \quad p(x_0, E) = 0, \quad (19)$$

obviously, $x_0(E) \rightarrow \pm L$ as $E \rightarrow \infty$.

The Bohr–Sommerfeld quantization takes the explicit form:

$$\left(\frac{1}{\alpha(L)}\right)\sqrt{2m} \left[(E + V_0)^{\frac{1}{2}} - V_0^{\frac{1}{2}}\right] = \hbar\left(n - \frac{1}{2}\right), \quad (20)$$

so that the QC energy spectrum will be of the same form as in (5)–(6). The only difference is that the exact quantity $\lambda(L)$ in the QC-case will be substituted by its QC-analogy $\left[\frac{2}{\pi\zeta(L)}\right] + 1$. It is easy to verify that, all the basic features of the PT-oscillator remain just the same (up to some numerical factors).

4.2. Perturbation Theory

Consider the expansion of the potential:

$$\mathcal{U}(x, L) = \mathcal{U}_0 = (\alpha(L)x^2) \left[\left(1 + \frac{2}{3}\alpha(L)x^2\right) \right] + [(\alpha(L)x)^4], \quad (21)$$

which is plausible when both $\alpha(L)$ and x are small. The leading term in (21) may be written down as the usual HO-potential:

$$V_0\alpha^2(L)x^2 = \frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2(L)x^2,$$

where the frequency $\tilde{\omega}^2(L)$ is the same as defined by (15). It may seem rather unpleasant that $\tilde{\omega}^2(L)$ goes to zero with $\alpha(L)$ at $L \rightarrow \infty$, and so one may ask for the usual constant HO-frequency $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ($k = \text{const}$).

Such a result may be achieved simply by means of the potential intensity $\mathcal{U}_0 \rightarrow (\frac{k}{2})\alpha^{-2}(L)$. Note, that in this case as the limit point $\alpha(L)$. One arrives strictly to the usual HO-oscillator (but not the PT-oscillator). Indeed, the suggested rescaling can't save "all the next order terms in the expansion" (21). Moreover, at this limiting point the notion of pressure (the operator as well as its spectrum becomes meaningless, so that we don't use this "scaling trick" — as well as the point $\alpha(L) = 0$ in the followings (though the HO-limit $\alpha(L) \ll 1$ is quite appropriate)). Consider now the term of the lowest order $(\alpha(L)x)^4$ in (21) as the weak an harmonics them the energy spectrum is of the form [2, 3]:

$$E_n(L) = \tilde{E}_n^{\text{HO}}(L) + \Delta E_n(L), \quad \tilde{E}_n^{\text{HO}}(L) = \hbar\tilde{\omega}(L) \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (22)$$

$$\Delta E_n(L) = \left(\frac{3}{2} \right) \left[V_0 \alpha^2(L) \left(\frac{2}{3} \right) \alpha^2(L) \right] \left(\frac{\hbar}{m\tilde{\omega}(L)} \right)^2 \left[n^2 + n + \frac{1}{2} \right],$$

where $n = 0, 1, \dots$

Making the shift $n \rightarrow (n - 1)$:

$$E_n^{\text{HO}}(L) = \hbar\tilde{\omega}(L) \left(n - \frac{1}{2} \right), \quad \Delta E_n(L) = T(L) \left[n^2 + n + \frac{1}{2} \right]. \quad (23)$$

Two effects are evident once from (23). Firstly, the linear in n part of $\Delta E_n(L)$ brings for the non-perturbated spectrum $\tilde{E}_n^{\text{HO}}(L)$ equal to $[-T(L)]$, which agrees with the correction of the same order in (2) the full expansion. Secondly, the quadratic in n part reproduces the term $E_n^{\text{FP}}(L)$ from the exact energy spectrum (6). Unfortunately, the next approximation (e.g. of orders $(\alpha x)^6$ and/or $(\alpha x)^8$ tend to spoil these nice results. In particular, they bring in $E_n(L)$ so, "non-physical" terms of orders n^3, n^4 , etc. and also deform the term $T(L)n^2$, which should not be affected at all.

5. Conclusion

In this paper the quantum-mechanical properties of the strongly non-linear quantum oscillator in the Pöschl–Teller model were considered. In Sec. 1 the formulation of the model was given and its relations with two well known models — i.e., the free particle in the box and the harmonic oscillator were considered. Sec. 3 was devoted to the analysis of the fully discrete spectrum of the model; also, using the Hellman–Feynman theorem the pressure operator was obtained and analyzed. namely, both the "free particle in the box" and "harmonic oscillator" limits were given the detailed investigation. Finally, in Sec. 4 some approximations for the energy spectrum are considered — namely, the quasi-classical one as well as the perturbation theory in the region near the harmonic one — i.e., were the anharmonic terms are relatively small. All the results obtained here will be used for the thermodynamic calculations in the nearest future publication.

References

1. G. Pöschl, E. Teller, Bemerkungen zur quantenmechanik des anharmonischen oszillators, *Zeitschrift für Physik* 83 (1933) 143–151. doi:10.1007/BF01331132.
2. I. I. Goldman, V. D. Krivchenkov, *Problems in Quantum Mechanics*, GITTL, Moscow, 1957, in Russian.
3. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*. Vol. I., Springer, Berlin, 1971.
4. H. Hellmann, *Einführung in die Quantenchemie*, Deuticke, Leipzig, 1937.
5. R. P. Feynman, Forces in molecules, *Phys. Rev.* 56 (1939) 340.

УДК 532.11; 539.19

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-276-282

Оператор давления для осциллятора Пёшля–Теллера

Ю. Г. Рудой, Е. О. Оладимеджи

*Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Рассмотрены квантово-механические свойства сильно нелинейного квантового осциллятора в модели Пёшля–Теллера. Изучен энергетический спектр модели и его зависимость от параметра конфайнмента, или эффективной ширины потенциала. На основе теоремы Гельмана–Фейнмана получен оператор давления для указанной модели, который вместе с энергетическим спектром изучен в двух основных приближениях: частицы в ящике и линейного гармонического осциллятора для больших и малых значений главного квантового числа n соответственно; получено также значение критического значения $n_{кр}$. Рассмотрены также квазиклассическое приближение и теория возмущений для обоих предельных случаев. Полученные результаты предназначены для использования в последующих термодинамических приложениях — прежде всего, обобщения хорошо известного результата Блоха для линейного гармонического осциллятора в термостате. С этой целью необходимо построить матрицу плотности для осциллятора Пёшля–Теллера для проведения полного цикла Карно.

Ключевые слова: квантовый осциллятор Блоха и Пёшля–Теллера, оператор давления, теорема Гельмана–Фейнмана, квазиклассическое приближение, гармонический осциллятор, частица в ящике

Литература

1. Pöschl G., Teller E. Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators // *Zeitschrift für Physik*. — 1933. — Bd. 83. — Ss. 143–151.
2. Гольдман И. И., Кривченков В. Д. Сборник задач по квантовой механике. — М.: ГИТТЛ, 1957. — С. 274.
3. Flügge S. *Practical Quantum Mechanics*. Vol. I., — Berlin: Springer, 1971.
4. Hellmann H. *Einführung in die Quantenchemie*. — Leipzig: Deuticke, 1937.
5. Feynman R. P. Forces in Molecules // *Phys. Rev.* — 1939. — Vol. 56. — P. 340.

© Rudoy Yu. G., Oladimeji E. O., 2017

УДК 530.1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-283-294

Об эволюции сходящегося волнового пакета перевёрнутого квантового осциллятора, вынуждаемого однородным гармоническим полем

В. В. Чистяков

*Научно-исследовательский университет информационных технологий,
механики и оптики*

Кронверкский просп., д. 49а, Санкт-Петербург, Россия, 197101

Исследуется модель периодически возмущаемого однородным полем квантового одномерного перевёрнутого осциллятора с гамильтонианом $\hat{H} = (\hat{p}^2/2m) - (m\omega^2 x^2/2) - F_0 x \sin(\Omega t + \phi)$, широко используемая для описания поведения нестабильных молекулярных/ионных комплексов в поле лазерного излучения. Аналитически и численно при помощи Maple 17 решается нестационарное уравнение Шрёдингера (НУШ) с начальной волновой функцией (в.ф.) обобщенного Гауссовского типа, наилучшим образом удовлетворяющей оператору начальных условий (НУ). Её волновой пакет с изначально аномально большой безразмерной шириной $\sigma_0 = \sqrt{\langle \xi^2(0) \rangle} \gg 1$ описывает сходящийся поток плотности вероятности, и на безразмерных временах $\tau \leq 2\tau_0 = 0,25 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$ он сначала коллапсирует в экстремально узкую область ширины порядка $\Delta x \sim \sqrt{m\omega/\hbar}$, а затем неограниченно расширяется по показательному закону. При этом для определённых значений фаз ϕ , определяемых возмущаемой частотой лазера Ω и исходным разбросом σ_0 , центр масс волнового пакета $\xi_{av}(\tau) = \hat{x}(\tau)\sqrt{m\omega/\hbar}$ оставался вблизи положения равновесия в течение примерно двух «естественных периодов» осциллятора, колеблясь и дрейфуя, после чего быстро уходил к бесконечности. Фазы ϕ служили точками бифуркации направления ухода центра пакета, и при $\sigma_0 > 2^{12}$ они удовлетворяли хорошо классической формуле; поведение стабилизирующей фазы на «резонансной» частоте $\phi(\Omega = 1, n)$, $n = \log_2 \sigma_0$ хорошо описывалось перевёрнутой и смещённой формулой Ферми–Дирака из квантовой статистики.

Ключевые слова: перевёрнутый квантовый осциллятор, периодическое возмущение, нестационарное уравнение Шрёдингера (НУШ), волновой пакет, обобщённый гауссовский тип, коллапс, фазовый сдвиг, динамическая стабилизация, бифуркация, Maple

1. Введение

Перевёрнутый гармонический одномерный (1D) осциллятор является элементарной моделью неустойчивых квантовых систем — распадающихся возбужденных молекул, комплексов, экситонных состояний в полупроводнике и пр. Также отталкивающий потенциал квантовой *антиточки* на качественном уровне может быть описан в рамках модели ИНО, равно как и поведение частиц при туннелировании [1–3] и при т. н. *суперфлуоресценции* — «short time behavior in superfluorescence» — (см., например, [4, 5] и библиографию в них).

Дополненный до двух- или трехмерного «седла» негармонической притягивающей частью, он вполне может моделировать эффект *колебательного связывания*, имеющий место в молекулах галогеноводородов [6].

Статья поступила в редакцию 26 января 2017 г.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-08-00997 «Исследование нелинейных много-членных управляемых механических систем методами математического и компьютерного моделирования».

Автор выражает свою признательность профессору Норвежского университета науки и технологии Кааре Олауссену за проявленный интерес к проблеме и оказанные консультации.

Кроме того, модель ИНО даёт любопытные результаты и при дискретном квантово-механическом описании частиц через разностное уравнение Шрёдингера, решение которого допускает «удержание волн на потенциальном склоне» [7, 8]. Последний эффект особенно интересен в нестационарном динамическом варианте [9], и когда в гамильтониане присутствует периодическое слагаемое [10].

Именно этим и обусловлен интерес к различным нестационарным модификациям модели инвертированного квантового осциллятора, исследуемым как с чисто прикладной целью, так и руководствуясь сугубо фундаментальными интересами. Тем более что нестационарная модель в некоторых случаях допускает аналитическое интегрирование, позволяющее точно отследить эволюцию квантового состояния. И здесь по аналогии с собственно гармоническим осциллятором предпринимаются попытки ввести и для ИНО понятие обобщённого *когерентного состояния* [11], поведение системы в котором наиболее близко к классическому.

Целью настоящей работы является исследование квантового аналога явления т.н. *динамической стабилизации* неустойчивого состояния квантовой частицы в одномерном перевёрнутом квадратичном потенциале в условиях действия гармонической вынуждающей силы.

2. Динамическая стабилизация в классической механике

Классическим её примером является маятник Капицы, а вообще, — прямоходящий человек, с точки зрения биомеханики являющий собой перевёрнутый маятник.

Простейшая модель классического перевёрнутого осциллятора, гармонически возмущаемого на «резонансной частоте», описывается функцией Гамильтона в безразмерных координатах

$$H(p, q) = \frac{p^2}{2} - \frac{q^2}{2} - f_0 \sin(\tau + \varphi)q;$$

уравнения движения —

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} + f_0 \sin(\tau + \varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Их решение с учётом начальных условий (НУ) по координате q_0 и импульсу p_0 :

$$q(\tau) = 0,5(q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi))e^\tau - 0,5f_0 \sin(\tau + \phi) + \\ + 0,5(q_0 - p_0 + 0,5(\sin \phi - \cos \phi))e^{-\tau}, \quad (2)$$

$$p(\tau) = 0,5(q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi))e^\tau - 0,5f_0 \cos(\tau + \phi) - \\ - 0,5(q_0 - p_0 + 0,5(\sin \phi - \cos \phi))e^{-\tau}, \quad (3)$$

и оно стабилизировано при идеальном выполнении соотношения НУ и фазы:

$$q_0 + p_0 + 0,5(\sin \phi + \cos \phi) = 0. \quad (4)$$

Пример 1. (*Олимпиада УИТМО по теоретической механике, 2015, Чистяков В. В.*)

Трубку длиной l вращают в вертикальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг её середины, где удерживается креплением маленький грузик (рис. 1). В каком положении ϕ трубки необходимо освободить этот грузик, чтобы он не выпал в дальнейшем из неё?

Решение динамического уравнения при начальных условиях (НУ) $q(0) = x_0$, $\dot{q}(0) = u_0$ даёт стабилизированную зависимость $q(t) = 0,5g\omega^{-2} \sin(\omega t + \phi) + (x_0 - 0,5g\omega^{-2} \sin(\phi))e^{-\omega t}$, $t > 0$ при выполнении равенства

$$u_0 + \omega x_0 = \frac{g \sin\left(\phi + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\omega}, \quad x_0 \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right),$$

и, в частности, при нулевых НУ $q(0) = 0$, $\dot{q}(0) = 0$ стабилизация имеет место при углах $\phi = -0,25\pi$; $0,75\pi$.

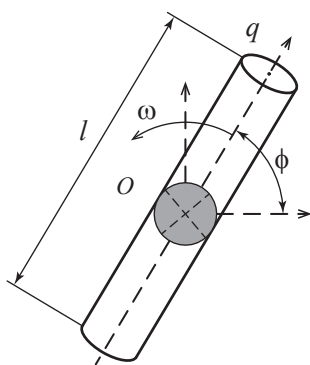


Рис. 1. Механическая система с динамической стабилизацией

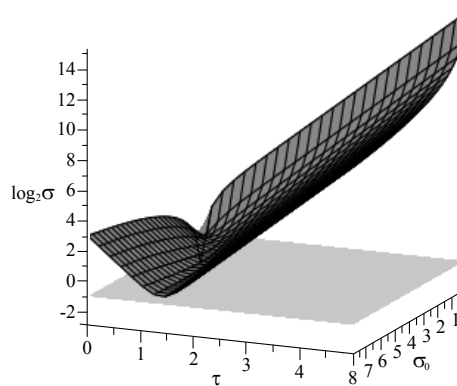


Рис. 2. Эволюция логарифма полуширины волнового пакета $\log_2 \sigma(\tau, \sigma_0)$ при малых σ_0 , (горизонтальная плоскость соответствует $\sigma = 1/2$)

При произвольной безразмерной частоте Ω вынуждающее слагаемое в функции Гамильтона $-f_0 \sin(\Omega\tau + \phi)q$ изменит решение (2) как

$$q = -\left(\frac{f_0}{1 + \Omega^2}\right) \sin(\Omega\tau + \phi) + \frac{1}{2} \left(q_0 + p_0 + \frac{\sin \phi + \Omega \cos \phi}{1 + \Omega^2} f_0 \right) e^\tau + \frac{1}{2} \left(q_0 - p_0 + \frac{\sin \phi - \Omega \cos \phi}{1 + \Omega^2} f_0 \right) e^{-\tau}, \quad (5)$$

и теоретическая стабилизация будет иметь место уже при идеальном соблюдении равенства

$$\begin{aligned} \sin \phi + \Omega \cos \phi &= -\frac{(1 + \Omega^2)(p_0 + q_0)}{f_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi = -\arcsin\left(\frac{\sqrt{1 + \Omega^2}(p_0 + q_0)}{f_0}\right) - \arctg \Omega. \quad (6) \end{aligned}$$

Если начальные условия лежат в фазовом пространстве на линии $p_0 + q_0 = 0$, то стабилизирующая начальная фаза удовлетворяет простому соотношению $\tg \phi = -\Omega$, при $\Omega = 1$, дающему $-0,25\pi$; $0,75\pi$.

Такие НУ примечательны тем, что ограниченность решения (5), если имеет место, то она имеет место при любой вынуждающей гармонической силе, между тем как при $p_0 + q_0 \neq 0$ аргумент арксинуса в (6) должен находиться в своих пределах.

Анализ (6) показывает, что в силу линейности системы (1) стабилизация имеет место, даже если возмущающий сигнал не гармонический, но комбинация синусоид $F(q, t) = -q \int_D f_0(\Omega) \sin(\Omega\tau + \phi(\Omega)) d\Omega$, $D \subset \mathbb{R}^+$, с амплитудами $f_0(\Omega)$ и фазами $\phi(\Omega)$, удовлетворяющими условиям

$$p_0 + q_0 + \int_D \frac{\sin \phi(\Omega) + \Omega \cos \phi(\Omega)}{1 + \Omega^2} f_0 d\Omega = 0$$

и

$$f_0(\Omega) \geq \sqrt{1 + \Omega^2} |p_0 + q_0|, \quad \forall \Omega \in D.$$

В частности, для вышеупомянутых НУ стабилизирующий возмущающий сигнал определяется формулой

$$\begin{aligned} F(q, t) &= -q \int_D f_0(\Omega) \sin(\Omega\tau + \phi(\Omega)) d\omega = \\ &= -q \int_D f_0(\Omega) (\sin \Omega\tau \cos \phi(\Omega) + \cos \Omega\tau \sin \phi(\Omega)) d\omega = \\ &= -q \int_D f_0(\Omega) \cos \phi(\Omega) (\sin \Omega\tau - \Omega \cos \Omega\tau) d\omega = \\ &= -q \int_D \frac{f_0(\Omega)}{\sqrt{1 + \Omega^2}} (\sin \Omega\tau - \Omega \cos \Omega\tau) d\omega \quad (7) \end{aligned}$$

с амплитудой $f_0(\Omega)$, обеспечивающей равномерную сходимость интеграла в (7) на временной полуоси.

Таким образом, динамическая стабилизация перевернутого гармонического осциллятора в классической механике теоретически возможна для широкого класса вынуждающих усилий, как для определяемых по формуле (7) для нулевого уровня энергии, так и для других $F(q, t)$ при $E \neq 0$.

3. Уравнение Шрёдингера

В рамках нерелятивистской квантовой механики волновая функция (в. ф.) одномерного перевернутого осциллятора с натуральной частотой ω с⁻¹, возмущаемого однородным гармоническим полем с круговой частотой $2\pi\nu = \Omega\omega$, амплитудой F_0 и фазой φ , эволюционирует согласно нестационарному уравнению Шрёдингера. В безразмерных величинах — $\xi = x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$, $f_0 = \frac{F_0}{\omega\sqrt{\hbar m\omega}}$, $\tau = \omega t$ оно имеет вид:

$$i \frac{\partial \Psi(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} i \frac{\partial^2 \Psi(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - \frac{\xi^2}{2} \Psi(\xi, \tau) - f_0 \xi \sin(\Omega\tau + \varphi) \Psi(\xi, \tau). \quad (8)$$

Сдвиговая замена независимой переменной $\rho = \xi + f_0 \sin(\Omega\tau + \varphi)$ приводит к исчезновению линейного по координате члена в потенциальной энергии. Представление в. ф. $\Psi(\rho, \tau) = \psi_0(\rho)g(\rho, \tau)$ в новом наборе переменных (ρ, τ) , где, в свою

очередь,

$$g(\rho, \tau) = e^{-i\left(E(\rho) + \frac{f_0^2}{4}\right)\tau + i\frac{f_0^2 \sin(2\tau + 2\varphi)}{8}} z(\rho, \tau) \quad (9)$$

с $E(\rho) = -\frac{1}{2\psi_0(\rho)} \frac{d^2\psi_0(\rho)}{d\rho^2} - \frac{\rho^2}{2}$ (см. ниже), преобразует его к виду

$$\begin{aligned} i\frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \tau} \frac{1}{z} + \left(\frac{i}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} + \frac{dE}{d\rho} \tau \right) f_0 \Omega \cos(\Omega\tau + \varphi) + \\ + i\frac{d\psi_0(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi_0} f_0 \Omega \cos(\Omega\tau + \varphi) + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \left(-i\frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) + \\ + \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 z(\rho, \tau)}{\partial \rho^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dE(\rho)}{d\rho} \right)^2 \tau^2 - \frac{i}{2} \frac{d^2 E(\rho)}{d\rho^2} \tau + \\ + \frac{1}{z} \frac{\partial z(\rho, \tau)}{\partial \rho} \frac{d\psi}{d\rho} \frac{1}{\psi} + \left(-i\frac{dE(\rho)}{d\rho} \tau \right) \frac{d\psi}{d\rho} \frac{1}{\psi} = 0. \quad (10) \end{aligned}$$

Для произвольных начальных условий решение уравнения проблематично по причине краевых условий на бесконечности, а потому необходимости ограничивать конфигурационное пространство, пусть широким, но интервалом. Или же применять иные приёмы интегрирования уравнения Шрёдингера на всей числовой оси (см., например, [12]). Однако проблема упрощается требованиями на НУ, аналогичными классическим начальным условиям.

4. Начальные условия

В уравнении (10) $\psi_0(\rho) = \psi_0(\xi + f_0 \sin \varphi)$ — в. ф. исходного состояния ИНО, которая должна в идеале быть собственной функцией для оператора начальных условий (НУ) (4): $\hat{c} = \hat{p} + \hat{\xi} = -i\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi$.

Однако такая в. ф., т. е. $\psi_{\text{eig}} = C \exp\{-(-0,5i\xi^2)\}$, не отвечает никакому физическому состоянию, а потому удовлетворить НУ можно лишь приближённо, выбрав функцию обобщённого гауссовского типа с аномально большой полушириной пакета $\sigma_0 = \sqrt{\xi^2(0)} \gg 1$:

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, 0) = \psi_0(\xi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^2}{4\sigma_0^2} \right), \\ \xi = (\rho - f_0 \sin(\omega\tau + \varphi))|_{\tau=0} = \rho - f_0 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (11)$$

которая описывает сходящийся к центру симметричный поток вероятности, т. е. своего рода одномерный сферический поток.

Так как для такой исходной функции величины

$$\begin{aligned} E(\rho) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right)^2 (\rho - f_0 \sin \varphi)^2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2\sigma_0^2} - i \right) - \frac{\rho^2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow E(\rho) = -\frac{\rho^2}{2} \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) + \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} - 1 + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) \rho f_0 \sin \varphi - \\ - f_0^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{8\sigma_0^4} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4\sigma_0^2} + i \left(\frac{1}{2} - \frac{f_0^2 \sin^2 \varphi}{2\sigma_0^2} \right), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\frac{d\psi_0(\rho)}{d\rho} \frac{1}{\psi_0(\rho)} = -(\rho - f_0 \sin \varphi) \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\rho} &= -\rho \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) + \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} - 1 + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) f_0 \sin \varphi, \\ \frac{d^2E}{d\rho^2} &= - \left(\frac{i}{\sigma_0^2} + \frac{1}{4\sigma_0^4} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

и зависящие от них коэффициенты в (9) суть многочлены степени не выше 2-х по ρ , то при начальных условиях (11) уравнение (10) можно решить через подстановку

$$z(\rho, \tau) = \exp(\alpha(\tau) + \beta(\tau)\rho + \gamma(\tau)\rho^2), \quad \alpha(0) = \beta(0) = \gamma(0) = 0.$$

То есть эволюционирующая волновая функция перевернутого гармонического осциллятора неизменно остаётся функцией.

5. Решение NSE

Приравнивание коэффициентов при степенях ρ приводит к системе трёх обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(\tau) = 2\gamma(\tau) \left(- \left(\frac{i}{\sigma_0^2} + \frac{1}{4\sigma_0^4} \right) \tau - i \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right) \right) + 2i\gamma^2(\tau) - \\ \quad - \frac{i}{2} \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right)^2 \tau^2 + \left(\frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{\sigma_0^2} \right) \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} + i \right) \tau, \\ \dot{\beta}(\tau) = i\beta(\tau)(2i\tau - 1 + 2\gamma(\tau)) + (2\tau - i - 2\gamma(\tau))f_0\Omega \cos(\Omega\tau + \phi) + \\ \quad + f_0 \sin \varphi \cdot \tau, \\ \dot{\alpha}(\tau) = i\gamma(\tau) + \frac{i}{2} \left(\frac{i}{4\sigma_0^4} - \frac{1}{\sigma_0^2} \right) - f_0\Omega\beta(\tau)(\cos(\Omega\tau + \phi) + \tau \sin \phi) - \\ \quad - if_0^2 \sin \phi \Omega \tau \cos(\Omega\tau + \phi) - \frac{i}{2} \tau^2 f_0^2 \sin^2 \phi. \end{cases} \quad (15)$$

Система последовательно интегрируется, и для старшего коэффициента получается выражение

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \frac{1}{4\sigma_0^4} + \frac{i}{2} + \left(\frac{1}{2\sigma_0^2} - \frac{i}{8\sigma_0^4} \right) \tau + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \left(2i\tau - \operatorname{arctg} \left(i + \frac{1}{2\sigma_0^2} \right) \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} \gamma(\tau) = \frac{1}{4\sigma_0^2} + \frac{\tau}{2\sigma_0^2} - \frac{\sigma_0^2}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}}, \\ \operatorname{Im} \gamma(\tau) = -\frac{\tau}{8\sigma_0^4} + \frac{\operatorname{sh}^2 2\tau}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

С учётом квадратичного по ρ члена в комплексной «энергии» $E(\rho)$, присутствующей под экспонентой в (9), а также аналогичного члена в начальной в. ф. (11), получается следующий действительный множитель при ρ^2 :

$$-\frac{1}{4\sigma(\tau)^2} = \cancel{\frac{1}{4\sigma_0^2}} + \cancel{\frac{\tau}{2\sigma_0^2}} - \cancel{\frac{\tau}{2\sigma_0^2}} - \frac{\sigma_0^2}{\operatorname{sh}^2 2\tau + 4\sigma_0^4 e^{-4\tau}} - \cancel{\frac{1}{4\sigma_0^2}},$$

определяющий временную зависимость для полуширины пакета

$$\sigma(\tau, \sigma_0) = \sigma_0 \sqrt{e^{-4\tau} \left(1 + \frac{1}{16\sigma_0^4}\right) - \frac{1}{8\sigma_0^4} + \frac{e^{-4\tau}}{16\sigma_0^4}}. \quad (17)$$

Зависимость (17) означает начальное убывание разброса $\sigma(\tau)$ на временах $\tau \leq \tau_0 = 0,125 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$ до минимального значения

$$\sigma_{\min} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4}} - \frac{1}{4}} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{64\sigma_0^4}, \quad \sigma_0 \gg 1, \quad (18)$$

сменяющееся ростом и восстановлением разброса при $\tau_2 = 2\tau_0$, а затем неограниченным и необратимым возрастанием по экспоненциальному закону (рис. 2).

Условие хотя бы какого-то сужения (компактизации) исходного волнового пакета (11) — $\sigma_{\min} < \sigma_0$

$$-\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4}} < \sigma_0^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{64\sigma_0^4} < \sigma_0^4 + \frac{\sigma_0^2}{2} + \frac{1}{16} \Leftrightarrow 64\sigma_0^8 + 32\sigma_0^6 - \frac{3\sigma_0^4}{16} - \frac{1}{64} > 0$$

даёт приближённо $\sigma_0 > 0,51427360$.

Что касается мнимой части множителя при ρ^2 , определяющего внутренний поток перераспределения плотности вероятности в пакете, то с учётом тех же вкладов от начальной в. ф. и «энергии» получается

$$\mu(\tau) = -\frac{\tau}{8\sigma_0^4} + \frac{\text{sh}^2 2\tau}{4\sigma_0^4 e^{-4\tau} + \text{sh}^2 2\tau} - \frac{1}{2} + \frac{\tau}{8\sigma_0^4} = \frac{\text{sh}^2 2\tau}{4\sigma_0^4 e^{-4\tau} + \text{sh}^2 2\tau} - \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Стартуя от уровня $-\frac{1}{2}$, множитель $\mu(\tau)$ обращается в нуль при $\tau_1 = 0,25 \ln(1 + 4\sigma_0^2)$, практически сливающимся с τ_0 для $\sigma_0 \gg 1$, и затем быстро стремится к $+\frac{1}{2}$.

Это означает, что внутренний поток вероятностной плотности инвертируется и становится расходящимся от центра: происходит отражение и одновременно начинается необратимая деградация волнового пакета в сторону полной его размытости на оси.

Таким образом, независимо от вынуждаемого линейного воздействия, при начальных макроскопических своих ширинах волновой пакет коллапсирует в микроскопическую область шириной порядка элементарной длины $\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ за время порядка $\sim \frac{\ln \sigma_0}{\omega}$, а затем необратимо расплывается по экспоненциальному закону. Потому о стабилизации имеет смысл говорить лишь в вышеозначенном временном интервале. За его границей положение центра волнового пакета $\xi(\tau) = \hat{x}(\tau) \cdot \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$ не представляет интереса ввиду фактической деградации волны.

6. Влияние периодического воздействия

Решение второго уравнения в (15) даёт коэффициент при первой степени ρ :

$$\beta(\tau) = -f_0 \left(\cos \left(2i\tau - \arctg \left(i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right) \right)^{-\frac{i}{2}} \times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{\operatorname{tg} \left(2i\tau' - \operatorname{arctg} \left(i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right)}{\left(\cos \left(2i\tau' - \operatorname{arctg} \left(i + \frac{1}{2\sigma^2} \right) \right) \right)^{-\frac{i}{2}}} (\Omega \cos (\Omega\tau' + \phi) + \sin \phi\tau') d\tau'. \quad (20)$$

Выделение в (20) действительной и мнимой частей в (20) приводит к довольно длинным и громоздким выражениям, к тому же всё равно не допускающим интегрирование в элементарных функциях. Автор использовал опции Maple 17 для работы с комплексными выражениями и получал точно такие же результаты, как и в случае решения системы уравнений (15), предварительно при помощи всё того же Maple преобразованной в систему из 6-ти уравнений относительно действительных и мнимых частей функций-коэффициентов $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и $\gamma(\tau)$.

Положение центра волнового пакета определяется через выделение полного квадрата в выражении

$$-\frac{\rho^2}{4\sigma(\tau)^2} + \operatorname{Re} \beta(\tau)\rho = -\frac{(\rho - 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau))^2}{4\sigma(\tau)^2} + (\sigma(\tau) \operatorname{Re} \beta(\tau))^2$$

и даёт

$$\overline{\rho(\tau)} = 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau) \Rightarrow \overline{\xi(\tau)} = 2\sigma(\tau)^2 \operatorname{Re} \beta(\tau) - f_0 \sin (\Omega\tau + \varphi). \quad (21)$$

В общем случае произвольной начальной фазы φ периодического воздействия центр пакета удалялся значительно от центра уже в течение первого основного «периода» осциллятора, и на момент максимальной компактности находился на расстоянии от нулевого положения, на много порядков превышающем σ_{\min} (18).

Однако путём дихотомического поиска для различных начальных разбросов $\sigma_0 = 2^{-3} \dots 2^{21}$ найдены фазы ϕ в широком интервале частот $\Omega = 2^{-7} \dots 2^7$, при которых имели место (рис. 3, 4):

- а) негармонические колебания центра пакета около некоторой линии в течение примерно 2-х основных периодов времени, т.е. $0 \leq \tau < 11 \dots 14 \approx 2 \cdot 2\pi$, затем резкий уход в сторону бесконечности;
- б) бифуркации направления ухода центра пакета $\overline{\xi(\tau)}$ в положительную либо отрицательную полуось при изменении фазы на пренебрежимо малую величину порядка $10^{-15 \dots 20}$;
- в) особенность поведения $\overline{\xi(\tau)}$ в окрестности момента разворота потока τ_1 , т.е. вблизи точки коллапса (кривые $\ln \sigma(\tau)$ и $\mu(\tau)$ из (19) на рис. 4).

Более детальный анализ области разворота для различных вынуждающих частот показывает быстрое изменение фазы колебаний $\overline{\xi(\tau)}$ примерно на полупериод. Положение уровня стабилизации, вокруг которого колеблется центр пакета, при этом дополнительно удаляется от нулевого положения (рис. 5).

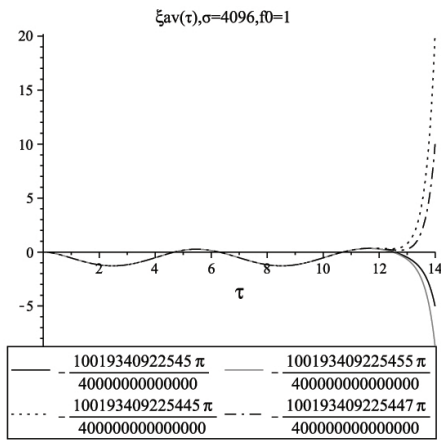


Рис. 3. Временная стабилизация центра пакета с $\sigma_0 = 2^{12}$ и последующая бифуркация $\xi(\tau)$ при натуральной частоте $\Omega = 1$ (дроби — фазы ϕ)

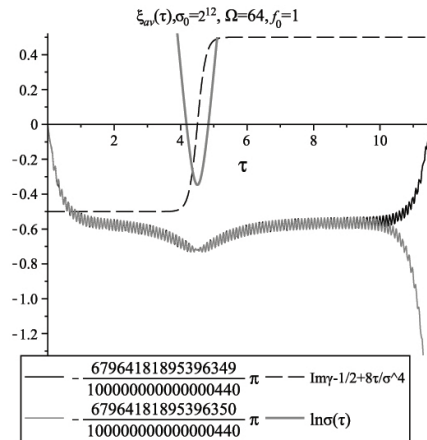


Рис. 4. Временная стабилизация центра пакета с $\sigma_0 = 2^{12}$ и последующая бифуркация $\xi(\tau)$ при натуральной частоте $\Omega = 64$ (дроби — фазы ϕ)

Асимптотическое поведение стабилизирующих фаз $\phi(\Omega, n = \log_2 \sigma_0 \rightarrow \infty)$ вполне соответствуют классическим значениям $\phi_{cl}(\Omega) = -\arctg \Omega$. Что же касается зависимостей фазы ϕ от n , то для ряда исследованных частот Ω они не были даже монотонными. Для важного случая $\Omega = 1$ кривая $\phi(n)$ хорошо описывалась перевёрнутой зависимостью типа Ферми-Дирака (рис. 6):

$$\phi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4(1 + a2^n)}, \quad a = 0,076962 \ (0,001744), \quad adj - R^2 = 0,99965. \quad (22)$$

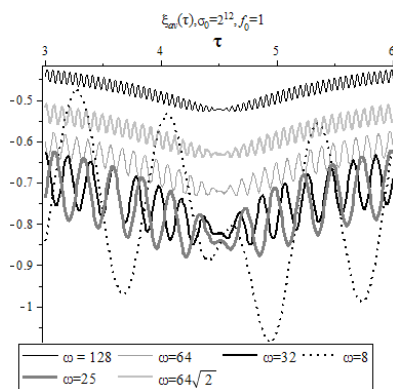


Рис. 5. Кривые $\xi(\tau)$ при $\tau \sim \tau_0$ для различных вынуждающих частот Ω

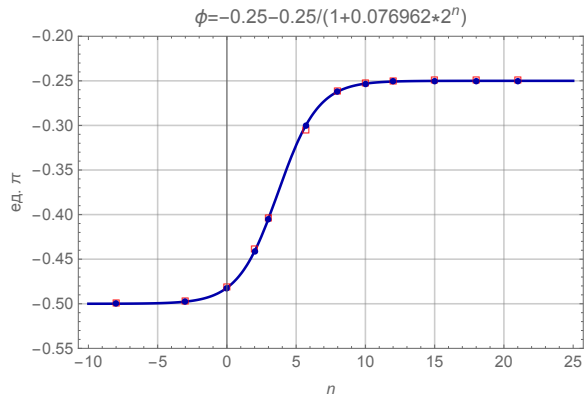


Рис. 6. Перевёрнутая «Ферми-зависимость» фазы стабилизации ϕ vs $n = \log_2(\sigma_0)$ (в ед. π)

7. Обсуждение

Хотя и высокая, но конечная точность компьютерного продукта Maple не позволила зафиксировать времена стабилизации τ , заметно превышающие два основных периода осциллятора $\frac{4\pi}{\omega}$ (для соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения время стабилизации составляло около 4-х периодов). То есть остаётся открытым вопрос о бесконечной сепаратрисе, разделяющей траектории центра волнового пакета, уходящие в положительную и отрицательную бесконечность.

На высоких частотах $\Omega \sim 2^7$ время стабилизации составит порядка сотни периодов вынуждающего периодического потенциала и может оказаться достаточно большим для неустойчивых квантовых микросистем, за которое то же периодическое воздействие может поменять, например, электронное состояние распадающейся молекулы, радикала и пр.

Так, если отрицательный квадратичный потенциал разделяет два стабильных положения вдоль координаты реакции x , как в потенциале Дуффинга, то, управляя фазой периодического воздействия, теоретически можно селективно менять направление реакции.

8. Выводы

Исследована эволюция волнового пакета обобщённого гауссовского типа у периодически возмущаемого на различных частотах инвертированного гармонического осциллятора.

Обнаружено аномальное сужение (коллапс) до одинаковой ширины, равной естественной единице длины, изначально широких вплоть до макроскопических размеров волновых пакетов, соответствующих классическим начальным условиям с нулевой энергией $E = 0$.

В интервале немонотонного поведения полуширины волнового пакета обнаружено явление стабилизации центра волнового пакета, за которой следовало его (центра) бифуркационное поведение.

Исследованная задача ставит разнообразные проблемы, связанные как с реализацией исходной волновой функции, так и с эволюцией негауссовских пакетов, в том числе при обобщённом стабилизирующем воздействии (6).

Литература

1. *Serban I., Wilhelm F.* Dynamical Tunneling in Microscopic Systems // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 10. — Pp. 101–104. — <https://www.researchgate.net/publication/5913852>.
2. *Baskoutas S., Jannussistl A., Mignanig R.* Dissipative Tunneling of the Inverted Caldirola–Kanai Oscillator // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 1994. — Vol. 27. — Pp. 2189–2196.
3. *Matsumoto S., Yoshimura M.* Dynamics of Barrier Penetration in Thermal Medium: Exact Result for Inverted Harmonic Oscillator // *Phys. Rev. A.* — 2000. — Vol. 59, No 6. — Pp. 2201–2238.
4. *Pedrosa L., de Lima A., de M. Carvalho A.* Gaussian Wave Packet States of Generalized Inverted Oscillator With Time-Dependent Mass and Frequency // *Can. J. of Phys.* — 2015. — Vol. 93. — Pp. 3–7.
5. *Nogami Y., Toyama F.* Nonlinear Schrödinger Soliton in a Time-Dependent Quadratic Potential // *Phys. Rev. E.* — 1994. — Vol. 49, No 5. — Pp. 4497–4501.
6. *Степанов Н. Ф., Путьшев В. И.* Квантовая механика молекул и квантовая химия: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1991. — 381 с.

7. *Захарьев Б. Н.* Дискретная и непрерывная квантовая механика, точно решаемые модели // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1992. — Т. 23, № 5. — С. 1387–1468.
8. *Muñoz C. A., Rueda-Paz J., Wolf K. B.* Discrete Repulsive Oscillator Wavefunctions // J. Phys. A: Math. Theor. — 2009. — Vol. 42. — P. 485210.
9. *Barton G.* Quantum Mechanics of the Inverted Oscillator Potential // Annals of Physics. — 1986. — Vol. 166, No 2. — Pp. 322–363.
10. On the Stability of Periodically Time-Dependent Quantum Systems / P. Duclosi, E. Soccorsi, P. Stoviček et al. // Rev. in Math. Phys. — 2008. — Vol. 6. — Pp. 212–240.
11. *Vagrov V. G., Gitman D. M.* Coherent States of Inverse Oscillators and Related Problems // J. Phys. A : Math. Theor. — 2013. — Vol. 46. — P. 325305.
12. *Злотник И. А.* Численные методы решения обобщённого нестационарного уравнения Шрёдингера в неограниченных областях: Кандидатская диссертация / МЭИ. — 2013.

UDC 530.1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-283-294

On the Evolution of Converging Wave Packet of an Inverted Quantum Oscillator Driven by Homogeneous Harmonic Field

V. V. Chistyakov

*Scientific Research University of Informational Technology, Mechanics and Optics
49A Kronverksky avenue, Saint-Petersburg, 197101, Russian Federation*

The problem investigated refers to periodically driven 1D quantum inverted harmonic oscillator (IHO) with the Hamiltonian of $\hat{H} = (\hat{p}^2/2m) - (m\omega^2 x^2/2) - F_0 x \sin(\Omega t + \phi)$. The model is used widely in huge quantum applications concerned unstable molecular complexes and ions under laser light affection. Non-stationary Schrödinger equation (NSE) was solved analytically and numerically by means of Maple 17 with initial wave function (w. f.) of generalized Gaussian type. This one described the converging 1D probability flux and fitted well the quantum operator of initial conditions (IC). For the IC one can observe, first, the collapse of w. f. packet into extremely narrow 1D space interval of length $\Delta x \sim \sqrt{m\omega/\hbar}$ and, second, its spreading back up to its starting half width $\sigma_0 = \sqrt{(\xi^2(0))}$, and all that — at dimensionless times $\tau \leq 2\tau_0 = 0.25 \ln(16\sigma_0^4 + 1)$. At certain phases ϕ defined by Ω and σ_0 the wave packet center $\xi_{av}(\tau) = \hat{x}(\tau)\sqrt{m\omega/\hbar}$ displayed nonharmonic oscillating behavior near some slowly drifting space position within this time interval and after that leaved onto infinity while the unlimited packet spreading. And the phases themselves served as bifurcation points separating the NSE solutions with the $\xi_{av}(\tau)$ outgoing to $+\infty$ from those with $-\infty$. In “resonant” case of $\Omega = \omega$ the values $\phi(\Omega = 1, n)$ obeyed an inverted Fermi–Dirac formula of $n = \log_2 \sigma_0$; for differing Ω s the asymptotic of $\phi(\Omega, n \rightarrow \infty)$ obeyed well classical law.

Key words and phrases: driven inverted oscillator, non-stationary Schrödinger equation (NSE), Gaussian wave packet, collapse, phase shift, stabilization, bifurcation, Maple

References

1. I. Serban, F. Wilhelm, Dynamical Tunneling in Microscopic Systems, Phys. Rev. Lett. 10 (2007) 101–104.
URL <https://www.researchgate.net/publication/5913852>
2. S. Baskoutas, A. Jannussistl, R. Mignani, Dissipative Tunneling of the Inverted Caldirola–Kanai Oscillator, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) 2189–2196.

3. S. Matsumoto, M. Yoshimura, Dynamics of Barrier Penetration in Thermal Medium: Exact Result for Inverted Harmonic Oscillator, *Phys. Rev. A* 59 (6) (2000) 2201–2238.
4. L. Pedrosa, A. de Lima, A. de M. Carvalho, Gaussian Wave Packet States of Generalized Inverted Oscillator With Time-Dependent Mass and Frequency, *Can. J. of Phys* 93 (2015) 3–7.
5. Y. Nogami, F. Toyama, Nonlinear Schrödinger Soliton in a Time-Dependent Quadratic Potential, *Phys. Rev. E* 49 (5) (1994) 4497–4501.
6. N. F. Stepanov, V. I. Pupyshev, Quantum Mechanics of Molecules and Quantum Chemistry: Textbook, MSU Publishers, Moscow, 1991, in Russian.
7. B. N. Zakhar'ev, Discrete and Continuous Quantum Mechanics Exactly Solvable Models, *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei* 23 (5) (1992) 1387–1468, in Russian.
8. C. A. Muñoz, J. Rueda-Paz, K. B. Wolf, Discrete Repulsive Oscillator Wavefunctions, *J. Phys. A: Math. Theor.* 42 (2009) 485210.
9. G. Barton, Quantum Mechanics of the Inverted Oscillator Potential, *Annals of Physics* 166 (2) (1986) 322–363.
10. P. Duclosi, E. Soccorsi, P. Stoviček, et al., On the Stability of Periodically Time-Dependent Quantum Systems, *Rev. in Math. Phys.* 6 (2008) 212–240.
11. V. G. Bagrov, D. M. Gitman, Coherent States of Inverse Oscillators and Related Problems, *J. Phys. A : Math. Theor.* 46 (2013) 325305.
12. I. Zlotnik, Numerical Methods for Solving the Generalized Time-Dependent Schrödinger Equation in Unbounded Domains, Ph.D. thesis, MPEI (2013).

Информатика и вычислительная техника

УДК 004.65:004.75

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-295-305

Современные технологии интеграции информации из независимых источников и их применение при построении информационной системы, объединяющей транспортные расписания

А. С. Панкратов, А. Х. Пшеунов

*Кафедра информационных технологий
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Рассматривается задача объединения в единое целое автобусных расписаний, предоставленных различными источниками – автобусными парками, независимыми друг от друга и, возможно, находящимися в разных регионах страны. Эта объединённая система предназначена, в частности, для удобства поиска имеющихся автобусных маршрутов между двумя заданными точками. Для решения рассматриваемой задачи предлагается использовать комбинированный подход, сочетающий преимущества технологий медиаторов и хранилищ. В статье рассматривается модель из трёх источников данных, которыми являются автобусные парки, выставляющие информацию о своих расписаниях. Предполагается, что все источники имеют сходные концептуальные схемы, но обладают своими особенностями. В частности, могут быть разные наименования таблиц и атрибутов на разных источниках и разное распределение атрибутов по таблицам. Возможно также отсутствие некоторых атрибутов на отдельных источниках. Строятся таблицы соответствия и медиатор, транслирующий пользовательские запросы на источники. При этом для идентификации нужных источников поддерживается вспомогательное хранилище небольшого объёма, которое содержит информацию об остановочных пунктах, обслуживаемых каждым из источников. Описывается технология обновления хранилища и схема исполнения пользовательского запроса, использующая информацию, содержащуюся в хранилище.

Ключевые слова: база данных, интеграция информации, мультибазовая система, медиатор, хранилище

1. Введение

С каждым годом проблема интеграции информации из различных независимых источников становится все актуальнее. Часто возникает необходимость объединить в единое целое разнородные БД. Для формального описания больших объёмов разнородных данных при проектировании интегрированных баз данных и программного обеспечения, наряду с традиционной реляционной моделью, предлагается ряд новых подходов, в том числе основанных на использовании многомерных моделей данных. Один из таких подходов, предложенный в работах С. В. Павлова, О. И. Христуло и ряда других специалистов, основывается на использовании концепции многомерных информационных объектов. Также данной проблеме особое внимание уделили в своих работах А. В. Черноусова, А. Кудинова, другие авторы. Однако на данный момент намечаются лишь контуры общего подхода к решению задачи интеграции данных из разных компьютерных систем, а основная часть публикаций по данной проблеме затрагивает лишь частные случаи, со своими индивидуальными особенностями [1–4].

Данная статья также относится к частному случаю. Рассматривается задача объединения в единое целое автобусных расписаний, предоставленных различными источниками — автобусными парками, независимыми друг от друга и, возможно, находящимися в разных регионах страны.

Следует отметить, что подобные справочные системы в настоящее время существуют и ими можно пользоваться через Интернет (например, система «Яндекс.Расписания»), однако, как показывает практика, они охватывают в основном магистральные маршруты и не всегда выдают достоверную информацию. В настоящей работе делается попытка построения системы, лишённой этих изъянов и выдающей исключительно актуальную информацию.

2. Описание предметной области

В наше время существует много видов автобусных парков разного уровня и масштаба: городские, районные, региональные. При этом в каждом из них ведётся свой учёт маршрутов, имеются свои расписания и т.д. Имеется некоторое количество населённых пунктов, связанных автобусными маршрутами, для каждого маршрута имеются конечные и промежуточные пункты, в которых пассажиры могут выходить или садиться в автобус. Одни и те же пункты могут связываться разными маршрутами. Имеется расписание автобусов, которое связывает определённые пункты между собой. В расписании определяются дни недели, время отправления из начального в конечный пункт, список промежуточных пунктов и время их прохождения. В автобусных парках находится некоторое количество автобусов разных категорий, с разным количеством мест и некоторое количество водителей. На основе расписания формируются конкретные рейсы (к рейсам, определённым в расписании, прикрепляются водитель, автобус, устанавливается дата). Ведётся продажа билетов, в билете указаны номер, дата, код рейса, пункт отправления, пункт назначения и цена. Цена билета зависит от расстояния между пунктами отправления и назначения, категории автобуса, ценовой политики транспортной компании и т.д. Предлагаемая в настоящей работе интегрированная (мультибазовая) система, объединяющая изначально разрозненные расписания, предназначена для удобства поиска имеющихся автобусных маршрутов между двумя заданными точками. Пользователь вводит пункт отправления, пункт назначения и дату в соответствующие поля, система выдаёт ему расписание рейсов, удовлетворяющее критериям поиска. В расписании показаны поля: маршрут (перечислены основные населённые пункты, через которые будет проходить движение), дата, время отправления, время прибытия, категория автобуса, количество свободных мест, цена билета. Пользователь выбирает подходящий ему рейс и оплачивает билет.

3. Основные технологии интеграции данных

Существует три основных подхода к интеграции баз данных [5]:

- 1) федеративные базы данных — источники независимы, но могут сообщаться между собой для обмена информацией;
- 2) хранилища данных — данные от источников на периодической основе загружаются в централизованное хранилище, возможно, с предварительной обработкой с целью приведения их в соответствие со структурой хранилища;
- 3) медиаторы — программные компоненты, принимающие запросы от пользователей и затем направляющие их к соответствующим источникам, возможно, с предварительной трансляцией; полученные ответы от источников приводятся в соответствие со структурой медиатора, объединяются и выдаются пользователю.

Каждый из подходов обладает своими преимуществами и недостатками. Федеративные базы данных бывают эффективными при наличии малого числа источников, в противном случае возникает необходимость поддержания большого количества связей между источниками (для экспорта-импорта информации). В хранилищах существует проблема периодической загрузки большого объёма информации с соответствующими требованиями к ресурсам системы, кроме того, информация, полученная от хранилища, может быть несколько устаревшей (не вполне актуальной). В медиаторах нет этих проблем, но конкретные запросы к ним исполняются

медленнее, чем к хранилищу. Кроме того, в медиаторах необходимо поддерживать механизм идентификации необходимых источников.

4. Предлагаемая схема решения

Для решения рассматриваемой задачи интеграции междугородних автобусов предлагается использовать комбинированный подход, сочетающий преимущества медиаторов и хранилищ. Этот подход состоит в применении технологии медиаторов с участием вспомогательного хранилища небольшого объёма, которое позволяет идентифицировать источники, необходимые для исполнения запроса пользователя.

Будем предполагать, что существует несколько независимых автобусных станций, работа каждого из которых поддерживается собственной компьютерной системой с использованием какой-либо СУБД, поддерживающей формат SQL. В рамках каждого из источников эта система может сопровождать различные бизнес-процессы (создание маршрутов, добавление рейса).

Как выше отмечалось, для потенциального пассажира часто бывает важно получить все возможные варианты, удовлетворяющие его запросу. Для этого следует отправить запрос во все автобусные парки (источники), обслуживающие населённые пункты, соответствующие требованиям клиента. При этом для оптимизации процесса (быстродействие транзакции, минимизация нагрузки на сеть) важно запрашивать только те источники, которые содержат информацию по данным населённым пунктам и не запрашивать другие источники. Для этой цели предлагается создать медиатор со вспомогательным хранилищем. Медиатор принимает запрос от пользователя и переадресует его только к тем источникам, где находится интересующая его информация. Для определения того, к каким источникам следует обращаться, при медиаторе создаётся «мини-хранилище», периодически закачивающее от источников лишь краткую информацию о маршрутных пунктах, обслуживаемых данным источником (автопарком). Примерный алгоритм: при поступлении запроса медиатору происходит формирование вспомогательного запроса хранилищу, выявляющего, какие источники-автопарки обслуживают заданные маршрутные пункты. После составления списка этих автобусных парков (т. е. источников информации) исходный запрос преобразуется в серию подзапросов, каждый из которых адресуется через сеть своему источнику в терминах этого источника.

5. Проблемы интеграции информации

В мультибазовой (интегрированной) системе каждый из источников использует специфические термины и таблицы. В общем случае данные от разных источников обычно между собой не согласованы, а сами источники могут работать под управлением различных СУБД. Вследствие этого при обращении к данным нескольких источников через единую программную компоненту возникают проблемы интеграции информации, связанные с наличием или отсутствием каких-либо признаков в источниках, несоответствиями в типах представленных данных и т.д. Рассмотрим более подробно основные проблемы интеграции.

1. *Различия в наименованиях.* Различия в обозначениях данных в разных источниках, несущих одну и ту же нагрузку на концептуальном уровне, т.е. когда одни и те же сущности (или поля) называются разными именами. Например, сущность «Туре» (тип автобуса) может обозначаться как «TypeBus», «Тип», «Категория», поле «Driver» (водитель) как «Voditel», «Водитель» и т.п.

2. *Различия в типах данных.* Например, номера маршрутов в одном источнике хранятся в виде символьных строк переменной длины, в другом – как строки постоянной (причём, возможно разной) длины, в третьем – в формате целочисленных значений.

3. *Различия в множестве допустимых значений.* Один и тот же признак в разных источниках может определяться разными константами. Например, прямой

рейс на одном источнике может обозначаться строкой «пр», а на другом строкой «прямой».

4. *Отсутствующие значения.* В каждом конкретном источнике может не быть такой информации, которая наличествует в других. Например, на некоторых источниках может иметься информация о том, к какому региону и району принадлежит населённый пункт, а на другом нет.

Самый распространённый метод решения проблем интеграции — это поддержка таблиц соответствия, описывающих взаимосвязь элементов данных из различных источников. При интеграции данных с помощью медиатора, представляющего, по сути, виртуальную базу данных (представление для пользователя), эта виртуальная база имеет свои характеристики (реквизиты), которые также заносятся в общую таблицу соответствия.

6. Требования к интегрирующей системе

Помимо традиционной работы с каждой из баз данных-источников на локальном уровне требуется иметь возможность исполнять следующий набор дополнительных транзакций:

– для источников:

- 1) создавать новый маршрут с заполнением необходимых атрибутов;
- 2) возможность обновлять данные, когда это необходимо;
- 3) возможность удалять данные при потере актуальности;

– для медиатора:

- 1) соответствующие подзапросы направлять не ко всем источникам, а только к тем, где имеется запрашиваемая информация; для этой цели создаётся небольшое по объёму хранилище данных, периодически закачивающее от источников информацию обо всех новых маршрутах и рейсах;
- 2) подключать к системе новые источники информации.

Требуется создать рабочие интерфейсы для пользователя и администратора, последний должен иметь возможность отслеживать состояние хранилища и процесс загрузки данных.

7. Описание рабочей модели

Рассмотрим модель из трёх источников данных, которыми являются автобусные парки, выставляющие информацию о своих расписаниях. Будем их условно обозначать DB1, DB2 и DB3. Предполагается, что все источники имеют сходные концептуальные схемы, каждый содержит информацию о своих населённых пунктах, автобусах, маршрутах и рейсах, но могут быть разные наименования таблиц и атрибутов на разных источниках. При этом источник DB2 обслуживает населённые пункты в пределах одного района, источник DB1 — в пределах одного региона (но, возможно, в разных районах), маршруты, относящиеся к источнику DB3, могут заходить в разные регионы.

Выпишем структуру реляционных таблиц на источниках данных в виде: **Таблицы**(поля). Ключевые поля подчёркнуты.

DB1:

Drivers(tab_no, Name);

Buses(Id, reg_num, Id_type);

Bus Type(Id, type, seats, speed);

Points(Id, Name, District);

Routes(Route_no, Id_start_point, Id_end_point);

Waypoints(Route_no, Id_point, Distance_from_start, Time_from_start);

Trips(Id, Route_no, start_time, finish_time, frw/back, week_day);

Sendings(Id, Trip_no, Driver_Id, Bus_Id).

DB2:**Водители**(табельный_номер, ФИО);**Автобусы**(Id, Гос-Номер, вместимость, скорость);**Останов пункты**(Id, Название);**Маршруты**(Номер маршрута, Id_нач_пункт, Id_кон_пункт);**Маршрутные Пункты**(Номер маршрута, Id_пункта, Расст_от_нач_пункта,
Время_движ_от_нач_пункта);**Рейсы**(Id, Номер маршрута, время отправки, время прибытия, Пря-
мой/Обратный, День_недели);**ОтправкаРейсов**(Id, Рейс_Id, Водитель_Id, Автобус_Id).**DB3:****Водители**(таб_номер, ФИО, год_рождения, Id_автоколонна);**Автобусы**(Id, Гос-Номер, год выпуска, Id_тип, автоколонна_номер);**Автоколонны**(Номер, Начальник);**Типы автобусов**(Id, тип, макс_вместимость, сред_скорость)**Ост_пункты**(Id, Название, Район, код_региона);**Маршруты**(Номер маршрута, Id_нач_пункт, Id_кон_пункт);**Маршрутные Пункты**(Маршрут_номер, Id_пункта, Расст_от_старт_точки,
Время_движ_от_нач);**Рейсы**(Id, Номер маршрута, время отправки, время прибытия, Пря-
мой_или_Обратный, День_недели);**ОбеспечениеРейсов**(Id, Рейс_Id, Водитель_Id, Автобус_Id).**Структура медиатора:****Автобусы**(Id, Гос-Номер, вместимость, скорость);**Останов пункты**(Id, Название, Район, код_региона);**Маршруты**(Номер маршрута, Id_нач_пункт, Id_кон_пункт);**Маршрутные пункты**(Номер маршрута, Id_пункта, Расст_от_нач_пункта,
Время_от_нач);**Рейсы**(Id, Номер маршрута, время отправки, время прибытия, Пря-
мой/Обратный, День_недели);**ОбеспечениеРейсов**(Id, Рейс_Id, Автобус_Id).

Примечание. На всех источниках предполагается, что у каждого маршрута есть своя «точка базирования» (начальный пункт), от которой начинается прямой рейс. Обратный рейс начинается от конечного пункта.

8. Таблицы соответствий медиатора

В рассматриваемой рабочей модели каждой таблице из структуры медиатора соответствует, как правило, по одной таблице каждого из источников. Исключение составляет следующая ситуация: таблице «Автобусы» медиатора на источниках DB1 и DB3 соответствуют по две таблицы, соответственно, «Buses», «Bus Type» и «Автобусы», «Типы автобусов». Кроме того, на источнике DB1 отсутствует информация о регионах (предполагается, что для всех маршрутов регион один и тот же), а на источнике DB2 по той же причине отсутствует информация о районах и регионах. В связи с этим представляется целесообразным поддержание на медиаторе одной общей таблицы соответствий медиатору для всех источников (табл. 1), а также таблицы соответствий источников районам, регионам и сетевым адресам источников (табл. 2).

Таблица 1

Tabl_Corr: соответствие источников медиатору

Медиатор. таблица	Медиатор. атрибут	DB1. таблица	DB1. атрибут	DB2. таблица	DB2. атрибут	DB3. таблица	DB3. атрибут
Автобусы	Id	Buses	Id	Автобусы	Id	Автобусы	Id
Автобусы	Гос-Номер	Buses	reg_num	Автобусы	Гос-Номер	Автобусы	Гос-Номер
Автобусы	вместимость	Bus Type	seat	Автобусы	вместимость	Типы автобусов	макс_вместимость
Автобусы	скорость	Bus Type	speed	Автобусы	скорость	Типы автобусов	сред_скорость
Останов пункты	Id	Points	Id	Останов пункты	Id	Ост_пункты	Id
Останов пункты	Название	Points	Name	Останов пункты	Название	Ост_пункты	Название
Останов пункты	Район	Points	District	NULL	NULL	Ост_пункты	Район
Останов пункты	код_региона	NULL	NULL	NULL	NULL	Ост_пункты	код_региона
Маршруты	Номер маршрута	Routes	Route_no	Маршруты	Номер маршрута	Маршруты	Номер маршрута
Маршруты	Id_нач_пункт	Routes	Id_start_point	Маршруты	Id_нач_пункт	Маршруты	Id_нач_пункт
Маршруты	Id_кон_пункт	Routes	Id_end_point	Маршруты	Id_кон_пункт	Маршруты	Id_кон_пункт
Маршрутные Пункты	Номер маршрута	Waypoints	Route_no	Маршрутные Пункты	Номер маршрута	Маршрутные Пункты	Маршрут_номер
Маршрутные Пункты	Id_пункта	Waypoints	Id_point	Маршрутные Пункты	Id_пункта	Маршрутные Пункты	Id_пункта
Маршрутные Пункты	Расст_от_нач_пункта	Waypoints	Distance_from_start	Маршрутные Пункты	Расст_от_нач_пункта	Маршрутные Пункты	Расст_от_старт_точки

Маршрутные Пункты	Время_от_нач	Waypoints	Time_from_start	Маршрутные Пункты	Время_движ_от_пункта	Маршрутные Пункты	Время_движ_от_нач
Рейсы	Id	Trips	Id	Рейсы	Id	Рейсы	Id
Рейсы	Номер маршрута	Trips	Route_no	Рейсы	Номер маршрута	Рейсы	Номер маршрута
Рейсы	время отправки	Trips	start_time	Рейсы	время отправки	Рейсы	время отправки
Рейсы	время прибытия	Trips	finish_time	Рейсы	время прибытия	Рейсы	время прибытия
Рейсы	Прямой/ Обратный	Trips	frw/back	Рейсы	Прямой/ Обратный	Рейсы	Прямой или Обратный
Рейсы	День_недели	Trips	week_day	Рейсы	День_недели	Рейсы	День_недели
Обеспечение Рейсов	Id	Sendings	Id	Отправка Рейсов	Id	Обеспечение Рейсов	Id
Обеспечение Рейсов	Рейс_Id	Sendings	Trip_no	Отправка Рейсов	Рейс_Id	Обеспечение Рейсов	Рейс_Id
Обеспечение Рейсов	Автобус_Id	Sendings	Bus_Id	Отправка Рейсов	Автобус_Id	Обеспечение Рейсов	Автобус_Id

Таблица 2

Source_Regions: соответствие источников районам, регионам и сетевым адресам источников

IdSource	Адрес в сети	Район	Регион
DB1	...	NULL	...
DB2
DB3	...	NULL	NULL

9. Подключение нового источника

Эту процедуру выполняет специальный человек. Рассмотрим для примера новый источник DB4. Процедура подключения состоит в следующем: в таблице соответствия «Tabl_Corr» заводятся новые колонки, а в таблице «Source_Regions» – новая строка, соответствующие вновь подключённому источнику. Производится соответствующее обновление хранилища при медиаторе: оно дополняется маршрутными пунктами, обслуживаемыми новым источником. Вся дальнейшая работа мультибазовой системы (запросы, обновление данных в хранилище) производится уже с учётом нового источника.

10. Структура вспомогательного хранилища и его обновление

Хранилище состоит из одной таблицы «ПунктыНаМаршрутах» с полями: IdSource, IdПункта, ПунктНазвание, Район, Код_региона. Первичным ключом в ней является пара: IdSource, IdПункта.

Если на источнике с номером n происходит добавление, удаление, переименование пункта как места остановки или изменение административных границ, то на медиатор подаётся специальный сигнал, по которому запускается транзакция, переносящая все обновления источника на таблицу-хранилище «ПунктыНаМаршрутах». Обновляются строки с IdSource= n . В случае, когда на источнике отсутствует информация о регионах и районах, соответствующие значения берутся из таблицы Source_Regions.

11. Схема исполнения запроса на медиаторе

Рассмотрим для примера наиболее популярный запрос: показать рейсы всех маршрутов, следующих из Пункта1 в Пункт2, со временем отправления из Пункта1. Предусматривается возможность фильтрации запроса по дням недели и времени отправления. Время отправления от Пункта1 вычисляется как сумма времени отправки от стартового пункта и времени движения от стартового пункта до Пункта1. SQL-код запроса в этом случае может выглядеть следующим образом (для прямого рейса):

```
SELECT Маршруты.[Номер маршрута] AS Маршрут,
       ОП1.Название AS [Пункт отправления],
       ОП2.Название AS [Пункт назначения],
       Рейсы.[время отправки]+МП1.Расст_от_нач_пункта AS [Время отправления]
FROM Маршруты, Рейсы,
```

```

[Останов пункты] AS ОП1, [Останов пункты] AS ОП2,
[Маршрутные пункты] AS МП1, [Маршрутные пункты] AS МП2

WHERE МП1.Id\_пункта=Id_Пункта1 AND МП2.Id\_пункта=Id_Пункта2 AND
МП1.[Номер маршрута]=МП2.[Номер маршрута] AND
МП1.Расст\_от\_нач\_пункта < МП2.Расст\_от\_нач\_пункта AND
Маршруты.[Номер маршрута]=Рейсы.[Номер маршрута] AND
Маршруты.[Номер маршрута]=МП1.[Номер маршрута] AND
Маршруты.Id\_нач\_пункт=ОП1.Id AND
Маршруты.Id\_кон\_пункт=ОП2.Id

```

Предварительно должны быть найдены `Id_Пункта1` и `Id_Пункта2` в таблице «Останов пункты». Технология может быть, например, такой: при запуске запроса пользователь задаёт названия каждого из пунктов, при этом по мере набора ему выплывают подсказки в виде списка, из которого щелчком мыши надо выбрать нужный пункт. При этом щелчке система автоматически выбирает из таблицы «Останов пункты» соответствующий `Id`, который и передаётся в запрос.

Запрос может также учитывать и другие введённые параметры о маршруте и рейсе (например, диапазон времени отправки, день отправки, тип и гос. номер автобуса), требующие в некоторых случаях присоединения таблиц «ОбеспечениеРейсов» и «Автобусы».

Для обратного рейса имеет место аналогичная формула, только вместо времени движения от начального пункта маршрута до `Пункта1` потребуется предварительно вычислить время движения от конечного пункта до `Пункта1`, по имеющимся данным таблицы «Маршрутные пункты».

Опишем технологию исполнения данного запроса.

Пользователь мультибазовой системы вводит в форму-интерфейс критерии поиска: пункт отправки, пункт прибытия, время отправки, время прибытия. На первом этапе запрос адресуется таблице «ПунктыНаМаршрутах» хранилища. Отсеиваются источники, на которых не обслуживают одновременно `Пункт1` и `Пункт2`:

```

SELECT Source
FROM ПунктыНаМаршрутах
WHERE <условия соответствия данным Пункта2>
AND Source IN (SELECT Source
FROM ПунктыНаМаршрутах
WHERE <условия соответствия данным Пункта1>)

```

Результаты записываются во временную таблицу «Sources».

На втором этапе происходит обращение с исходным запросом к каждому из найденных на первом этапе источникам (по сетевым адресам, указанным в таблице «Source_Regions»). При этом для каждого источника SQL-код запроса преобразуется к виду, который данный источник способен воспринять. Преобразование запроса производится с помощью таблиц соответствия.

На третьем этапе медиатор получает ответы от источников и производит их обратное преобразование к структуре медиатора. После этого каждый ответ дополняется полем с информацией об источнике (автопарке), все ответы объединяются и выдаются пользователю.

12. Особые ситуации

Итак, описана общая схема построения мультибазовой системы, интегрирующей информацию из автобусных парков. Однако при каждой конкретной реализации могут возникать особые ситуации, требующие отдельного изучения. Рассмотрим для примера две из них.

Ситуация первая. Неоднозначная идентификация информации. Не все источники могут поддерживать атрибуты, однозначно определяющие маршрут. Например, на разных источниках номера маршрутов могут совпадать, а пути их следования могут оказаться совершенно разными, и как следствие возникает конфликт именования на уровне медиатора. Он может разрешиться, если мы в качестве первичного ключа для маршрута (на уровне медиатора) возьмём пару: номер маршрута, номер перевозчика (источника).

Ситуация вторая. В некоторых регионах (например, в Архангельской области или в Якутии) у населённых пунктов могут встречаться двойные (а иногда и тройные) названия. Например, одно официальное (обычно по наименованию почтового отделения), а другое — как называют это место сами жители. Чтобы система могла принимать все варианты наименований, можно поддерживать при медиаторе дополнительные таблицы, содержащие список населённых мест (с указанием соответствия остановочным пунктам) и вариантами их названий.

13. Заключение

Предложен и описан алгоритм решения задачи интеграции автобусных парков, использующий технологию медиаторов с участием вспомогательного хранилища небольшого объёма, с помощью которого идентифицируются необходимые источники данных. Этот подход, позволяет использовать в сочетании преимущества медиаторов и хранилищ. Описана рабочая модель интегрирующей системы, состоящей из трёх источников данных с различной структурой. Проиллюстрирована технология исполнения запроса к медиатору. Прописана технология подключения нового источника. Представляется, что предложенная схема может быть применима и в других задачах, связанных с интеграцией информации. Для рассматриваемой задачи дальнейшим развитием мог бы служить выбор оптимального маршрута на основе подхода работы [6].

Литература

1. Воробьёва М. С. Построение модели интеграции данных в информационно-управляющих системах // Модернизация образования в условиях глобализации: Круглый стол «Образование через науку и инновации», 14–15 сентября 2005 г. / под ред. В. Н. Кутрунов. — 2005. — С. 26–28.
2. Торшин Д. В. Организация единого интегрированного пространства на основе универсального формата обмена данными // Научно-технические ведомости СПбГПУ, серия «Информатика. Телекоммуникации. Управление». — 2009. — № 2(71). — С. 26–32.
3. Панкратов А. С. Технология интеграции разнородных баз данных на примере объединения электронных медицинских карт // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2011. — № 4. — С. 60–67.
4. Валуев А. М., Панкратов А. С. Современные технологии интеграции информации из независимых баз данных и возможности их применения в задачах планирования и управления // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). — 2013. — № 7. — С. 170–174.
5. Гарсия-Моллина Г., Ульман Д., Уидом Д. Системы баз данных. Полный курс. — Москва: Вильямс, 2003. — 1088 с.
6. Валуев А. М., Якушнов А. А. Задача выбора рационального маршрута с использованием общественного транспорта // Управление развитием крупномасштабных систем: Материалы Шестой международной конференции. — Т. II. — Москва: 2012. — С. 31–33.

UDC 004.65:004.75

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-3-295-305

Modern Technologies of Information Integration from Independent Sources and their Application in the Construction of an Information System that Combines Transport Timetables

A. S. Pankratov, A. Kh. Psheunov

*Information Technologies Department
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The problem of constructing an integrating system combining bus timetables of different bus depots is considered. We suppose that these bus depots are independent and, possibly, located at different regions of the country. The purpose of this integrated system is, in particular, the easement of finding available bus routes between two given points. To solve this problem, it is proposed to use an approach combining the advantages of mediator and data repository technologies. The article considers a model of three data sources, which are bus depots that display information about their timetables. It is assumed that all sources have similar conceptual schemes, but they have their own specific characteristics. In particular, there may be different names of tables and attributes in different sources and different distribution of attributes throw tables. Also at some sources may be an absence of certain attributes. We construct correspondence tables and a mediator that translate user queries to the sources. To identify the necessary sources, a small auxiliary repository is maintained that contains information about the stop points served by each of the sources. We describe the technology for updating the repository and the executing strategy for the user query, using the information contained in the repository.

Key words and phrases: database, integration of the information, multidatabase system, mediator, data warehouse

References

1. M. S. Vorobyova, Development of the Model of Data Integration in Information and Control Systems, in: V. N. Kuturnov (Ed.), Modernization of education in the context of globalization: Round-table discussion "Education through Science and Innovation", 2005, sept. 14–15, 2005, pp. 26–28, in Russian.
2. D. V. Torshin, Organization of an United, Integrated Space Based on Data Exchange Universal Format, Scientific and Technical Sheets of St-Petersburg Polytechnic University, Series "Information Sciences. Telecommunications. Management" (2(71)) (2009) 26–32, in Russian.
3. A. S. Pankratov, Integration Technology of Heterogeneous Databases Exemplified by Consolidation of Electronic Medical Cards, Artificial Intelligence and Decision Making (4) (2011) 60–67, in Russian.
4. A. M. Valuev, A. S. Pankratov, Modern Technologies for Information Integration from Independed Databases and Ways for Application in the Problems of Planning and Management, Mining Informational and Analytical Bulletin (scientific and technical journal) (7) (2013) 170–174, in Russian.
5. H. Garsia-Molina, J. Ullman, J. Widom, Database Systems: the Complete Book, Williams, 2003.
6. A. M. Valuev, A. A. Yakunkhov, The Task of Choosing the Rational Route using Public Transport, in: Managing the Development of Large-Scale Systems: Proceedings of the Sixth International Conference, Vol. II, Moscow, 2012, pp. 31–33, in Russian.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ахмед Абдуллахи Баппах (Нигерия) — аспирант кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: garkuwaz@yahoo.com, тел.: +7 (967) 2382165)

Велиева Татьяна Рефатовна — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: velieva_tr@rudn.university, тел.: +7(495)9520250)

Вихрова Ольга Геннадиевна — аспирант, ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: vikhrova_og@rudn.university, тел.: +7(495)9522823)

Гусев Александр Александрович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: gooseff@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-536)

Искандар Мухаммад (Индонезия) — аспирант кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: iskaandar@gmail.com, тел.: +7 (926) 4665485)

Коваленко Александр Дмитриевич — доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе лаборатории физики высоких энергий Объединённого института ядерных исследований (e-mail: kovalen@dubna.ru)

Королькова Анна Владиславовна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: korolkova_av@rudn.university, тел.: +7(495)9520250)

Кулябов Дмитрий Сергеевич — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН; старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: kulyabov_ds@rudn.university, тел.: +7(495)9520250)

Оладимеджи Енок Олуволе (Нигерия) — аспирант кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: nockjnr@gmail.com, тел.: +234 (803) 3977787, +7 (916) 3663739)

Панкратов Александр Серафимович — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: pankratov_as@rudn.university, тел.: +7(495)9550975)

Перепелкин Евгений Евгеньевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБОУ ВО Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (e-mail: pevgeni@jinr.ru, perepelkin.evgeny@phys.msu.ru)

Полякова Римма Васильевна — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований (e-mail: polykovarv@mail.ru)

Пшеунов Ахмед Хабилович — студент кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: psheunov.a@yandex.ru, тел.: +7(495)9550975)

Рудой Юрий Григорьевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: rudikar@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550838)

Рыбаков Юрий Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теоретической физики и механики РУДН (e-mail: soliton4@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550398)

Садовникова Марианна Борисовна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры квантовой статистики и теории поля физического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (e-mail: arc_box@mail.ru)

Сысоев П.Н. — кандидат физико-математических наук, ассистент ФГБОУ ВО МГУ им. М.В. Ломоносова (e-mail: arc_box@mail.ru)

Тарелкин Александр Алексеевич — аспирант кафедры квантовой статистики

и теории поля физического факультета ФГБОУ ВО Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (e-mail: tarelkin.aleksandr@physics.msu.ru)

Чистяков Виктор Владимирович — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Университета ИТМО; доцент кафедры математики, естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин Михайловской военной артиллерийской академии, г. Санкт-Петербург (e-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru, v.chistyakov@yarcx.ru, тел.: +7 (981) 8157495)

Юдин Иван Павлович — кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории физики высоких энергий Объединенного института ядерных исследований (e-mail: yudin@jinr.ru)

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе \LaTeX (используется версия $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS, \TeX ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе \BibTeX и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям:

оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Количество комплектов:

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	литер

на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Стоимость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)