



ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА

Том 25 № 2 (2017)

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2

Научный журнал

Издается с 1993 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ No ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Главный редактор

Рыбаков Юрий Петрович — Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор РУДН, Россия, rybakov_ur@rudn.university

Заместитель главного редактора

Севастьянов Леонид Антонович — доктор физико-математических наук, профессор РУДН, Россия, sevastianov_la@rudn.university

Члены редколлегии

Ильгисонис Виктор Игоревич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

Самуйлов Константин Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Скубачевский Александр Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

Гупта Субхашит Датта (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

Мартикайнен Олли Эркки (Финляндия) — Ph.D., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

Медведев М. В. (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо (Испания) — профессор Барселонского университета

Саха Биджан (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Чулуунбаатар Очбадрах (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Редактор: *К. В. Зенкин*

Компьютерная вёрстка: *А. В. Королькова*

Адрес редакции:

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Адрес редакционной коллегии

серии «Математика. Информатика. Физика»:

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419

тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

Подписано в печать 3.02.2017. Выход в свет 7.02.2017. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 12,61 Тираж 500 экз. Заказ № 44. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,

тел. (495) 952-04-41, e-mail: ipk@rudn.university

ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ
СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский, французский, немецкий, испанский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

Цель и тематика

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски Журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) elibrary.ru.

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru



**RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES
AND PHYSICS**

Volume 25 Number 2 (2017)
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2
Founded in 1993
Founder: RUDN University

Editor-in-Chief

Rybakov Yu. P. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia
RUDN University, Russia,
rybakov_yp@rudn.university

Vice Editor-in-Chief

Sevastianov L. A. — DSc in Physics and Mathematics, professor
RUDN University, Russia,
sevastianov_la@rudn.university

Members of the editorial board

Il'gisonis V. I. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center “Kurchatov Institute”

Samouylov K. E. — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

Skubachevski A. L. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

Gupta Subhasish Dutta (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

Martikainen Olli Erkki (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

Medvedev M. V. (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

Ramirez Inostrozo Orlando Raphael (Spain) – DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

Saha Bijan (Bangladesh) – DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Chuluunbaatar Ochbadrah (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Editor: *K. V. Zenkin*

Computer design: *A. V. Korolkova*

Address of editorial board:

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Address of editorial board

“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “RUDN University”

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES AND PHYSICS

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year

Languages: Russian, English, French, German, Spanish

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>

Aim and Scope

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Малых М. Д. О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 1. Отыскание алгебраических интегралов 103
- Малых М. Д. О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 2. Интегрирование в квадратурах 113

Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

- Гайдамака Ю. В., Медведева Е. Г., Салпагаров С. И., Бобрикова Е. В. Анализ модели многоканальной одноранговой сети вещательного телевидения для схемы с разделением видеопотока 123
- Самуйлов К. Е., Бужин И. Г., Миронов Ю. Б. Построение и анализ модели входного коммутатора в сети с оптической коммутацией 133

Математическое моделирование

- Бикеев О. Н., Севастьянов Л. А. Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред 141
- Майсё А. Элементы эконоуправления. Часть 2 149

Теоретическая механика

- Азимов Д. М., Мухарлямов Р. Г. Общий интеграл для одного класса нестационарных атмосферных летательных аппаратов и приложения для анализа траекторий 161
- Мухаметзянов И. А., Чекмарёва О. И. Управление процессом безударного захвата непредсказуемо движущегося объекта мобильным манипуляционным роботом 170

Физика

- Нирикшан Редди К., Вену Гопал Эчанта, Гупта С. Д. Усиление и оптическая бистабильность при фазовом сопряжении, обусловленные идеальным когерентным поглощением света 182
- Янишевский Д. М. Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением 192
- Сведения об авторах 199
- Правила оформления статей 200

CONTENTS

Mathematics

- Malykh M. D.** On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 1 103
Malykh M. D. On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 2 113

Mathematical Theory of Teletraffic and Telecommunication Networks

- Gaidamaka Yu. V., Medvedeva E. G., Salpagarov S. I., Bobrikova E. V.** Analysis of Model for Multichannel Peer-to-Peer TV Network with View-Upload Decoupling Scheme 123
Samuylov K.E., Buzhin I. G., Mironov Y. B. The Construction and Analysis of Models of the Input Switch in a Network with Optical Switching 133

Mathematical Modeling

- Bikeev O. N., Sevastianov L. A.** Surface Electromagnetic Waves at the Interface of Two Anisotropic Media 141
Maïsseu A. Elements of Gestalteconomy. Part 2 149

Theoretical Mechanics

- Azimov D. M., Mukharlyamov R. G.** General Integral for a Class of Non-Steady Atmospheric Flights and Applications to Trajectory Analysis 161
Mukhametzyanov I. A., Chekmaryova O. I. Control over the Process of Unstressed Capture of Unpredictably Moving Target by the Robotic Arm 170

Physics

- Nireekshan Reddy K., Venu Gopal Achanta, Gupta S. D.** Coherent Perfect Absorption Mediated Enhancement and Optical Bistability in Phase Conjugation . 182
Yanishevskiy D. M. Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Anisotropic Fluid, Scalar Field and Radiation 192
Information about the authors 199
Guidelines for Authors 200

Математика

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112

О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка. Часть 1. Отыскание алгебраических интегралов

М. Д. Малых^{*†}

^{*} *Факультет наук о материалах*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991*

[†] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Метод М.Н. Лагутинского (1871–1915) позволяет искать рациональные интегралы и многочлены Дарбу заданного дифференциального кольца и поэтому может быть использован при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде. В настоящей статье представлена реализация метода Лагутинского, выполненная в свободной системе компьютерной алгебры Sage, и дан обзор её возможностей по интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде.

В первой части статьи кратко изложены основные понятия метода Лагутинского для полиномиальных колец, затем этот метод приложен к отысканию алгебраических интегральных кривых дифференциальных уравнений вида $pdx + qdy$, где $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. Показано, как метод Лагутинского позволяет искать кривые заданного порядка или убеждаться в несуществовании таковых. Особо рассмотрены вопросы об ускорении вычислений и отыскании интегралов среди малочленов. Теория и её реализация протестированы на примерах из задачника А.Ф. Филиппова. В заключении даны рекомендации по оптимальному использованию метода Лагутинского.

Ключевые слова: метод Лагутинского, интегральные алгебраические кривые, sage, sagemath

Введение

В 1911 г. М.Н. Лагутинский [2, 3] предложил способ отыскания частных и общих интегралов дифференцирований колец, основанный на вычислении определителей. Современное изложение этого метода для случая полиномиальных колец дано в [4, 5], более общий случай рассмотрен в [6]. Этот метод подразумевает выполнение значительного числа рутинных вычислений, в целях ускорения которых был написан небольшой пакет Lagutinski [7] под Sage [1], который был представлен в 2016 году на ряде конференций по компьютерной алгебре [8–10]. В настоящей работе дан отчёт об использовании метода Лагутинского для интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде и тестировании названного в его честь пакета этого пакета на уравнениях, взятых из задачника А.Ф. Филиппова [11].

Статья поступила в редакцию 18 декабря 2016 г.

Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.а03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00556.

Автор признателен проф. Л.А. Севастьянову (РУДН), взявшему на себя труд прочитать статью в рукописи, и сделавшему ряд важных замечаний. Приведённые в статье рисунки и вычисления были выполнены при помощи Sage Mathematics Software [1].

1. Определители Лагутинского в полиномиальных кольцах

1.1. Определители Лагутинского

Пусть R — полиномиальное кольцо с дифференцированием D и полем констант \mathbb{Q} . Сетное упорядоченное множество B элементов m_j кольца R будем называть базисом кольца, если

- 1) любой элемент кольца R можно представить как линейную комбинацию конечного числа элементов множества B с постоянными коэффициентами;
- 2) произведение любых двух элементов множества B принадлежит B , и следует строго после обоих сомножителей, т.е. $m_i m_j = m_n$ и n строго больше чисел i и j .

В дальнейшем по умолчанию используется базис, образованный мономы в градуированном лексикографическом упорядочении (glex-упорядочении). Условимся говорить, что порядок многочлена f равен наибольшему из номеров базисных элементов, входящих в разложение f по базису с ненулевыми коэффициентами. Порядком дроби f/g будем называть максимум из порядков числителя и знаменателя.

С тройкой R, D, B свяжем последовательность определителей Лагутинского. С этой целью вообразим бесконечную матрицу, первой строкой которой служит m_1, m_2, \dots , второй строкой — производная первой Dm_1, Dm_2, \dots , третьей — вторая производная первой D^2m_1, D^2m_2, \dots , и так до бесконечности. Угловой минор n -го порядка этой матрицы будем обозначать как Δ_n и называть определителем Лагутинского n -го порядка.

Замечание 1. Эти определители относительно стандартного glex-базиса были впервые введены М.Н. Лагутинским (1871–1915) [2, 3], ему же в существенном принадлежит изложенный ниже метод отыскания интегралов дифференцирования кольца, о нем см. [12].

1.2. Вычисление определителей Лагутинского

Вычисление этих определителей реализовано в Sage в виде функции `lagutinski_det(R,D,B,N)`.

Пример 1. Вычисление определителя Лагутинского 2-го порядка в кольце $R = \mathbb{Q}[x, y]$ с дифференцированием

$$D = y(x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2) \frac{\partial}{\partial y}$$

в стандартном glex-базисе в Sage можно выполнить так:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: load("lagutinski.sage")
None
sage: lagutinski_det(R,D,B,2)
y^2 + x + 2
```

Ресурсы, потребные для вычисления определителей Лагутинского, существенно зависят от порядка определителя. Например, в кольце $\mathbb{Q}[x, y]$ на современном компьютере уверенно и незаметно для пользователя вычисляют определители 10 порядка, возможность же вычисления определителя 20 порядка существенно зависит от дифференцирования. Оценки сложности получены в [5].

Обычно коэффициенты этих определителей являются очень большими по абсолютному значению целыми числами, поэтому можно было бы надеяться, что переход к полю $\mathbb{Z}/(p)$ позволит существенно ускорить вычисление. Пакет Lagutinski

поддерживает работу с любыми полями, с которыми может работать система. Однако вычислительные эксперименты учат, что при больших порядках переход от \mathbb{Q} к $\mathbb{Z}/(p)$ не приводит к существенному приросту производительности.

С другой стороны, вычисление определителя Лагутинского в фиксированной точке с целыми координатами, занимает заметно меньше ресурсов при условии, что подстановка координат точек предшествует вычислению определителя.

1.3. Рациональные интегралы дифференцирования кольца

Определение 1. Общим или рациональным интегралом f дифференцирования D называют элемент поля частных исходного кольца R , производная которого Df равна нулю.

Задача 1 (об отыскании рационального интеграла). Для заданной тройки R, D, B выяснить, допускает отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N ; в случае утвердительного ответа вычислить интеграл.

Решение даётся следующей теоремой.

Теорема 1 (М.Н. Лагутинский, 1911). *Рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N , существует тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.*

Функция `lagutinski_integral(R,D,B,N)` возвращает искомый интеграл, если $\Delta_N = 0$ и $\Delta_{N-1} \neq 0$.

Пример 2. Дифференцирование

$$D = y(x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2) \frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет интегралов, числитель и знаменатель которых зависят от x и y линейно ($N = 3$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,3)==0
False
```

но имеет таковой, среди функций, числитель и знаменатель которых зависят от x и y квадратично ($N = 6$), поскольку

```
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Интегралом будет

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
(-54*x^2 + 18*y^2 - 72*x)/(-18*y^2 - 36*x - 54)
```

Как отмечалось выше в 1.2, при больших порядках N вычисление определителя Лагутинского как многочлена является заметно более ресурсоёмким по сравнению с вычислением его значения в одной точке с целыми коэффициентами. В пакет `Lagutinski` встроена функция `lagutinski_det_random`, которая вычисляет значение Δ_N при случайных целых значениях переменных x, y, \dots , порождавших рассматриваемое кольцо R , взятых в окне $|x| \leq 100, |y| \leq 100, \dots$; за каждое применение координаты случайной точки генерируются заново. Если эта функция возвращает число, отличное от нуля, то дифференцирование не допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N . Если получился нуль, то весьма вероятно, что дифференцирование таковой допускает и поэтому следует потратить ресурсы на вычисление определителя как многочлена.

Пример 3. Дифференцирование

$$D = (x + 4y) \frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y^2) \frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ не имеет рациональных интегралов, порядок которых меньше 50:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y^2)*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,50)==0
False
```

Пример 4. Дифференцирование

$$D = (x + 4y) \frac{\partial}{\partial x} + (2x + 3y - 5) \frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ вероятно имеет рациональный интеграл порядка 28:

```
sage: D=lambda phi: (x+4*y)*diff(phi,x) +(2*x+3*y-5)*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,27)==0
False
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,28)==0
True
```

2. Рациональные интегралы дифференциального уравнения

2.1. Задача Дебона

Задача 2 (задача Дебона). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0, p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \quad (1)$$

интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, порядок которого не превосходит заданного числа N , и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

Замечание 2. Задача об интегрировании дифференциальных уравнений в алгебраических функциях возникла ещё в 1630-х годах, когда Дебон (Florimond de Beaune) предложил Декарту несколько «обратных задач на касательные» [13, С. 192]. В начале прошлого века эту задачу связывали с именем Пуанкаре.

Замечание 3. То, что интеграл ищется именно в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, а не в более широком $\mathbb{C}(x, y)$, несколько не сужает задачу, поскольку интеграл из $\mathbb{C}(x, y)$ уравнения (1) с точностью до мультипликативной константы всегда имеет целые коэффициенты.

Задачу Дебона можно сформулировать и применительно к интегральным кривым.

Задача 3 (задача Дебона). Выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения (1) алгебраическими кривыми, порядок которых не превосходит заданного числа n , и в случае утвердительного ответа выписать уравнение пучка этих кривых.

Порядок N в определении 3 понимается в том же смысле, что и в разделе 1.1, поэтому

$$N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

В теории по методу неопределённых коэффициентов можно подставить в уравнение $Dr = 0$ выражение

$$u = \frac{a + \dots + by^n}{1 + \dots + cy^n}$$

и получить систему нелинейных алгебраических уравнений для отыскания коэффициентов a, b, c, \dots . Выяснить разрешимость этой системы можно за конечное число действий и чисто алгебраическим путём. На практике описанное решение системы нелинейных алгебраических уравнений потребует заметных вычислительных мощностей, поэтому создатели алгоритмов решения этой задачи стремятся обойти решение нелинейных систем. Среди реализованных алгоритмов следует отметить метод определителей Лагутинского и метод Ж.-А. Вейля, 1985 [14].

2.2. Решение задачи по методу Лагутинского

Задача Дебона состоит в отыскании рационального интеграла u дифференцирования

$$D = p \frac{\partial}{\partial y} - q \frac{\partial}{\partial x},$$

порядки числителя и знаменателя которого не превосходят заданного числа N .

Теорема 2. *Дифференциальное уравнение (1) допускает рациональный интеграл, порядок которого не превосходит N , тогда и только тогда, когда $\Delta_N = 0$, при этом интеграл можно вычислить как отношение миноров этого интеграла.*

Например, дифференциальное уравнение (1) допускает семейство интегральных кривых 2-го порядка в том и только в том случае, когда $\Delta_6 = 0$, 3-го порядка — когда $\Delta_{10} = 0$ и т.д.

Пример 5. Чтобы выяснить, являются ли интегральные кривые уравнения

$$xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$$

предложенного в [11] за № 169, кривыми второго порядка, следует вычислить Δ_6 .

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,5)==0
False
sage: lagutinski_det(R,D,B,6)==0
True
```

Зная, что $\Delta_6 = 0$, а $\Delta_5 \neq 0$, можно вычислить интеграл этого уравнения:

```
sage: lagutinski_integral(R,D,B,6)
(-288*x^2 + 288*x*y - 288*x)/(-288*x + 288*y)
```

Чтобы убедиться в том, что уравнение не допускает интегральных кривых порядка n , достаточно вычислить определитель Лагутинского порядка $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ в случайной точке, тем самым существенно сэкономив вычислительные ресурсы.

Пример 6. Интегральные кривые уравнения

$$(x - y^2)y' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2,$$

даже если они и являются алгебраическими, имеют порядок, большей 9:

```

sage: p=(2*x+1)*y-y^2-x^2
sage: q=-x+y^2
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False

```

Часто отыскать уравнения интегральных кривых больших порядков помогает теория интегрирующего множителя, которая будет рассмотрена во второй части настоящей статьи.

2.3. Задача, в которой порядок искомого интеграла не задан

В формулировке задачи 3 явно требуется задание границы N для порядка искомого многочлена должна быть задана. Однако в классической парадигме интегрирования дифференциальных уравнений большое значение уделяли выяснению вопроса о существовании алгебраического интеграла произвольной степени.

Задача 4 (задача Дебона). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл u в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

В теории оценки сверху для порядков интегралов заданного дифференцирования позволила бы свести эту задачу предыдущей. Однако с XVII века предпринимались многочисленные попытки нахождения оценок сверху для порядков интегралов заданного дифференциального уравнения, тем не менее эта проблема не решена и в то же время не доказана и её алгоритмическая неразрешимость. Оценки, полученные Пуанкаре в [15, С. 35–95], применимы лишь в некоторых частных случаях [2, С. 181]. Во всех современных реализациях алгоритмов отыскания рациональных интегралов дифференциальных уравнений 1-го порядка порядок интеграла полагают заданным [14].

2.4. Задача о малочленах

С практической точки зрения решение задачи 3 при больших N малоинтересно. Хорошо известно, что представление решения в виде алгебраического уравнения, содержащего несколько сотен слагаемых, обладает многими недостатками, в теории характерными только для решений в степенных рядах. Поэтому интересны не какие угодно рациональные интегралы, но представимые в компактном виде, то есть в виде отношения малого числа слагаемых (малочленов).

Задача 5 (о малочленах). Выяснить, допускает ли заданное дифференциальное уравнение (1) интеграл в поле $\mathbb{Q}(x, y)$, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией M мономов, порядки которых не превосходят заданного числа N , и в случае утвердительного ответа выписать этот интеграл.

При решении этой задачи по методу Лагутинского требуется вычислить много не связанных друг с другом определителей M -го порядка и выяснить, равен ли из них хоть один нулю или нет, эта процедура допускает естественное распараллеливание. Эта идея реализована в виде функции `lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M)`, которая возвращает интеграл, представимый в виде отношения малочленов, если таковой существует.

Пример 7. Выясним, допускает ли заданное дифференциальное уравнение

$$(3x^4 + 2y)xdy - (5x^4 + y)ydx = 0$$

интеграл, числитель и знаменатель которого является линейной комбинацией трёх мономов, а порядок интегральных кривых не превосходит $n = 5$. В этом случае порядок интеграла ограничен числом $N = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$.

```
sage: p=-(5*x^4 + y)*y
sage: q=(3*x^4 + 2*y)*x
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
Функция lagutinski_micronomial находит интеграл
sage: lagutinski_micronomial(R,D,B,21,3).factor()
y^-3 * x * (x^4 + y)
```

на современном компьютере примерно за 20 секунд.

2.5. Интегрирование тестовых задач

Чтобы оценить возможности применения метода Лагутинского, обратимся к наиболее очевидному и простому источнику несложных дифференциальных уравнений — университетскому курсу «Дифференциальных уравнений», а именно к задаче А. Ф. Филишова [11].

Вычисление Δ_{55} в случайной точке (x, y) позволяет сразу выделить уравнения, интегральные кривые которых вероятно имеют порядок, не превышающий 9. В учебном курсе, конечно, алгебраические кривые большого порядка не встречаются, поэтому таким путём мы выделяем все 21 уравнение, интегральные кривые которых являются алгебраическими. Для двух третей из них $\Delta_{10} = 0$ и поэтому они легко интегрируются по методу Лагутинского, см. пример 5. Из оставшихся 7 номеров большинство удаётся проинтегрировать, повысив N .

Пример 8. Интегрирование уравнения № 198

$$xy^2(xy' + y) = 1$$

требует увеличения N до 25.

```
sage: q=x^2*y^2
sage: p=x*y^3-1
sage: D=lambda phi: q*diff(phi,x) -p*diff(phi,y)
sage: lagutinski_det(R,D,B,25)
0
sage: lagutinski_integral(R,D,B,25)
-x^3*y^3 + 3/2*x^2
```

В данном случае определитель 25-го порядка считается на удивление быстро.

Путём увеличения N не удаётся проинтегрировать лишь два номера — №№ 116 и 187, вычисления застревают на $N = 15$. Первое из этих уравнений, рассмотренное выше в примере 4, имеет интеграл, представимый в виде произведения степеней двух линейных функций. Интеграл второго уравнения оказывается четырёхчленом, который за несколько минут находится при помощи функции `lagutinski_micronomial(R,D,B,N,M)`. Следует также заметить, что уравнение № 187 — уравнение в полных дифференциалах, поэтому указанный способ, конечно, является чрезвычайно неэкономным.

Заключение

Продоланный вычислительный эксперимент подсказывает след. процедуру отыскания алгебраических интегральных кривых заданного дифференциального уравнения вида (1).

1. Вычислить Δ_{55} в случайно выбранной точке. Если $\Delta_{55} \neq 0$, то интегральные кривые имеют 10-й порядок и более или вовсе являются трансцендентными. Если $\Delta_{55} = 0$, то интегральные кривые вероятно имеют порядок, не превышающий 9.

2. Если $\Delta_{55} = 0$, вычислить Δ_{10} как функцию x и y . Если Δ_{10} тождественно равен нулю, то интегральные кривые имеет порядок, не превышающий 3-х, и они находятся по методу Лагутинского без существенных затрат.
3. Если Δ_{10} не равно тождественно нулю, пытаться вычислить Δ_N , постепенно повышая N до тех пор, пока не получится нуль или исчерпаются ресурсы.
4. Если ресурсы исчерпались, следует попытаться найти интегралы среди малочленов.

Литература

1. *Stein W. A. et al.*, 2015. — Sage Mathematics Software (Version 6.7). — The Sage Development Team. — <http://www.sagemath.org>.
2. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1911. — Т. 12. — С. 111–243.
3. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1912. — Т. 13. — С. 200–224.
4. *Christopher C., Libre J., Vitorio Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific J. Math. — 2007. — Vol. 229, No 1. — P. 63–117.
5. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // Journal of Complexity. — 2011. — Vol. 27, No 2. — Pp. 246–262.
6. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М. Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 24. — С. 327–336.
7. *Malykh M. D.*, 2016. — Lagutinski.sage, ver. 1.5. — RUDN University. — <http://malykhmd.neocities.org>.
8. *Malykh M. D.* On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations // International Conference “Polynomial Computer Algebra’2016”. — 2016. — Pp. 57–58.
9. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений // Компьютерная алгебра. Материалы международной конференции. — 2016. — С. 25–29.
10. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка в конечном виде // Пятая международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование». Сборник докладов. — 2016. — С. 81–82.
11. *Филлипов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: R&C, 2000.
12. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-математические исследования. — 2001. — Т. 6. — С. 111–127.
13. *Декарт Р.* Геометрия с приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. — Москва-Ленинград: ГОНТИ НКТП СССР, 1938.
14. Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields / A. Bostan, G. Chéze, T. Cluzeau, J.-A. Weil // Math. Comp. — 2016. — Т. 85. — С. 1393–1425.
15. *Poincaré H.* Œuvres. — Paris: Gautier, 1934. — Vol. 3.

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-103-112

On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 1

M. D. Malykh*[†]

* Faculty of Materials Sciences

Lomonosov Moscow State University

GSP-1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

[†] Department of Applied Probability and Informatics

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The method of M. N. Lagutinski (1871–1915) allows to find rational integrals and Darboux polynomials for given differential ring and thus can be used for integration of ordinary differential equations in symbolic form. A realization of Lagutinski method was made under free open-source mathematics software system Sage and will be presented in this article with application for symbolic integration of 1st order differential equations.

In the first part of the article basic concepts of the Lagutinski method is briefly stated for polynomials rings. Then this method is applied to search of algebraic integrated curves for given ordinary differential equations of the form $pdx + qdy$ with $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. It is shown how the Lagutinski method allows to look for curves of the given order or to prove that there are not such curves. In particular questions about the optimization of computations and integration in micromonials are considered. The theory and its realization in Sage are tested on numerous examples from standard for Russia text-book by A.F. Filippov. Some recommendations for optimization of the Lagutinski method usage are made in the conclusion of the article.

Key words and phrases: Lagutinski method, algebraic integral curves, sage, sagemath

References

1. W. A. Stein, et al., Sage Mathematics Software (Version 6.7), The Sage Development Team (2015).
URL <http://www.sagemath.org>
2. M. N. Lagutinski, The Application of Polar Operations to Integration of the Ordinary Differential Equations in Finite Terms, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 12 (1911) 111–243, in Russian.
3. M. N. Lagutinski, On Some Polynoms and Their Aplication for Algebraic Integration of Ordinary Differential Algebraic Equations, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 13 (1912) 200–224, in Russian.
4. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitória Pereira, Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields, Pacific J. Math. 229 (1) (2007) 63–117.
5. G. Chéze, Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time, Journal of Complexity 27 (2) (2011) 246–262.
6. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinsky's Method for Computation of Rational Integrals of Ordinary Differential Equations Systems, Vestnik of NRNU MEPhi 5 (24) (2016) 327–336, in Russian.
7. M. D. Malykh, Lagutinski.sage, ver. 1.5., RUDN University (2016).
URL <http://malykhmd.neocities.org>
8. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations, in: International Conference “Polynomial Computer Algebra'2016”, 2016, pp. 57–58, in Russian.
9. M. D. Malykh, On Integration of Ordinary Differential Equations, in: Computer algebra. Materials of international conference, 2016, pp. 25–29, in Russian.
10. M. D. Malykh, On Integration of 1st Order Differential Equations in a Finite Terms, 2016, pp. 81–82, in Russian.
11. A. F. Filippov, Text-Book on Differential Equations, R&C, Izhevsk, 2000, in Russian.

12. V. A. Dobrovol'skij, J.-M. Strelcyn, N. V. Lokot', Mihail Nikolaevich Lagutinskij (1871–1915), *Istoriko-matematicheskie issledovanija* 6 (2001) 111–127, in Russian.
13. R. Descartes, *Geometry with the Appendix of Selected Works of P. Fermat and Descartes' Correspondence*, GONTI NKTP SSSR, Moscow-Leningrad, 1938, in Russian.
14. A. Bostan, G. Chéze, T. Cluzeau, J.-A. Weil, Efficient Algorithms for Computing Rational First Integrals and Darboux Polynomials of Planar Polynomial Vector Fields, *Math. Comp.* 85 (2016) 1393–1425.
15. H. Poincaré, *Œuvres*, Vol. 3, Gautier, Paris, 1934.

© Малых М. Д., 2017

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-113-122

О применении метода М.Н. Лагутинского к интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Часть 2. Интегрирование в квадратурах

М. Д. Малых^{*†}

^{*} *Факультет наук о материалах*

*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Ленинские Горы, Корпус «Б», Москва, Россия, 119991*

[†] *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Метод М.Н. Лагутинского (1871–1915) позволяет искать рациональные интегралы и многочлены Дарбу заданного дифференциального кольца и поэтому может быть использован при интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений в символьном виде. В настоящей статье представлена реализация метода Лагутинского, выполненная в свободной системе компьютерной алгебры Sage, и дан обзор её возможностей по интегрированию дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде.

Вторая часть статьи посвящена интегрированию в квадратурах заданного дифференциального уравнения вида $pdx + qdy$, где $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$. Теорема М. Зингера сводит задачу об интегрировании дифференциального уравнения в квадратурах к отысканию интегрирующего множителя вида $\mu = \exp(\int udx + vdy)$, где $u, v \in \mathbb{Q}[x, y]$, отыскание функции v можно свести к отысканию многочлена Дарбу для вспомогательного дифференцирования кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$. Метод Лагутинского позволяет для заданного дифференцирования найти все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит некоторой заданной величины N и поэтому позволяет находить интегрирующие множители, в показателях которых стоят рациональные функции, порядок которых не превосходит N . Этот приём протестирован на примерах из задачника А.Ф. Филиппова.

Ключевые слова: метод Лагутинского, интегрирование в квадратурах, sage, sagemath

Введение

В первой части настоящей статьи был дан обзор основных понятий метода М.Н. Лагутинского [2–10] и представлен пакет Lagutinski [11] под Sage [1]. Во второй части дан отчёт об использовании метода Лагутинского для интегрирования дифференциальных уравнений 1-го порядка в символьном виде и тестировании названного пакета этого пакета на уравнениях, взятых из задачника А. Ф. Филиппова [12].

1. Многочлены Дарбу

Определение 1. Многочленом Дарбу, или частным интегралом дифференцирования D , называют такой многочлен f , производная которого Df делится на f нацело.

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2016 г.

Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.а03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-00556.

Автор признателен проф. Л.А. Севастьянову (РУДН), взявшему на себя труд прочитать статью в рукописи и сделавшему ряд важных замечаний. Приведённые в статье рисунки и вычисления были выполнены при помощи Sage Mathematics Software [1].

Если многочлен Дарбу разлагается на множители, то его сомножители тоже являются многочленами Дарбу [13].

Задача 1 (об отыскании многочлена Дарбу). Для заданной тройки R, D, B отыскать все многочлены Дарбу, порядок которых не превосходит заданного числа N

Теорема 1 (М. Н. Лагутинского, 1911). *Если порядок многочлена Дарбу не превосходит N , то определитель Δ_N или равен нулю или делится на этот многочлен Дарбу нацело.*

Если Δ_N равен нулю тождественно, то в силу теоремы Лагутинского дифференцирование допускает рациональный интеграл, а следовательно, и бесконечное число многочленов Дарбу.

При небольших порядках можно прямо вычислить определитель и разложить его на множители.

Пример 1. Все линейные относительно x и y многочлены Дарбу дифференцирования

$$D = y(x+1) \frac{\partial}{\partial x} + (y^2 + x + 2) \frac{\partial}{\partial y}$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$ являются линейными множителями определителя Δ_3 .

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ, 2)
sage: D=lambda phi: y*(x+1)*diff(phi,x)+(y^2+x+2)*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: load("lagutinski.sage")
None
sage: lagutinski_det(R,D,B,3).factor()
(x + 1) * (x^2 + y^2 + 4*x + 4)
```

Поэтому имеется лишь единственный кандидат на эту роль — многочлен $x + 1$. Непосредственной подстановкой можно проверить, что в данном случае получился многочлен Дарбу:

```
sage: D(x+1).factor()
y * (x + 1)
```

При больших N и операция вычисления определителя, и факторизация являются затратными. При необходимости факторизацию многочленов большого порядка можно сократить, приняв во внимание следующее наблюдение: если уравнение (1) имеет многочлен Дарбу f , порядок которого не превосходит N , то все многочлены $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \dots$ делятся на f нацело. Поэтому можно сначала вычислить наибольший общий делитель Δ_N, Δ_{N+1} , а затем среди его простых сомножителей отыскать многочлены Дарбу.

Пример 2. Отыщем все многочлены Дарбу до 4-го порядка относительно x, y дифференцирования

$$D = 3(x^2 - 4) \frac{\partial}{\partial x} + (3 + xy - y^2) \frac{\partial}{\partial y},$$

кольца $R = \mathbb{Q}[x, y]$.

```
sage: D=lambda phi: 3*(x^2-4)*diff(phi,x) + (3+x*y-y^2)*diff(phi,y)
sage: gcd(lagutinski_det(R,D,B,5*3), lagutinski_det(R,D,B,5*3+1)).factor()
(x - 2)^22 * (x + 2)^22 * (y^4 - 4*x*y - 6*y^2 - 3) *
(2*x*y^3 + y^4 + x^2 + 2*x*y + 6*y^2 - 3)
```

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что каждый из четырёх получившихся сомножителя, является многочленом Дарбу, см. [13, 14].

2. Интегрирование в квадратурах

2.1. Интегрируемость в квадратурах

Символьное интегрирование остаётся в рамках классической парадигмы интегрирования в квадратурах, восходящей ещё к Лейбницу и до сих пор доминирующей в элементарных курсах дифференциальных уравнений. Формализация этой парадигмы, восходящая к работам Лиувилля [15] и Д. Д. Мордухай-Болтовского [16–18], нуждалась во введении понятия элементарных функций, список которых обычно считают предметом договора [19]. Избавить теорию от упоминания упоминания об элементарных функциях можно при помощи Р-интегралов Вольтерра.

Определение 2. Если дифференциальная 1-форма

$$udx + vdy$$

является точной, то выражения

$$\lim \sum (u_n \Delta x + v_n \Delta y) = \int udx + vdy$$

и

$$\lim \prod (1 + u_n \Delta x + v_n \Delta y) = e^{\int udx + vdy}$$

являются функциями переменных x, y , которые обозначаются далее как

$$S(udx + vdy) \quad \text{и} \quad P(1 + udx + vdy)$$

соответственно.

Р-интеграл является столь же естественным обобщением произведения, как обычный S-интеграл — обобщением сложения, экспонента — трансцендентная функция, связывающая эти два интеграла.

Определение 3. Будем говорить, что зависимость z от переменных x, y можно выразить при помощи квадратур, если z можно представить как алгебраическую функцию переменных x, y и вспомогательных функций $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ переменных x, y , каждая из которых выражается при помощи квадратуры из предыдущих:

$$\alpha_i = S(f_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})dx + g_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})dy)$$

или

$$\alpha_i = P(1 + f_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})dx + g_i(x, \alpha_1, \dots, \alpha_{i-1})dy),$$

где f_i, g_i — алгебраические функции своих аргументов.

Пример 3. Функция x^y представима при помощи квадратур, поскольку

$$x^y = \exp(y \ln x) = \exp \int \left(\frac{ydx}{x} + \ln x dy \right) = P \left[1 + \frac{ydx}{x} + S \left(\frac{dx}{x} \right) \cdot dy \right].$$

Определение 4. Будем говорить, что дифференциальное уравнение

$$pdx + qdy = 0, \quad p, q \in \mathbb{Q}[x, y], \quad (1)$$

интегрируется при помощи n квадратур, если оно имеет однопараметрическое семейство интегральных кривых, заданных уравнением

$$F(\alpha_n, \alpha_{n-1}, \dots, x, y, C) = 0,$$

левая часть которого является алгебраической функцией x, y и квадратур $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.

Задача 2 (об интегрировании в квадратурах). Выяснить, интегрируется ли заданное уравнение (1) в квадратурах; в случае утвердительного ответа выписать эти квадратуры.

Теорема 2. Если дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи конечного числа квадратур, то оно допускает интегрирующий множитель среди P -интегралов вида

$$\mu = P(1 + udx + vdy) = e^{\int udx + vdy}, \quad (2)$$

где $u dx + v dy$ — точная дифференциальная форма, коэффициенты u и v принадлежат полю $\mathbb{Q}(x, y)$.

Эта теорема может быть доказана элементарными средствами времён Лиувилля и представляет собой вариацию на тему теоремы об интегрирующем множителе, доказанной М. Зингером [20]; сама возможность элементарного доказательства теоремы Зингера была отмечена в [21].

Теорема 3. Дифференциальное уравнение (1) интегрируется при помощи конечного числа квадратур, в том и только в том случае, когда дифференцирование

$$D_v = q^2 \frac{\partial}{\partial x} - pq \frac{\partial}{\partial y} + \left(vq^2 \frac{\partial p}{\partial y} + q^2 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{q} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v} \quad (3)$$

кольца $\mathbb{Q}[x, y, v]$ допускает многочлен Дарбу F , линейный относительно v . Зная один такой многочлен, можно найти u и v из СЛАУ

$$\begin{cases} pv - qu + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ F(x, y, v) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

и вычислить интегрирующий множитель по формуле (2).

Теорема 3 сводит исследование интегрируемости дифференциального уравнения в квадратурах к задаче об отыскании многочленов Дарбу.

Задача 3 (об отыскании многочлена Дарбу). Для заданной тройки R, D, V отыскать все неприводимые многочлены Дарбу.

Эта задача, однако, отличается от решённой выше задачи 1 тем, что в ней не задана граница для порядка. В настоящее время не известны алгоритмы решения этой задачи даже для случая $R = \mathbb{Q}[x, y]$ [13].

Метод Лагутинского позволяет легко отыскивать все многочлены Дарбу, являющиеся линейными комбинациями первых N из набора V мономов

$$1, x, y, v, xv, yv, \dots,$$

линейных по v . Функция `lagutinski_uv(R, p, q, N)` из пакета `Lagutinski` отыскивает все такие многочлены и, если такие многочлены нашлись при заданном N , возвращает u и v .

Пример 4. Рассмотрим уравнение Бернулли

$$\frac{dy}{dx} = y + \frac{x}{y}$$

или

$$(x + y^2)dx - ydy = 0.$$

Имеем
 sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
 sage: lagutinski_uv(R,(x+y^2),-y,2)
 [[-2, 0]]
 Отсюда

$$\mu = \exp \int -2dx = e^{-2x};$$

и ответ даётся квадратурой

$$\int e^{-2x} [(x + y^2)dx - ydy] = C.$$

2.2. Интегрирование тестовых задач

Задавшись на удачу числом N , попытаемся проинтегрировать уравнения № 301-331 из задачника А.Ф. Филиппова. Среди этих уравнений 20 имеют вид (1), 18 из 20 уравнений интегрируются при $N = 4 \div 5$.

Замечание 1. Все упомянутые задачи интегрируются в элементарных функциях и поэтому в теории должны просто решаться по алгоритму Преля–Зингера [13]. Этот алгоритм и некоторые его обобщения реализованы в пакете Lsolver [22, 23] под Maple, обсуждение его возможностей выходит за рамки настоящей статьи.

Пример 5. Уравнение № 308 интегрируется при $N = 5$

$$x^2 y' = y(x + y).$$

sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
 sage: lagutinski_uv(R,-y*(x+y),x^2,5)
 [[(-1)/x, (-2)/y]]

$$\mu = \exp - \int \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} = e^{-\ln(xy^2)} = \frac{1}{xy^2}$$

и ответ даётся квадратурой

$$\int \frac{-y(x + y)dx + x^2 dy}{xy^2} = C,$$

которая в данном случае берётся в элементарных функциях.

Оба оставшихся номера интегрируются при большем N и приметны тем, что определители Лагутинского 13-го порядка для них обращаются в ноль, поэтому имеется бесконечно много многочленов Дарбу, а следовательно и вариантов для v .

Пример 6. Уравнение № 327

$$\frac{y - xy'}{x + yy'} = 2.$$

В этом примере определители считаются очень быстро и ответ получается при $N = 12$.

sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
 sage: lagutinski_uv(R,2*x-y,2*y+x,12)
 [[(-y)/(x^2 + y^2), x/(x^2 + y^2)], [(2*x - 3*y)/(2*x^2 + 2*y^2),
 (3*x + 2*y)/(2*x^2 + 2*y^2)]]

2.3. Практическое определение порядка

Проделанный вычислительный эксперимент подсказывает, что для интегрирования заданного дифференциального уравнения как правило достаточно взять очень небольшое $N = 4 \div 5$. Если заранее не известно, что уравнение интегрируется в квадратурах, то возникает вопрос о том, стоит ли тратить ресурсы на повышение N . Для задачи Дебона был указан быстрый практический способ подбора N — вычисление определителя Лагутинского Δ_N в случайной точке. Та же идея может быть использована и при подборе N при отыскании линейных по v многочленов Дарбу.

Численные эксперименты указывают на то, что в общем случае последовательность определителей Лагутинского $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \dots$ не имеет общего делителя, зависящего от v . В особом же случае, когда имеется многочлен Дарбу N -го порядка, все эти определители делятся на него нацело в силу теоремы 1. Если взять две случайные точки (x_0, y_0, v_0) и (x_0, y_0, v_1) и вычислить значения $\Delta_N, \Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}$ в этих двух точках, то разложения на множители

$$\gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_0), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_0), \dots), \quad \gcd(\Delta_N(x_0, y_0, v_1), \Delta_{N+1}(x_0, y_0, v_1), \dots)$$

в общем случае совпадают, в особом же случае появятся различные множители. Функция `lagutinski_uv_random(R, p, q, N)` возвращает разложение такой пары чисел. Трудность идентификации особого случая состоит в том, что степени чисел 2, 3 и 5, которые появляются при факторизации, могут меняться и в общем случае.

Пример 7. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(x + 1)ydx - (x - xy - y^2 + x^2)dy = 0,$$

которое имеет интегрирующий множитель

$$\mu = \frac{e^{x/y}}{(x + y)^2} = e^{\frac{x}{y} - 2 \ln(x+y)} = e^{\int \frac{ydx - xdy}{y^2} - 2 \int \frac{dx+dy}{x+y}},$$

найденный в [22] из тех соображений, что $x + y$ — многочлен Дарбу. Для нашего подхода уравнение очень трудное, поскольку v является многочленом, содержащим третьей степени x и y , то есть $N \simeq 20$. При $N = 13$ первое испытание даёт

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 13)
[2^270 * 3^5 * 5^77 * 11^20 * 139^13 * 479^72, 2^271 * 3^5 * 5^77 *
11^19 * 139^13 * 479^72]
```

Хорошо видно, что оба числа являются произведениями одних и тех же простых чисел, в данном случае 2, 3, 5, 11, 139 и 479. Второе испытание при том же N даёт

```
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 13)
[2^251 * 3^452 * 5^3 * 7^72 * 41^19, 2^256 * 3^452 * 5^3 * 7^72 * 41^19]
```

Опять оба числа являются произведениями одних и тех же простых чисел. То же явление наблюдается вплоть до $N = 17$:

```
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 17)
[2^237 * 3^51 * 5^292 * 7^163 * 31^129, 2^237 * 3^49 * 5^292 * 7^163 *
11 * 31^129]
```

```
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 17)
[2^424 * 3^17 * 5^260 * 11^129 * 23^21 * 31^129, 2^424 * 3^30 *
5^260 * 11^129 * 23^21 * 31^129]
```

Ситуация меняется при $N = 18$:

```
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 18)
[2^556 * 3^270 * 5 * 7^76 * 109^146 * 39023, 2^540 * 3^270 * 7^76 *
109^146 * 331 * 8821]
```

Эти числа не являются произведениями одних и тех же простых чисел, первое имеет множитель 39023, а второе — $331 \cdot 8821$. Повторное испытание приводит к другим числам, но сохраняет само явление:

```
sage: lagutinski_uv_random(R, (x + 1)*y, - (x - x*y - y^2 + x^2), 18)
[2^403 * 3^14 * 43^23 * 47^38 * 5003^145 * 195359, 2^407 * 3^12 *
43^23 * 47^38 * 5003^145 * 35863]
```

Поэтому вероятно Δ_{17} и Δ_{18} имеют общий множитель, зависящий от v . Это означает, что многочлен Дарбу имеет смысл искать при $N = 18$.

Было бы крайне желательно выяснить геометрический смысл числа N и заметить задачу 2 на задачу с заданным N .

2.4. Применение теории интегрирующего множителя к решению задачи Дебона

В тех случаях, когда решение задачи Дебона требует вычисления определителей слишком большого порядка, вычисление интегрирующего множителя часто не представляет никакого труда.

Пример 8. Рассмотрим уравнение

$$(5x^4 + y)ydx + (3x^4 + 2y)xdy = 0.$$

Выясним, допускает ли это уравнение интегральные кривые порядка 9 или меньше:

```
sage: R.<x,y> = PolynomialRing(QQ,2)
sage: D=lambda phi: (3*x^4+2*y)*x*diff(phi,x) -(5*x^4+y)*y*diff(phi,y)
sage: B= sorted(((1+x+y)^30).monomials(),reverse=0)
sage: lagutinski_det_random(R,D,B,55)==0
False
```

Раз определитель не равен нулю тождественно, то такие интегральные кривые не допускаются. Попробуем выяснить, интегрируется ли это уравнение в квадратурах:

```
sage: R.<x,y,v> = PolynomialRing(QQ,3)
sage: lagutinski_uv(R, (5*x^4+y)*y, (3*x^4+2*y)*x, 6)
[[10/7/x, 20/(7*y)]]
```

Отсюда

$$\ln \mu = \frac{10}{7} \int \frac{dx}{x} + \frac{2dy}{y} = \frac{10}{7} \ln(xy^2)$$

и поэтому

$$\mu = x^{10/7} y^{20/7}.$$

Следовательно, уравнение интегральных кривых даётся квадратурой

$$\int (5x^4 + y)x^{10/7}y^{20/7+1}dx + (3x^4 + 2y)x^{10/7+1}y^{20/7}dy = C.$$

Эта квадратура берётся в радикалах. Теоретически рационализация должна привести к рациональному интегралу, однако выполнить её на практике весьма непросто.

Заключение

Метод Лагутинского и основанные на нем алгоритмы дают возможность решать многие типы дифференциальных уравнений в алгебраических функциях и в квадратурах. Среди этих алгоритмов встречаются и вычислительно лёгкие, и вычислительно трудные. К числу лёгких, например, относится алгоритм, который позволяет

выяснить, являются ли интегральные кривые заданного дифференциального уравнения алгебраическими кривыми заданного порядка. Все эти алгоритмы можно с успехом применять в системах символьных вычислений.

Литература

1. *Stein W. A. et al.*, 2015. — Sage Mathematics Software (Version 6.7). — The Sage Development Team. — <http://www.sagemath.org>.
2. *Лагутинский М. Н.* Приложение полярных операций к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений в конечном виде // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1911. — Т. 12. — С. 111–243.
3. *Лагутинский М. Н.* О некоторых полиномах и связи их с алгебраическим интегрированием обыкновенных дифференциальных алгебраических уравнений // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1912. — Т. 13. — С. 200–224.
4. *Christopher C., Libre J., Vitorio Pereira J.* Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields // Pacific J. Math. — 2007. — Vol. 229, No 1. — P. 63–117.
5. *Chéze G.* Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time // Journal of Complexity. — 2011. — Vol. 27, No 2. — Pp. 246–262.
6. *Малых М. Д.* Об отыскании рациональных интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений по методу М.Н. Лагутинского // Вестник НИЯУ МИФИ. — 2016. — Т. 5, № 24. — С. 327–336.
7. *Malykh M. D.* On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations // International Conference “Polynomial Computer Algebra’2016”. — 2016. — Pp. 57–58.
8. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений // Компьютерная алгебра. Материалы международной конференции. — 2016. — С. 25–29.
9. *Малых М. Д.* Об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка в конечном виде // Пятая международная конференция «Проблемы математической и теоретической физики и математическое моделирование». Сборник докладов. — 2016. — С. 81–82.
10. *Добровольский В. А., Стрельцын Ж., Локоть Н. В.* Михаил Николаевич Лагутинский (1871–1915) // Историко-математические исследования. — 2001. — Т. 6. — С. 111–127.
11. *Malykh M. D.*, 2016. — Lagutinski.sage, ver. 1.5. — RUDN University. — <http://malykhmd.neocities.org>.
12. *Филлипов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — Ижевск: R&C, 2000.
13. *Гориэли А.* Интегрируемость и сингулярность. — М.-Ижевск: R & C, 2006.
14. *Zoladek H.* Algebraic Invariant Curves for the Liénard Equation // Trans. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol. 350. — Pp. 1681–1701.
15. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. — Москва: ИЛ, 1949. — Т. 1.
16. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья I // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1907. — Т. 10. — С. 34–64.
17. *Мордухай-Болтовской Д. Д.* Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка, статья II // Сообщ. Харьков. матем. общ. Вторая сер. — 1907. — Т. 10. — С. 231–270.
18. *Prell M. J., Singer M. F.* Elementary First Integrals of Differential Equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 279. — P. 215–229.
19. *Borwein J. M., Crandall R. E.* Closed Forms: What They Are and Why We Care // Notices of the AMS. — 2013. — Vol. 60. — Pp. 50–65.

20. *Singer M. F.* Liouvillian First Integrals of Differential Equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1992. — Vol. 333. — P. 673–688.
21. *Junzhi Lei.* Nonlinear Differential Galois Theory. — Arxiv:0608492v2. — 2011.
22. Determining Liouvillian First Integrals for Dynamical Systems in the Plane / J. Avellar, L. G. S. Duarte, S. E. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota // Computer Physics Communications. — 2007. — Vol. 177. — P. 584–596.
23. *Avellar J., Duarte L., Duarte S., da Mota L.* Lsolver (Version 2.0). — 2013. — <http://cpc.cs.qub.ac.uk>.

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-113-122

On Application of M. N. Lagutinski Method to Integration of Differential Equations in Symbolic Form. Part 2

M. D. Malykh*[†]

* Faculty of Materials Sciences

Lomonosov Moscow State University

GSP-1 Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russian Federation

[†] Department of Applied Probability and Informatics

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

The method of M. N. Lagutinski (1871–1915) allows to find rational integrals and Darboux polynomials for given differential ring and thus can be used for integration of ordinary differential equations in symbolic form. A realization of Lagutinski method was made under free open-source mathematics software system Sage and will be presented in this article with application for symbolic integration of 1st order differential equations.

The second part is devoted to integration of given differential equation $pdx + qdy$ with $p, q \in \mathbb{Q}[x, y]$ in quadratures. According to the theorem of M. Singer the problem of integration in quadratures is equivalent to the finding of integrating factor of the form $\mu = \exp(\int udx + vdy)$ where $u, v \in \mathbb{Q}[x, y]$. The function v can be found as a root of Darboux polynomial for some auxiliary differentiation of the ring $\mathbb{Q}[x, y, v]$. By Lagutinski method we can find all Darboux polynomials for given differentiation of polynomial ring if degrees of required polynomials are less than given boundary N and thus we can find integration factor of the form stated above. The theory and its realization in Sage are tested on numerous examples from standard for Russia text-book by A. F. Filippov.

Key words and phrases: Lagutinski method, integration in quadratures, sage, sagemath

References

1. W. A. Stein, et al., Sage Mathematics Software (Version 6.7), The Sage Development Team (2015).
URL <http://www.sagemath.org>
2. M. N. Lagutinski, The Application of Polar Operations to Integration of the Ordinary Differential Equations in Finite Terms, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 12 (1911) 111–243, in Russian.
3. M. N. Lagutinski, On Some Polynoms and Their Aplication for Algebraic Integration of Ordinary Differential Algebraic Equations, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 13 (1912) 200–224, in Russian.
4. C. Christopher, J. Llibre, J. Vitória Pereira, Multiplicity of Invariant Algebraic Curves in Polynomial Vector Fields, Pacific J. Math. 229 (1) (2007) 63–117.
5. G. Chéze, Computation of Darboux Polynomials and Rational First Integrals with Bounded Degree in Polynomial Time, Journal of Complexity 27 (2) (2011) 246–262.

6. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinsky's Method for Computation of Rational Integrals of Ordinary Differential Equations Systems, Vestnik of NRNU MEPhi 5 (24) (2016) 327–336, in Russian.
7. M. D. Malykh, On M.N. Lagutinski Method for Integration of Ordinary Differential Equations, in: International Conference "Polynomial Computer Algebra'2016", 2016, pp. 57–58, in Russian.
8. M. D. Malykh, On Integration of Ordinary Differential Equations, in: Computer algebra. Materials of international conference, 2016, pp. 25–29, in Russian.
9. M. D. Malykh, On Integration of 1st Order Differential Equations in a Finite Terms, 2016, pp. 81–82, in Russian.
10. V. A. Dobrovol'skij, J.-M. Strelcyn, N. V. Lokot', Mihail Nikolaevich Lagutinskij (1871–1915), Istoriko-matematicheskie issledovanija 6 (2001) 111–127, in Russian.
11. M. D. Malykh, Lagutinski.sage, ver. 1.5., RUDN University (2016).
URL <http://malykhmd.neocities.org>
12. A. F. Filippov, Text-Book on Differential Equations, R&C, Izhevsk, 2000, in Russian.
13. A. Goriely, Integrability and Nonintegrability of Dynamical Systems, World Scientific Publ., 2001.
14. H. Zoladek, Algebraic Invariant Curves for the Liénard Equation, Trans. Am. Math. Soc. 350 (1998) 1681–1701.
15. G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, 1944.
16. D. Mordukhai-Boltovski, Researches on the Integration in Finite Terms of Differential Equations of the First Order-I, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 10 (1907) 34–64, in Russian.
17. D. Mordukhai-Boltovski, Researches on the Integration in Finite Terms of Differential Equations of the First Order-II, Soobshh. Har'kov. matem. obshh. 2 ser. 10 (1907) 231–270, in Russian.
18. M. J. Prelle, M. F. Singer, Elementary First Integrals of Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983) 215–229.
19. J. M. Borwein, R. E. Crandall, Closed Forms: What They Are and Why We Care, Notices of the AMS 60 (2013) 50–65.
20. M. F. Singer, Liouvillian First Integrals of Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992) 673–688.
21. Junzhi Lei, Nonlinear Differential Galois Theory, Arxiv:0608492v2 (2011).
22. J. Avellar, L. G. S. Duarte, S. E. S. Duarte, L. A. C. P. da Mota, Determining Liouvillian First Integrals for Dynamical Systems in the Plane, Computer Physics Communications 177 (2007) 584–596.
23. J. Avellar, L. Duarte, S. Duarte, L. da Mota, Lsolver (version 2.0). (2013).
URL <http://cpc.cs.qub.ac.uk>

Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

УДК 519.21;51-76

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-123-132

Анализ модели многоканальной одноранговой сети вещательного телевидения для схемы с разделением видеопотока

Ю. В. Гайдамака*, Е. Г. Медведева*,
С. И. Салпагаров†, Е. В. Бобрикова*

* Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей

† Кафедра информационных технологий

Российский университет дружбы народов

ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Последние годы концепция одноранговых P2P-сетей успешно используется в системах телевидения P2PTV, которые предоставляют пользователям возможность смотреть телевизионные каналы по сетям P2P. Для повышения качества предоставления услуги P2P-телевидения используются различные схемы организации структуры наложенной сети. В работе исследована так называемая «модель VUD» (View-Upload Decoupling), основанная на разделении (Decoupling) загружаемых пользователем потоков данных на два типа: поток для собственного просмотра, соответствующий телевизионному каналу, зрителем которого он является (View), и поток (один или несколько) другого телевизионного канала, исключительно для раздачи другим пользователям (Upload). Как правило, последние — это потоки телевизионных каналов с низкой популярностью, принудительное распространение которых обеспечивает стабильность многоканальной системы. Для модели VUD построена вероятностная модель обмена данными между пользователями в однородной и неоднородной с точки зрения скоростей раздачи пользователей P2P-сети, позволяющая проводить анализ основного показателя качества обслуживания в потоковых сетях — вероятности состояния всеобщей передачи, как для отдельного телевизионного канала, так и для системы в целом. На основе построенной модели предложен метод расчёта этих характеристик, приведён пример сравнения двух схем организации структуры наложенной сети — традиционной модели ISO (Isolated Channel) и модели VUD.

Ключевые слова: peer-to-peer, одноранговая сеть, потоковые данные, вероятность всеобщей передачи, View-Upload Decoupling, P2PTV, замкнутые сети массового обслуживания

1. Введение

В настоящее время телекоммуникационные сети все чаще используют технологию P2P (peer-to-peer) [1, 2] при обмене файлами, для организации распределённых — облачных и туманных — вычислений, а также при передаче потокового видео. Известен целый список успешных коммерческих проектов по созданию систем телевидения P2PTV, включая PPLive [3], Tribler [4], PPS.tv [5], которые предоставляют десяткам тысяч пользователей несколько сотен телевизионных каналов для просмотра в режиме реального времени. При организации телевидения по технологии P2P к известным преимуществам одноранговой сети, таким как устойчивость, масштабируемость, добавляется невысокая стоимость функционирования, поскольку сеть P2PTV является наложенной, и дополнительное оборудование для получения услуги телевидения пользователю сети Интернет не требуется.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №14-07-00090, № 17-07-00845.

Для повышения качества предоставления услуги телевидения используются различные схемы организации структуры наложенной P2P-сети. При традиционной схеме Isolated-Channel (ISO) зрители *одного и того же* телевизионного канала обмениваются фрагментами просматриваемого видео друг с другом [6]. Для каналов с большим числом зрителей эта схема обеспечивает высокое качество предоставления услуги телевидения, однако, в случае передачи потоков непопулярных каналов с небольшой аудиторией, а также для систем с возможностью воспроизведения видеопотока канала на различных потоковых скоростях, схема ISO (Isolated Channel) не обеспечивает устойчивое предоставление услуги. Одной из альтернатив является схема View-Upload Decoupling (VUD), основанная на разделении (Decoupling) загружаемых пользователем потоков данных на два типа: поток для собственного просмотра, соответствующий выбранному телевизионному каналу (View), и поток (один или несколько) исключительно для раздачи другим пользователям (Upload). Использование схемы VUD в сетях большой размерности позволяет улучшить характеристики вещания для каналов с небольшой аудиторией [1], в частности, повысить один из основных показателей качества обслуживания — вероятность всеобщей передачи (Universal Streaming), то есть вероятность того, что все пользователи, запросившие услугу, получают её с гарантированным качеством, определённым в соглашении об уровне качества предоставления услуги (SLA, Service Level Agreement). В работе для схемы VUD [6, 7] формализована вероятностная модель обмена данными между пользователями в однородной (скорости раздачи видеоданных всех пользователей одинаковы) и неоднородной (скорости раздачи видеоданных пользователей различаются) P2P-сети и предложен метод расчёта вероятности всеобщей передачи как для отдельного канала, так и для системы в целом. Для иллюстрации приведён пример расчёта этой характеристики для сети небольшой размерности, проведено её сравнение с вероятностью всеобщей передачи в сети с традиционной схемой ISO. Для схемы VUD даны рекомендации по формированию групп раздачи каналов, сформулированы задачи дальнейших исследований по поиску аппроксимации показателей качества вещания при схеме VUD для систем P2PTV большой размерности.

2. Математическая модель схемы VUD

Рассмотрим систему P2PTV, в которой пользователи получают видеопотоки телевизионных каналов от одного сервера-источника. В [4] для схемы ISO построена математическая модель процесса функционирования системы P2PTV в виде открытой экспоненциальной сети массового обслуживания, получено совместное распределение числа пользователей на каналах системы и предложен метод оценки вероятности всеобщей передачи. Построение модели для схемы VUD будем проводить в тех же обозначениях.

Пусть \mathcal{N} — множество пользователей сети, $|\mathcal{N}| = N$, $\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, J\}$ — множество каналов, заданных своим порядковым номером в системе вещания, упорядоченное по убыванию популярности канала, $|\mathcal{J}| = J$. Для каждого канала заданы его скорость воспроизведения r_j , $j \in \mathcal{J}$, также заданы скорости раздачи данных u_n для каждого n -пользователя, $n \in \mathcal{N}$.

В модели VUD каждый пользователь загружает несколько потоков данных: один из них соответствует выбранному для просмотра телевизионному каналу, остальные загружаются исключительно для раздачи другим пользователям и соответствуют каналам, зрителем которого пользователь *не является*. Модель строим в предположении о том, что каждый пользователь системы, являющийся зрителем канала j , назначается для раздачи одного потока канала k , где $k \neq j$, $k, j \in \mathcal{J}$. Таким образом, для каждого канала можно определить множество \mathcal{M}_j пользователей-зрителей j -канала и множество \mathcal{L}_j пользователей, раздающих j -канал, $\mathcal{M}_j \subseteq \mathcal{N}$, $\mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{N}$, $j \in \mathcal{J}$.

Рассматриваем неоднородный случай, считая, что известны скорости раздачи каналов r_j и в сети имеется два типа пользователей: пользователи с низкой скоростью раздачи $u^l < r_j$, образующие множество \mathcal{N}^l , $|\mathcal{N}^l| = N^l$, и пользователи с высокой скоростью раздачи $u^h > r_j$, образующие множество \mathcal{N}^h , $|\mathcal{N}^h| = N^h$. Заметим, что $\mathcal{N}^l \cap \mathcal{N}^h = \emptyset$, $\mathcal{N}^l \cup \mathcal{N}^h = \mathcal{N}$, $N^l + N^h = N$. Для схемы ISO $\mathcal{L}_j = \mathcal{M}_j$, при этом $0 \leq |\mathcal{L}_j| = |\mathcal{M}_j| \leq N$, а для сети с двумя типами пользователей $0 \leq L_j^l \leq N^l$, $0 \leq L_j^h \leq N^h$. Здесь $\mathcal{L}_j^l = \mathcal{N}^l \cap \mathcal{L}_j$, $\mathcal{L}_j^h = \mathcal{N}^h \cap \mathcal{L}_j$, а $L_j^l = |\mathcal{L}_j^l|$ и $L_j^h = |\mathcal{L}_j^h|$ — количество пользователей, соответственно, с низкой и с высокой скоростями раздачи в группе раздачи j -канала, $j \in \mathcal{J}$.

По построению, для схемы VUD выполнено соотношение $\mathcal{M}_j \cap \mathcal{L}_j = \emptyset$, $j \in \mathcal{J}$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\mathcal{L}_j \subseteq \mathcal{N} \setminus \mathcal{M}_j, \quad j \in \mathcal{J} \quad (1)$$

а для сети с двумя типами пользователей — условия

$$\mathcal{L}_j^l \subseteq \mathcal{N}^l \setminus \mathcal{M}_j, \quad j \in \mathcal{J}; \quad \mathcal{L}_j^h \subseteq \mathcal{N}^h \setminus \mathcal{M}_j, \quad j \in \mathcal{J}. \quad (2)$$

Схема VUD предполагает разделение потока канала на несколько подпотоков (substream). Пусть S_j — число подпотоков j -канала, $j \in \mathcal{J}$, и обозначим $I = \sum_{j=1}^J S_j$.

Для каждого s -подпотока j -канала назначается так называемая группа раздачи подпотока — множество пользователей $\mathcal{L}_{(j,s)}$, не являющихся зрителями этого канала, но отвечающих за раздачу данных назначенного им s -подпотока со скоростью $r_{(j,s)}$, $\mathcal{L}_{(j,s)} \subset \mathcal{L}_j$, $\mathcal{L}_j = \bigcup_{s=1}^{S_j} \mathcal{L}_{(j,s)}$, $j = 1, \dots, J$, $s = 1, \dots, S_j$. Разделение на подпотоки производится для того, чтобы пользователь с низкой скоростью раздачи u^l мог внести вклад в суммарный поток для раздачи j -канала, поэтому

$$r_{(j,s)} < u^l, \quad s = 1, \dots, S_j, \quad \sum_{s=1}^{S_j} r_{(j,s)} = r_j, \quad j \in \mathcal{J}.$$

Обозначим $\mathcal{L}_{(j,s)}^l = \mathcal{N}^l \cap \mathcal{L}_{(j,s)}$, $\mathcal{L}_{(j,s)}^h = \mathcal{N}^h \cap \mathcal{L}_{(j,s)}$. Заметим, что $L_{(j,s)}^l = |\mathcal{L}_{(j,s)}^l|$ и $L_{(j,s)}^h = |\mathcal{L}_{(j,s)}^h|$ — количество пользователей, соответственно, с низкой и с высокой скоростями раздачи в группе s -подпотока j -канала, и $L_j = |\mathcal{L}_j|$, $j \in \mathcal{J}$. Обозначим $M_j = |\mathcal{M}_j|$ — количество зрителей j -канала, $j \in \mathcal{J}$. Для заданного M_j с учётом (1) и (2) имеем:

$$0 \leq L_j \leq N^{l(h)} - M_j, \quad (3)$$

$$0 \leq L_{(j,s)}^l \leq N^l - M_j^l, \quad 0 \leq L_{(j,s)}^h \leq N^h - M_j^h, \quad s = 1, \dots, S_j, \quad j \in \mathcal{J}, \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_{(j,s)}^l \cup \mathcal{L}_{(j,s)}^h \neq \emptyset, \quad s = 1, \dots, S_j, \quad j \in \mathcal{J}. \quad (5)$$

Задача формирования групп пользователей для раздачи потоков каналов представляет собой комбинаторную задачу разложения шаров по корзинам, где шар соответствует пользователю, а корзина — группе раздачи подпотока. Распределить $N^l + N^h$ пользователей по I подпотокам можно $C_{I+N^l-1}^{I-1} \cdot C_{I+N^h-1}^{I-1}$ способами. Ограничения (3)–(5) снижают размерность задачи: в случае j -канала с M_j зрителями и

S_j подпотоками необходимо распределить $N^l + N^h - M_j$ пользователей, которые не являются зрителями j -канала, по $I - S_j$ подпотокам.

Каждый вариант распределения пользователей по группам раздачи подпотоков может быть описан с помощью вектора $\vec{\mathbf{L}} = (\mathbf{L}^l, \mathbf{L}^h) = (\vec{\mathbf{L}}_1^l, \dots, \vec{\mathbf{L}}_j^l, \vec{\mathbf{L}}_1^h, \dots, \vec{\mathbf{L}}_j^h)$, где $\vec{\mathbf{L}}_j^l = (L_{(j,1)}^l, \dots, L_{(j,S_j)}^l)^T$, $\vec{\mathbf{L}}_j^h = (L_{(j,1)}^h, \dots, L_{(j,S_j)}^h)^T$, $j \in \mathcal{J}$. Например, элемент $L_{(j,s)}^l$ матрицы \mathbf{L}^l соответствует числу пользователей с низкой скоростью в группе раздачи s -подпотока j -канала, $s = 1, \dots, S_j$, $j \in \mathcal{J}$.

Согласно [1] канал находится в состоянии всеобщей передачи, если все зрители канала получают данные со скоростью не ниже его потоковой скорости. Обозначим \mathcal{D} множество всех векторов $\vec{\mathbf{L}}$, для которых выполняются условия (4)–(5). Вероятность события

$$\mathcal{A}_j = \left\{ \vec{\mathbf{L}} \in \mathcal{D} : \sum_{s=1}^{S_j} \left[\sum_{n \in \mathcal{L}_{(j,s)}} u_n - L_{(j,s)} r_{(j,s)} \right] \geq r_j M_j \right\}, \quad j \in \mathcal{J}, \quad (6)$$

является вероятностью PU_j всеобщей передачи j -канала: $PU_j = P\{\mathcal{A}_j\}$, $j \in \mathcal{J}$. Заметим, что вероятность всеобщей передачи всей системы определяется как $PU = P\left\{\bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{A}_j\right\}$. Для сети с двумя типами пользователей формула (6) принимает вид

$$\mathcal{A}_j = \left\{ \vec{\mathbf{L}} \in \mathcal{D} : \sum_{s=1}^{S_j} \left[(u^l - r_{(j,s)}) L_{(j,s)}^l + (u^h - r_{(j,s)}) L_{(j,s)}^h \right] \geq r_j M_j \right\}, \quad j \in \mathcal{J}. \quad (7)$$

Обозначим \mathcal{D}_j множество всех векторов $\vec{\mathbf{L}} \in \mathcal{D}$, для которых выполняется условие (7). Тогда с учётом введённых обозначений вероятность PU_j всеобщей передачи j -канала определяется формулой

$$PU_j = \frac{|\mathcal{D}_j|}{|\mathcal{D}|}, \quad j \in \mathcal{J}, \quad (8)$$

а вероятность PU всеобщей передачи всей системы — формулой

$$PU = \left| \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}_j \right| / |\mathcal{D}|. \quad (9)$$

Таким образом, группы раздачи каналов следует формировать в соответствии с вектором $\vec{\mathbf{L}} = (\mathbf{L}^l, \mathbf{L}^h) \in \mathcal{D}$, являющимся решением оптимизационной задачи, в которой множество \mathcal{D}_j определено формулой (7):

$$PU(\vec{\mathbf{L}}) \rightarrow \max_{\vec{\mathbf{L}} \in \bigcap_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{D}_j}. \quad (10)$$

Для неоднородной сети с двумя типами пользователей при $u^l < r_j$ из (7) имеем очевидное ограничение на число S_j подпотоков: $1 < S_j < r_j / u^l$. Число S_j подпотоков для j -канала может быть найдено как решение оптимизационной задачи

$$PU_j(S_j) \rightarrow \max_{1 < S_j < r_j/u^l}, \quad (11)$$

где в качестве целевой функции выбрана вероятность всеобщей передачи j -канала $PU_j = PU_j(S_j)$.

Заметим, что в [1] рекомендуется выбирать значение скорости s -подпотока j -канала по формуле $r_{(j,s)} = r_j/S_j$, $s = 1, \dots, S_j$, $j \in \mathcal{J}$. Рекомендации по формированию групп раздачи каналов, числа подпотоков и их скоростей для потока каждого канала вытекают из решения оптимизационных задач (10) и (11).

Алгоритм 1 расчёта вероятности всеобщей передачи по формулам (8)–(9) изложен для сети с двумя типами пользователей, в которой нет деления потоков на подпотоки, то есть $S_j = 1$ $j \in \mathcal{J}$.

Алгоритм 1. Расчёт вероятностно-временных характеристик

```

input  $N, J, N^l, u^l, u^h, M_j \forall j = \overline{1, J}$ 
output  $PU_j, PU \forall j = \overline{1, J}$ 
for all  $j$  low peer d.g.
  if  $N^l \leq N - M_j$  then  $L_j^l \in \{N - M_j, N - M_j - 1, \dots, 1, 0\}$ 
  else  $L_j^l \in \{N^l, N^l - 1, \dots, 1, 0\}$ 
for all  $j$  high peer d.g.
  if  $N^h \leq N - M_j$  then  $L_j^h \in \{N - M_j, N - M_j - 1, \dots, 1, 0\}$ 
  else  $L_j^h \in \{N^h, N^h - 1, \dots, 1, 0\}$ 
find all  $L = (L_1^l, L_2^l, \dots, L_J^l, L_1^h, L_2^h, \dots, L_J^h)$  such that
   $L_j^l + L_j^h \neq 0$  and
   $L_j^l + L_j^h \leq N - M_j$  and
   $sum(L_j^l) = N^l$  and
   $sum(L_j^h) = N^h$ 
  T=count ( $L$ )
 $PU_j = 0$ 
for all  $L$ 
   $j = 1$ 
   $t = 0$ 
  do while  $j \leq J$ 
    if  $L_j^l(u^l - r) + L_j^h(u^h - r) \geq M_j r$  then
       $PU_j = PU_j + 1$ 
       $t = t + 1$ 
    end if
     $j = j + 1$ 
  if  $t = J$ 
     $PU = PU + 1$ 
  end if
end for
for all  $j$  channel find probability
   $PU_j = PU_j / T$ 
end for
 $PU = PU / T$ 

```

В этом случае вектор $\vec{L} = (\mathbf{L}^l, \mathbf{L}^h)$, характеризующий численность групп раздачи, принимает вид $(L_{(1,1)}^l, \dots, L_{(J,1)}^l, L_{(1,1)}^h, \dots, L_{(J,1)}^h)$ (в Алгоритме 1 d.g. от англ.

Distribution Group). Исходными данными являются общее число пользователей сети N , число пользователей с низкой и с высокой скоростями раздачи N^l , $N^h = N - N^l$ соответственно, число зрителей каждого канала M_j , $j \in \mathcal{J}$, скорости раздачи u^l и u^h .

В следующем разделе приведён пример расчёта вероятности всеобщей передачи канала и системы в целом с использованием Алгоритма 1.

3. Пример расчёта вероятности всеобщей передачи

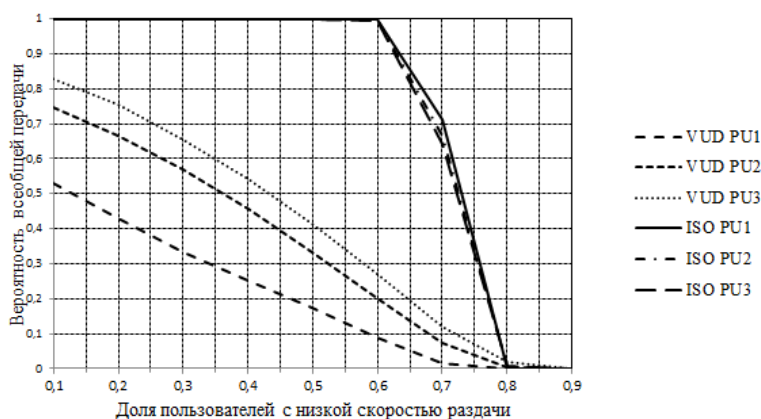
Для иллюстрации работы метода выбрана сеть небольшой размерности, в которой сервер транслирует три телевизионных канала для 400 пользователей (табл. 1). Характеристики видеопередачи усреднены и соответствуют данным, актуальным в настоящее время для ряда торрент-клиентов и пользователей, где скорость потоковой передачи видеоданных $r_j = r = 5$ Мбит/с, что позволяет просматривать видео с разрешением до 1920×1080 пикселей.

Таблица 1

Исходные данные

Характеристика сети	Значение
Число пользователей	$N = 400$
Множество каналов	$J = \{1, 2, 3\}$
Доля пользователей с низкой скоростью раздачи	$0, 1 < f < 0, 9$ с шагом 0,1
Потоковая скорость каналов	$r_j = r = 5$ Мбит/с
Низкая скорость раздачи	$u^l = 0,2r = 1$ Мбит/с
Высокая скорость раздачи	$u^h = 3r = 15$ Мбит/с

На рис. 1 и 2 приведены графики вероятности всеобщей передачи для каждого канала при обеих схемах организации структуры наложенной сети — VUD и ISO — в зависимости от доли f пользователей с низкой скоростью раздачи.

Рис. 1. Вероятность всеобщей передачи, $z = 0,5$

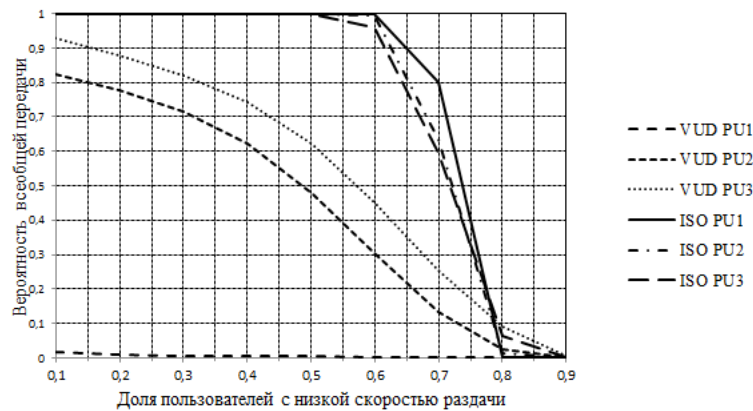


Рис. 2. Вероятность всеобщей передачи, $z = 1,5$

Число пользователей с низкой и с высокой скоростями раздачи определяется формулами $N^l = \lceil Nf \rceil$, $N^h = N - N^l$. Для схемы VUD расчёты выполнены по методу, предложенному в предыдущем разделе, для схемы ISO – по методу [6]. Как и в [1, 2, 6], предполагаем, что популярность канала имеет распределение Ципфа с параметром z :

$$\rho_j = \frac{1}{j^z \sum_{i=1}^J \frac{1}{i^z}}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (12)$$

В этом случае при $N \rightarrow \infty$ число M_j зрителей j -канала имеет вид $M_j = \lim_{N \rightarrow \infty} N\rho_j$ [8], а для конечной сети может быть определено по формуле $M_j = \lceil N\rho_j \rceil$.

Графики на рис. 1 и рис. 2 построены для двух значений параметра Ципфа: $z = 0,5$ и $z = 1,5$. Меньшее значение параметра определяет более равномерное распределение числа зрителей по каналам, то есть более плавное падение популярности каналов, чем для $z = 1,5$.

Для традиционной схемы ISO при обоих значениях параметра Ципфа с уменьшением популярности канала вероятность всеобщей передачи падает. Значение этой характеристики зависит от доли пользователей с низкой скоростью раздачи, и если более половины пользователей сети имеют высокую скорость раздачи ($f < 0,5$), то вероятность всеобщей передачи равна единице для всех каналов. В противном случае популярные каналы имеют более высокую вероятность всеобщей передачи при большем значении параметра z , поскольку при больших значениях параметра z популярный канал имеют больше (а непопулярные – меньше) зрителей, чем те же каналы при меньших значениях z . Например, для сети с 30 % пользователей с высокой скоростью раздачи ($f = 0,7$) при $z = 0,5$ вероятность всеобщей передачи наиболее популярного канала №1 $PU_1 = 0,72$, а при $z = 1,5$ вероятность всеобщей передачи $PU_1 = 0,8$. В то же время для наименее популярного канала №3 $PU_3 = 0,63$ при $z = 0,5$ и $PU_3 = 0,59$ при $z = 1,5$. Заметим, что детально зависимость вероятности всеобщей передачи от доли пользователей с низкой скоростью раздачи была исследована в [8].

Для схемы VUD, которая была предложена с целью улучшить показатели качества непопулярных каналов, с уменьшением популярности канала вероятность всеобщей передачи растёт. На рис. 1 и 2 для обоих значений параметра Ципфа кривые этой характеристики для непопулярных каналов лежат выше, чем для популярных каналов. При этом для сети, в которой доля пользователей с высокой скоростью раздачи не превышает 20 %, схема VUD для наименее популярного канала № 3

даёт более высокую вероятность всеобщей передачи, чем схема ISO. Значение вероятности всеобщей передачи канала № 3 всегда выше, чем для каналов № 1 и № 2, поскольку численность группы раздачи этого канала выше, чем у каждого из остальных каналов. Заметим, что значения вероятности всеобщей передачи при заданных исходных параметрах сети показывают низкое качество предоставления услуги телевидения даже для канала № 3. Это объясняется невысокой размерностью сети, выбранной для иллюстрации работы метода. Для сетей с числом пользователей порядка 2000 вероятность всеобщей передачи самого непопулярного канала может достигать значения 0,8 [1,9]. Развитием идеи разделения загружаемых пользователем данных на поток для собственного просмотра и поток для раздачи другим пользователям стала предложенная в [9] модификация схемы VUD, так называемая схема ViVUD (Virtual Server Cluster VUD), при которой в раздаче потока непопулярных каналов используются дополнительные серверы-источники данных, что позволяет осуществлять телевидение в соответствии с соглашениями SLA об уровне качества предоставления услуги.

4. Заключение

На основе предложенного в статье метода расчёта вероятностных характеристик модели сети P2PTV при схеме VUD разделения данных на поток для просмотра и поток для раздачи было разработано программное средство, которое формирует все возможные варианты разложения пользователей по группам раздачи каналов. Для рассмотренного примера сети P2PTV небольшой размерности число таких вариантов имеет порядок 10^8 (при $z = 0,5$, $f = 0,5$). Поэтому в дальнейшем планируется разработать метод, позволяющий решать задачи большой размерности, в том числе, предполагающие разбиение потоков телевизионных каналов на подпотоки. Также будет сформулирована оптимизационная задача распределения пользователей по группам раздачи с точки зрения максимизации характеристики всеобщей передачи (10) для системы P2PTV. При этом группы раздачи каналов формируются согласно вектору-решению задачи оптимизации, компоненты которого соответствуют числу пользователей с низкой и с высокой скоростями раздачи в группах раздачи подпотоков каналов.

Литература

1. Wu D., Liu Y., Ross K. Queuing Network Models for Multi-Channel P2P Live Streaming Systems // IEEE INFOCOM. — 2009. — Pp. 73–81.
2. Медведева Е. Г., Гайдамака Ю. В. К анализу параметров качества передачи мультисканального потокового трафика в одноранговой сети // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2015. — Т. 2, № 11. — С. 192–198.
3. Сайт системы P2PTV PPLive [Электронный ресурс]. — <http://www.pptv.com/>.
4. Сайт системы P2PTV Tribler [Электронный ресурс]. — <https://www.tribler.org/>.
5. Сайт системы P2PTV PPS.tv [Электронный ресурс]. — <https://www.pps.tv/>.
6. Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К. Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // Т-Comm — Телекоммуникации и Транспорт. — 2013. — № 11. — С. 77–81.
7. Самуйлов А. К., Бобримова Е. В. Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети // Т-Comm — Телекоммуникации и Транспорт. — 2012. — № 7. — С. 180–184.
8. Адаму А., Гайдамака Ю. В. Аппроксимация нормальным законом вероятностных характеристик модели сети P2P TV // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2011. — № 3. — С. 63–68.

9. Liang C., Liu Y. Vivud: Virtual Server Cluster Based View-Upload Decoupling for Multi-Channel P2P Video Streaming Systems // Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2010) 2010 IEEE. — 2010. — Pp. 1–5.

UDC 519.21;51-76

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-123-132

Analysis of Model for Multichannel Peer-to-Peer TV Network with View-Upload Decoupling Scheme

Yu. V. Gaidamaka*, E. G. Medvedeva*, S. I. Salpagarov†, E. V. Bobrikova*

* *Department of Applied Probability and Informatics*

† *Department of Information Technologies*

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

In recent years, video streaming systems such as P2PTV successfully use P2P-based networks to allow users watching numerous streaming TV channels. Various designs of an overlaid network were proposed to improve the quality of services of P2PTV. In this paper, we explore View-Upload Decoupling-scheme (VUD), which strictly decouples data to what peer uploads and what it personally views. It's based on the split of downloaded user data streams into two types: the stream of the chosen TV channel, and the stream (one or more) of the other TV channel, exclusively to deliver it to other users. Such peers form the distribution swarm which is assigned the streams of the channels with low popularity, so that would guarantee the stability of multichannel systems. The mathematical model of VUD scheme is proposed, which considers two classes of users – homogeneous type (all users have the same upload rate) and heterogeneous systems (there are two types of users — with low and high upload rate). We develop the method for calculation the probability of universal streaming – one of the key performance indicators in streaming TV – when all users receive the requested video data with guaranteed quality, defined in the service level agreement (SLA). We propose a method for calculating the probability of universal streaming for a single channel. Statistically significant results for a small network in comparison to VUD and ISO schemes are presented.

Key words and phrases: peer-to-peer, P2PTV, multichannel streaming, probability of universal streaming, distribution group, substream, view-upload decoupling, closed queuing network model

References

1. D. Wu, Y. Liu, K. Ross, Queuing Network Models for Multi-Channel P2P Live Streaming Systems, IEEE INFOCOM (2009) 73–81.
2. E. Medvedeva, Yu. Gaidamaka, On Analysis of Performance Characteristics of P2P Video Streaming Network, Modern Information Technology and IT-Education 2 (11) (2015) 192–198.
3. PPLive.
URL <http://www.pptv.com/>
4. Tribler.
URL <https://www.tribler.org/>
5. PPS.tv.
URL <https://www.pps.tv/>
6. Yu. Gaidamaka, A. Samuylov, Analysis of Playback Continuity for Video Streaming in Peer-to-Peer Networks with Data Transfer Delays, T-Comm (11) (2013) 77–81, in Russian.
7. K. Samuylov, E. Bobrikova, A Simple Fluid Model of P2P File Sharing Network, T-Comm (7) (2012) 180–184, in Russian.

8. A. Adamu, Yu. Gaidamaka, Approximation of a Universal Streaming Probability with the Normal Distribution, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (3) (2011) 63–68, in Russian.
9. C. Liang, Y. Liu, Vivud: Virtual Server Cluster Based View-Upload Decoupling for Multi-Channel P2P Video Streaming Systems, Global Telecommunications Conference (GLOBECOM 2010) 2010 IEEE (2010) 1–5.

© Гайдамака Ю. В., Медведева Е. Г., Салпагаров С. И., Бобрикова Е. В., 2017

Построение и анализ модели входного коммутатора в сети с оптической коммутацией

К. Е. Самуйлов*, И. Г. Бужин†, Ю. Б. Миронов†

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *в/ч 33965, Москва, Россия*

В настоящее время существует два общепризнанных принципа коммутации информационных сигналов в высокоскоростных сетях: сети с волновой маршрутизацией и сети с принципом оптической коммутацией пакетов. В сетях с волновой маршрутизацией не требуется производить оптико-электрических и электро-оптических преобразований и создавать буфер, но при данном принципе коммутации неэффективно используется рабочий диапазон длин волн. В сетях с оптической коммутацией пакетов трафик передаётся в виде пакетов, которые состоят из заголовка и информационной части постоянного размера. В данном случае частотный диапазон используется наиболее полно, но появляется необходимость оптико-электронных преобразований. Стремясь соединить преимущества двух технологий оптической коммутации, был предложен новый комбинированный принцип коммутации, получивший название оптической коммутации пачек. В данной технологии нет буферизации и электронной обработки данных в промежуточных узлах, присутствует резервирование канала на ограниченное время. Для эффективного внедрения такой сети связи необходимо рассчитать её вероятностные характеристики. Для оценки вероятностных характеристик сети широко используются методы теории массового обслуживания. Входной коммутатор является одним из ключевых устройств сети. В статье описывается работа входного коммутатора сети с оптической коммутацией пачек, производится расчёт вероятных характеристик сети с использованием аналитической и имитационных моделей. Приведены примеры расчёта вероятности блокировки пакетов, поступающих во входной коммутатор.

Ключевые слова: оптическая коммутация пакетов, волновая маршрутизация, оптическая коммутация пачек, контрольный пакет, информационный пачка

Введение

В настоящее время существует два общепризнанных принципа коммутации информационных сигналов в высокоскоростных сетях: сети с волновой маршрутизацией WR (Wavelength Routing) и сети с принципом оптической коммутацией пакетов OPS (Optical Packet Switching) [1–6]. В сетях с волновой маршрутизацией не требуется производить оптико-электрических и электро-оптических преобразований и создавать буфер, но при данном принципе коммутации не эффективно используется рабочий диапазон длин волн. В сетях с оптической коммутацией пакетов трафик передаётся в виде пакетов, которые состоят из заголовка и информационной части постоянного размера. В данном случае частотный диапазон используется наиболее полно, но появляется необходимость оптико-электронных преобразований. Стремясь соединить преимущества двух технологий оптической коммутации, был предложен новый комбинированный принцип коммутации, получивший название оптической коммутации пачек OBS (Optical Burst Switching). В данной технологии нет буферизации и электронной обработки данных в промежуточных узлах, присутствует резервирование канала на ограниченное время.

Сеть с данным принципом коммутации будет состоять из следующих основных компонентов: входного коммутатора, нескольких промежуточных коммутаторов и выходного коммутатора. Входной коммутатор принимает пакеты в электрическом виде, преобразовывает их в полностью оптические пачки (optical bursts) и передаёт следующему коммутатору по пути в целевую сеть, назначая при этом нужную длину

волны в оптическом волокне. Промежуточный коммутатор, используя один из протоколов сигнализации, принимает пачку, обрабатывает её без оптико-электрических преобразований и посылает пачку далее до нужного коммутатора. Когда пачка доходит до выходного коммутатора, она преобразовывается в электрический вид, разбивается по IP-пакетам и направляется до получателя в IP-сеть, к которой подключён граничный выходной коммутатор.

В данной статье будет подробно рассмотрен входной коммутатор, а именно его алгоритм работы, описана его аналитическая и имитационная модели, проведён численный анализ полученных результатов.

Статья построена следующим образом:

- в первом разделе описывается работа входного коммутатора сети с OBS;
- во втором разделе построена математическая модель входного коммутатора;
- в третьем разделе приводится листинг программы имитационного моделирования данного коммутатора в среде GPSS, приведены сравнения расчётов вероятности блокировок на основе математической модели и моделирования входного коммутатора в GPSS при различных законах распределения длительности обслуживания;
- заключение содержит основные выводы исследования.

1. Алгоритм работы входного коммутатора

Входной коммутатор является одним из ключевых устройств сети с OBS. Функциональная схема коммутатора представлена на рис. 1.

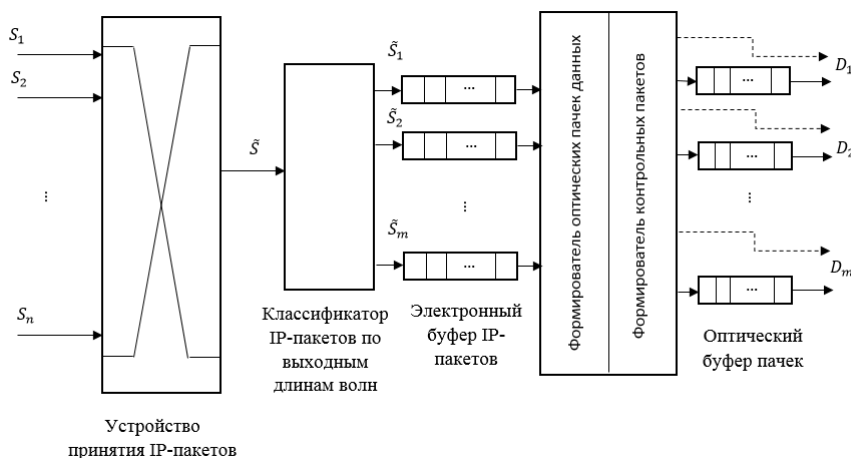


Рис. 1. Функциональная схема входного коммутатора сети с OBS

На вход данного устройства прибывают IP-пакеты от источников S_1, \dots, S_n . Их принятие осуществляет устройство принятия пакетов. Далее принятые пакеты посылаются на классификатор пакетов по выходным длинам волн. Это устройство осуществляет классификацию пакетов по адресу получателя. В соответствии с этим адресом классификатор находит нужную длину волны на выходе входного коммутатора и посылает пакет на соответствующий выходной порт. Затем классифицированные пакеты становятся в электронные очереди в соответствии со своей выходной длиной волны. Данные буферы имеют ограниченную длину, поэтому при большом времени ожидания в очереди пакет может быть заблокирован. Устройство формирования контрольных пакетов (КП) и информационных пачек (ИП) периодически

опрашивает эти буферы. Если в буфере накопилось определённое количество пакетов, они поступают в формирователь ИП и КП. В этом устройстве формируется контрольный пакет для будущей ИП, в который записывается информация о пачке: адрес получателя, длина будущей пачки, адрес отправителя, время задержки между КП и ИП и другие параметры, которые находятся в заголовках IP-пакетов. Затем из нескольких IP-пакетов выделяются поля данных, и эта информация помещается в ИП.

Сформировавшиеся оптическая пачка с выхода устройства формирования КП и ИП поступает на нужную длину волны, если эта волна свободна. Если же она занята в этот момент, то пачка помещается в оптический буфер и ожидает некоторое количество времени до отправки.

Таким образом, алгоритм работы входного коммутатора может быть представлен следующим образом:

1. Устройство принятия IP-пакетов осуществляет приём от S_1, \dots, S_n источников пакетов. После принятия это устройство посылает весь IP-трафик на вход классификатора IP-пакетов;
2. Классификатор IP-пакетов считывает заголовок IP-пакета, определяет адрес получателя и посылает пакет в очередь, которая соответствует выходной длине волны;
3. После классификации пакетов они прибывают в нужные электрические буферы. В буфере собирается определённое количество пакетов, нужное для формирования оптической пачки;
4. Далее блоки пакетов помещаются в устройство формирования контрольного пакета и оптической пачки данных. Формирователь КП и ИП последовательно опрашивает электрические буферы. После поступления в формирователь пакетов собирается оптическая пачка, затем формируется КП, в который записывается информация об информационной пачке, адрес получателя и т.п. Также формируется время задержки между КП и ИП;
5. После формирования КП, ИП и времени задержки, информация поступает на выходную длину волны. Если длина волны в этот момент занята, КП и ИП сначала поступают в оптический буфер, затем после освобождения длины волны поступают на выход.

2. Модель входного коммутатора в виде двухфазной СМО

Модель входного коммутатора можно представить в виде двухфазной СМО, показанной на рис. 2.

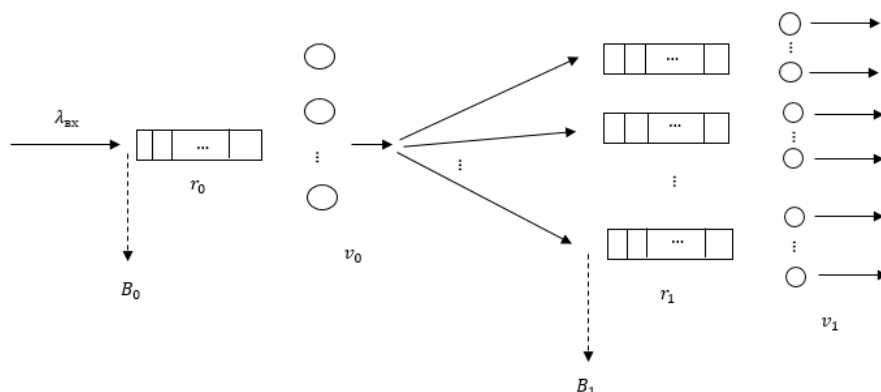


Рис. 2. Модель входного коммутатора сети с оптической коммутацией пачек

Пусть на вход коммутатора поступают пакеты от n IP-источников. От каждого IP-источника поступает пуассоновский поток пакетов с интенсивностью λ_i . Средняя интенсивность потока от n источников равна $\lambda_{\text{вх}} = \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Тогда работа классификатора IP-пакетов и электронных очередей (см. рис. 1) может быть описана как $M_{\lambda_{\text{вх}}}/M_{\mu_0}/v_0/r_0$ -система с v_0 -линейными СМО с $r_0 < \infty$ местами для ожидания, в которую поступает пуассоновский поток с интенсивностью $\lambda_{\text{вх}}$, а времена обслуживания пакетов независимы и время обслуживания каждого пакета распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_0 . Это система с явными потерями, т.е. если пакет поступает в переполненную систему (все приборы и все места ожидания заняты), пакет блокируется и удаляется. Тогда стационарная вероятность потери пакетов определяется формулой:

$$B_0 = \frac{\rho^{v_0+r_0}}{v_0! \cdot v_0^{r_0}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{v_0-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^{v_0}}{v_0!} \cdot \frac{1 - (\frac{\rho}{v_0})^{r_0+1}}{1 - \frac{\rho}{v_0}} \right)^{-1},$$

где $\rho = \frac{\lambda_{\text{вх}}}{\mu_0}$.

Также можно получить среднее число пакетов, обслуженных системой в единицу времени (или интенсивность выходного потока):

$$\lambda_{\text{вых}} = \lambda_{\text{вх}} \cdot (1 - B_0).$$

Пусть данный поток является также пуассоновским. Далее этот поток с интенсивностью $\lambda_{\text{вых}}$ поступает в формирователь КП и ИП и в выходные оптические буферные накопители ограниченной длины r_1 и далее в выходные длины волн. Тогда работа этих устройств можно представить в виде системы $M_{\lambda_{\text{вых}}}/M_{\mu_1}|v_1|r_1$, у которой n_1 -линейных СМО с $r_1 < \infty$ местами для ожидания, а времена обслуживания пакетов независимы и время обслуживания каждого пакета распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_1 . Нагрузка на каждый буферный накопитель будет распределена равномерно. Далее вероятность блокировки считается аналогичным образом:

$$B_1 = \frac{\beta^{v_1+r_1}}{v_1! \cdot v_1^{r_1}} \cdot \left(\sum_{i=0}^{v_1-1} \frac{\beta^i}{i!} + \frac{\beta^{v_1}}{v_1!} \cdot \frac{1 - (\frac{\beta}{v_1})^{r_1+1}}{1 - \frac{\beta}{v_1}} \right)^{-1},$$

где $\beta = \frac{\lambda_{\text{вых}}}{\mu_1}$.

Таким образом, общая вероятность блокировки во входном коммутаторе рассчитывается по формуле:

$$B_{\text{общ}} = B_0 \cdot B_1.$$

Итак, вероятность блокировки пакетов во входном коммутаторе зависит от числа ТСП-источников и количества мест в электронных буферах. Другие устройства в незначительной степени влияют на вероятность блокировки.

3. Имитационная модель входного коммутатора сети

Алгоритм программы (рис. 3) моделирует линейную разомкнутую СМО с однородным потоком заявок на 2 узла. Из внешней среды в узел 1 поступает простейший поток заявок со средним интервалом 5 миллисекунд. После обслуживания в узле 1 заявки с вероятностью $P = 1$ переходят на обслуживание в узел 2.

Команда **STORAGE** задаёт число приборов в узле. Далее формируется поток заявок (пакетов) командой **GENERATE**. Затем заявка пытается занять один прибор командой **ENTER** и после этого формируется задержка командой **ADVANCE**. Затем заявка покидает прибор узла 1 и заявка передаётся в узел 2, в котором действия происходят аналогичным образом.

```

Uz_1 STORAGE 1; задания число приборов в узле
Uz_2 STORAGE 4; задания число приборов в узле
*****
GENERATE (Exponential(1,.00005,.005)); формирование детерминированного потока
TEST L Q$ch_2,180,Otkaz; проверка длины очереди ch_2
Met_1 QUEUE ch_1; отметка момента поступления заявки в очередь ch_1
ENTER Uz_1; попытка занять один из приборов устройства Uz_1
DEPART ch_1; регистрация момента покидания заявки очереди ch_1
ADVANCE 0.001; формирование задержки
LEAVE Uz_1; освобождение одного прибора многоканального устройства Uz_1
TRANSFER ,Met_2; безусловная (с вероятностью 1) передача заявки в узел 2
*****
Met_2 QUEUE ch_2;
SEIZE Uz_2;
DEPART ch_2;
ADVANCE 0.01;
Met_3 QUEUE ch_3;
RELEASE Uz_2;
TERMINATE 1;
otkaz TERMINATE 1|

```

Рис. 3. Алгоритм расчёта вероятности блокировки

Длительность обслуживания заявок в узле 1, представляющем собой двухканальную СМО, — детерминированная величина.

Длительность обслуживания заявок в узле 2, представляющем собой четырёхканальную СМО, — также детерминированная величина.

На вход системы поступает детерминированный поток заявок, распределённый по экспоненциальному закону (поток IP-пакетов). Первый прибывший пакет поступает в классификатор IP-пакетов. При моделировании он реализуется блоком **ADVANCE**. Время задержки в классификаторе пакетов представляет собой детерминированную величину. Пройдя процедуру классификации, пакет поступает в электронные очереди. Затем пакеты попадают в формирователь КП и ИП. Данная процедура также осуществляется при помощи блока **ADVANCE**, но на значительно большем интервале. Таким образом, программа моделирует двухфазную СМО, в которой первая фаза представляет собой систему $M_{\lambda_{\text{вх}}}|D_{\mu_0}|v_0|r_0$, вторая фаза — $M_{\lambda_{\text{вых}}}|D_{\mu_1}|v_1|r_1$.

Проведя расчёты вероятности блокировки при помощи аналитической модели и путём имитационного моделирования с детерминированными длительностями обслуживания в программе GPSS, можно построить зависимости вероятностей блокировки пакетов от числа мест в очереди (рис. 4 и 5).

Заключение

В статье предложена математическая модель входного коммутатора сети с оптической коммутацией пачек. Проведён расчёт вероятности блокировки информационной пачки во входном коммутаторе при помощи аналитической и имитационных моделей.

Были получены графики зависимости вероятности блокировки от числа мест в очереди в каждой фазе, согласно которым при увеличении числа мест ожидания вероятность блокировки пакетов уменьшается (рис. 4 и 5). Ранее были проведены

исследования вероятности блокировок ИП в промежуточном коммутаторе [3]. Значения вероятностей блокировок во входном коммутаторе будут в разы меньше, чем в промежуточном коммутаторе. Таким образом, основное влияние на общую вероятность блокировки пользовательской информации во всей сети OBS оказывают промежуточные коммутаторы.

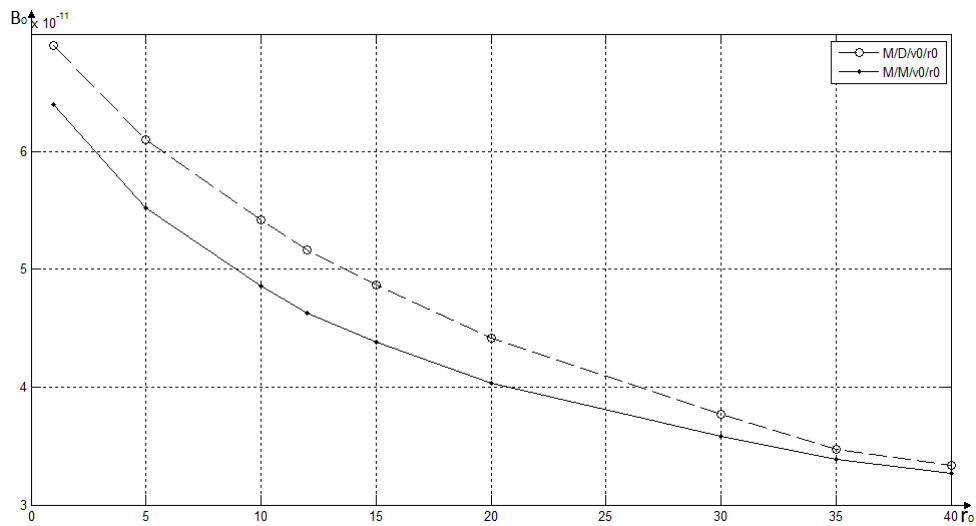


Рис. 4. Зависимость вероятности блокировки от числа мест в очереди на первой фазе СМО

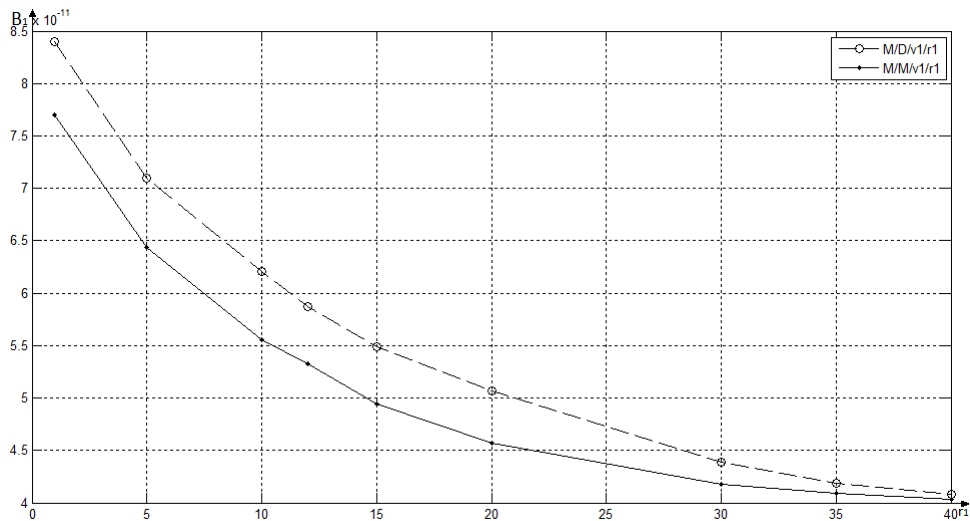


Рис. 5. Зависимость вероятности блокировки от числа мест в очереди на второй фазе СМО

Литература

1. Башарин Г. П., Гудкова И. А., Шibaева Е. Математическая модель функционирования коммутатора в OBS сетис FDL и маршрутизацией с отклонением // T-Comm — Telecommunications and Transport. — 2013. — № 11. — С. 33–36.
2. Battestilli T. Performance Analysis of Optical Burst Switched Network with Dynamic Simultaneous Link Possession. — Department of computer source, 2005.
3. Миронов Ю. Б., Бужин И. Г., Гаидамака Ю. В. Построение и анализ модели оптического коммутатора в сети с оптической коммутацией пачек при применении протокола резервирования JET // T-Comm — Telecommunications and Transport. — 2016. — № 2. — С. 12–18.
4. Kaheel A., Alnuweiri H., Gebali F. Analytical Evaluation of Blocking Probability in Optical Burst Switching Networks. — IEEE, 2004.
5. Вишневецкий В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — Москва: Техносфера, 2003.
6. Сети и системы передачи информации: телекоммуникационные сети: учебник и практикум. Серия 58 Бакалавр. Академический курс / К. Е. Самуйлов, И. А. Шалимов, Д. С. Кулябов, В. В. Василевский, Н. Н. Васин, А. В. Королькова. — Москва: Юрайт, 2016.

UDC 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-133-140

The Construction and Analysis of Models of the Input Switch in a Network with Optical Switching

K.E. Samuylov*, I. G. Buzhin[†], Y. B. Mironov[†]

* Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

[†] m/u 33965, Moscow, Russian Federation

Currently, there are two generally recognized principles of switching of information signals in high-speed networks: networks with wave routing, and networks with the principle of optical packet switching. In networks with wave routing it is not required to produce opto-electrical and electro-optical conversions and to create a buffer, but with this switching principle the working range of wavelengths is not efficiently used. In networks with optical packet switching the traffic is transmitted in packets, which consist of a header and an information part of a consistent size. In this case, using of the frequency range is the most complete, but there is a need of optical-electronic conversions. In an effort to combine the advantages of two optical switching technologies, a new combined switching principle was proposed, called optical switching bursts. In this technology there are not buffering and electronic processing in intermediate nodes, there is a reservation of the channel for a limited time. For the effective implementation of such a network connection, we must calculate its probability characteristics. To assess probabilistic characteristics of the network the methods of theory of mass service are widely used. The input switch is one of the key devices on the network. The article describes the input switch of the network with the optical switching of bursts, calculates the probable characteristics of the network using analytical and simulation models. Examples of the calculation of the probability of blocking of packets flowing in the input switch are presented.

Key words and phrases: optical packet switching, wave routing, optical switching of bursts, control packet, information burst

References

1. G. P. Basharin, I. A. Gudkova, E. S. Shibaeva, The Mathematical Model of Functioning of the Switch in the OBS Network with FDL and Routing with Deviation, T-Comm — Telecommunications and Transport (11) (2013) 33–36, in Russian.

2. T. Battestilli, Performance Analysis of Optical Burst Switched Network with Dynamic Simultaneous Link Possession, Department of computer source, 2005.
3. Y. B. Mironov, I. G. Buzhin, Y. V. Gaidamaka, Optical Switch Modelling in Optical Burst Switching Network with Protocol JET, T-Comm — Telecommunications and Transport (2) (2016) 12–18, in Russian.
4. A. Kaheel, H. Alnuweiri, F. Gebali, Analytical Evaluation of Blocking Probability in Optical Burst Switching Networks, IEEE, 2004. doi:10.1109/ICC.2004.1312770.
5. V. M. Vishnevskiy, The Theoretical Basis for the Design of Computer Networks, Technosphere, Москва, 2003, in Russian.
6. K. E. Samuylov, I. A. Shalimov, D. S. Kulybov, V. V. Vasilevskiy, A. V. Korolkova, Networks and Data Transmission Systems: Telecommunications Networks: The Tutorial and Workshop for Undergraduate Academic, Urait, Moscow, 2016, in Russian.

© Самуйлов К. Е., Бужин И. Г., Миронов Ю. Б., 2017

Математическое моделирование

УДК 535.012.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148

Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред

О. Н. Бикеев*, Л. А. Севастьянов†

* Кафедра прикладной физики

† Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В статье рассматривается вопрос о существовании поверхностной электромагнитной волны на границе раздела в структуре, образованной из двух идентичных анизотропных сред, каждая из которых повернута в разные стороны на некоторый угол относительно направления распространения искомой электромагнитной волны.

Ранее в своих пионерских статьях на эту тему Дьяконов М. И. и Аверкиев Н. С. (1988, 1990) ограничились рассмотрением только одноосных анизотропных сред. Здесь же приведены выкладки для общего случая двуосных сред, причём, как частный случай, полученные результаты описывают и случай одноосных сред. В работе не используются какие-либо приближения, за исключением, быть может, концепции плоских волн. Получены точные аналитические выражения, связывающие значения фазовой скорости поверхностной волны с углом поворота осей симметрии анизотропных сред относительно направления волнового вектора поверхностной волны. Наряду с этим определены поперечные распределения полей такой волны, вид которых однозначно характеризует эту волну как поверхностную.

Ключевые слова: поверхностная электромагнитная волна, анизотропная среда, фазовая скорость, поперечное распределение поля, тензор диэлектрической проницаемости

В продолжении работ Дьяконова М. И. [1] и Аверкиева Н. С. [2] рассмотрим структуру, состоящую из двух одинаковых анизотропных сред, в общем случае двуосных, немагнитных (рис. 1). Граница раздела сред пусть находится в плоскости yoz декартовой системы координат, совпадающей с кристаллографической системой координат анизотропных сред. Для того, чтобы граница раздела физически существовала, повернём «верхнюю» ($X > 0$) среду на угол φ вокруг оси Ox , а «нижнюю» ($X < 0$) — на угол $-\varphi$ вокруг той же оси.

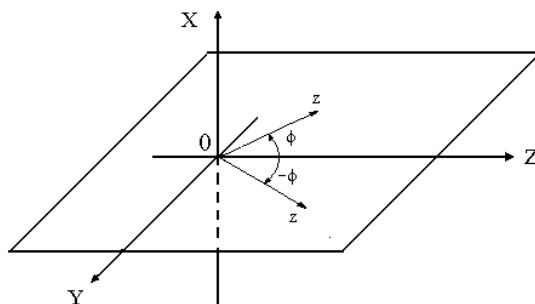


Рис. 1. Взаимное расположение анизотропных сред

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № № 15-07-08795 и № 16-07-00556.

Пусть тензор диэлектрической проницаемости в кристаллографической системе координат (xyz) выглядит как:

$$\hat{\varepsilon}_{xyz} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}.$$

Для определённости будем считать, что $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_3$, что, в большинстве случаев, характерно для реальных кристаллов. Иных ограничений на компоненты тензора накладывать не будем, в принципе они могут быть и комплексными. Тензор $\hat{\varepsilon}$ в «повёрнутой» на угол φ системе координат (XYZ) можно вычислить, используя матрицу поворота L_x :

$$L_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \quad (1)$$

Аналогичная матрица поворота для среды в нижнем полупространстве получится из (1) путём замены φ на $-\varphi$.

Тензор $\hat{\varepsilon}$ в «повёрнутой» системе координат (XYZ) будет иметь вид:

$$\hat{\varepsilon}_{XYZ} = L_x^{-1} \cdot \hat{\varepsilon}_{xyz} \cdot L_x = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{32} \\ 0 & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix},$$

где:

для среды при $X > 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_3 \cos^2 \varphi, \\ \varepsilon_{32} &= -\sin \varphi \cos \varphi (\varepsilon_3 - \varepsilon_2), \end{aligned} \quad (2a)$$

для среды при $X < 0$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \varepsilon_2 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi, \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon_2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_3 \cos^2 \varphi, \\ \varepsilon_{32} &= \sin \varphi \cos \varphi (\varepsilon_3 - \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (2b)$$

В сформированной таким образом анизотропной структуре будем искать решение уравнений Максвелла для поверхностных электромагнитных (ЭМ) волн, распространяющихся вдоль поверхности раздела в направлении оси OZ , которая является биссектрисой угла между осями Oz кристаллографических систем координат верхней и нижней анизотропных сред. Пусть зависимость полей всех плоских волн от времени и координат имеет вид $\exp\{-i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\}$, где \vec{k} — волновой вектор, а k_x, k_y, k_z — его проекции на оси координат.

Для каждой из этих волн должно выполняться волновое уравнение (в гауссовой системе), полученное из уравнений Максвелла в векторной форме:

$$[\vec{k} \times \vec{H}] = -k_0 \vec{D}, \quad [\vec{k} \times \vec{E}] = k_0 \vec{H}, \quad (\vec{k} \cdot \vec{H}) = 0, \quad (\vec{k} \cdot \vec{E}) \neq 0.$$

Это уравнение имеет вид:

$$[\vec{k} \times [\vec{k} \times \vec{E}]] + k_0^2 \vec{D} = 0, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega/c$, $\vec{D} = \hat{\varepsilon}_{XYZ}\vec{E}$.

Подстановка (2a), (2b) в (3) приводит к матричному уравнению

$$\begin{vmatrix} (\varepsilon_1 - \beta^2 - \gamma^2) & \tau\beta & \gamma\tau \\ \tau\beta & [\varepsilon_{22} - (\tau^2 + \gamma^2)] & \gamma\beta + \varepsilon_{32} \\ \gamma\tau & \gamma\beta + \varepsilon_{32} & [\varepsilon_{33} - (\beta^2 + \gamma^2)] \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\tau = \frac{k_x}{k_0}$, $\beta = \frac{k_y}{k_0}$, $\gamma = \frac{k_z}{k_0}$ — нормированные компоненты волнового вектора \vec{k} . Не теряя общности, можно предположить, что решением (4) является набор плоских волн с фазовыми фронтами параллельными оси OY , или $d/dy = 0$, а с ним и $\beta = 0$, что упростит (4). Приравнявая к нулю детерминант матрицы в (4), получим дисперсионное уравнение, связывающее компоненты волнового вектора τ и γ :

$$\varepsilon_1\tau^4 + [\varepsilon_1(\gamma^2 - \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{33}(\gamma^2 - \varepsilon_1)]\tau^2 + (\gamma^2 - \varepsilon_1)(\gamma^2\varepsilon_{33} - \varepsilon_2\varepsilon_3) = 0. \quad (5)$$

Биквадратное уравнение (5) даёт два решения для поперечных волновых чисел собственных плоских волн τ_1^2 и τ_2^2 в зависимости от продольного числа γ . Следует отметить — в данном случае необходимо полагать, что продольное волновое число γ будет одним и тем же для обеих собственных волн анизотропной среды [3]. Это обусловлено, естественно, наличием плоской границы у каждой из анизотропных сред, на которой тангенциальные компоненты волновых векторов собственных волн должны быть одинаковыми.

Решение уравнения (5) можно записать в виде:

$$\tau_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \pm \frac{\sqrt{\varepsilon_1^2\Delta_{32}^2 + 2\gamma^2\varepsilon_1\Delta_{32}(\Delta_{21}\sin^2\varphi - \Delta_{31}\cos^2\varphi) + \gamma^4(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})^2 \mp \gamma^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})}}{2\varepsilon_1}, \quad (6)$$

где $\Delta_{21} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$, $\Delta_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1$, $\Delta_{32} = \varepsilon_3 - \varepsilon_2$.

Ситуация существенно упрощается, если двусные среды заменить односными. Для этого достаточно положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Тогда биквадратное уравнение (5) распадается на два квадратных уравнения:

$$(\tau_1^2 + \gamma^2 - \varepsilon_1) \cdot [\varepsilon_1(\tau_2^2 + \gamma^2) + \gamma^2\Delta_{31}\cos^2\varphi - \varepsilon_1\varepsilon_3] = 0. \quad (7)$$

Решения (7) дают значения поперечных волновых чисел для обыкновенной и необыкновенной собственных волн одноосной анизотропной среды:

$$\tau_1 = \tau_o = \sqrt{\varepsilon_1 - \gamma^2} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \tau_e = \sqrt{\varepsilon_3 - \gamma^2 \left(1 + \frac{\Delta_{31}}{\varepsilon_1} \cos^2\varphi\right)}. \quad (8)$$

Поскольку разыскивается решение волнового уравнения (3) для поверхностной волны, то амплитуды всех полей такой волны должны экспоненциально убывать вдоль оси $\pm X$ [1]. Для существования такого решения необходимо, чтобы поперечные компоненты волновых векторов собственных волн были чисто мнимыми величинами, но при этом продольная компонента должна быть действительной и не превышать, по крайней мере, $\sqrt{\varepsilon_3}$. Проверим, так ли это в рассматриваемом случае. Для этого построим графические зависимости поперечных волновых чисел от продольного для случаев одноосных и двусных сред (рис. 2).

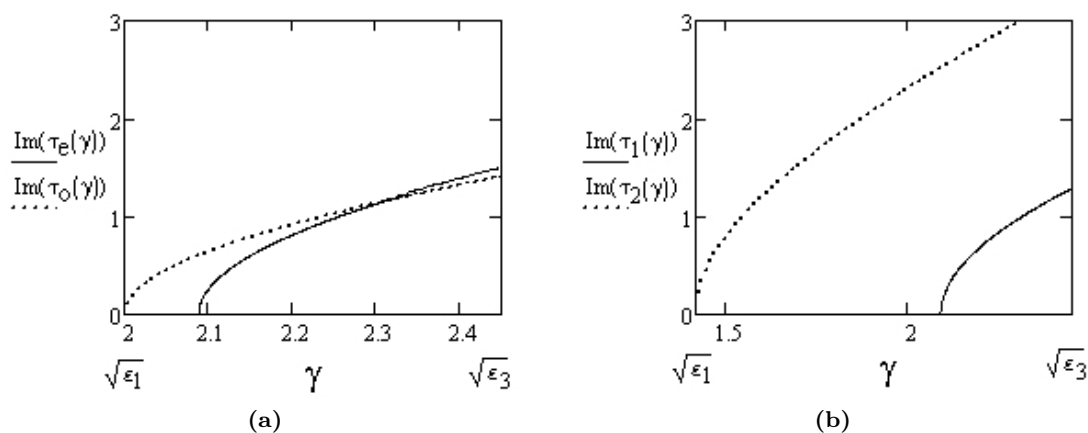


Рис. 2. Зависимости чисто мнимых поперечных волновых чисел от действительного продольного числа: а) — одноосные среды ($\varepsilon_1 = 4$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 6$), б) — двуосные ($\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 6$). В обоих случаях $\varphi = \pi/4$

Из рис. 2 следует, что поверхностная ЭМ волна потенциально может существовать как в одноосной, так и в двуосной структурах. В обоих случаях в некотором диапазоне действительных продольных волновых чисел есть области с чисто мнимыми поперечными числами. Это условие является необходимым, но не является достаточным.

Как видно из (6) и (8), наличие плоской границы у анизотропной среды связывает компоненты волновых векторов собственных волн вполне определённым образом. В силу этого и амплитуды полей этих собственных волн оказываются взаимосвязаны. Для определения этой связи воспользуемся волновым уравнением (4) при $\beta = 0$. Поскольку значения поперечных волновых чисел уже известны (6) и (8), решим систему уравнений (4) относительно амплитуд полей собственных волн в анизотропной среде:

$$\begin{vmatrix} E_{x1,2} \\ E_{y1,2} \\ E_{z1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma\tau_{1,2}(\tau_{1,2}^2 + \gamma^2 - \varepsilon_{22}) \\ \varepsilon_{32}(\varepsilon_1 - \gamma^2) \\ -(\varepsilon_1 - \gamma^2)(\tau_{1,2}^2 + \gamma^2 - \varepsilon_{22}) \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Амплитуды составляющих магнитного поля можно вычислить, используя уравнения Максвелла ($\beta = 0$):

$$\begin{vmatrix} H_{x1,2} \\ H_{y1,2} \\ H_{z1,2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\gamma E_{y1,2} \\ \gamma E_{x1,2} - \tau_{1,2} E_{z1,2} \\ \tau_{1,2} E_{y1,2} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Для окончательного решения вопроса о существовании поверхностной волны необходимо получить дисперсионное уравнение для этой волны и вычислить распределения амплитуд полей в поперечном сечении. Если искомое дисперсионное уравнение будет выполняться, то это и будет достаточным условием существования поверхностной волны.

Дисперсионное уравнение можно получить методом «сшивания» на границе раздела сред тангенциальных составляющих собственных полей. Учитывая необходимые условия существования поверхностной волны на границе раздела сред,

в (9) и (10) следует положить:

$$\begin{aligned} \text{при } X > 0 \quad \tau_1 &= iT_1, & \tau_2 &= iT_2, & \varphi &> 0, \\ \text{при } X < 0 \quad \tau_1 &= -iT_1, & \tau_2 &= -iT_2, & \varphi &< 0. \end{aligned}$$

Наличие определённой связи между компонентами полей собственных волн, обусловленное плоской границей, позволяет в (9) и (10) все амплитуды полей выразить через какую-нибудь одну (например, E_z), и последнюю представить при $X > 0$ в виде:

$$E_Z(x) = E_{Z2} + E_{Z1} = A \exp(-T_2x) + B \exp(-T_1x),$$

где A и B — произвольные амплитуды. Для среды при $X < 0$:

$$E_Z(x) = E_{Z2} + E_{Z1} = C \exp(T_2x) + D \exp(T_1x).$$

Остальные амплитуды собственных полей можно таким же образом выразить через неизвестные (пока) константы A , B , C и D .

Приравнивая на границе раздела ($X = 0$) тангенциальные компоненты полей, получим следующее матричное уравнение относительно неизвестных констант:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \frac{1}{T_2^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{1}{T_1^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{1}{T_2^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{1}{T_1^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} \\ \frac{T_2}{T_2^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{T_1}{T_1^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{-T_2}{T_2^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} & \frac{-T_1}{T_1^2 - \gamma^2 + \varepsilon_{22}} \\ T_2 & T_1 & T_2 & T_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{vmatrix} = 0. \quad (11)$$

Из равенства нулю определителя этой системы линейных однородных уравнений получим

$$(T_1^2 + T_1T_2 + T_2^2 + \varepsilon_{22} - \gamma^2)(\gamma^2 - \varepsilon_{22} + T_1T_2) = 0.$$

Левый множитель не равен нулю при действительных значениях γ , следовательно, уравнение

$$\gamma^2 = \varepsilon_{22} - T_1T_2 \quad (12)$$

и будет искомым дисперсионным уравнением для поверхностной волны. Здесь следует заметить, что термин «дисперсионное уравнение» следует понимать в некоторой степени условно. Дисперсии в общепринятом смысле у такой поверхностной волны нет, если только не учитывать естественную дисперсию анизотропных сред. Это уравнение, на самом деле, описывает зависимость фазовой скорости такой волны $\gamma = \frac{k_z}{k_0}$ от параметров среды — ε_1 , ε_2 , ε_3 , φ .

Для одноосной структуры аналогичное уравнение выглядит следующим образом:

$$\gamma^2 = (\varepsilon_1 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi) - T_o T_e, \quad (13)$$

где $T_o = -i\tau_o$, $T_e = -i\tau_e$ — поперечные волновые числа для обыкновенной и необыкновенной волн (8).

Из уравнения (13) можно в явном виде выразить продольное волновое число (или фазовую скорость) поверхностной ЭМ волны:

$$\gamma^2 = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \varphi}{2} \left(\sqrt{4 \frac{\Delta_{31}}{\varepsilon_1} \cos^2 \varphi + 1} - 1 \right), \quad \text{где } \Delta_{31} = \varepsilon_3 - \varepsilon_1. \quad (14)$$

Аналогичное выражение для случая двусосных сред не столь компактно, однако для полноты картины можно привести и его:

$$\gamma^2 = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_1 - \varepsilon_{33}} + \frac{\sqrt{(\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_{33})^2 - 4 \varepsilon_1 \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{22})} - (\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \varepsilon_{33})}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_{33})}, \quad (15)$$

где, напомним, $\varepsilon_{22} = \varepsilon_2 \cos^2 \varphi + \varepsilon_3 \sin^2 \varphi$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_2 \sin^2 \varphi + \varepsilon_3 \cos^2 \varphi$ (см. (2)).

Остаётся заметить, что уравнение (15) переходит в (14) при замене ε_2 на ε_1 , то есть при переходе к случаю одноосных сред.

Поскольку фазовые скорости поверхностных волн в том и другом случаях зависят лишь от одного свободного параметра φ , приведём, для наглядности, эти зависимости в графическом виде (рис. 3).

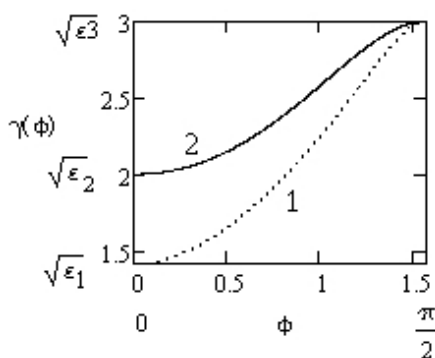


Рис. 3. Продольное волновое число поверхностной волны в зависимости от угла поворота: 1 — одноосные среды, 2 — двусосные

Теперь, когда стали известными все поперечные и продольные волновые числа, можно вернуться к уравнению (11) и вычислить неизвестные ранее константы:

$$A = \frac{-1}{T_1 + T_2}, \quad B = \frac{1}{T_1 + T_2}, \quad C = -A, \quad D = -B. \quad (16)$$

Для одноосных сред выражения для искомых констант имеют вид:

$$A = T_o^3, \quad B = -T_e \varepsilon_1 \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad C = -A, \quad D = -B. \quad (17)$$

Поперечные распределения амплитуд полей можно записать в соответствии с ранее сделанными предположениями, например, для:

$$E_Z(x) = \begin{cases} A \exp(-T_2 x) + B \exp(-T_1 x), & x > 0, \\ C \exp(T_2 x) + D \exp(T_1 x), & x < 0, \end{cases}$$

и т. д. В графическом виде эти поперечные распределения амплитуд полей поверхностной волны представлены на рис. 4.

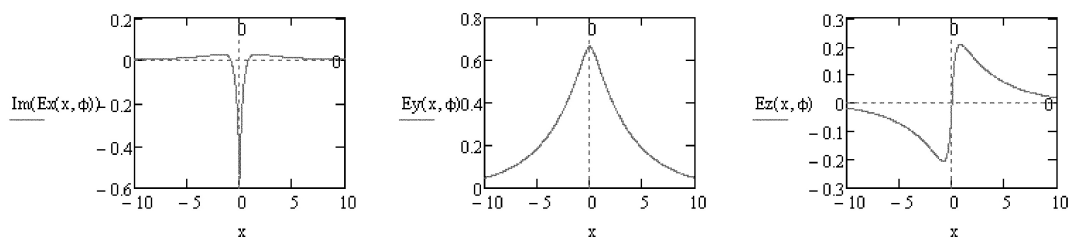


Рис. 4. Поперечные (с точностью до константы) распределения амплитуд компонент электрического поля поверхностной волны: $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 = 4$, $\varepsilon_3 = 9$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Координата x измеряется в единицах длины волны, амплитуды — в относительных единицах

В случае одноосных сред распределения амплитуд подобны приведённым выше.

Сделаем в заключение ещё несколько существенных замечаний. Исходя из (14) и (15), можно показать, что фазовая скорость поверхностной волны оказывается самой медленной из всех фазовых скоростей собственных волн анизотропной среды (направляется аналогия с волной Релея в твёрдом теле). Действительно, продольное волновое число самой медленной из собственных волн анизотропной среды, распространяющейся в направлении OZ , можно получить, если положить равным нулю поперечное число τ_2 (τ_e) в уравнениях (6) или (8). Соответствующие вычисления дают следующие значения: в случае одноосных сред при $\tau_e = 0$ (8) $\gamma_{\min} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_3}{\varepsilon_{33}}}$, для

двуосных сред $\tau_2 = 0$, при этом $\gamma_{\min} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_{33}}}$. Таким образом, продольное волновое число поверхностной волны всегда должно быть больше указанных значений, что, в свою очередь, приведёт к выполнению необходимого условия существования поверхностной волны.

Со стороны максимальных значений γ ограничение происходит тогда, когда собственные поля анизотропной среды становятся ортогональными, т.е. их интерференция невозможна. Вычислить γ , при которой это происходит, можно путём приравняв к нулю скалярного произведения амплитуд собственных векторов напряжённости электрического поля (9) анизотропной среды. Произведя указанные вычисления, получим:

Для одноосных сред $\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\cos \varphi}$. При этом значении γ $\tau_o = \tau_e$ (см. рис. 2а). И

для двуосных сред $\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1^2}{\varepsilon_{33} - \varepsilon_1}}$.

Литература

1. Дьяконов М. И. Новый тип пограничных электромагнитных волн // ЖЭТФ. — 1988. — Т. 94, № 4. — С. 119–123.
2. Аверкиев Н. С., Дьяконов М. И. Электромагнитные волны, локализованные на границе раздела прозрачных анизотропных сред // Оптика и спектроскопия. — 1990. — Т. 68, № 5. — С. 1118–1121.
3. Федоров Ф. И., Филиппов В. В. Отражение и преломление света прозрачными кристаллами. — Минск: Наука и техника, 1976. — 224 с.

UDC 535.012.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148

Surface Electromagnetic Waves at the Interface of Two Anisotropic Media

O. N. Bikeev*, L. A. Sevastianov†

* *Department of Applied Physics*

† *Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The article discusses the existence of surface electromagnetic wave at the interface of a structure formed by two identical anisotropic media, each of which is rotated in opposite directions at an angle relative to the desired direction of propagation of electromagnetic wave.

Earlier, in the pioneering papers on the subject Diakonov M.I. and Averkiev N.S. (1988, 1990) considered only uniaxial anisotropic media. This article presents calculations for the general case of biaxial media. In a particular case, the obtained results describe a case of uniaxial media. The paper does not use any approximation, except, perhaps, the concept of plane waves. Exact analytical expressions were obtained, which relate the values of the phase velocity of the surface wave with an angle of rotation of the axes of symmetry of anisotropic media relative to the direction of the wave vector of the surface wave. In addition, the transverse distributions of the fields of such a wave were found, and these distributions uniquely characterizes this wave as surface wave.

Key words and phrases: surface electromagnetic wave, anisotropic medium, phase velocity, transverse distribution of the field, dielectric tensor

References

1. M. I. Diakonov, New Type of Electromagnetic Waves at the Boundary, JETP 94 (4) (1988) 119–123, in Russian.
2. N. S. Averkiev, M. I. Diakonov, Electromagnetic Waves, Localized at the Boundary of Two Transparent Anisotropic Media, Optica i spektroskopia 68 (5) (1990) 1118–1121, in Russian.
3. F. I. Fedorov, V. V. Filippov, Reflection and Refraction of Light by Transparent Crystals, Nauka i tekhnika, Minsk, 1976, in Russian.

© Бикеев О. Н., Севастьянов Л. А., 2017

УДК 338+ 519.2/.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-149-160

Элементы эконоуправления. Часть 2

А. Майсё

*Всемирный совет трудящихся ядерной промышленности (WONUC)
ул. рю Ларистон, д. 49, Париж, Франция, 75116*

В этой работе продолжается рассмотрение проблемы глобального тренда развития мировой экономики и её управления. Подчёркивается продуктивная роль созидательного труда, энергии и знаний, и их влияния на мировую экономику. Устанавливается связь и различие между термодинамической системой, состояние которой характеризуется энтропией, и экономической системой, характеризуемой в том числе негэнтропией. Рассматривается взаимосвязь негэнтропии с информацией и знанием.

Для сохранения и продолжения своего развития, человечество должно перейти от неограниченного использования ограниченных природных ресурсов к использованию неограниченного ресурса — наших знаний и умения.

Утверждается, что развитие обмена информацией и знаний позволит значительно сократить расходы ограниченных природных ресурсов. А добавление использованных знаний в интегральную стоимость продукции обеспечивает долгосрочное сохранение всех природных ресурсов вместо максимизации на кратковременных промежутках доходов меньшинства.

При реализации такой парадигмы человечество могло бы перейти от способа функционирования, основанного на конфликтных стратегиях в условиях нехватки, к управлению и функционированию в условиях избытка.

Ключевые слова: мировая экономика, ограниченные ресурсы, неограниченные ресурсы, энтропия, негэнтропия, информация, знания, постоянный мир

1. Введение

В след за первой частью статьи, опубликованной в [1], продолжим изучение проблемы глобального тренда развития мировой экономики и её управления.

2. Экономика — замкнутая парадигма в условиях ограниченных ресурсов, приговорённых исчезнуть, или — открытая парадигма в условиях неограниченных ресурсов, могущих использоваться бесконечно?

2.1. К новому определению производственной функции

Экономический анализ традиционно используют, чтобы моделировать деятельность и морфогенез любой социальной системы, государственную деятельность, «производственную функцию», реализуемые в математической форме существующие отношения между внутренними показателями, переменными величинами состояния или показателями производства и внешними выходными показателями, объёмами производимой продукции и услугами.

Традиционно в качестве факторов производства берутся капитал и работа. Когда эти два фактора производства взаимно замещаемы, производственная функция должна, следовательно, быть однородной. Капитал определён тогда «как все различные и воспроизводимые экономические средства, которые путём косвенного употребления позволяют периодически получать доход» (Р. Барр). Природные ресурсы

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2016 г.

Автор благодарит профессора А.В. Крянева (НИЯУ «МИФИ») за перевод второй части статьи на русский язык.

или земля иногда включены в это определение капитала, который расширяется до «всех разнородных и воспроизводимых ресурсов, использование которых позволяет производительным силам увеличить производительность человеческого труда» (Р. Барр).

Многие известные учёные сосредоточили свои исследования на различных формах взаимосвязей: связь между работой и природой (Смит, Рикардо, Маркс и др.); связь между трудом, капиталом и природой (Ж.Б. Сэй, Маршалл, и др.). Маршалл написал даже, что не существует никаких других факторов кроме «двух факторов производства: природа и человек», а различия между связями, предпочитающими природу и работу, происходят из различия, сделанного между землёй, природными ресурсами и капиталом: «работа — отец, а природа — мать всех богатств» (В. Петти) или «работа — прежде всего, взаимодействие, которое происходит между человеком и природой» (Маркс). Для других известных учёных производимая продукция следует из сочетания работы и природы, или, иначе говоря, из сочетания между капиталом, работой и природой: «Производительная способность совмещается и смешивается с капиталом» (Маркс). Иногда деятельность предприятия рассматривается как дополнительный фактор производства, хотя трудно её изолировать и определить её количество. Например, Маршалл предложил включить организацию производства как фактор производства продукции. Имеются также попытки учесть технический прогресс при помощи добавочной переменной величины, зависящей от времени (Соллоу и др.). Но, вопреки всем этим попыткам, у экономической теории есть традиционная тенденция сокращения количества факторов производства вплоть до двух — капитала и работы, связь которых де факто — выражение экономической мысли, которая исключает из поля анализа такие объекты, как природные ресурсы и изобретательную деятельность человека. Бертран де Жувенэль заметил, что в такую производственную функцию «не входят ни вклад человеческой изобретательности, ни вклад сил природы».

Включение знания как фактора производства позволяет учесть замечание Бертрана де Жувенэль. Это включение позволяет принять в расчёт технические достижения, нововведения и новые технологии в экономическом или в менеджерском анализе. Инновационные технологии с первого взгляда кажутся формой, в которой потоки знаний, использованные деятельностью человека, могут быть добавлены в увеличение градиента потока знаний на уровнях и макро-, и микроэкономики. В этом умении использовать информационные потоки и состоит феномен технического прогресса, основанного на знаниях, полученных в образовательных учреждениях, и проявляющегося в менеджменте использования технологических ресурсов. Оно оказывается включённым в процесс развития в виде распределений потоков знаний, измеряемых коэффициентами, которые определяют влияние инноваций на состояние исследуемой системы.

Технический прогресс, плод эффективного менеджмента по использованию технологических ресурсов, не нейтрален. Он — нарушитель спокойствия. Он ставит под сомнение предыдущий порядок. Он выражается генезисом элементов высшей сложности и служит основанием для процесса роста. Он осуществляется путём расширения локальных явлений нестабильности во всей системе. Проблематика, поднятая Марксом относительно несоответствия времени как единицы измерения количества работы, решена включением знаний в продуктивность, что позволяет принять в расчёт параметр «мастерства» среднего трудящегося.

Функция состояния любой экономической системы, то есть её производственная функция, должна иметь форму:

$$Y = f(K, M, U, E), \quad (1)$$

где K — капитал; U — энергия; M — материальные или природные ресурсы, и E — умение.

Применяя законы и принципы кибернетики, Оскар Ланж [2] развил модель производственной функции, где отношения между входными величинами и результатами представлены в обозначениях, обычно используемых в кибернетике

$$Y = TX, \quad (2)$$

которая может быть представлена функцией $Y = f(X)$, где X описывает множество входных величин, Y — множество выходных величин, а T — оператор преобразований, какой бы ни была природа переменных и процессов, проходящих в системе.

Ничто не позволяет брать в качестве первоначальной гипотезы отличную от той, согласно которой уравнение состояния системы должно быть неоднородным, и тем самым общее решение уравнения состояния запишется как сумма двух функций:

$$y(t) = \omega(t) + \psi(t). \quad (3)$$

Первое слагаемое $\omega(t)$ — общее решение однородного уравнения, полученного в предположении, что второе слагаемое равно нулю, следовательно, оно описывает часть системы, замкнутую в смысле И. Пригожина. Второе слагаемое $\psi(t)$ — частное решение неоднородного уравнения, описывающее, следовательно, часть системы, открытую в смысле И. Пригожина.

Общее решение можно записать в виде [2]:

$$y(t) = \omega(t) + \psi(t) = \sum_j q_j(t)e^{\lambda_j t} + \left(\sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m a_{rs} D^r E^{\vartheta s} \right) \right)^{-1} X(t). \quad (4)$$

Первое слагаемое соответствует однородной части:

$$\omega(t) = \sum_j q_j(t)e^{\lambda_j t}, \quad (5)$$

где λ_j — корни характеристического уравнения, а начальные условия определяют коэффициенты $q_j(t)$, представляющие полиномы, степени которых равны кратности корня характеристического уравнения.

Первое слагаемое находится при принятии гипотезы, что поток входных величин $x(t)$ ничтожно мал, по крайней мере для момента t ($x(t) \neq 0$). Это слагаемое — внутренняя структурная составляющая системы и, следовательно, не зависит от внешней части структуры системы. Оно зависит от внутренней структуры системы, то есть в случае, который нас здесь интересует, от природных ресурсов планеты, о которых знаем, что они ограничены с точки зрения использования и подчиняются закону убывающей продуктивности. Это слагаемое описывает функционирование и эволюцию функционировавшей системы как системы закрытой в полной автаркии (планетарной) (за исключением потоков фотонов, выпущенных Солнцем). Заметим, что вид этого слагаемого аналогичен и для характеристического уравнения энтропии.

Второе слагаемое, соответствующее входу, неоднородно. Согласно О. Ланжу, оно равно:

$$\psi(t) = \left(\sum_{r=1}^n \left(\sum_{s=1}^m a_{rs} D^r E^{\vartheta s} \right) \right)^{-1} X(t), \quad (6)$$

где a_{rs} представляет различные величины, получаемые путём воздействия на них оператора пропорциональности, причём некоторые из них могут быть нулевыми; D^r представляет оператор дифференцирования « r -й степени», если $r > 0$, и оператор интегрирования « r -й степени», если $r < 0$; $E^{\vartheta s}$ отражает опережение на ϑs , если $\vartheta s > 0$ и запаздывание на ϑs , если $\vartheta s < 0$.

Для $r = 0$ или $\vartheta s = 0$, D° и E° — тождественные операторы, которые, следовательно, в этом случае можно не учитывать. Предполагается, что система состоит из конечного числа элементов, а порядки интегралов k (количество интегрирований) и производных l (количество последовательных производных) также конечны; m — число учитываемых до текущего момента входных величин, для которых производится суммирование (более подробное описание см. в [2]).

Второе слагаемое получено для $x(t) \neq 0$, то есть для потока ненулевых входных величин. Это второе слагаемое связано с открытостью системы. В нашем случае оно зависит от одного агрегированного природного ресурса, располагаемого человечеством. Производственная функция составлена таким образом из двух слагаемых. Первое слагаемое соответствует функционированию в закрытой системе; второе соответствует открытой части системы, связанной с потоком знаний:

$$Y = Y_i + Y_e. \quad (7)$$

Это соответствует функции Кобба–Дугласа

$$Y(t) = f(K, L) + \text{остаток}, \quad (8)$$

в которой первое слагаемое, однородное по K и L , отражает внутреннюю составляющую функции Ланжа энтропийной природы, относящейся к системе, закрытой в смысле И. Пригожина, и которая отвечает за развитие предсказанного Марксом окончательного крушения капиталистической системы. Второе слагаемое — остаток, о котором знаем, что он представляет значительную долю роста, относящегося к системе, открытой в смысле И. Пригожина, и которое соответствует компоненте входа функции Ланжа.

2.2. Энтропия, негэнтропия и рост

Механизмы функционирования и роста экономических систем могли бы включать в себя следующие две составляющие:

1. С одной стороны, структурные составляющие функции факторов производства энтропийной природы — природные ресурсы M , энергию U и капитал K_M , описывающие функционирование в закрытой системе. Эти составляющие обеспечивают положительное приращение энтропии, а локально по времени — нулевое

$$dS_{\text{interne}} : dS_i \geq 0, \quad (9)$$

что соответствует внутреннему функционированию системы и, следовательно, приводящему к уменьшению ограниченных ресурсов. Производство энтропии соответствует функционированию закрытой и диссипативной системы, управляемой необратимыми процессами, и определяется первым слагаемым производственной функции, её структурной внутренней составляющей;

2. С другой стороны, составляющие входа, функции факторов влияния знаний E и, вероятно, нематериальной части капитала K_i . Эти составляющие соответствуют отрицательному внешнему вкладу в энтропию как результат использования знания

$$dS_{\text{externe}} : dS_e \leq 0, \quad (10)$$

что определяет количество изменений энтропии, связанных с открытостью системы.

Только это второе слагаемое может быть отрицательным, то есть негэнтропией, и этот факт, способный противостоять регрессии системы, чтобы позволять ей развиваться, усиливая уровень её сложности. Производство негэнтропии даётся вторым слагаемым производственной функции, соответствующим её составляющей входа.

Поскольку любая деятельность внутри системы порождена энтропией, то для оценки в этом случае состояния и эволюции системы возможно применить анализ

Георгеску Роежена, согласно которому, с использованием обозначений Пригожина, это состояние определяется уравнением:

$$dS = dS_i + dS_e. \quad (11)$$

Таким образом, функционирование и эволюция всех экономических систем связано с двумя антагонистическими механизмами. В зависимости от того, будет ли окончательный итог энтропийный или негэнтропийный, будет снижение или рост экономики.

1-я возможность: система функционирует как закрытая система (в её структуре преобладает составляющая входа).

Эволюция системы направляется непрерывной дезорганизацией, измеряемой ростом энтропии, что приводит к исчезновению первоначальных структур. Система детерминистическая и характеризуется однородной, непрерывной производственной функцией, дифференцируемой, имеющей форму гамильтониана. Такого представления производственной функции придерживались, например, Вальрес и Самуэльсон. Это — способ функционирования, в который вписывается вся условная экономическая логика сторонников неоклассицизма, либералов, сторонников кейнсианства, «эко последователей Мальтуса». Это — способ функционирования хищного человечества, которое могло бы развиваться только в ущерб Природе. Её эволюции соответствует дезорганизация, измеренной ростом энтропии, что приведёт в конечном счёте к крушению системы (тогда вероятно, что существует функция Ляпунова, положительная и монотонно возрастающая вместе с ростом энтропии системы, определяющая экономический спад).

В этом случае производство благ делается за счёт потребления и разрушения природных ресурсов; человечество идёт навстречу гибели и нет спасательных механизмов. Самое большее, что возможно — задержать фатальный срок с помощью постоянно растущих общественных затрат.

2-я возможность: система функционирует как открытая система (составляющая её входа доминирует в структурной составляющей).

Этот второй способ функционирования системы основан на использовании преимущественно человеческой компетенции. Эволюция — следствие растущего структурного усложнения согласно растущим интегрированием знаний. По мнению Ив Рокарда (1903–1992) [3], все условия, необходимые для появления хаотичных режимов, объединены, так как система обладает четырьмя переменными состояниями и в минимуме располагают тремя степенями свободы. Будущая морфология такой системы не предусмотрена. Она не может быть описана экстраполяцией своей бывшей структуры, обеспечивающей прогноз каждого опасного состояния. Её эволюция сопровождается экономическим ростом, способным бесконечно создавать богатства, не вредя по необходимости окружающей среде. Открытость системы обеспечивается включением потоков новых знаний. Накопление богатств не осуществляется в ущерб природе, создание богатств обеспечивается включением нематериальных ресурсов — знаний. Реализуется постоянная рециркуляция согласно принципу Лавуазье «Ничто не теряется, ничто не создаётся, всё превращается», которая позволяет постоянно возобновлять человечеству необходимые для него материальные ресурсы.

Таким образом, существуют рамки, в пределах которых располагаются все условные экономические анализы. Имеется фатальная эволюция к регрессии, которая соответствует и прогнозу экспертов Римского Клуба, и пессимистическим выводам Н. Георгеску Роежена. Предполагается, что система функционирует как замкнутая, она может двигаться только в сторону деградации. И тогда Маркс оказывается прав.

3. От нехватки к избытку

3.1. Нехватка и ограниченность, ошибочные основополагающие догмы экономики

Согласно теории расширенного производства, сначала неполно сформулированной Марксом и увиденной Лениным в либеральных подходах, макроэкономических подходах, в микроэкономических теориях и т.д., в экономике всё основано на догме, которая кажется очевидной: поскольку планета Земля является шаром конечных размеров, земные ресурсы — ограничены. Ввиду того, что человеческие потребности будут увеличиваться с увеличивающимся количеством жителей планеты, по всей видимости, ресурсы планеты не смогут удовлетворить всем потребностям. Вопросы управления в условиях истощения ресурсов, с одной стороны, и параллельно вопросы распределения ресурсов, с другой стороны, ставятся с самого начала существования человечества. Именно они структурировали общественные организации с древних времён. Понятие нехватки, следовательно, присутствует естественным образом во всех экономических анализах, оно содержится в определении, данном в экономике, и представлено как наука распределения ограниченных средств.

Развитие человечества в условиях ограниченных ресурсов направляется генезисом проклятия, согласно которому понятие нехватки было якобы записано в «гены» природы, в конечном счёте — враждебной природы, которой человек должен уступить своё место. Эта антропологическая фатальность расплавила и объяснила организацию и функционирование всех человеческих обществ. Всё основывается на абсолютной необходимости присваивать себе средства, необходимые для сохранения клана, чем бы то ни было: силой, хитростью или в процессе торговли. Успех, встроены в присвоение ресурсов в этой «борьбе за существование», и построил социальные иерархии наших парадигм: на вершине пирамиды оказываются победители, выигравшие, наиболее сильные, наиболее богатые; внизу социальной пирамиды оказываются слабые, побеждённые, проигрывающие, отвергнутые. Обобщение этого правила социальной иерархии на всё человечество и его постоянство на всём протяжении веков объясняет и оправдывает, вследствие своего несправедливого характера, возвратное существование всех форм конфликтов. Это социальное «функционирование», де факто, способствует постоянным социальным нарушениям нормального функционирования системы. Оно всегда сопровождается войнами, конфликтами, убийствами, ссорами, драками, борьбой «за власть», где победитель сразу же отмечен, его восхваляют и превозносят, а побеждённый побит или уничтожен. «Выигравшие» стратегии даже преподносят как науку и преподают для обоснования успеха.

Каждое направление экономической теории представило свой собственный взгляд, чтобы ответить на эту антропологическую проблематику. Для неоклассических, редуccionистских направлений, спасительного «равновесия» можно было бы достигнуть, начиная с локальных равновесий, осуществляемых на различных рынках. Общие свойства вытекают из микроэкономического поведения агентов, которое, если они реагируют поочерёдно, порождает согласно сетям взаимодействий, сгенерированную общую связанность. Для философов марксизма и последователей кейнсианства и глобализма оптимального урегулирования общего запроса в производстве потребительских товаров и средств производства удаётся достигнуть, при некоторых условиях общего равновесия, украшенного достоинствами потеряннного рая. Они предпочитают рассматривать одно такое неразрывное состояние, способное смоделировать общее поведение частей, которые его составляют, даже если свойства каждой из частей различны. Всё обладает специфическими свойствами, которые несократимы в их носителях и в сетях их взаимодействий при реализации процесса. Равновесия можно достигнуть с помощью установки регулирующих механизмов и/или общественных устройств, приспособленных для этой цели. Для либеральных теорий понятие свободного рынка, регулируемого «невидимой рукой» Адама Смита,

ответ определён как совершенный. Ресурсы тогда свободно обмениваются на основе их цены. «Невидимая рука» приступила бы к справедливому и совершенному перераспределению ресурсов, располагаемых человечеством.

Этот подход был широко распространён, по крайней мере, до Первой мировой войны. В начале XX века большая часть наций и их руководителей примыкала к идеям немецкого генерала Гельмута фон Мольтке, который не стеснялся утверждать, что «постоянный мир — мечта, чудесная мечта, конечно, но он будет всегда оставаться мечтой». Это созвучно речам английского писателя Джона Рюскен: «Война — основание всех человеческих достоинств». В просторном хранилище накопленных достоинств человечества военные достоинства — те, которые подтверждают престиж, власть и признание нации. Человек в рамках такого анализа — воинственное животное, оправдывающее аргумент: всегда были войны, следовательно, всегда будут войны.

Какими бы ни были их различия, господствующие экономические теории основываются на существовании замкнутой экономической системы, которую Вальрес характеризует, написав — «Экономика — одновременно обширная и простая система, которая походит в своей совершенной красоте на астрономический мир». Существование обратимых процессов, позволяющих щедрой природе спонтанно переработать отходы деятельности человека, также заложен в этот постулат.

При «термодинамическом» подходе философы марксизма видят в любом превращении разрушение энергии и материальных объектов, несущем общее разрушение системы, которая сможет развиваться только черпая силы, которые её оживляют. Существующая тенденция снижения производства, истощение природных ресурсов ведут согласно энтропийному закону к однородному обществу, созданному из равных индивидов, владельцев производительных средств, где не существуют больше социальные или государственные принуждения. Энтропия системы достигла своего максимума. Силы, которые управляли его эволюцией, исчезли, и система структурно умерла. В таком случае человечеству уготована судьба, которой так опасался Бергсон, когда этот вывод следовал из его анализа развития экономики, основанного на понятии энтропии.

Итак, так как Земля — закрытая изолированная система (существование потоков фотонов с Солнца не опровергает закрытость, взятой согласно определению И. Пригожина), ресурсы которой ограничены, мы должны с этим смириться и должны будем принимать решения, предложенные «экопоследователями Мальтуса», чтобы пытаться «задерживать» окончательный «Конец Света»?

Принимая силу и принуждение как единственные ответы на управление нехваткой ресурсов, осудили бы они человечество, которому уготовано проживать в состоянии войны?

Совершенно понятны голоса молодёжи, которые борются с таким отрицательным видением будущего человечества, тогда как, например, Огюст Комт отметил силу воздействия альтруизма на эгоизм: «Альтруистическое отношение сводит всю святую мораль в закон “жить для другого”, позитивизм означает справедливое постоянное удовлетворение различных личных инстинктов в качестве необходимого процесса для нашего материального существования, на котором всегда основываются наши высшие качества» [4].

Но достаточно ли этого?

3.2. «Экопоследователь Мальтуса» как подразумеваемое мысленно «политкорректное» определение

Такая гангрена, как пессимистическое видение судьбы планеты Земля, сумела парализовать общественное сознание человечества. Человек мог бы жить и развиваться, только используя резерв, ограниченный ресурсами, которыми располагает природа. Он использует природные ресурсы, которые для него необходимы, затем их изменяет, чтобы приспособить к потреблению, потребляет и выбрасывает в виде отходов, способствующих загрязнению девственной планеты разными видами загрязнения.

Деятельность человека, следовательно, хищная, осуществляемая, таким образом, в ущерб природе. Некоторое равновесие смогло бы занять место между загрязнением, генерированным деятельностью человека, и способностью природы к самоочищению, переваривая эти загрязнения, пока население мира не превзошло «границу», зафиксированную некоторыми исследователями на 1 миллиарде [5]. Эта «граница» соответствовала бы «золотому возрасту» человечества, человечества, живущего в гармонии с дикой, но живой, щедрой и доброжелательной природой.

С развитием множества более высокопроизводительных технологий, изъятие доступных природных ресурсов в резерв их дальнейшего использования стало более значительным. Более того, возврат отходов в природу стал выше. В этом подходе увеличение уровня жизни человечества «эко последователь Мальтуса» может обеспечить только в ущерб природе. Очевидно, что все ресурсы планеты не смогут позволить в настоящее время всем гражданам мира обеспечить уровень жизни, сравнимый с уровнем жизни одного среднего американца, живущего в 2015 году [6].

В этом контексте ограниченных ресурсов единственное средство повышать уровень жизни наиболее лишенных потребовало бы уменьшения уровня жизни более зажиточных — то, что кажется проблематичным, если только проблема нанесения ущерба окружающей среде была решена (парниковый эффект, кислотные дожди, загрязнение атмосферы, опустынивание, качество воздуха и воды и т.д.). Даже создание организаций, ответственных за сохранение окружающей среды, не является достаточным, чтобы ограничивать ухудшение ситуации с загрязнением, вызванным растущим потреблением.

Для «экопоследователей Мальтуса» отравляющие загрязнения производительного цикла и потребления должны быть устранены. Одновременно должно поддерживаться привилегированное употребление возобновляемых ресурсов, не наносящее ущерб человечеству. Отсюда их акции против развития определённых технологий или подчёркнутое употребление возобновляемых ресурсов и проведение таких акций, как создание права среды, наказывающее «виновных», или принятие новой налоговой системы. Следует отметить, что авторы этих мер признают, что они будут только паллиативами, позволяющими, самое большее, задержать фатальный финал только на несколько десятилетий.

«Либеральное» решение более не воодушевляет. После банкротства коммунистических систем ответ, который не вызывается, чтобы смягчать отравляющие результаты потребления, имеющие многие формы из-за нехватки ресурсов, — капиталистическое понятие рынка и понятие сходной цены одновременно и как камень преткновения, и как краеугольный камень. Законы рынка были бы исправляющим элементом всех нарушений, предполагающих их исправление в масштабе планеты путём глобализации решаемых проблем.

Для сторонников неоклассицизма и либералов существование детерминистических механизмов должно было бы вызвать исправление, спонтанное ко всем нарушениям. В этом подходе рынок используется для ссылки на экономические механизмы. Ввиду того, что ничто не сдерживало бы свободное функционирование рынка, законы, которые его регулируют, «законы рынка», «невидимая рука», отмеченная Адамом Смитом, позволили бы исправлять нарушения. Ущерб, причинённый окружающей среде, в этой логике, будучи связан с нарушениями, исправлялся бы с помощью механизмов, которые создают законы рынка. Такие механизмы должны были бы суметь ликвидировать связь: рост потребления \Rightarrow загрязнения \Rightarrow истощение природных ресурсов. В этом подходе принято в качестве леммы, что с помощью последовательности механизмов, спонтанных по отношению к рынку, то есть действующих на коротком промежутке, можно решить проблемы урегулирования на длительный срок, предвосхищая их появление.

В рамках этого анализа как разумное решение — создание рынка природных ресурсов, отходов или загрязнений при условии мониторинга природных ресурсов и характера производимой из них продукции, ограничивая или даже делая невозможным перерасход ресурсов. Участники рынка должны были бы изменить своё поведение относительно формирования цен, которое должно отражать не только

стоимость товаров, но также их нехватку. Настоящая цена, отражающая «напряженные нехватки», таким образом, согласно Р. Барру (см. выше) «ориентирует товары и производственные мощности к рабочим местам, для которых они наиболее необходимы и где их использование будет наиболее действенным». «Экономьте меня, потому что я дорог, подготовьте меня, потому что я редок» напоминает нам П. Массе.

Такое использование производственных мощностей, следующее из механизмов регулирования ценами, — результат компромисса, предпочитающего короткий промежуток времени длительному сроку. Этот призыв к механизмам рынка, чтобы исправлять любое производство, предпочитающее ближайшее будущее в ущерб длительному сроку. Такой подход игнорирует заботу о благе будущих поколений, на которое влияют принятые сейчас решения под влиянием механизмов, ориентированных на кратковременные промежутки. Можно также задать вопрос о соответствии существующих механизмов платежей, связанных с любой ответственностью в вопросе об охране природной среды. Нынешнее поведение следует из отношений, которые не воспринимают тот факт, что экономика должна рассматриваться как социальный институт при условии социальной ответственности всех её участников.

Во всех этих подходах, экономическом и экологическом — два типа мира, служащие антиподом один другому. Один, где стоимость товара, произведённого предпринимателем, учитывает потребительскую стоимость товара, предоставленного в наше распоряжение любезно Природой. Другой, где торгуемые товары могут быть присвоены предпринимателем, наличествует бесплатное предоставление товаров природой предпринимателю. В одном случае учитывается стоимость производства, в другом отсутствует стоимость производства. В одном случае учитывается истощаемость ресурсов и учёт этого в цене на товар; в другой действует фундаментальный принцип неистощимости ресурсов, и как следствие, их бесплатность. Итак, свободно извлекая выгоду из природных ресурсов, такие участники рынка на самом деле только и делают, что злоупотребляют своей безнаказанностью. Они добиваются единственной цели — своей выгоды в условиях нехватки природных ресурсов. Фактически собственность на эти товары — коллективная. Тогда становится очень трудным оправдывать присвоение стоимости на такой товар иначе, чем желанием хищника по отношению к другим.

Все эти «исправляющие механизмы» появляются именно для того, чем они являются в действительности, чтобы быть временными паллиативами, не желающими никоим образом создавать основания политики, которая претендовала бы быть ответственной за будущее человечества и за долгосрочное сохранение планеты.

Оставаясь в жёстких рамках постулата закрытой парадигмы ограниченных ресурсов, ответы, принесённые различными социально-экономическими течениями, не способны дать удовлетворительный ответ на вызовы, связанные с длительным развитием, проблемами окружающей среды, экономическим ростом и социальной справедливостью. Ограничивая видение мира замкнутой системой в ограниченных ресурсах и не ставя под сомнение основополагающие догмы экономики, решения, предложенные «экопоследователями Мальтуса», либералами, философами марксизма, представителями альтернативных направлений и т.д., включаются в подход фаталиста, желающего самое большее — задерживать наступление неумолимого фатального финала. Согласно этой логике, человек — хищник, у которого нет места в естественном порядке, он должен был бы разрушать, чтобы выживать. Во всех этих подходах у человека когнитивных способностей для них нет места.

3.3. От постоянного состояния «длительных» войн к возможности сохранения постоянного мира

В течение длительного времени человечество жило согласно способу беззаботного использования природных ресурсов. Социальные парадигмы, которые следовали один за другим на протяжении истории человечества, функционировали, предлагая торговые товары и услуги, позволяющие на короткое время улучшение условий жизни, не занимаясь производством товаров для будущих поколений [7]. Эта

бессознательная эксплуатация природных ресурсов ведёт к их истощению согласно процессу, описанному законом убывающих доходов Рикардо.

Человечество жило и функционирует в открытой системе, в которой один из ресурсов неограничен — человеческое мышление. Экономические процессы в большей части случаев не являются обратимыми, они необратимы. Первоначальная значимость запасов природных ресурсов, их относительно лёгкая доступность долго скрывала тот факт, что это функционирование было фундаментально регрессивным и вело не к прогрессу, а к деградации и к упадку. Уровень усиленного загрязнения, с которым мы теперь сталкиваемся, напоминает нам, что этот тип эволюции не может продолжиться бесконечно.

Если возможно, что какие-то экономические процессы смогут быть консервативными и обладать прогрессивной динамикой, общее правило требует, чтобы такая система была диссипативна. Лапласовская точка зрения для универсальной дифференциальной системы, чьи состояния тождественно повторяются бесконечно с возможностью параметризовать все состояния, не может быть использована как фундаментальный постулат Экономики. Нет инварианта для энергии и материальных ресурсов. В ней, следовательно, может быть только жизнь и смерть, это — только вопрос времени.

Предприятия, организации, человечество являются термодинамическими системами, функционирование которых основано согласно принципу необратимых процессов, использующих входные ресурсы и генерирующих выходную продукцию, имеющую двойственную форму: прогрессирующую и деградирующую. Любой вид, наделённый жизнью, каким бы он ни был — растение, насекомое, животное или человек — может «быть» и жить только изменяя свою среду. Что бы не происходило, человечество есть и останется производителем отходов. Для удовлетворения своих потребностей человек обязан использовать ресурсы. Он их изменяет, чтобы приспособлять их к своим потребностям, их потреблять, их использовать и их превращать в отходы. В этой логике замкнутой системы единственный исход для человечества — крушение и руины.

Общепринятые решения, рекомендованные, чтобы пытаться избежать этой гибельной судьбы, основаны на ошибочной интерпретации второго принципа термодинамики, который связан с рассеянием энтропии. Приводить энтропию к рассеянию — это значит предполагать, что «экономное» управление природными ресурсами могло бы переключиться на общий энтропийный подход. Какими бы ни были «экономики», которые можно было бы использовать в рамках этого анализа, наступление регрессии остаётся неизбежным. Смирившись с тем, что приходится жить в жёстких рамках замкнутой системы в условиях ограниченных ресурсов, не ставя под сомнение основополагающие догмы Экономики, предложенные решения могут только задерживать неумолимо фатальный конец.

Использование знаний позволяет изменить фатальность окончательного упадка человечества. Соглашаясь с логикой, высказанной Лавуазье, «Ничто не теряется, ничто не создаётся, всё превращается», сказанное идентично росту цены из-за более интенсивного употребления энергии, знаний и капитала, включая созидательную деятельность человека, путём добавления нематериальных средств, сгенерированных человеческим изобретательством, реализованным в материальной продукции и, следовательно, созданием всё больше и больше рабочих мест. Наши общества способны освободиться от «фатальности второго закона термодинамики» (Л. Брийон).

«Пресвятые законы рынка» могут быть применены без каких-либо ограничений к результатам производительного процесса. Но они не могут быть применены никоим образом к входным ресурсам, то есть к знанию, деньгам, воде, энергии, и т.д., ограничивающим, таким образом, области, в которых были бы ответственны государства и те, кто должен быть наделён инициативой предпринимателей.

Если неэнтропийная экономика основывается на способности человечества функционировать в режиме рециркуляции, то естественно задать вопрос — а такой режим всеобщей рециркуляции возможен? Положительный ответ дан французской ядерной отрасли, поскольку возможно вторичное использования ядерного

топлива, перерабатываемого на заводах Hague, отделяя уран и плутоний и повторно используя топливо для выработки ядерной энергии. Франция потенциально может осваивать технологии, позволяющие полную рециркуляцию всех продуктов общего цикла производства и потребления населения (см. рис. 1).

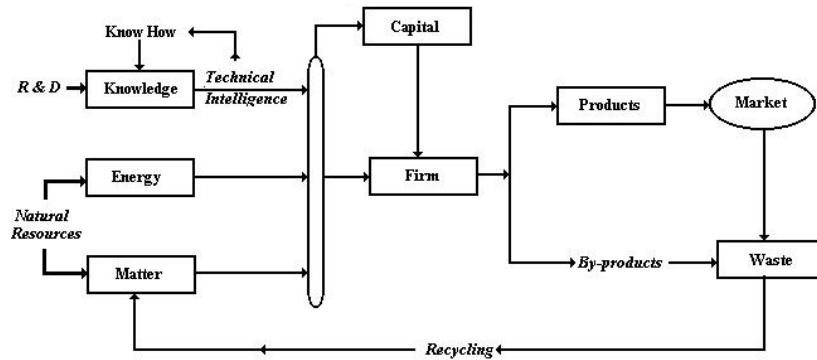


Рис. 1. Полная рециркуляция всех продуктов общего цикла производства и потребления населения

Знание рождается в открытом мире, в мире без границ, в мире, где человек раскрывает свои созидательные способности. Использование человеческой созидательной способности позволяет перейти от энтропийной экономики к неэнтропийной экономике. Знание, используемое в его наиболее широкой форме, то есть общее знание, ноу-хау и знание существования, таким образом, — ключ для успешного функционирования и эволюции социально-техничко-экономической системы, обеспечивающей созидательный экономический рост благосостояния, следящей за качеством окружающей среды и окончательно удаляющей проблему истощения ресурсов, устанавливая на продолжительный период режим достаточности ресурсов.

4. Заключение

Если поставить цель — обеспечить сохранение и продолжение своего развития, человечество должно перейти от неограниченного использования ограниченных природных ресурсов к использованию неограниченного ресурса — наших знаний и умения.

Ключ длительного развития, примиряющего экологию и экономику и утверждающего социальное достижение для всех и поддержанного всеми, заключается в умелом управлении использованием знаний, то есть включением их во всю производимую продукцию и обслуживание. Это достигается растущим добавлением использованных знаний в интегральную стоимость продукции, обеспечивающей долгосрочное сохранение всех природных ресурсов, а не в максимизации на кратковременных промежутках доходов меньшинства.

При реализации такой парадигмы было бы возможно увидеть будущее для человечества, в котором исчезнет быстрое истощение природных ресурсов. Человечество могло бы перейти от способа функционирования, основанного на конфликтных стратегиях в условиях нехватки, к управлению и функционированию в условиях избытка.

Литература

1. *Maïscë A.* Элементы эконоуправления. Часть 1 // Вестник Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», сер. «Прикладная математика и информатика». — 2016. — Т. 5, № 5. — С. 462–468.
2. *Lange O.* Introduction à l'économie cybernétique. — Paris: Sirey, 1976.
3. *Rocard Y.* Thermodynamique. — Paris: Masson, 1967.
4. *Комт О.* Позитивистский Катехизис. — 1852. — С. 49–50.
5. United Nations. Cairo Conference. — 1994.
6. Club de Rome. Limits to Growth. — 1972.
7. *Maïsseu A.* Histoire Economie et Société. — 1992. — Vol. 4.

UDC 338+ 519.2/.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-149-160

Elements of Gestalteconomy. Part 2

A. Maïsseu

*World Council of Nuclear Workers (WONUC)
49 rue Lauriston, Paris, France, 75116*

In this article proceeds with consideration of a problem of a global trend of development of world economy and its management. The productive role of a constructive labour, energy and knowledge and their influence on world economy is underlined. Connection and difference between the thermodynamic system which condition is characterized by entropy, and the economic system characterized, including, by the negentropy is established. The interrelation between the negentropy and the information and knowledge is considered.

To maintain and continue its development, mankind must go from unlimited use of limited natural resources to the use of an unlimited resource — our knowledge and skills.

It is stated that the development of the exchange of information and knowledge will significantly reduce the cost of limited natural resources. And adding of the knowledge used into the integral cost of production ensures long-term conservation of all natural resources, instead of maximizing short-term income of the minority.

When implementing such a paradigm the humanity could go from the method of operation, based on the strategies of conflict in conditions of shortage, to the management and operation under conditions of excess.

Key words and phrases: economics, limited resources, unlimited resources, production function, entropy, negentropy, information, knowledge, permanent peace

References

1. A. Maïsseu, Elements of Gestalteconomy. Part 1, Vestnik natsional'nogo issledovatel'skogo yadernogo universiteta "MIFI" 5 (5) (2016) 462–468, in Russian. doi:10.1134/S2304487X16050084.
2. O. Lange, Introduction à l'économie cybernétique, Sirey, Paris, 1976.
3. Y. Rocard, Thermodynamique, Masson, Paris, 1967.
4. A. Comte, The positivist Catechism, 1852, in Russian.
5. United Nations. Cairo Conference (1994).
6. Club de Rome. Limits to Growth (1972).
7. A. Maïsseu, Histoire Economie et Société, Vol. 4, 1992, Ch. De la Féodalité à la Médiacratie.

Теоретическая механика

UDC 533.6.013

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-161-169

General Integral for a Class of Non-Steady Atmospheric Flights and Applications to Trajectory Analysis

D. M. Azimov*, R. G. Mukharlyamov†

* *Department of Mechanical Engineering
The University of Hawaii at Manoa*

2540 Dole St., Holmes 202A, Honolulu, HI, 96822, USA

† *Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

A complete analytical integration of the aircraft kinematic and dynamic equations of motion is presented. Different applications of defined integrals to trajectory analysis are considered. The dynamic equations are obtained under the assumptions, that acceleration due to aerodynamic lift, the difference between the accelerations due to propulsive thrust and aerodynamic drag are not changed, the aircraft body rate about the velocity axis is zero and the sideslip angle is zero. The general integral of these equations consists of six independent first integrals of motion and describes a class of non-steady flight trajectories in a maneuver plane. It will be shown that the dynamic equations can be derived and completely integrated in a closed-form for more general assumptions. The problem of computing thrust for a given trajectory has been considered. The trajectory is defined by constraint equation. Constraints stabilization equations, which have asymptotically stable trivial solution, are constructed. Explicitness can make the integrals applicable to modeling the trajectories of spacecraft, re-entry vehicles and missiles, and to the design of on-board targeting and guidance. An illustrative example is presented.

Key words and phrases: analytical integration, general integral, analytical solutions, aircraft nonlinear model, programmed constraints

1. Introduction

This paper presents a complete analytical integration of the aircraft kinematic and dynamic equations obtained under the following assumptions: (a) acceleration due to aerodynamic lift, and the difference between the accelerations due to propulsive thrust and aerodynamic drag are not changed; (b) the aircraft body rate about the velocity axis is zero; (c) the sideslip angle is zero. It will be shown that the general integral of these equations consists of six independent first integrals which lead to the closed-form analytical solutions. The studies of the existing literature show that the aircraft equations can be integrated in a closed-form for some specific cases of quasi-steady and non-steady flights, including the cases of climb and cruise with constant altitude, velocity or lift acceleration, negligible flight path angle or small angle of attack [1, 2]. In some cases of optimal quasi-steady cruise trajectories, the equations of motion have been implicitly integrated or reduced to quadratures [2]. It should be noted that the studies presented in this paper were initiated with the purpose of integration of the 3rd order differential equation,

$$\frac{d\ddot{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|^2} \times (\ddot{\mathbf{r}} - \mathbf{g}), \quad (1)$$

obtained for the nonlinear model of the aircraft tracking problem under the following assumptions: (1) acceleration due to aerodynamic lift, and the difference between the

Received 7th October, 2016.

The work is performed under support of RFBR, grant No 16-08-00558 A.

accelerations due to propulsive thrust and aerodynamic drag are not changed; (2) the aircraft body rate about the roll axis is zero; (3) the angle of attack and the sideslip angle are zero [3–5]. Note that the left hand side of Eq. (1) represents the jerk vector, and its expression does not explicitly depend on the accelerations due to thrust, drag and lift. Analysis show, however, that as the drag is a function of the square of the velocity, it would be very difficult to hold the lift, and the thrust-drag accelerations constant with zero angle of attack. In this paper, it will be shown that Eq. (1) can also be derived and completely integrated in a closed-form for a more general assumptions (a-c) with non-zero and variable angles of attack. It is demonstrated that the assumptions (a-b) can significantly extend the applicability of Eq. (1). Explicitness can make the integrals applicable to modeling the trajectories of spacecraft, re-entry vehicles and missiles, and to the design of on-board targeting and guidance [4].

2. Equations and Integrals for Non-steady Flight

Consider the F-frame formed by the triad of orthogonal unit vectors \mathbf{e}_1^F , \mathbf{e}_2^F , \mathbf{e}_3^F and with the origin O at the aircraft center of mass (COM): the unit vector \mathbf{e}_1^F is aligned with the velocity vector, \mathbf{e}_3^F forms the angle ϕ with lift and \mathbf{e}_2^F completes the right handed system (see Fig. 1). The angle ϕ is measured in the $O\mathbf{e}_2^F\mathbf{e}_3^F$ -plane. It is assumed that the non-steady flight trajectory lies in a vertical plane xz containing \mathbf{e}_1^F and \mathbf{e}_3^F . Then if \mathbf{P} is the sum of external forces acting on the aircraft, that is thrust, weight, drag and lift, then [1]

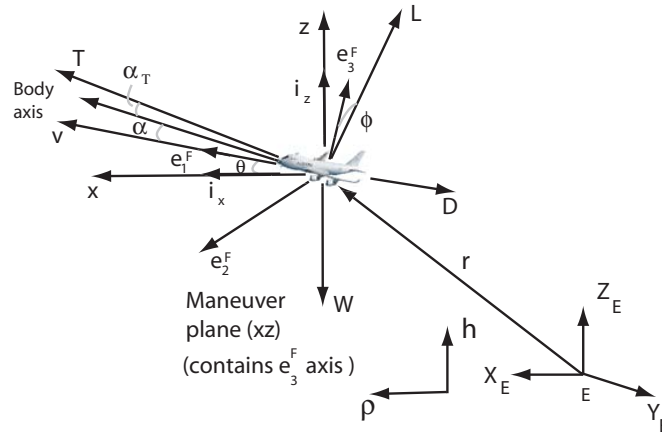


Figure 1. To the nonlinear aircraft model

$$\mathbf{P} = \mathbf{W} + \mathbf{T} + \mathbf{D} + \mathbf{L}$$

can be rewritten in the form:

$$\mathbf{P} = (T \cos \bar{\alpha} - D - g_0 \sin \theta) \mathbf{e}_1^F + [(T \sin \bar{\alpha} + L) \cos \phi - g_0 \cos \theta] \mathbf{e}_3^F,$$

where $\bar{\alpha} = \alpha + \alpha_T$ is the angle between the thrust vector and the velocity vector. If $\mathbf{a} = \dot{v} \mathbf{e}_1^F + v \dot{\theta} \mathbf{e}_3^F$, then with the assumptions given above, the Newton's second law yields the following equations valid in the maneuver xz -plane [3]:

$$\dot{v} = -g_0 \sin \theta + c_1, \quad v \dot{\theta} = -g_0 \cos \theta + c_2, \quad \dot{c}_1 = 0, \quad \dot{c}_2 = 0, \quad (2)$$

where

$$c_1 = \frac{g_0}{W}(T \cos \bar{\alpha} - D), \quad c_2 = \frac{g_0}{W}(T \sin \bar{\alpha} + L) \cos \phi \quad (3)$$

with $\phi = \text{const}$. Complete analytical integration of Eqs. (2) and application of the resulting solutions to trajectory analysis is the main purpose of this paper. As will be shown below, the complete integration of Eqs. (2) reveals a general integral which consists of six independent first integrals with their constants. These constants will be denoted below by η_i , ($i = 1, \dots, 6$), and one can accept that $\eta_1 = c_1 = \text{const}$ and $\eta_2 = c_2 = \text{const}$. Eqs. (2) are valid for a flight with the assumptions (a-c) in the maneuver plane. The first integrals of Eqs. (2) for η_1 and η_2 represent the relationships between the velocity magnitude, flight path angle, the propulsive and aerodynamic accelerations.

3. Integrals for Velocity Vector, Time and Position Vector

Integrals for magnitude of velocity vector

In this subsection, it will be shown that the first two equations of Eqs. (2) can be explicitly integrated in elementary and transcendental functions in terms of the angle θ . By considering θ as an independent variable instead of time, t , we have $\dot{v} = dv/dt = dv/d\theta d\theta/dt$. Then by eliminating $d\theta/dt$ from Eqs. (2), one can obtain

$$\frac{dv}{d\theta} v^{-1} = \frac{-g_0 \sin \theta + c_1}{-g_0 \cos \theta + c_2}, \quad (4)$$

which can be integrated in the form [6]:

$$\begin{aligned} v(\theta) &= \eta_3(a + b \sin x)^{-1} \exp \left[\frac{2A}{d_1} \arctan \frac{a \tan \bar{x} + b}{d_1} \right], & [a^2 > b^2], \\ v(\theta) &= \eta_3(a + b \sin x)^{-1} \left[\frac{a \tan \bar{x} + d_3}{a \tan \bar{x} + d_4} \right]^{(A/d_2)}, & [a^2 < b^2], \\ v(\theta) &= \eta_3(a + b \sin x)^{-1} \exp \left[\frac{A}{a} \tan \left(\bar{x} - \frac{\pi}{4} \right) \right], & [a^2 = b^2], \end{aligned} \quad (5)$$

where η_3 is the integration constant, $x = \theta + \frac{\pi}{2}$, $\bar{x} = x/2$ and $a + b \sin x \neq 0$, and the following constants are used:

$$A = c_1, \quad a = c_2, \quad b = -B = -g_0, \quad (6)$$

$$d_1 = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad d_2 = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad d_3 = b - \sqrt{b^2 - a^2}, \quad d_4 = b + \sqrt{b^2 - a^2}. \quad (7)$$

Note that in a particular case when $a + b \sin x = 0$, the system of equations in Eqs. (2) describes a motion with constant v and θ . This case is of a very limited theoretical and practical interest, and not considered in this paper.

Integrals for time

Once $v = v(\theta)$ is determined, the second equation of Eqs. (2) can be integrated as:

$$t = \int_{x_0 - \gamma}^{x - \gamma} \frac{v(x) dx}{a + b \sin x} + \eta_4, \quad (8)$$

which can be reduced to the following final forms:

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\eta_3}{A^2 + a^2 - b^2} \exp \left[\frac{2A}{d_1} \arctan \frac{a \tan \bar{x} + b}{d_1} \right] \left(\frac{A + b \cos x}{a + b \sin x} + \frac{a}{A} \right) + \eta_4, & [a^2 > b^2], \\
 t &= \frac{\eta_3}{A^2 + a^2 - b^2} \exp \left[\frac{A}{d_2} \ln \frac{a \tan \bar{x} + d_3}{a \tan \bar{x} + d_4} \right] \left(\frac{A + b \cos x}{a + b \sin x} + \frac{a}{A} \right) + \eta_4, & [a^2 < b^2], \\
 t &= \frac{\eta_3}{A^2} \exp \left[\frac{A}{a} \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \left(\frac{A + b \cos x}{a(1 + \sin x)} + \frac{a}{A} \right) + \eta_4, & [a^2 = b^2],
 \end{aligned} \tag{9}$$

where η_4 is the new integration constant, $\sin x \neq -1$. As Eq. (1) is a 3rd-order vector differential equation, which describes the motion in the maneuver plane, its complete integration would require to find *six independent first integrals with six scalar integration constants* of motion in the maneuver plane. So far, four independent first integrals and four new constants have been found above, that is η_1 and η_2 in Eq. (2), η_3 in Eqs. (5) and η_4 in Eqs. (9). Eqs. (5) and Eqs. (9) also represent the general solution of Eqs. (2) with constants η_3 , η_4 , c_1 and c_2 .

Integrals for position vector components

It can be shown that the magnitude of the velocity vector and angle between the velocity vector and the local horizon are not enough to uniquely determine the position of the aircraft in the maneuver plane. If $\mathbf{v} = v \cos \theta \mathbf{i}_x - v \sin \theta \mathbf{i}_z$ and $\mathbf{r} = \rho \mathbf{i}_x - h \mathbf{i}_z$, where ρ and h are the aircraft horizontal and vertical coordinates (crossrange and downrange respectively), then the equation $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ written in terms of its components yields

$$\dot{\rho} = v \cos \theta, \quad \dot{h} = v \sin \theta. \tag{10}$$

Noting that $\theta = x - \pi/2$, $\dot{\rho} = d\rho/dx dx/dt$ and $\dot{h} = dh/dx dx/dt$, one can rewrite Eqs. (10) as

$$\frac{d\rho}{dx} = v \frac{dt}{dx} \sin x, \quad \frac{dh}{dx} = -v \frac{dt}{dx} \cos x, \tag{11}$$

Integration of Eqs. (11) yields the aircraft coordinates ρ and h :

$$\begin{aligned}
 \rho(x) &= P \exp \left[\frac{4A}{d_1} \arctan \frac{a \tan \bar{x} + b}{d_1} \right] + \eta_5, & [a^2 > b^2], \\
 \rho(x) &= P \exp \left[\frac{2A}{d_2} \ln \frac{a \tan \bar{x} + d_3}{a \tan \bar{x} + d_4} \right] + \eta_5, & [a^2 < b^2] \\
 \rho(x) &= P \exp \left[\frac{2A}{a} \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \eta_5, & [a^2 = b^2],
 \end{aligned} \tag{12}$$

and

$$\begin{aligned}
 h(x) &= Q \exp \left[\frac{4A}{d_1} \arctan \frac{a \tan \bar{x} + b}{d_1} \right] + \eta_6, & [a^2 > b^2], \\
 h(x) &= Q \exp \left[\frac{2A}{d_2} \ln \frac{a \tan \bar{x} + d_3}{a \tan \bar{x} + d_4} \right] + \eta_6, & [a^2 < b^2], \\
 h(x) &= Q \exp \left[\frac{2A}{a} \tan \left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \eta_6, & [a^2 = b^2],
 \end{aligned} \tag{13}$$

where η_5 and η_6 are the new integration constants, $\bar{x} = x/2$, and P and Q are known functions of x . Eqs. (12) and (13) represent the first integrals of Eqs. (10) (and Eqs. (2)), and allow us to determine the aircraft's horizontal and vertical cartesian coordinates (crossrange and downrange) in the maneuver plane. The first integrals presented in Eqs. (2), (5), (9), (12) and (13) with constants η_i , $i = 1, \dots, 6$ represent the general integral of Eq. (2). Any point on the trajectory can be considered as a target point and the constants can be chosen to achieve this point. Consequently, the targeting problem can be solved at any desired point thereby providing a foundation for the development and design of the targeting and guidance schemes.

4. Expressions for Thrust and Angle of Attack

As mentioned above, the assumptions (a)–(c) can be justified and validated by analyzing the thrust, drag and lift accelerations using the solutions for altitude and velocity, and by comparing the results for the angle of attack and the thrust to existing ranges of these quantities [2, 7, 8]. The assumptions (a) and (b) mean that

$$\frac{T \cos \bar{\alpha} - D}{m} = c_1 = \text{const}, \quad \frac{(T \sin \bar{\alpha} + L) \cos \phi}{m} = c_2 = \text{const}, \quad (14)$$

where [1]

$$\phi = \text{const}, \quad m = \frac{W}{g_0}, \quad D = \frac{1}{2} C_D \rho_a S v^2, \quad L = \frac{1}{2} C_L \rho_a S v^2,$$

and it is assumed that $\phi \neq \pi/2 + k\pi$, $k = 0, 1, 2 \dots$, the drag and lift coefficients, C_D and C_L can be computed according to Ref. [2] and the air density, ρ_a is changed according to the exponential law. From Eq. (14) one can obtain

$$(mc_1 + D) \sin \bar{\alpha} - \left(\frac{mc_2}{\cos \phi} - L \right) \cos \bar{\alpha} = 0. \quad (15)$$

Eq. (15) is a transcendental equation and solvable for $\alpha = \alpha(h, v)$ only by numerical schemes. Once $\alpha = \alpha(h, v)$ is determined, then the thrust can be computed as

$$T = \sqrt{(mc_1 + D)^2 + \left(\frac{mc_2}{\cos \phi} - L \right)^2}. \quad (16)$$

5. Illustrative Example

Consider the example of a flight simulation using the analytical solutions presented above for $a^2 > b^2$. One can compute magnitude of velocity vector, time, altitude and downrange in terms of the angle θ which is assumed to satisfy the inequality: $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$. The following values have been accepted: $t_0 = 0.0$, $v_0 = 250$, $g_0 = 9.8$, $b = -9.8$, $\rho_0 = 28500$, $h_0 = 7000$, $W = 5000$, $a = 10.0$, $A \in [0.1, 0.5]$, $\theta_0 = -10^\circ$, $\Delta\theta = 65^\circ$. The results of the simulations for this case are illustrated in figures 2–4. The plots of the angle of attack and the thrust vs magnitude of velocity are presented in figures 2 and 3. These figures show that when the velocity magnitude is decreased in the beginning of the simulation for ~ 10 ft/s, α is increased for $\sim 0.5^\circ$ and T is decreased for ~ 45 lbs. Analysis has also shown that an increase in values of W leads to the higher values for α and T , and also T is increased together with altitude and Mach number, computed as $M = v/v_a$, where v_a is the speed of sound [2]. From Fig. 4 it can also be seen that each additional value 0.1 to A would yield an increase of the final altitude by only 100 m.

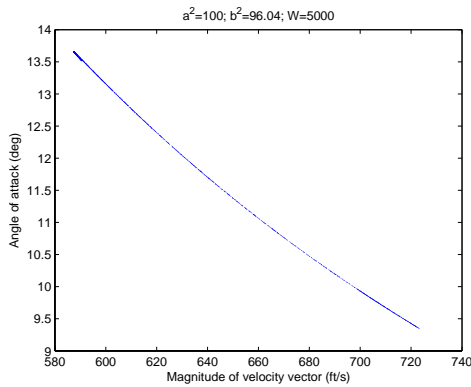


Figure 2. Angle of attack vs magnitude of velocity

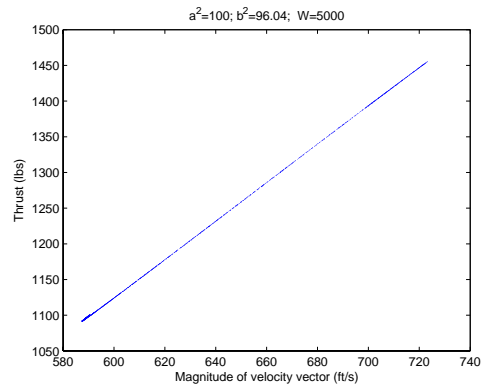


Figure 3. Propulsive thrust vs magnitude of velocity

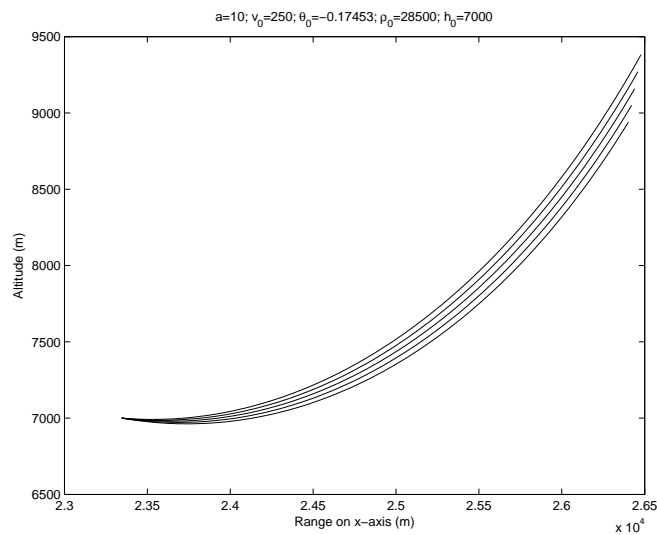


Figure 4. Downrange vs altitude

6. Computation of Thrust with Stabilization of Constraints

Let the aircraft trajectory be given in the form $h = f(\rho)$. Then the equations of a programmed constraint and its derivative are $y = h - f(\rho)$ and $\frac{dy}{dt} = \nu_y$ with [9]

$$\nu_y = -\nu(\sin \theta + f'(\rho) \cos \theta), \quad f'(\rho) = \frac{df(\rho)}{d\rho}, \tag{17}$$

The equations of the perturbed constraint can be given as

$$\frac{dy}{dt} = \nu_y, \quad \frac{d\nu_y}{dt} = K(y, \nu_y, \rho, h, \nu, \theta), \quad K(0, 0, \rho, h, \nu, \theta) = 0, \tag{18}$$

and in particular, $\frac{d\nu_y}{dt} = -cy - k\nu_y$. Eqs. (2), (17) and (18) yield the equation with respect to the thrust:

$$\frac{d\nu_y}{dt} = -\frac{d\nu}{dt}(\sin\theta + f'(\rho)\cos\theta) + \nu(f'(\rho)\sin\theta - \cos\theta)\frac{d\theta}{dt} - \nu f''(\rho)\cos\theta\frac{d\rho}{dt},$$

$$f''(\rho) = \frac{df'(\rho)}{d\rho}.$$

After substitution of these expressions into Eqs. (18), which provides

$$\frac{d\nu_y}{dt} = -\frac{d\nu}{dt}(\sin\theta + f'(\rho)\cos\theta) + \nu(f'(\rho)\sin\theta - \cos\theta)\frac{d\theta}{dt} - \nu f''(\rho)\cos\theta\frac{d\rho}{dt},$$

one can obtain the equation for determination of T : $T = A/B$, where

$$A = mK - (\sin\theta + f'(\rho)\cos\theta)(mg\sin\theta + D) -$$

$$- (f'(\rho)\sin\theta - \cos\theta)(-mg\cos\theta + L\cos\varphi) +$$

$$+ m\nu^2 f''(\rho)\cos^2\theta,$$

$$B = -(\sin\theta + f'(\rho)\cos\theta)\cos\alpha + (f'(\rho)\sin\theta - \cos\theta)\cos\varphi\sin\alpha.$$

Assume now that $K = -cy - k\nu_y = c(f(\rho) - h) + k\nu(\sin\theta + f'(\rho)\cos\theta)$, with $c > 0$, $k > 0$. Then one can show that

$$A = -mch + mk\nu\sin\theta - mg + D\sin\theta + L\cos\varphi\cos\theta +$$

$$+ mcf(\rho) + (mk\nu\cos\theta - D\cos\theta - L\cos\varphi\sin\theta)f'(\rho) +$$

$$+ m\nu^2 f''(\rho)\cos^2\theta,$$

$$B = -\cos\alpha\sin\theta - \sin\alpha\cos\varphi\cos\theta + (\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\cos\varphi\sin\theta)f'(\rho).$$

7. Conclusions

The general integral of the aircraft's kinematic and dynamic equations of motion in the non-steady flight conditions has been obtained. These equations represent the 3rd order vector differential equation, the general integral of which consists of six independent first integrals with six corresponding constants. All integrals are expressed in elementary and transcendental functions in terms of the flight path angle. The applications may also include the flight trajectories in the transonic, low and high supersonic conditions. These results can find potential applications in the design of on-board targeting and guidance schemes.

References

1. N. X. Vinh, *Optimal Trajectories in Atmospheric Flight*, Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam, 1981.
2. M. Asselin, *An Introduction to Aircraft Performance*. AIAA Education Series, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965.
3. R. H. Bishop, A. C. Antoulas, Nonlinear Approach to Aircraft Tracking Problem, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. AIAA 17 (5) (1994) 1124–1130.
4. D. M. Azimov, R. H. Bishop, One Class of Nonlinear Model Solutions for Flight Vehicles and Applications to Targeting and Guidance Schemes, in: *Advanced Maui Optical*

- and Space Surveillance Technologies Conference (AMOS). Maui, Hawaii. September 11–14, 2012, 2012.
5. D. M. Azimov, On One Case of Integrability of Atmospheric Flight Equations, *AIAA Journal of Aircraft* 48 (5) (2011) 1722–1732.
 6. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press, New York, 1965, fourth Edition, 1965. See formulas TI(344), 2.552(2), TI(250), 2.555(3).
 7. A. I. Matyuhin, *Control of Motion of Mechanical Systems*, Fizmatlit, Moscow, 2009, in Russian.
 8. A. A. Burov, I. I. Kosenko, The Lagrange Differential-Algebraic Equations, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 78 (6) (2014) 587–598, in Russian.
 9. R. G. Mukharlyamov, Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Constraints, *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2015, Vol. 54, No. 1, pp. 13–26. 54 (1) (2015) 13–26, in Russian.

УДК 533.6.013

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-161-169

Общий интеграл для одного класса нестационарных атмосферных летательных аппаратов и приложения для анализа траекторий

Д. М. Азимов*, Р. Г. Мухарлямов†

* Кафедра машиностроения
Гавайский университет в Маунао
ул. Доул, 2540, Холмс 202А, Гонолулу, США, 96822

† Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Представлено полное интегрирование уравнений кинематики и динамики движения самолёта. Рассмотрены различные применения полученных интегралов к анализу траекторий. Уравнения динамики получены в предположении, что разница между ускорением, вызванным аэродинамической подъёмной силой, и ускорением тяги не меняется, направление курса самолёта относительно продольной оси остаётся постоянным, угол атаки и угол скольжения равны нулю. Общее решение состоит из шести первых интегралов уравнений движения и описывает множество траекторий в вертикальной плоскости. Показано, что уравнения динамики могут быть получены и проинтегрированы в замкнутой форме при более общих предположениях. Рассматривается задача определения величины тяги, соответствующей данной траектории, заданной уравнением связи. Строится уравнение возмущений связи, имеющее асимптотически устойчивое тривиальное решение. Предлагаемый метод построения интегралов может быть использован в задачах построения траекторий космических аппаратов, ракет и спускаемых аппаратов, а также при проектировании бортовых систем целеуказания и наведения. Приводится иллюстрационный пример.

Ключевые слова: аналитическое интегрирование, общий интеграл, аналитические решения, нелинейная модель самолёта, программные связи

Литература

1. Vinh N. *Optimal Trajectories in Atmospheric Flight*. — Amsterdam: Elsevier Scientific Publishing Company, 1981. — 402 p.
2. Asselin M. *An Introduction to Aircraft Performance*. AIAA Education Series / Ed. by J. Przemieniecki. — Ohio: Write-Patterson Air Force Base, 1965. — 334 p.
3. Bishop R., Antoulas A. Nonlinear approach to aircraft Tracking Problem // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. AIAA. — 1994. — Vol. 17, No 5. — Pp. 1124–1130.

4. *Azimov D., Bishop R.* One Class of Nonlinear Model Solutions for Flight Vehicles and Applications to Targeting and Guidance Schemes // Advanced Maui Optical and Space Surveillance Technologies Conference (AMOS). Maui, Hawaii. September 11–14, 2012. — 2012.
5. *Azimov D.* On One Case of Integrability of Atmospheric Flight Equations // AIAA Journal of Aircraft. — 2011. — Vol. 48, No 5. — Pp. 1722–1732.
6. *Градштейн И., Рыжик И.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматлит, 1963. — 1100 с.
7. *Матюхин В.* Управление механическими системами. — М.: Физматлит, 2009. — 320 с.
8. *Буров А., Косенко И.* О дифференциально-алгебраических уравнениях Лагранжа // Прикладная математика и механика. — 2014. — Т. 78, № 6. — С. 818–832.
9. *Мухарлямов Р.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2015. — № 1. — С. 15–28.

© Azimov D. M., Mukharlyamov R. G., 2017

УДК 531.31:62-56

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-170-181

Управление процессом безударного захвата непредсказуемо движущегося объекта мобильным манипуляционным роботом

И. А. Мухаметзянов, О. И. Чекмарёва

*Кафедра теоретической физики и механики
Российский университет дружбы народов
улица Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Строится алгоритм управления безударным захватом непредсказуемо движущейся цели схватом мобильного манипуляционного робота. Захват осуществляется за конечное время. Решение получено без использования информации о неуправляющих силах, в том числе возмущающих силах и силах инерции.

Задача решается в четыре этапа. Во-первых, строится главный вектор сил, обеспечивающий движение центра масс корпуса робота по принципу пропорциональной навигации при погоне за объектом. Во-вторых, строится главный момент управляющих сил относительно центра масс робота для приведения одной из главных центральных осей инерции подвижной системы координат, связанной с корпусом робота, в положение, совпадающее с линией визирования. В-третьих, определяется дополнительная управляющая сила для безударного приведения точки крепления первого звена манипулятора с корпусом робота на расстояние «вытянутой руки манипулятора» от цели по линии визирования, чтобы обеспечить захват. В-четвёртых, строятся выражения сил и моментов управления для поступательно и вращательно движущихся относительно друг друга звеньев манипулятора, позволяющие безударно захватить преследуемый объект.

Для автоматического выбора оптимального значения управления предлагается самонастраиваемый способ, осуществляемый по «принципу обратной связи по квазиускорениям» в дискретные моменты времени. Этот принцип был предложен И.А. Мухаметзяновым в статье, опубликованной в Вестнике РУДН серии «Математика. Информатика. Физика» №3 за 2013 год.

Ключевые слова: манипулятор, самонастраиваемое управление, безударный, конечное время

1. Постановка задачи

Рассмотрим упакованный в корпус робота манипулятор и сам робот в целом как одну механическую систему. С главными центральными осями инерции корпуса робота жёстко свяжем систему координат $Sxyz$. Задача заключается в построении главного вектора сил, обеспечивающего движение центра масс C корпуса робота по принципу пропорциональной навигации [1] при погоне за непредсказуемо движущимся объектом. Одновременно с этим необходимо построить аналитическое выражение главного момента управляющих сил относительно точки C для приведения одной из главных центральных осей инерции системы $Sxyz$, связанной с роботом, в положение, совпадающее с линией визирования $\overline{CC_0}$, где C_0 — центр масс преследуемого объекта. Далее необходимо построить аналитическое выражение дополнительной управляющей силы для безударного приведения точки O_0 крепления первого звена манипулятора с корпусом робота в положение точки O на линии визирования, находящейся на расстоянии «вытянутой руки манипулятора» от точки C_0 объекта преследования. Это позволяет осуществить захват цели схватом манипулятора, центр которого помещён в точку O_e конца последнего звена манипулятора. Необходимо построить также аналитическое выражение сил и моментов управления поступательно и вращательно движущимися относительно друг друга звеньями многозвенного манипулятора, которые позволяют безударно захватить преследуемый объект.

Статья поступила в редакцию 23 декабря 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 16-08-00558-а.

2. Управление процессом приведения робота в область досягаемости цели манипулятором

2.1. Построение главного вектора управляющих сил

Определим выражение главного вектора управляющих сил F_n в правой части дифференциального уравнения движения центра масс C корпуса робота

$$m\dot{\bar{V}}_a = \bar{F}_n \quad (1)$$

так, чтобы движение точки C происходило по принципу пропорциональной навигации

$$\bar{\omega}_v = b\bar{\omega}_e, \quad (2)$$

где m — общая масса робота, $\bar{\omega}_v$ — вектор угловой скорости вращения абсолютной скорости \bar{V}_a точки C , $\bar{\omega}_e$ — вектор угловой скорости линии визирования \overline{CC}_0 , b — заданный положительный коэффициент пропорциональности.

Заметим, что вращение вектора скорости \bar{V}_a осуществляется благодаря действию силы \bar{F}_n , направленной по главной нормали траектории абсолютного движения центра масс C . Определим эту силу \bar{F}_n , исходя из условия (2) и условия ортогональности \bar{V}_a векторам \bar{F}_n и $\bar{\omega}_v$. Вектор $\bar{\omega}_v$ имеет величину $\omega_v = V_a/\rho$ и направлен по орту

$$\bar{i} = \frac{(\bar{V}_a \times \bar{F}_n)}{V_a F_n},$$

где $F_n = mV_a^2/\rho$, ρ — радиус кривизны траектории абсолютного движения точки C . Следовательно, имеет место

$$\bar{\omega}_v = \frac{(\bar{V}_a \times \bar{F}_n)}{mV_a^2}.$$

Скалярно умножая (2) на $\bar{\omega}_e$, получим

$$\frac{(\bar{V}_a \times \bar{F}_n)}{mV_a^2} \cdot \bar{\omega}_e = b\omega_e^2.$$

Отсюда

$$\bar{F}_n \cdot (\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a) = mV_a^2 b\omega_e^2. \quad (3)$$

Ищем решение уравнения (3) в виде $\bar{F}_n = \lambda(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a)$, обеспечивающем коллинеарность векторов \bar{F}_n и $(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a)$, и тем самым минимальность $|\bar{F}_n|$. Подставляя $\bar{F}_n = \lambda(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a)$ в (3), определим

$$\lambda = \frac{mV_a^2 b\omega_e^2}{(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a)^2}.$$

Учитывая $\bar{\omega}_e \perp \bar{V}_a$, получим $\lambda = mb$. Следовательно, имеем

$$\bar{F}_n = mb(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_a). \quad (4)$$

Теперь необходимо ответить на вопрос о том, каково влияние возмущающих сил, если таковые имеют место, на процесс преследующего движения в погоне за целью при движении по принципу пропорциональной навигации. На этот вопрос можно ответить следующим образом. Составляющие возмущающих сил, направленных по главной нормали траектории точки C , влияют на силу \bar{F}_n , тем самым влияя

на величину коэффициента пропорциональности b . Следовательно, при достаточно больших значениях коэффициента b эти возмущения не оказывают существенного воздействия на процесс преследующего движения по данному принципу навигации. Что касается составляющих возмущающих сил, направленных по касательной к траектории точки C , то они приводят лишь к изменению величины скорости \bar{V}_a точки C , что не оказывает влияния на угловую скорость $\bar{\omega}_v$, то есть не нарушает основного условия (2) преследования по принципу пропорциональной навигации. Таким образом, эти возмущения могут оказывать некоторое влияние лишь на время встречи точек C и C_0 .

2.2. Построение главного момента управляющих сил

Известно, что вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $Cxyz$ описывается дифференциальным уравнением

$$J\dot{\bar{\omega}}_0 = (J\bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_0) + \bar{M}_0 + \bar{U}, \quad (5)$$

где J — тензор инерции тела в точке C , $\bar{\omega}_0(p, q, r)$ — мгновенная угловая скорость тела, p, q, r — проекции вектора $\bar{\omega}_0$ на оси Cx, Cy, Cz , \bar{M}_0 — главный момент действующих на тело неуправляющих сил относительно точки C , $\bar{U}(U_p, U_q, U_r)$ — главный момент управляющих сил относительно точки C .

Вектор \bar{U} определим, используя требуемое условие коллинеарности вектора \bar{l}_0 — орта линии визирования \overline{CC}_0 и вектора \bar{k}_3 — орта оси Cz системы координат $Cxyz$:

$$(\bar{k}_i \cdot \bar{l}_0) = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (6)$$

где \bar{k}_i — орты осей Cx и Cy системы $Cxyz$.

Отклонения от условий (6) зададим вектором $\bar{\omega}$ с элементами

$$\omega_1 = (\bar{k}_1 \cdot \bar{l}_0), \quad \omega_2 = (\bar{k}_2 \cdot \bar{l}_0). \quad (7)$$

Введём квазискорости

$$\dot{\bar{\omega}}_i = \dot{\omega}_i + \mu_i(\bar{k}_i \cdot \bar{l}_0), \quad \mu_i = \text{const} > 0 \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

где $\dot{\omega}_i$, согласно формулам Пуассона $\dot{\bar{k}}_i = \bar{\omega}_0 \times \bar{k}_i$, $\dot{\bar{l}}_0 = \bar{\omega}_e \times \bar{l}_0$, выражаются в виде

$$\dot{\omega}_i = \bar{\omega}_0 \cdot (\bar{k}_i \times \bar{l}_0) + \bar{\omega}_e \cdot (\bar{l}_0 \times \bar{k}_i).$$

Из (8) следует

$$\bar{\omega}_0 \cdot (\bar{k}_i \times \bar{l}_0) = \dot{\omega}_i + B_i \quad (i = 1, 2), \quad (9)$$

где $B_i = -\bar{k}_i \cdot (\bar{\omega}_e \times \bar{l}_0) - \mu_i(\bar{k}_i \cdot \bar{l}_0)$.

Систему (9) из двух уравнений относительно трёх элементов вектора $\bar{\omega}_0(p, q, r)$ представим в виде

$$\Omega \bar{\omega}_0 = \dot{\bar{\omega}} + B, \quad (10)$$

где матрица Ω определяется из

$$\begin{aligned} p(\bar{k}_1 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_1 + q(\bar{k}_1 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_2 + r(\bar{k}_1 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_3 &= \dot{\omega}_1 + B_1, \\ p(\bar{k}_2 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_1 + q(\bar{k}_2 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_2 + r(\bar{k}_2 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_3 &= \dot{\omega}_2 + B_2 \end{aligned}$$

в виде

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & -(\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_3) & (\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_2) \\ (\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_3) & 0 & -(\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_1) \end{vmatrix}. \quad (11)$$

При получении (11) были учтены следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} (\bar{k}_i \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_i &= 0, & (\bar{k}_1 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_2 &= -(\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_3), & (\bar{k}_1 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_3 &= (\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_2) \\ (\bar{k}_2 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_1 &= (\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_3), & (\bar{k}_2 \times \bar{l}_0) \cdot \bar{k}_3 &= -(\bar{l}_0 \cdot \bar{k}_1) & (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Решение (10) относительно $\bar{\omega}_0$ ищем в виде

$$\bar{\omega}_0 = \Omega^T \lambda, \quad (12)$$

где λ — вектор $\lambda^T(\lambda_1, \lambda_2)$.

Подставляя (12) в (10), получим $(\Omega\Omega^T)\lambda = \dot{\omega} + B$. Отсюда $\lambda = (\Omega\Omega^T)^{-1}(\dot{\omega} + B)$.

Подставляя λ в (12), получим

$$\bar{\omega}_0 = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}(\dot{\omega} + B). \quad (13)$$

Дифференцируя по t выражение (13) и подставляя $\dot{\omega}$ в (5), получим

$$\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\ddot{\omega} = \tilde{U} + \tilde{B}, \quad (14)$$

где $\tilde{U} = J^{-1}U$, $\tilde{B} = J^{-1}[(J\bar{\omega}_0 \times \bar{\omega}_0) + \bar{M}_0] - M(\dot{\omega} + B) - M\dot{B}$, $M = \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}$.

Умножая (14) на Ω , получим

$$\ddot{\omega} = \Omega\tilde{U} + \Omega\tilde{B}. \quad (15)$$

Зависящий от вектора управления U первый член в правой части (15) зададим в виде

$$\Omega\tilde{U} = -(\text{sign}\dot{\omega})N, \quad (16)$$

где $(\text{sign}\dot{\omega})$ — диагональная матрица (2×2) с элементами $(\text{sign}\dot{\omega}_i)$, N — постоянный вектор с положительными элементами N_i , удовлетворяющими условию $N_i > |\Omega\tilde{B}|_i$, где $|\Omega\tilde{B}|_i$ — абсолютные величины элементов вектора $\Omega\tilde{B}$.

Скалярно умножая (15) на $\dot{\omega}$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\omega}^2}{dt} = -\dot{\omega}^T [(\text{sign}\dot{\omega})N + \Omega\tilde{B}]. \quad (17)$$

Известно [2], что в некоторый конечный момент времени \tilde{t}_1 наступает равенство $\dot{\omega}(\tilde{t}_1) = 0$. При этом левая часть (8) обращается в нуль. Тогда при $t > \tilde{t}_1$ изображающая точка $N_i(\omega_i, \dot{\omega}_i)$ в фазовой плоскости $(\omega_i, \dot{\omega}_i)$ будет двигаться в скользящем режиме вдоль линии разрыва

$$\dot{\omega}_i + \mu_i \omega_i = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (18)$$

асимптотически приближаясь к точке $\omega_i = \dot{\omega}_i = 0$ по закону $\omega_i = \omega_i(\tilde{t}_1)e^{-\mu_i(t-\tilde{t}_1)}$, но не попадая в эту точку за конечный момент времени.

Для того чтобы приведение изображающей точки в начало координат $\omega_i = \dot{\omega}_i = 0$ ($i = 1, 2$) произошло за конечный промежуток времени, воспользуемся методом

безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие, предложенным в [3]. Суть этого метода заключается в замене многообразия (18), начиная с момента времени \tilde{t}_1 , другим многообразием

$$\dot{\omega}_i(\tau) - \dot{\omega}_i(\tilde{t}_1) + \frac{\dot{\omega}_i^2(\tilde{t}_1)}{2\omega_i(\tilde{t}_1)}\tau = 0 \quad (i = 1, 2), \quad (19)$$

где $\tau = t - \tilde{t}_1$.

При этом в качестве квазискорости принимается выражение

$$\dot{\omega}_i = \dot{\omega}_i(\tau) - \dot{\omega}_i(\tilde{t}_1) + \frac{\dot{\omega}_i^2(\tilde{t}_1)}{2\omega_i(\tilde{t}_1)}\tau, \quad (20)$$

а за линию разрыва, вместо (18), принимается линия

$$\omega_i(\tau) = \frac{\omega_i(\tilde{t}_1)}{\dot{\omega}_i^2(\tilde{t}_1)}[\dot{\omega}_i^2(\tilde{t}_1) - \dot{\omega}_i^2(\tau)]. \quad (21)$$

Из (20) следует, что в момент времени

$$\tau_{i0} = 2 \left| \frac{\omega_i(\tilde{t}_1)}{\dot{\omega}_i(\tilde{t}_1)} \right|$$

значение $\dot{\omega}_i(\tau_{i0})$ обращается в нуль, а из (21) следует, что значение $\omega_i(\tau_{i0})$ тоже обращается в нуль в тот же момент времени τ_{i0} . Таким образом, приведение системы в положение $\omega_i = \dot{\omega}_i = 0$ произойдёт без удара.

Теперь, используя (16), определим U . Для этого \tilde{U} ищем в виде

$$\tilde{U} = \Omega^T \tilde{\lambda}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (16), получим $(\Omega\Omega^T)\tilde{\lambda} = -(\text{sign}\dot{\omega})N$.

Отсюда $\tilde{\lambda} = -(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N$.

Теперь, учитывая $\tilde{U} = J^{-1}U$, из (22) определим

$$U = -J\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N, \quad (23)$$

где Ω имеет вид (11), а элементы вектора $\dot{\omega}$ имеют вид (8) при $0 < t \leq \tilde{t}_1$ и вид (20) при $\tau = t - \tilde{t}_1 \geq 0$.

2.3. Управление роботом в режиме торможения

Выше было доказано, что при управлении (23) в конечный момент времени $\tilde{t}_2 = \tilde{t}_1 + \tau_0$, где $\tau_0 = \max \tau_{i0}$ ($i = 1, 2$), ось Cz с ортом \bar{k}_3 системы координат $Cxyz$ приводится в положение, совпадающее с линией визирования \overline{CC}_0 . В этот момент времени \tilde{t}_2 приложим в точку C , помимо силы \bar{F}_n , ещё дополнительную силу \bar{F}_τ , направленную по линии визирования CC_0 против \bar{k}_3 . Сила \bar{F}_τ , называемая силой торможения, призвана привести точку O_0 крепления первого звена манипулятора к корпусу робота в точку O области досягаемости цели «рукой манипулятора». В качестве точки O примем точку линии \overline{CC}_0 на расстоянии $R_0 = |\overline{C_0O}|$ от точки C_0 до точки O со стороны центра масс робота C . При этом величина R_0 должна быть меньше максимально возможного расстояния $\max |\overline{O_0O_e}|$, где O_e — центр схвата,

прикреплённого к концу последнего звена манипулятора. Расстояние $|\overline{O_0O}|$ обозначим через S , производную S по времени через $V = \dot{S}$, а их начальные значения соответственно через S_0 и V_0 . Для решения этой части задачи используем приём управления безударной стыковкой двух объектов, предложенный в работе [4].

Для этого запишем уравнение абсолютного движения центра масс C в проекции на линию визирования

$$m \frac{dV_a}{dt} = -R' - U, \quad (24)$$

где V_a — проекция вектора абсолютной скорости точки C , m — масса робота, R' — проекция главного вектора неуправляющих сил, U — проекция силы \bar{F}_τ .

При движении робота по принципу пропорциональной навигации, навязываемом силой \bar{F}_n , прямая $\overline{CC_0}$ движется поступательно, то есть оставаясь параллельной самой себе. Принимая скорость движения точки C_0 за переносную, уравнение относительного движения точек C и O_0 в проекции на линию визирования $\overline{CC_0}$ запишем в виде, аналогичном (24):

$$m \frac{dV}{dt} = -R' - ma_e - U, \quad (25)$$

где V — проекция относительной скорости точек C и O_0 , a_e — проекция переносного ускорения этих точек.

Искомое управление U представим в виде $U = (U_1 + U_2)$, где U_1 — постоянная составляющая, а U_2 — ступенчатая составляющая.

Силу U_1 зададим в виде

$$U_1 = m \frac{V_0^2}{2S_0}, \quad (26)$$

где S_0 — начальное расстояние между точками O_0 и O , V_0 — начальное значение проекции относительной скорости \bar{V} на $|\overline{CC_0}|$.

Заметим, что в случае $R' = 0$ и $a_e = 0$ уравнение (25) при управлении $U = U_1$ имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{V_0^2}{2S_0}. \quad (27)$$

Интегрируя (27) по t , получим

$$V - V_0 + \frac{V_0^2}{2S_0}t = 0. \quad (28)$$

Заметим, что отсчёт времени t ведётся, начиная с момента \tilde{t}_2 .

Из уравнения (28) определяется время $t_1 = 2S_0/V_0$, при котором S и V одновременно обращаются в нуль. Таким образом, при управлении U движение изображающей точки N в фазовой плоскости (S, V) происходит по кривой

$$S = \frac{S_0}{V_0^2}(V_0^2 - V^2) \quad (29)$$

от начальной точки $N_0(S_0, V_0)$ до начала координат $S = 0, V = 0$. Заметим, что эта кривая (29) следует из теоремы об изменении кинетической энергии точки в конечной форме и является ветвью параболы.

Теперь обоснуем необходимость введения в управление кусочно-постоянной составляющей U_2 и определим её выражение. При $a_e \neq 0, R' \neq 0$ в правой части уравнения (27) появляются слагаемые, при котором правая часть уравнения (28) не будет равняться нулю. Поэтому, с целью наделения решений уравнения (25) свойствами (28) и (29), предлагается следующая процедура.

Введём квазискорость

$$\tilde{V} = V - V_0 + \frac{V_0^2}{2S_0}t, \quad (30)$$

представляющую собой правую часть (28) при $a_e \neq 0$ и $R' \neq 0$.

Выразим V через \tilde{V} :

$$V = \tilde{V} + V_0 - \frac{V_0^2}{2S_0}t. \quad (31)$$

Подставляя (31) и $U = U_1 + U_2$ в (25), в силу (26) получим

$$m \frac{d\tilde{V}}{dt} = -U_2 - ma_e - R'.$$

Умножая это уравнение на \tilde{V} и внося \tilde{V} под знак дифференциала, получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m\tilde{V}^2}{2} \right) = -\tilde{V}(U_2 + ma_e + R'). \quad (32)$$

Функцию $m\tilde{V}^2/2$, являющуюся знакоопределённой положительной, примем в качестве функции Ляпунова для стабилизации невозмущённого состояния (28).

Зададим U_2 в виде

$$U_2 = U_0 \text{sign} \tilde{V}, \quad (33)$$

где U_0 — положительная величина, удовлетворяющая условию

$$U_0 > |ma_e + R'| + \delta, \quad \delta = \text{const} > 0. \quad (34)$$

При этом правая часть (32) становится определённо отрицательной. В этом случае значение \tilde{V} обращается в нуль за конечный промежуток времени [2].

3. Управление манипулятором при захвате цели

3.1. Конструктивные особенности манипулятора

В момент времени t_2 после приведения точки O_0 в точку O начинается управление манипулятором для безударного захвата цели C_0 . Прежде чем приступить к решению этой задачи, кратко опишем основные конструктивные особенности манипулятора [5].

Пусть манипулятор состоит из цепочки n пар тел T'_ν и T''_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$), в которой T'_ν вращается относительно тела $T'_{(\nu-1)}$ предыдущей пары вокруг цилиндрического шарнира $O_{(\nu-1)}$, а T''_ν перемещается относительно T'_ν по заданной направляющей. Начало отсчёта перемещения S_ν тела T''_ν относительно T'_ν обозначим через D_ν . Введём также обозначения: $\bar{l}_\nu = \overline{O_{(\nu-1)}D_\nu}$, $\bar{S}_\nu = \overline{D_\nu O_\nu}$, φ_ν — углы поворотов звеньев друг относительно друга вокруг шарниров.

Будем считать, что вращения тел T'_ν вокруг шарниров $O_{(\nu-1)}$, также как и перемещения T''_ν относительно T'_ν , осуществляются электрическими двигателями, помещёнными со своими редукторами в точках $O_{(\nu-1)}$ и D_ν . Следовательно, управление манипулятором осуществляется $2n$ двигателями.

3.2. Программа движения схвата

В качестве программы движения схвата манипулятора примем закон движения центра схвата, помещённого в точку O_e на продолжении конца последнего звена манипулятора:

$$\overline{O_0O_e} = \bar{L}(t). \quad (35)$$

Вектор $\overline{O_0O_e}$ выразим через \bar{l}_ν и \bar{S}_ν :

$$\overline{O_0O_e} = \sum_{\nu=1}^n (\bar{l}_\nu + \bar{S}_\nu).$$

Тогда условие (35) можно представить в следующем виде:

$$\sum_{\nu=1}^n (\bar{l}_\nu + \bar{S}_\nu) - \bar{L}(t) = 0. \quad (36)$$

3.3. Уравнения движения манипулятора

Принимая углы φ_ν и перемещения S_ν в качестве обобщённых координат в поступательно движущейся системе координат по закону движения точки C_0 преследуемого объекта, движение манипулятора в целом можно представить системой $2n$ уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_C}{\partial \dot{\varphi}_\nu} \right) - \frac{\partial T_C}{\partial \varphi_\nu} &= Q'_\nu + (-C'_\nu \dot{\varphi}_\nu + a'_\nu U'_\nu) K'_\nu, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T_C}{\partial \dot{S}_\nu} \right) - \frac{\partial T_C}{\partial S_\nu} &= Q''_\nu + (-C''_\nu \dot{S}_\nu + a''_\nu U''_\nu) K''_\nu, \end{aligned} \quad (37)$$

$$(\nu = 1, 2, \dots, n),$$

где T_C — кинетическая энергия манипулятора относительно подвижной системы координат $Cxyz$ с осями $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3$, Q'_ν, Q''_ν — обобщённые неуправляющие силы, в том числе переносные силы инерции и силы тяжести элементов манипулятора, C'_ν, C''_ν — коэффициенты сопротивления на валу двигателей, K'_ν, K''_ν — передаточные числа редукторов, a'_ν, a''_ν — коэффициенты пропорциональности между управляющими моментами двигателей и управляющими сигналами U'_ν, U''_ν .

Кинетическая энергия манипулятора имеет вид:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^T A(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}, \quad (38)$$

где $A(\bar{\varphi})$ — симметричная определённо положительная матрица $(2n \times 2n)$, $\bar{\varphi}$ — $2n$ -мерный вектор обобщённых координат φ_ν, S_ν ($\nu = 1, 2, \dots, n$).

Систему уравнений (37) можно привести к виду:

$$A\ddot{\bar{\varphi}} = f(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}, t) + BU, \quad (39)$$

где B — матрица $(2n \times k)$ распределения k -мерного вектора управления U между $2n$ уравнениями системы (37), $k \leq 2n$, f — вектор неуправляющих сил, в том числе возмущающих сил и сил инерции.

3.4. Построение выражения программного многообразия

Дифференцируя (36) по времени, получим

$$\dot{\bar{L}}(t) = \sum_{\nu=1}^n (\dot{\bar{l}}_{\nu} + \dot{\bar{S}}_{\nu}). \quad (40)$$

Представим векторы $\bar{l}_{\nu}, \bar{S}_{\nu}$ в виде $\bar{l}_{\nu} = l_{\nu} \bar{i}_{\nu}$, $\bar{S}_{\nu} = S_{\nu}(t) \bar{j}_{\nu}$, где $\bar{i}_{\nu}, \bar{j}_{\nu}$ — орты векторов $\bar{l}_{\nu}, \bar{S}_{\nu}$. Учитывая, что $l_{\nu} = |\bar{l}_{\nu}| = \text{const}$, получим

$$\dot{\bar{l}}_{\nu} = l_{\nu} \dot{\bar{i}}_{\nu}, \quad \dot{\bar{S}}_{\nu} = \dot{S}_{\nu} \bar{j}_{\nu} + S_{\nu} \dot{\bar{j}}_{\nu}. \quad (41)$$

Вспользуемся формулами Пуассона

$$\dot{\bar{i}}_{\nu} = \sum_{\eta=1}^{\nu} \bar{\omega}_{\eta} \times \bar{i}_{\nu}, \quad \dot{\bar{j}}_{\nu} = \sum_{\eta=1}^{\nu} \bar{\omega}_{\eta} \times \bar{j}_{\nu}. \quad (42)$$

Подставляя в (42) $\bar{\omega}_{\eta} = \dot{\varphi}_{\eta} \bar{k}_{\eta}^0$, где \bar{k}_{η}^0 — орты векторов $\bar{\omega}_{\eta}$, получим

$$\dot{\bar{i}}_{\nu} = \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{k}_{\eta}^0 \times \bar{i}_{\nu}) \dot{\varphi}_{\eta}, \quad \dot{\bar{j}}_{\nu} = \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{k}_{\eta}^0 \times \bar{j}_{\nu}) \dot{\varphi}_{\eta}. \quad (43)$$

Теперь подставим (43) в (41), а затем (41) в (40). Тогда (40) примет следующий вид:

$$\dot{\bar{L}} = \sum_{\nu=1}^n \left\{ \left[\bar{k}_{\eta}^0 \times \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{l}_{\eta} + \bar{S}_{\eta}) \right] \dot{\varphi}_{\eta} + \dot{S}_{\nu} \bar{j}_{\nu} \right\}. \quad (44)$$

Потребуем, чтобы проекции вектора $\dot{\bar{L}}$ на оси с ортами \bar{k}_1 и \bar{k}_2 были равны нулю:

$$\dot{\bar{L}} \cdot \bar{k}_1 = 0, \quad \dot{\bar{L}} \cdot \bar{k}_2 = 0, \quad (45)$$

а проекция на ось с ортом \bar{k}_3 изменялась по закону

$$V = V_0 - \frac{V_0^2}{2S_0} t,$$

где S_0 — расстояние между точками O и C_0 в начальный момент времени t_2 , V_0 — начальное значение скорости сближения точки O_e с точкой C_0 .

Заметим, что отсчёт времени t ведётся, начиная с момента t_2 , то есть $t \geq t_2$, где t_2 — момент времени совпадения точек O_0 и O . Следовательно, к условиям (45) присоединяется условие

$$\dot{\bar{L}} \cdot \bar{k}_3 = V_0 - \frac{V_0^2}{2S_0} t. \quad (46)$$

Условия (45) и (46) после замены $\dot{\bar{L}}$ правой частью (44) представим в виде

$$\Omega \dot{\varphi} = \bar{C}, \quad (47)$$

где Ω — прямоугольная матрица-строка ($3 \times 2n$) с элементами

$$\begin{aligned}\Omega_{1\nu} &= \left[\bar{k}_\nu^0 \times \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{l}_\eta + \bar{S}_\eta) \right] \cdot \bar{k}_1 + (\bar{j}_\nu \cdot \bar{k}_1), \quad \Omega_{2\nu} = \left[\bar{k}_\nu^0 \times \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{l}_\eta + \bar{S}_\eta) \right] \cdot \bar{k}_2 + (\bar{j}_\nu \cdot \bar{k}_2), \\ \Omega_{3\nu} &= \left[\bar{k}_\nu^0 \times \sum_{\eta=1}^{\nu} (\bar{l}_\eta + \bar{S}_\eta) \right] \cdot \bar{k}_3 + (\bar{j}_\nu \cdot \bar{k}_3), \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2n),\end{aligned}\tag{48}$$

$\dot{\bar{\varphi}}$ — $2n$ -мерный вектор-столбец с элементами $\dot{\bar{\varphi}}_\nu$, \bar{C} — трёхмерный вектор-столбец $\bar{C}^T(0, 0, C_3)$,

$$C_3 = V_0 - \frac{V_0^2}{2S_0} t.\tag{49}$$

Таким образом, искомое программное многообразие выражается в виде (47).

3.5. Построение вектора управления манипулятором

Представим (47) в виде

$$\dot{\bar{\omega}} = \Omega \dot{\bar{\varphi}} - \bar{C}.\tag{50}$$

Задача заключается в построении вектора управления манипулятором так, чтобы центр O_e схвата манипулятора, начиная движение с начальной скоростью V_0 от точки O , пришёл в точку C_0 с нулевой скоростью относительно точки C_0 , то есть в момент совпадения точек O_e и C_0 абсолютные скорости этих точек должны быть одинаковы. При этом встреча точек O_e и C_0 произойдёт без удара. Для этого вектор управления U в (39) необходимо построить так, чтобы вектор $\dot{\bar{\omega}}$ в (50) обратился в нуль за конечный промежуток времени при любых непрерывных и ограниченных значениях неуправляющих сил $f(\bar{\varphi}, \dot{\bar{\varphi}}, t)$ в (39).

Для решения такой задачи продифференцируем (50) по t и получим:

$$\Omega \ddot{\bar{\varphi}} = \ddot{\bar{\omega}} - \dot{\Omega} \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{C}}.\tag{51}$$

Определим решение трёх уравнений (51) относительно $2n$ элементов вектора $\ddot{\bar{\varphi}}$. Для этого ищем $\ddot{\bar{\varphi}}$ в виде

$$\ddot{\bar{\varphi}} = \Omega^T \lambda,\tag{52}$$

где λ — искомый трёхмерный вектор.

Подставляя (52) в (51), получим $(\Omega \Omega^T) \lambda = \ddot{\bar{\omega}} - \dot{\Omega} \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{C}}$. Отсюда

$$\lambda = (\Omega \Omega^T)^{-1} (\ddot{\bar{\omega}} - \dot{\Omega} \dot{\bar{\varphi}} + \dot{\bar{C}}).\tag{53}$$

Теперь, определяя $\ddot{\bar{\varphi}}$ из (39) в виде $\ddot{\bar{\varphi}} = A^{-1}BU + A^{-1}f$ и подставляя в левую часть (52), получим

$$A^{-1}BU = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \ddot{\bar{\omega}} + X,\tag{54}$$

где X — члены, не содержащие $\ddot{\bar{\varphi}}$ и U .

Умножая (54) на Ω , получим $\ddot{\bar{\omega}} = \Omega A^{-1}BU - \Omega X$. Теперь, скалярно умножая на $\dot{\bar{\omega}}$, получим $\dot{\bar{\omega}}^T \ddot{\bar{\omega}} = \dot{\bar{\omega}}^T \Omega A^{-1}BU - \dot{\bar{\omega}}^T \Omega X$. Отсюда

$$\frac{1}{2} \frac{d\dot{\bar{\omega}}^2}{dt} = \dot{\bar{\omega}}^T \Omega A^{-1}BU - \dot{\bar{\omega}}^T \Omega X.\tag{55}$$

Выберем значение $\Omega A^{-1}BU$ в первом члене правой части кусочно-постоянным в виде

$$\Omega A^{-1}BU = -(\text{sign}\dot{\omega})N, \quad (56)$$

где $\text{sign}\dot{\omega}$ — диагональная матрица с элементами $\text{sign}\dot{\omega}_i$ ($i = 1, 2, 3$), N — трёхмерный вектор с постоянными положительными элементами

$$N_i \geq \delta_i + |\Omega X|_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (57)$$

где δ_i — отличные от нуля заданные положительные постоянные, $|\Omega X|_i$ — абсолютные значения элементов трёхмерного вектора ΩX .

Предположим, что размерность вектора U не меньше трёх. Тогда значение $A^{-1}BU$ в левой части (56) можно искать в виде

$$A^{-1}BU = \Omega^T \tilde{\lambda}. \quad (58)$$

Подставляя в (56), получим $(\Omega\Omega^T)\tilde{\lambda} = -(\text{sign}\dot{\omega})N$. Отсюда $\tilde{\lambda} = -(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N$.

Подставляя в (58), получим $A^{-1}BU = -\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N$. Умножая на A , получим $BU = -A\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N$. Умножая на B^T , получим

$$U = -(B^T B)^{-1}B^T A\Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}(\text{sign}\dot{\omega})N.$$

4. Заключение

Построены аналитические выражения главного вектора и главного момента сил, управляющих движением мобильного робота, оснащённого многозвённым манипулятором. При этих управляющих силах достигается движение робота по принципу пропорциональной навигации при погоне за непредсказуемо движущимся объектом. При этом точка крепления манипулятора к корпусу робота в конечный промежуток времени приводится в точку, находящуюся от преследуемого объекта на расстоянии досягаемости цели схватом манипулятора, чтобы избежать удара при контакте схвата с захватываемым объектом. Построены соответствующие аналитические выражения сил и моментов управления поступательно и вращательно движущимися друг относительно друга звеньями манипулятора. При решении этой задачи используется лишь информация о расстоянии между схватом манипулятора и преследуемым объектом, благодаря применению методов, предложенных в работах [2–4]. Решение получено без использования информации о характере неуправляющих сил, в том числе возмущающих сил и сил инерции.

Литература

1. Кан В. Л., Кельзон А. С. Теория пропорциональной навигации. — Л.: Судостроение, 1965. — 423 с.
2. Пятницкий Е. С. Принцип декомпозиции в управлении механическими системами // Доклады АН СССР. — 1988. — Т. 300, № 2. — С. 300–303.
3. Мухаметзянов И. А. Самонастраиваемое управление процессом безударного приведения состояния механических систем в заданное многообразие // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — № 3. — С. 105–112.
4. Мухаметзянов И. А., Чекмарёва О. И. Самонастраиваемое управление процессом безударной стыковки двух подвижных объектов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — № 4. — С. 154–160.

5. Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г. Уравнения программных движений манипуляционных систем. — М.: Изд-во РУДН, 1989. — 60 с.

UDC 531.31:62-56

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-170-181

Control over the Process of Unstressed Capture of Unpredictably Moving Target by the Robotic Arm

I. A. Mukhametzyanov, O. I. Chekmaryova

*Department of Theoretical Physics and Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

An algorithm is constructed for controlling a non-impact capture of unpredictably moving target by the robotic arm. Capture is performed in a finite time. The solution is obtained without the use of the information on the non-control forces, including the disturbing forces and forces of inertia.

The object is achieved in four stages. First, the principal vector of the forces is obtained, which provides movement of the center of mass of the robot body in the mode of persecution on the basis of proportional navigation in the pursuit of the object. Second, the principal moment of the forces about the center of mass of the body is obtained, which provides bringing of the one of the principal central axes of inertia of the moving coordinate system associated with the robot's body, in a position coinciding with the line of sight. Third, an additional driving force is determined, which provides the unstressed bringing of the attachment point of the first link of the arm with a robot body at a distance of "manipulator arm" from the target on the line of sight to provide capture. Fourth, the expression of forces and moments is constructed for the management of the translational and rotational motion of the links of the manipulator relative to each other, allowing bumpless capture of the pursued object.

The self-adjusting method is proposed to automatically select the optimal values of the control. It is carried out by the "principle of feedback on the quasi-acceleration" at discrete points in time. This principle was first proposed by I.A. Mukhametzyanov in an article published in the Bulletin of Peoples' Friendship University series "Mathematics. Information Sciences. Physics", No 3, 2013.

Key words and phrases: robotic arm, self-tuning control, unstressed, final time

References

1. V. L. Kan, A. S. Keljzon, Theory of Proportional Navigation, Sudostroenie, Leningrad, 1965, in Russian.
2. E. S. Pyatnitsky, Principle of Decomposition in the Management of Mechanical Systems, DAN SSSR 300 (2) (1988) 300–303, in Russian.
3. I. A. Mukhametzyanov, Process Self-Adjusting Control of Non-Impact Bringing of the Condition of Mechanics Systems to Given Set, PFUR Bulletin. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (3) (2013) 105–112, in Russian.
4. I. A. Mukhametzyanov, O. I. Chekmaryova, Self-Adjusting Control of Non-Impact Docking of Two Moving Objects, PFUR Bulletin. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (4) (2013) 154–160, in Russian.
5. I. A. Mukhametzyanov, R. G. Mukharlyamov, The Equations of Motion Program of Robotic Systems, PFUR, Moscow, 1989, in Russian.

Coherent Perfect Absorption Mediated Enhancement and Optical Bistability in Phase Conjugation

K. Nireekshan Reddy*, Achanta Venu Gopal[†], S. D. Gupta*

** School of Physics
University of Hyderabad
Hyderabad-500046, India*

*† Department of Condensed Matter Physics and Material Sciences
Tata Institute of Fundamental Research
Mumbai-400005, India*

Coherent perfect absorption has been one of the important research directions in optics in recent years because of its ability to absorb all the incident light. It has been extended to nonlinear regime to show multistability and gap solitons in nonlinear periodic structures. We study yet another nonlinear effect, namely, phase conjugation in a Kerr nonlinear composite slab when the counter propagating pump waves are completely absorbed by means of coherent perfect absorption. The theory is developed under the undepleted pump approximation, when the pump waves can be decoupled from the signal and the phase conjugated waves. Dynamical phase matching is also incorporated. The coupling constant and the phase conjugated reflectivity are shown to undergo a substantial increase. They also exhibit multivalued response. Both downward and upward switching are shown to be possible. The effect can be used for efficient switching of the phase conjugated reflectivity in photonic circuits and can find several application in photonic logic gates.

Key words and phrases: phase conjugation, coherent perfect absorption, switching, Kerr medium, multistability

1. Introduction

The ability of light waves to interfere destructively or constructively has found several applications in recent years. Some of the most notable applications are critical coupling and coherent perfect absorption [1–10]. The applications are not limited to just manipulation of intensities, similar ideas are extended to intensity-intensity correlations in quantum optics [11]. It has been shown recently that such destructive interference in higher order correlations can lead to a perfect Hong-Ou-Mandel dip with 100% visibility [12], with values as high as 95% reported in recent experiments [13]. In the context of standard critical coupling (CC) and coherent perfect absorption (CPA) the remarkable possibility of controlling absorption has been demonstrated convincingly in both theory and experiments. The recent efforts are aimed at making use of the CC and CPA phenomenon for other applications. One of the applications that comes to the fore are different nonlinear effects [14–16]. In nonlinear optics, one mostly focuses on how to enhance the nonlinear interactions and thereby the efficiency of the outgoing waves. Indeed, only a fraction of interacting pump waves in harmonic generation, or four-wave mixing and phase conjugation is utilized for effective nonlinear conversion. CPA and CC open new possibilities that these waves can be completely absorbed by nonlinear medium. Such initial trends have been probed by several others in the context of harmonic generation [17, 18]. Our present investigation focuses on combining the concepts of CPA and phase conjugation. In an earlier paper, we have reported CPA in a nonlinear medium to show bistable and multistable response [15]. We extend those results to the pump waves to evaluate the coupling constants for the phase conjugation process. In the undepleted

pump approximation, coupling parameters determine the evolution of the signal and the phase conjugated waves [19, 20]. We show that there is a drastic change in the phase conjugated reflectivity at each of the nonlinear CPA resonances. The bistability in the pump reflects into bistability of the coupling parameters and the phase conjugated reflectivity. The control on the coupling parameter by means of pump intensity renders the oscillation condition to be power dependent. One can thus have oscillation condition for phase conjugation fulfilled at much lower system size.

2. Phase conjugation with CPA of pump waves

We adhere to the standard degenerate four-wave mixing (DFWM) for phase conjugation, which is shown in Fig. 1. Let the nonlinear slab have a cubic response with dielectric function $\epsilon_{non} = \bar{\epsilon} + \alpha|E|^2$, where $\bar{\epsilon}$ gives the linear background and α the nonlinearity constant.

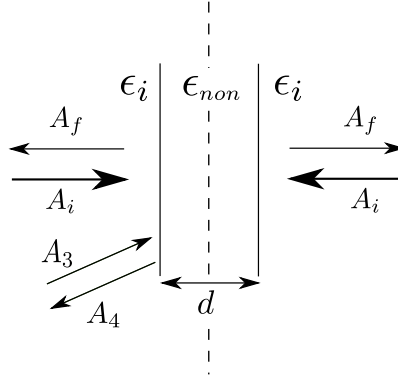


Figure 1. Schematic view of nonlinear slab with thickness d under CPA geometry (with identical pump powers $|A_i|^2$ from opposite ends) to enhance phase conjugation. The slab is assumed to have a cubic nonlinear response with dielectric function ϵ_{non} . The adjacent media on the left and right are linear with dielectric constant ϵ_i . The signal and phase conjugated wave amplitudes are denoted by A_3 and A_4 , respectively

We assume the pump waves to be much stronger than the signal and the phase conjugated waves, so that the undepleted pump approximation can be used. The theory for such DFWM has been worked out in detail [19, 20], and the experimental results are also available [21]. A very interesting extension was by Kaplan *et al.*, where, the vectorial character of the waves were incorporated, and various eigen polarizations were obtained [22]. The same study reports the occurrence of the isolas (isolated loops in the input-output characteristics). In order to explore the CPA induced effects, we ignore the vector character, and deal with a scalar theory as in Ref. [19]. We work with TE polarized light. We also report bistable response that indicates the emergence of the isolas.

In the undepleted pump approximation the spatial evolution of the pump waves is completely delinked from those of the signal and phase conjugated waves. The evolution of the pump can be easily captured when both the pump waves have the same intensity.

In that case the symmetry of the structure as regards the pump can be exploited in order to arrive at the dispersion relations for symmetric and anti-symmetric CPA profiles given by [15]

$$D_S = p_{1z} + ip_{2z} \tan(p_{2z}\bar{d}/2) = 0, \quad (1)$$

$$D_A = p_{1z} - ip_{2z} \cot(p_{2z}\bar{d}/2) = 0, \quad (2)$$

where the subscript S and A refer to the symmetric and anti-symmetric states.

Note that the dispersion relations for CPA are different from those of the standard waveguide modes. Recall that for obtaining the former one demands null scattering for non-zero input waves and, for the latter, one solves for maximum scattering for null input [15, 23]. Other parameters in Eqs. (1)-(2) are as follows

$$p_{1z} = \sqrt{\epsilon_i}, \quad (3)$$

$$p_{2z} = \sqrt{\epsilon_i + 3U_2}, \quad (4)$$

where $U_2 = \alpha|A_2|^2$ is the dimensionless intensity of the waves inside the nonlinear slab and \bar{d} ($\bar{d} = k_0d$, $k_0 = 2\pi/\lambda$) is the dimensionless width of the slab.

As can be seen from Eq. (4), the normalized propagation constant in the nonlinear slab depends on the incident pump power [24, 25]. Thus the location and the distortion of the CPA dips can be controlled completely by the incident power. Under illumination by pump waves with identical powers, the magnitude of the forward and the backward wave amplitudes inside the slab are the same [15]. The same can be used as a parameter to obtain the nonlinear response of the CPA system. An increase in this parameter initially leads to the super-scattering (SS) when most of the energy is scattered out (very large value of A_f), to the CPA state ($A_f \approx 0$), when most of incident energy is absorbed.

Having understood the pump induced changes inside the nonlinear slab, one can study the spatial evolution of the signal and the phase conjugated waves governed by [19]

$$\frac{dA_3}{dz} = i\kappa_1 A_3 + i\kappa_2 A_4^*, \quad (5)$$

$$\frac{dA_4}{dz} = -i\kappa_1 A_4 - i\kappa_2 A_3^*, \quad (6)$$

where $|z| \leq d/2$ and κ_1 and κ_2 are given by

$$\kappa_1 = \frac{3\omega}{\text{Re}(\sqrt{\epsilon_i})c} (2\alpha|A_2|^2), \quad (7)$$

$$\kappa_2 = \frac{3\omega}{\text{Re}(\sqrt{\epsilon_i})c} \alpha A_2^2. \quad (8)$$

In writing the above equations, we have assumed that for symmetric incidence we satisfy the dynamical phase matching condition [20]. As shown in Refs. [19, 20], Eqs. (5)–(6) represent a linear system and can be easily solved for the spatial evolution of the amplitudes A_3 and A_4 in the nonlinear slab. For typical boundary conditions, say $\sqrt{\alpha}A_3(-d/2) = 0.01$ and $\sqrt{\alpha}A_4(d/2) = 0$ (these conditions imply that the length d is sufficiently large so that the phase conjugated wave is assumed to have null amplitude at the right interface) one has the phase conjugated amplitude (at the left interface $z = -d/2$) to be [19, 20]

$$A_4(z = -d/2) = \frac{i\kappa_2}{|\kappa_2|} \tan(|\kappa_2|d) A_3^*(-d/2), \quad (9)$$

and the phase conjugation reflectivity R_p is given by

$$R_p = \left| \frac{A_4(-d/2)}{A_3^*(-d/2)} \right|^2 = \left| i \left(\frac{\kappa_2}{|\kappa_2|} \tan |\kappa_2|d \right) \right|^2. \quad (10)$$

Note that κ_2 is now pump power dependent (see Eq. (8)) and $|\kappa_2|d = (2n + 1)\pi$ implies an instability, termed in the literature as oscillation condition [19]. Indeed one can manipulate the ‘oscillation’ in the system, which can be further intensified by CPA when both the waves are completely absorbed in nonlinear medium.

In order to bring out the distinctive signature of CPA, we choose to work in the domain $\pi/2 < |\kappa_2|d < 3\pi/2$. Throughout our calculations we have chosen $d = 14.00 \mu\text{m}$, $\epsilon_i = 1$. The lossy medium is chosen to be a metal-dielectric composite whose dielectric response ($\bar{\epsilon}$) is evaluated using Bruggeman’s formula [8, 15]. The dielectric host is assumed to be silica ($\epsilon_h = 2.25$) without any dispersion while the metal (silver with $f = 0.082$ as the volume fraction of inclusion) data is obtained from the proper interpolation of the experimental work of Johnson and Christie [26]. In principle, such an inclusion renders the nonlinear coefficient α to be complex having dispersion/absorption [27, 28]. In order to retain the simplicity of the problem we assume that the metal inclusions render only the linear part of the susceptibility to be complex leaving α real.

In Fig. 2 we plot the linear response ($\alpha = 0$), which shows the typical CPA dip at very low pump powers. To validate this assumption we work far away from localized SPP resonance. It is clear from this figure that one of the Fabry–Perot modes can lead to near perfect absorption.

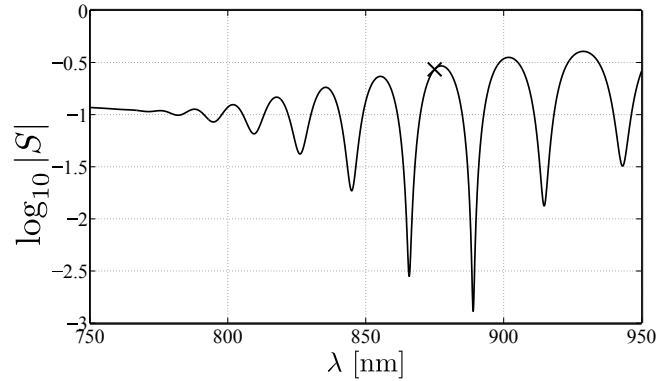


Figure 2. Linear response of the system, $\log_{10} |S|$ as a function λ . The point marked by the cross ($\lambda = 875.0 \text{ nm}$) denotes the operating point for studying the nonlinear response. The system parameters are: $d = 14.00 \mu\text{m}$, $\epsilon_h = 2.25$, $f = 0.082$, $\epsilon_i = 1$

We choose a point on this curve as our operating point at $\lambda = 875.0 \text{ nm}$ (point marked by a cross in Fig. 2). The choice is dictated by the fact that an off-resonant system can be brought back to CPA by increasing pump power, while an on-resonant system is taken away from the CPA dip [15]. Thus, we choose to work with the detuned linear system in order to tune it back to CPA in the nonlinear regime.

The effect of increasing power on the scattered pump intensity on either side $S = |A_f/A_i|^2$ for the symmetric states (obeying Eq. (1)) is shown in Fig. 3(a). As reported in literature, one has the bistable response [22, 29].

One also has nonlinear CPA, which has been studied earlier in great detail [15]. The circular marks in Fig. 3 correspond to the bistability thresholds. The upper (lower) threshold correspond to superscattering (CPA) states with maximum in A_f ($A_f \approx 0$). For example, points marked by ‘1’ and ‘3’ (‘2’ and ‘4’) in Fig. 3(a) correspond to superscattering (CPA) states. The physics of superscattering and CPA states makes it clear that for former (latter) one will have lower (higher) energy densities in the nonlinear slab and accordingly lower (higher) values of the coupling constant. The dependence of

coupling constant (κ_2) and the phase conjugation reflectivity (R_p) as functions of the dimensionless incident intensity are shown in Fig. 3(b) and Fig. 3(c), respectively. Bistable response repeats in these plots, which is expected. The large phase conjugate reflectivity in Fig. 3(c) at lower input intensities is due to our choice of the operation point close to the oscillation condition $|\kappa_2|d = \pi/2$. The remarkable feature that needs to be noted from Fig. 3(c) is the fact that with increasing input intensities one can have a switch-down (near point ‘1’) or switch-up transition (near point ‘3’) in R_p with both the transitions from the SS states.

The corresponding results for the anti-symmetric states (obeying Eq. (2)) are shown in Fig. 4. Results are similar to those in Fig. 3 except that one has the precursor to the isolas (see Fig. 4(c)), reported earlier by Kaplan *et al* [22].

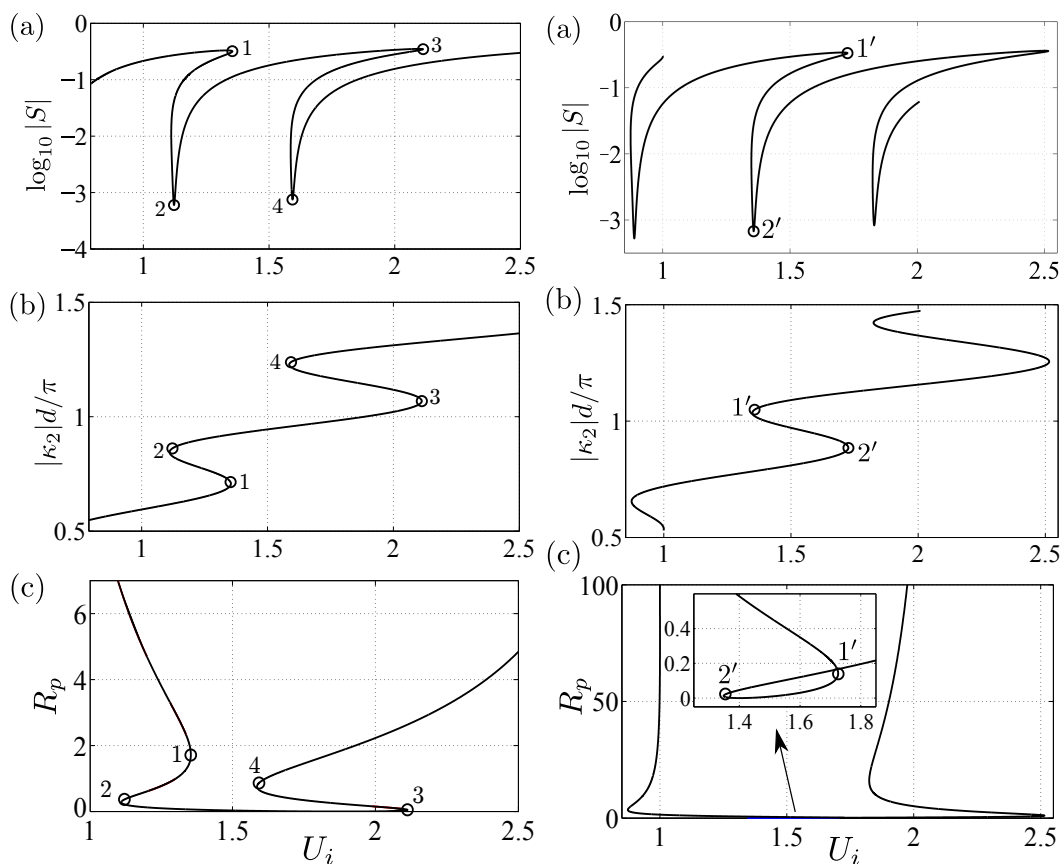


Figure 3. (a) $\log_{10}|S|$, (b) $|\kappa_2|d/\pi$ and (c) phase conjugated reflectivity R_p as functions of dimensionless incident intensity U_i for symmetric states. Other parameters are same as in Fig. 2

Figure 4. Same as in Fig. 3 but now for anti-symmetric states. The inset in Fig. 4(c) depicts the onset of isolas

We have also looked at the intensity (dimensionless) distributions of the signal ($U_3 = \alpha|A_3|^2$) and phase conjugated ($U_4 = \alpha|A_4|^2$) waves inside the nonlinear slab. Fig. 5(a) and Fig. 5(b) depict the variations of U_3 and U_4 , respectively. The dashed and solid curves in Fig. (5) correspond to SS [labeled ‘3’ in Fig. (3)(c)] and CPA [labeled ‘4’ in Fig. (3)(c)] of the symmetric states, respectively. It can be seen that one has a significant variation of U_3 and U_4 inside the slab when one moves from CPA to SS states. For instance, U_4

at the left interface ($z = -7 \mu\text{m}$) takes an extremely small value for the SS state, while for the CPA state it is of the order of the incident signal wave intensity. This change in U_4 results in a significant increase of the phase conjugate reflectivity R_p (see Eq. (10)).

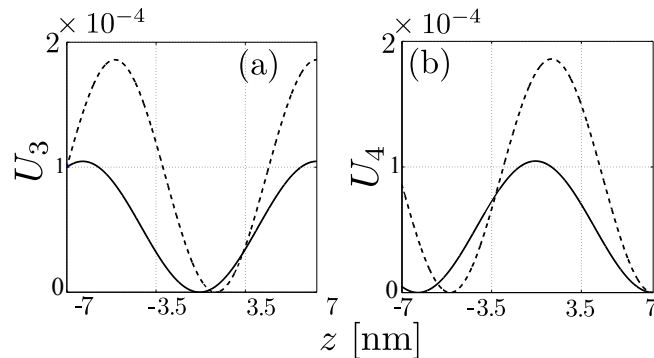


Figure 5. Dimensionless intensities of (a) signal U_3 and (b) phase conjugated U_4 waves in the nonlinear slab. The dashed (solid) curves correspond to nonlinear CPA (SS) state marked by point ‘4’ (‘3’) of Fig. 3

3. Conclusions

In conclusion, we have investigated phase conjugation in a Kerr nonlinear slab when the counter propagating pump waves are completely absorbed inside the nonlinear medium by coherent perfect absorption. We have made use of the earlier results on light controlled CPA and its ability to switch the system from superscattering to near-total absorption and vice versa [15]. We have shown that one can alter the coupling between the signal and the phase conjugated wave with subsequent control on the phase conjugate reflectivity (R_p). Our studies revealed the bi- and multi- stable response in R_p and also the formation of precursor to isolas reported earlier [22]. Moreover, we showed that a judicious tuning of the operating point near the oscillation condition can lead to switch-up or switch-down behavior in R_p with increasing input intensities. Our studies can find varied applications for switching, sensing and light-controlled optical systems.

References

1. A. Yariv, Universal Relations for Coupling of Optical Power between Microresonators and Dielectric Waveguides, *Electronics Letters* 36 (4) (2000) 321–322. doi:10.1049/el:20000340.
2. J. R. Tischler, M. S. Bradley, V. Bulović, Critically Coupled Resonators in Vertical Geometry Using a Planar Mirror and a 5 nm Thick Absorbing Film, *Opt. Lett.* 31 (13) (2006) 2045–2047. doi:10.1364/OL.31.002045. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-31-13-2045>
3. S. Dutta Gupta, Strong-Interaction-Mediated Critical Coupling at Two Distinct Frequencies, *Opt. Lett.* 32 (11) (2007) 1483–1485. doi:10.1364/OL.32.001483. URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-11-1483>
4. S. Deb, S. Dutta-Gupta, J. Banerji, Critical Coupling at Oblique Incidence, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* (2007) 555.
5. S. Dutta-Gupta, S. Deb, Signature of Strong Atom–Cavity Interaction on Critical Coupling, *Journal of Optics* 12 (7) (2010) 075103.

6. S. Deb, S. D. Gupta, Critical Coupling in a Fabry–Pérot Cavity with Metamaterial Mirrors, *Optics Communications* 283 (23) (2010) 4764–4769.
7. W. Wan, Y. Chong, L. Ge, H. Noh, A. D. Stone, H. Cao, Time-Reversed Lasing and Interferometric Control of Absorption, *Science* 331 (6019) (2011) 889–892. arXiv:<http://www.sciencemag.org/content/331/6019/889.full.pdf>, doi:10.1126/science.1200735.
URL <http://www.sciencemag.org/content/331/6019/889.abstract>
8. S. Dutta-Gupta, O. J. F. Martin, S. Dutta Gupta, G. S. Agarwal, Controllable Coherent Perfect Absorption in a Composite Film, *Opt. Express* 20 (2) (2012) 1330–1336. doi:10.1364/OE.20.001330.
URL <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-2-1330>
9. S. Dutta-Gupta, R. Deshmukh, A. V. Gopal, O. J. F. Martin, Coherent Perfect Absorption Mediated Anomalous Reflection and Refraction, *Opt. Lett.* 37 (2012) 4452.
10. K. Nireekshan Reddy, S. Dutta Gupta, Nonlinear Coherent Perfect Absorption, *Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”* (4) (2014) 112–133.
11. C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel, Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference, *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987) 2044–2046. doi:10.1103/PhysRevLett.59.2044.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2044>
12. S. Dutta Gupta, G. S. Agarwal, Two-Photon Quantum Interference in Plasmonics: Theory and Applications, *Opt. Lett.* 39 (2) (2014) 390–393. doi:10.1364/OL.39.000390.
URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-39-2-390>
13. Two-Plasmon Quantum Interference, author = James S. Fakonas and Hyunseok Lee and Yousif A. Kelaïta and Harry A. Atwater, *Nature Photonics* 8 (4) (2014) 317–320. doi:10.1038/nphoton.2014.40.
14. K. Nireekshan Reddy, A. V. Gopal, S. Dutta Gupta, Nonlinearity Induced Critical Coupling, *Opt. Lett.* 38 (14) (2013) 2517–2520.
15. K. Nireekshan Reddy, S. Dutta Gupta, Light-Controlled Perfect Absorption of Light, *Optics letters* 38 (24) (2013) 5252–5255.
16. K. N. Reddy, S. Dutta Gupta, Cavity-Controlled Spectral Singularity, *Opt. Lett.* 39 (15) (2014) 4595–4598.
17. S. Longhi, Time-Reversed Optical Parametric Oscillation, *Phys. Rev. Lett.* 107 (2011) 033901. doi:10.1103/PhysRevLett.107.033901.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.033901>
18. S. Longhi, G. Della Valle, Coherent Perfect Absorbers for Transient, Periodic, or Chaotic Optical Fields: Time-Reversed Lasers Beyond Threshold, *Phys. Rev. A* 85 (2012) 053838. doi:10.1103/PhysRevA.85.053838.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.053838>
19. A. Yariv, D. M. Pepper, Amplified Reflection, Phase Conjugation, and Oscillation in Degenerate Four-Wave Mixing, *Opt. Lett.* 1 (1) (1977) 16–18. doi:10.1364/OL.1.000016.
URL <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-1-1-16>
20. R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Third Edition, 3rd Edition, Academic Press, 2008.
21. S. M. Jensen, R. W. Hellwarth, Observation of the Time-Reversed Replica of a Monochromatic Optical Wave, *Applied Physics Letters* 32 (3) (1978) 166–168. doi:<http://dx.doi.org/10.1063/1.89976>.
URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/32/3/10.1063/1.89976>
22. A. Kaplan, C. Law, Isolates in Four-Wave Mixing Optical Bistability, *IEEE Journal of Quantum Electronics* 21 (9) (1985) 1529–1537. doi:10.1109/JQE.1985.1072812.
23. S. D. Gupta, N. Ghosh, A. Banerjee, CRC Press, New York, 2015, Ch. 9.

24. J. H. Marburger, F. S. Felber, Theory of a Lossless Nonlinear Fabry–Perot Interferometer, *Phys. Rev. A* 17 (1978) 335–342. doi:10.1103/PhysRevA.17.335.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.17.335>
25. S. Dutta Gupta, Nonlinear Optics of Stratified Media, Vol. 38 of Progress in Optics, Elsevier, 1998, pp. 1–84. doi:http://dx.doi.org/10.1016/S0079-6638(08)70349-4.
URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663808703494>
26. P. B. Johnson, R. W. Christy, Optical Constants of the Noble Metals, *Phys. Rev. B* 6 (1972) 4370–4379. doi:10.1103/PhysRevB.6.4370.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.6.4370>
27. G. S. Agarwal, S. Dutta Gupta, T-Matrix Approach to the Nonlinear Susceptibilities of Heterogeneous Media, *Phys. Rev. A* 38 (1988) 5678–5687. doi:10.1103/PhysRevA.38.5678.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.38.5678>
28. G. L. Fischer, R. W. Boyd, R. J. Gehr, S. A. Jenekhe, J. A. Osaheni, J. E. Sipe, L. A. Weller-Brophy, Enhanced Nonlinear Optical Response of Composite Materials, *Phys. Rev. Lett.* 74 (1995) 1871–1874. doi:10.1103/PhysRevLett.74.1871.
URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.1871>
29. J. Jose, S. D. Gupta, Phase Conjugation Induced Distortion Correction and Optical Multistability in Enhanced Back Scattering in Nonlinear Layered Media, *Opt. Commun.* 145 (1998) 220–226.

УДК 538.56:625.365

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-182-191

Усиление и оптическая бистабильность при фазовом сопряжении, обусловленные идеальным когерентным поглощением света

К. Нирикшан Редди*, Эчанта Вену Гопал†, С. Д. Гупта*

** Институт физики
Университет Хайдерабада
Индия, Хайдерабад, 500046*

*† Отдел физики конденсированных сред и наук о материалах
Институт фундаментальных исследований Тата
Хоми Бхабха Роуд, Колаба, Мумбаи, 400005*

Идеальное когерентное поглощение света стало одним из важных направлений исследований в последние годы в области оптики из-за его способности поглощать весь падающий свет. Это явление в данной работе распространено на нелинейный режим, что позволило продемонстрировать мультистабильность и существование щелевых солитонов в таких нелинейных периодических структурах. В работе также исследуется ещё один нелинейный эффект, а именно обращение волнового фронта (ОВФ) в керровской нелинейной композитной структуре, когда распространяющиеся волны накачки полностью поглощаются с помощью когерентного идеального поглощения. Теория разработана в предположении постоянной интенсивности волны накачки, тогда последняя может быть отделена от сигнальной и фазосопрежённой волн. Учитывается также динамическое согласование фаз. Показано, что постоянная связи и величина фазосопрежённой отражательной способности в этом случае значительно увеличиваются, при этом становятся многозначными функциями. Продемонстрирована возможность переключений как «вниз», так и «вверх». Эта возможность может быть использована для эффективного переключения фазосопрежённой отражательной способности в фотонных схемах, а также найти несколько приложений при построении логических оптических вентилях.

Ключевые слова: фазовое сопряжение, идеальное когерентное поглощение, переключение, керровская среда, мультистабильность

Литература

1. *Yariv A.* Universal Relations for Coupling of Optical Power between Microresonators and Dielectric Waveguides // *Electronics Letters*. — 2000. — Vol. 36, No 4. — Pp. 321–322. — ISSN 0013-5194.
2. *Tischler J. R., Bradley M. S., Bulović V.* Critically Coupled Resonators in Vertical Geometry Using a Planar Mirror and a 5 nm Thick Absorbing Film // *Opt. Lett.* — 2006. — Vol. 31, No 13. — Pp. 2045–2047. — <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-31-13-2045>.
3. *Dutta Gupta S.* Strong-Interaction-Mediated Critical Coupling at Two Distinct Frequencies // *Opt. Lett.* — 2007. — Vol. 32, No 11. — Pp. 1483–1485. — <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-32-11-1483>.
4. *Deb S., Dutta-Gupta S., Banerji J.* Critical Coupling at Oblique Incidence // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. — 2007. — P. 555.
5. *Dutta-Gupta S., Deb S.* Signature of Strong Atom–Cavity Interaction on Critical Coupling // *Journal of Optics*. — 2010. — Vol. 12 (7). — P. 075103.
6. *Deb S., Gupta S. D.* Critical Coupling in a Fabry–Pérot Cavity with Metamaterial Mirrors // *Optics Communications*. — 2010. — Vol. 283 (23). — Pp. 4764–4769.
7. Time-Reversed Lasing and Interferometric Control of Absorption / W. Wan, Y. Chong, L. Ge, H. Noh, A. D. Stone, H. Cao // *Science*. — 2011. — Vol. 331, No 6019. — Pp. 889–892. — <http://www.sciencemag.org/content/331/6019/889.abstract>.
8. Controllable Coherent Perfect Absorption in a Composite Film / S. Dutta-Gupta, O. J. F. Martin, S. Dutta Gupta, G. S. Agarwal // *Opt. Express*. — 2012. — Vol. 20, No 2. — Pp. 1330–1336. — <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-20-2-1330>.
9. Coherent Perfect Absorption Mediated Anomalous Reflection and Refraction / S. Dutta-Gupta, R. Deshmukh, A. V. Gopal, O. J. F. Martin // *Opt. Lett.* — 2012. — Vol. 37. — P. 4452.
10. *Nireekshan Reddy K., Dutta Gupta S.* Nonlinear Coherent Perfect Absorption // *Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”*. — 2014. — No 4. — Pp. 112–133.
11. *Hong C. K., Ou Z. Y., Mandel L.* Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference // *Phys. Rev. Lett.* — 1987. — Vol. 59, issue 18. — Pp. 2044–2046. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.59.2044>.
12. *Dutta Gupta S., Agarwal G. S.* Two-Photon Quantum Interference in Plasmonics: Theory and Applications // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39, No 2. — Pp. 390–393. — <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-39-2-390>.
13. Two-Plasmon Quantum Interference, Author = James S. Fakonias and Hyunseok Lee and Yousif A. Kelaita and Harry A. Atwater // *Nature Photonics*. — 2014. — Vol. 8, No 4. — Pp. 317–320. — ISSN 0013-5194.
14. *Nireekshan Reddy K., Gopal A. V., Dutta Gupta S.* Nonlinearity Induced Critical Coupling // *Opt. Lett.* — 2013. — Vol. 38, No 14. — Pp. 2517–2520.
15. *Nireekshan Reddy K., Dutta Gupta S.* Light-Controlled Perfect Absorption of Light // *Optics letters*. — 2013. — Vol. 38, No 24. — Pp. 5252–5255.
16. *Reddy K. N., Dutta Gupta S.* Cavity-Controlled Spectral Singularity // *Opt. Lett.* — 2014. — Vol. 39, No 15. — Pp. 4595–4598.
17. *Longhi S.* Time-Reversed Optical Parametric Oscillation // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 107, issue 3. — P. 033901. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.107.033901>.
18. *Longhi S., Della Valle G.* Coherent Perfect Absorbers for Transient, Periodic, or Chaotic Optical Fields: Time-Reversed Lasers Beyond Threshold // *Phys. Rev. A*. — 2012. — Vol. 85, issue 5. — P. 053838. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.85.053838>.

19. *Yariv A., Pepper D. M.* Amplified Reflection, Phase Conjugation, and Oscillation in Degenerate Four-Wave Mixing // *Opt. Lett.* — 1977. — Vol. 1, No 1. — Pp. 16–18. — <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-1-1-16>.
20. *Boyd R. W.* *Nonlinear Optics*, Third Edition. — 3rd edition. — Academic Press, 2008. — ISBN 0123694701, 9780123694706.
21. *Jensen S. M., Hellwarth R. W.* Observation of the Time-Reversed Replica of a Monochromatic Optical Wave // *Applied Physics Letters*. — 1978. — Vol. 32, No 3. — Pp. 166–168. — <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/apl/32/3/10.1063/1.89976>.
22. *Kaplan A., Law C.* Isolas in Four-Wave Mixing Optical Bistability // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. — 1985. — Vol. 21, No 9. — Pp. 1529–1537. — ISSN 0018-9197.
23. *Gupta S. D., Ghosh N., Banerjee A.* // *Wave Optics : Basic Concepts and Contemporary Trends*. — New York: CRC Press, 2015.
24. *Marburger J. H., Felber F. S.* Theory of a Lossless Nonlinear Fabry–Perot Interferometer // *Phys. Rev. A*. — 1978. — Vol. 17, issue 1. — Pp. 335–342. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.17.335>.
25. *Dutta Gupta S.* *Nonlinear Optics of Stratified Media* / Ed. by E. Wolf. — Elsevier, 1998. — Vol. 38 of *Progress in Optics*. — Pp. 1–84. — <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0079663808703494>.
26. *Johnson P. B., Christy R. W.* Optical Constants of the Noble Metals // *Phys. Rev. B*. — 1972. — Vol. 6, issue 12. — Pp. 4370–4379. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.6.4370>.
27. *Agarwal G. S., Dutta Gupta S.* T-Matrix Approach to the Nonlinear Susceptibilities of Heterogeneous Media // *Phys. Rev. A*. — 1988. — Vol. 38, issue 11. — Pp. 5678–5687. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.38.5678>.
28. Enhanced Nonlinear Optical Response of Composite Materials / G. L. Fischer, R. W. Boyd, R. J. Gehr, S. A. Jenekhe, J. A. Osaheni, J. E. Sipe, L. A. Weller-Brophy // *Phys. Rev. Lett.* — 1995. — Vol. 74, issue 10. — Pp. 1871–1874. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.74.1871>.
29. *Jose J., Gupta S. D.* Phase Conjugation Induced Distortion Correction and Optical Multistability in Enhanced Back Scattering in Nonlinear Layered Media // *Opt. Commun.* — 1998. — Vol. 145. — Pp. 220–226.

УДК 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-192-198

Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением

Д. М. Янишевский

Кафедра высшей математики

*Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
ул. Букирева, д. 15, Пермь, Россия, 614990*

В рамках общей теории относительности построены соответствующие космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки в присутствии анизотропной идеальной жидкости, моделирующей вращающуюся тёмную энергию, чистого излучения и скалярного поля. Рассмотрены разные варианты потенциала скалярного поля: квадратичный, хиггсовский и четвёртой степени с положительным квадратичным членом. Зависимость полевой функции от времени задаётся в духе скатывания в ходе инфляции, при этом дополнительные уравнения состояния жидкости не задаются заранее. При решении уравнений Эйнштейна получена эволюция плотности и давления, установлено, что в случае квадратичного потенциала уравнение состояния анизотропной идеальной жидкости на больших временах принимают асимптотически вакуумоподобный вид, а сама жидкость изотропизируется. Проведён анализ космологической модели на предмет причинности методом поиска существования замкнутых времениподобных линий. Получен удовлетворительный порядок величины угловой скорости вращения Вселенной в настоящее время. Показано, что модель, при рассмотрении расширения от планковских масштабов до современного размера наблюдаемой Вселенной, даёт удовлетворительную величину порядка угловой скорости её вращения. Полученные решения могут быть применены к изучению эффектов, имеющих место в современную эпоху, а также во время инфляционной стадии.

Ключевые слова: космологическое расширение, скалярное поле, анизотропия Вселенной, ускоренное расширение, метрика VIII типа Бьянки

1. Введение

Обращение к анизотропной космологии обусловлено наблюдательными фактами [1–3], демонстрирующими возможность крупномасштабных отклонений от изотропии в наблюдаемой Вселенной, при этом глобальная анизотропия Вселенной может быть связана в том числе и с космологическим вращением. С другой стороны, в нынешнюю эпоху Вселенная расширяется с ускорением, причиной которого является, по-видимому, тёмная энергия. В работах [4–6] авторами были получены результаты для метрики рассматриваемого типа, но с другими материальными источниками. В данной работе в рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta, \quad (1)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — элементы лоренцевой матрицы, $\alpha, \beta = \{0, 1, 2, 3\}$, θ^α — ортонормированные 1-формы, выражающиеся через масштабный фактор R следующим образом:

$$\theta^0 = dt - R\nu_A e^A, \quad \theta^A = dt - RK_A e^A,$$

при этом $\nu_A = \{0, 0, 1\}$, $K_A = \{a, a, b\}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

Статья поступила в редакцию 10 октября 2016 г.

Автор благодарит участников гравитационного семинара проф. В.Ф. Панова в ПГНИУ за обсуждение результатов работы.

1-формы e^A имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} e^1 &= \operatorname{ch} y \cos z \, dx - \sin z \, dy, \\ e^2 &= \operatorname{ch} y \sin z \, dx + \cos z \, dy, \\ e^3 &= \operatorname{sh} y \, dx + dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Источниками гравитации являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся тёмную энергию, чистое излучение а также скалярное поле. Расчёты, связанные с уравнениями Эйнштейна, проведены с использованием тетрадного формализма.

2. Космологическая модель с расширением и вращением

Будем искать для метрики (1) космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

У нас используется такая система единиц, что скорость света и гравитационная постоянная, умноженная на 8π , равны единице. При этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = (p + \rho) u_\alpha u_\beta + (\pi - p) \chi_\alpha \chi_\beta - p \eta_{\alpha\beta}. \quad (4)$$

Тензор энергии-импульса чистого излучения

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = w k_\alpha k_\beta. \quad (5)$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля в тетрадном представлении даётся выражением

$$T_{\alpha\beta}^{(3)} = \phi_{,i} \phi_{,k} e_\alpha^i e_\beta^k - ((1/2)\phi_{,i} \phi_{,k} e_\gamma^i e^{\gamma k} - U)\eta_{\alpha\beta}, \quad (6)$$

причём тетрадные компоненты 4-скорости жидкости $u_\alpha = \{1, 0, 0, 0\}$, волнового вектора излучения $k_\alpha = \{k_0, 0, 0, k_3\}$, т.е. $k_0 = k_3$. Данная жидкость является сопутствующей, что легко показать прямо, рассмотрев связь тетрадных и координатных компонент соответствующего вектора.

В системе уравнений Эйнштейна результирующий тензор энергии-импульса даётся формулой

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(1)} + T_{\alpha\beta}^{(2)} + T_{\alpha\beta}^{(3)}. \quad (7)$$

Скалярное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_i (\sqrt{-g} g^{ik} \phi_{,k}) + \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (8)$$

В данной работе рассмотрены 3 вида потенциальной функции массивного скалярного поля:

$$U = \frac{m^2 \phi^2}{2}, \quad (9)$$

$$U = \frac{m^2 \phi^2}{2} + \frac{\lambda \phi^4}{4}, \quad (10)$$

$$U = -\frac{m^2\phi^2}{2} + \frac{\lambda\phi^4}{4}. \quad (11)$$

Уравнение (8) в метрике (1) принимает вид

$$\frac{(b^2 - 1)(3\dot{R}\dot{\phi} + R\ddot{\phi})}{b^2 R} + \frac{dU}{d\phi} = 0. \quad (12)$$

Уравнения (3) с учётом (4)–(7) запишутся следующим образом:

$$\frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2} = \rho + wk_0^2 + U + \frac{(1 + b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \quad (13)$$

$$\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2} = p - U + \frac{(-1 + b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \quad (14)$$

$$\frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - b^2)\dot{R}^2 - 8a^4 b^2 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2} = \pi + wk_0^2 - U + \frac{(1 + b^2)\dot{\phi}^2}{2b^2}, \quad (15)$$

$$\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 b R^2} = wk_0^2 + \frac{\dot{\phi}^2}{b}. \quad (16)$$

Во всех трёх случаях рассмотрим следующую зависимость полевой функции от времени:

$$\phi = \phi_0 e^{-Qt}, \quad (17)$$

соответствующую скачиванию в духе инфляции.

Если потенциал поля даётся формулой (9), то из (12) и (17) следует

$$R = R_0 e^{Ht}, \quad (18)$$

где $H = Q + b^2 m^2 / 3Q(b^2 - 1)$, а R_0 — постоянная интегрирования. При этом в координатном представлении волновой вектор принимает следующий вид:

$$k = \{k_0, k_0 R(b - 1) \operatorname{sh} y, 0, k_0 R(b - 1)\}. \quad (19)$$

Система уравнений (13)–(16) может быть решена без использования уравнений состояния, если все константы считать известными.

2.1. Решение с потенциалом вида (9)

Подставив (9), (17) и (18) в систему уравнений (13)–(16) и решив её, имеем следующие зависимости:

$$\rho = \frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 3)R_0^2 H^2 e^{2Ht}}{4a^4 b^2 R_0^2 e^{2Ht}} - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2Ht}} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{b e^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (20)$$

$$p = \frac{(1 - b^2)(b^2 + 12a^4 R_0^2 H^2 e^{2Ht})}{4a^4 b^2 R_0^2 e^{2Ht}} + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} + \frac{(1 - b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (21)$$

$$\pi = \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - 3b^2)R_0^2 H^2 e^{2Ht}}{4a^4 b^2 R_0^2 e^{2Ht}} + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2Ht}} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (22)$$

$$wk_0^2 = \frac{b}{R_0^2 e^{2Ht}} - \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}}. \quad (23)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$k_0 \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \frac{3(b^2 - 1)H^2}{b^2}, \quad p \rightarrow \frac{3(1 - b^2)H^2}{b^2}, \quad \pi \rightarrow \frac{3(1 - b^2)H^2}{b^2},$$

т. е. излучение затухает, а анизотропная жидкость асимптотически изотропизируется и принимает уравнение состояния $p = \pi = -\rho$ (становится вакуумоподобной). Условия положительной определённости плотности энергии тёмной материи и чистого излучения накладывают ограничение $b < -1$.

2.2. Решение с потенциалом вида (10)

Если подставить (10) в (12), то с учётом (17) эволюция масштабного фактора даётся выражением

$$R = R_0 e^{A(t)}, \quad (24)$$

где

$$A(t) = \left(\frac{m^2 b^2}{3Q(b^2 - 1)} + \frac{Q}{3} \right) t - \frac{\lambda b^2 \phi_0^2 e^{-2Qt}}{6Q^2(b^2 - 1)}. \quad (25)$$

Решая систему уравнений (13)–(16) с учётом (24), (25), находим следующее решение:

$$\rho = \frac{3 - b^2 - 4a^2}{4a^4 R_0^2 e^{2A(t)}} + \left(\frac{3b^2 - 3}{b^2} \right) \left(\frac{m^2 b^2}{3Q(b^2 - 1)} + \frac{Q}{3} + \frac{\lambda b^2 \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q(b^2 - 1)} \right)^2 - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} + \frac{4\lambda \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3(b^2 - 1)} - \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}}, \quad (26)$$

$$p = \frac{1 - b^2}{4a^4 R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{b^2}{3(b^2 - 1)} \left(\frac{m^2}{Q} + \frac{Q(b^2 - 1)}{b^2} + \frac{\lambda \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q} \right)^2 + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} + \frac{4\lambda \phi_0^2}{3e^{2Qt}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} + \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (27)$$

$$\pi = \frac{4a^2 + 3b^2 - 1}{4a^4 b^2 R_0^2 e^{2A(t)}} + \frac{3(1 - b^2)}{b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{3Q(b^2 - 1)} + \frac{Q}{3} + \frac{\lambda b^2 \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q(b^2 - 1)} \right)^2 + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} + \frac{4\lambda b^2 \phi_0^2}{3(b^2 - 1)e^{2Qt}} + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (28)$$

$$wk_0^2 = \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} + \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} - \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}}. \quad (29)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$wk_0^2 \rightarrow \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)}, \quad \rho \rightarrow \frac{b^2 - 1}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} + Q \right)^2 - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)},$$

$$\pi \rightarrow \frac{1 - b^2}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} + Q \right)^2 - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)}, \quad p \rightarrow \frac{1 - b^2}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} + Q \right)^2,$$

т. е. в этом случае анизотропная жидкость асимптотически не изотропизируется и вакуумоподобной не становится. Легко показать, что условия положительной определённости энергии приводят к тому, что в направлении, соответствующем давлению π , материя проявляет фантомные свойства ($\pi = k\rho$, $k < -1$), а в направлении, соответствующем давлению p , может быть как фантомной материей, так и квинт-эссенцией ($p = l\rho$, $-1 < l < -1/3$).

2.3. Решение с потенциалом вида (11)

Если потенциал даётся формулой (11) — потенциал Хиггса, то из уравнений (13)–(16) получаем

$$\rho = \frac{3 - b^2 - 4a^2}{4a^4 R_0^2 e^{2A(t)}} + \left(\frac{3b^2 - 3}{b^2} \right) \left(\frac{-m^2 b^2}{3Q(b^2 - 1)} + \frac{Q}{3} + \frac{\lambda b^2 \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q(b^2 - 1)} \right)^2 + \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} -$$

$$- \frac{4\lambda \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3(b^2 - 1)} - \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}}, \quad (30)$$

$$p = \frac{1 - b^2}{4a^4 R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{b^2}{3(b^2 - 1)} \left(-\frac{m^2}{Q} + \frac{Q(b^2 - 1)}{b^2} + \frac{\lambda \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q} \right)^2 - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} +$$

$$+ \frac{4\lambda \phi_0^2}{3e^{2Qt}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} + \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (31)$$

$$\pi = \frac{4a^2 + 3b^2 - 1}{4a^4 b^2 R_0^2 e^{2A(t)}} + \frac{3(1 - b^2)}{b^2} \left(\frac{-m^2 b^2}{3Q(b^2 - 1)} + \frac{Q}{3} + \frac{\lambda b^2 \phi_0^2 e^{-2Qt}}{3Q(b^2 - 1)} \right)^2 - \frac{m^2 \phi_0^2}{2e^{2Qt}} +$$

$$+ \frac{4\lambda b^2 \phi_0^2}{3(b^2 - 1)e^{2Qt}} + \frac{\lambda \phi_0^4}{4e^{4Qt}} - \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} + \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}} - \frac{(1 + b^2)Q^2 \phi_0^2}{2b^2 e^{2Qt}}, \quad (32)$$

$$wk_0^2 = \frac{b}{R_0^2 e^{2A(t)}} + \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)} - \frac{Q^2 \phi_0^2}{be^{2Qt}}. \quad (33)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$wk_0^2 \rightarrow \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)}, \quad \rho \rightarrow \frac{b^2 - 1}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} - Q \right)^2 - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)},$$

$$\pi \rightarrow \frac{1 - b^2}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} - Q \right)^2 - \frac{8a^4 b \lambda \phi_0^2}{3(b^2 - 1)}, \quad p \rightarrow \frac{1 - b^2}{3b^2} \left(\frac{m^2 b^2}{Q(b^2 - 1)} - Q \right)^2,$$

т. е. в присутствии хиггсовского поля анизотропная жидкость также асимптотически не изотропизируется и вакуумоподобной не становится, сохраняя поведение, аналогичное рассмотренному в случае с потенциалом (10).

Во всех трёх случаях параметры тёмной энергии — расширение θ , ускорение A и параметр вращения ω — даются следующими формулами:

$$\theta = 3\dot{R}/R, \quad (34)$$

$$A = \dot{R}/bR, \quad (35)$$

$$\omega = 1/2a^2R. \quad (36)$$

Определим, является ли модель с метрикой, определяемой условиями (1) и (2) причинной. Для этого предположим существование замкнутых времениподобных кривых, тогда на них есть точка, удовлетворяющая условию $dt/ds = 0$, тогда как $V_\mu V^\mu = 0$ в силу времениподобности. Это не выполняется при $1 < |b| < \sqrt{a^2 + 1}$.

Рассмотрим эволюцию Вселенной по нашей модели, учитывая (качественно) первую стадию инфляции, тогда при её расширении от планковского масштаба $R_{Pl} \approx 10^{-33}$ см до современного размера наблюдаемой Вселенной 10^{28} см, полагая при этом, что в планковскую эпоху угловая скорость вращения тёмной энергии 10^{43} 1/с, считая анизотропную жидкость слабо взаимодействующей с излучением, и подразумевая, что во время всей эволюции формула (36) верна, получим угловую скорость вращения в настоящее время равной по порядку 10^{-11} рад/год, что совпадает с оценками [7, 8].

3. Заключение

Рассмотрены три космологические модели, отличающиеся видом потенциала поля. Обнаружено, что в случае поля с потенциалом (9) имеют место асимптотически стремящиеся к вакуумоподобному уравнения состояния жидкости, а при потенциалах (10), (11) эти зависимости принимают более сложный вид.

Литература

1. *Land K., Magueijo J.* Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 071301–071304.
2. *Payez A., Cudell J. R., Hutsemekers D.* New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2012. — Vol. 2012, No 07. — P. 041.
3. *Liddle A. R., Cortes M.* Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111. — P. 111302.
4. *Панов В. Ф.* Вращающиеся космологические модели типа VIII по Бьянки // *Известия вузов. Физика*. — 1989. — № 5. — С. 98–103.
5. *Bradley G. M., Sviestins E.* Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow // *GRG*. — 1984. — Vol. 16, No 12. — Pp. 1119–1133.
6. *Kuvshinova E. V., Pavelkin V. N., Panov V. F.* Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy // *Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Vol. 20, No 1. — Pp. 141–143.
7. *Кречет В. Г.* Современные космологические данные и вращение Вселенной // *Известия вузов. Физика*. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 3–6.
8. *Kuvshinova E. V., Panov V. F., Sandakova O. V.* Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations // *Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Vol. 20, No 2. — Pp. 138–140.

UDC 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-192-198

Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Anisotropic Fluid, Scalar Field and Radiation

D. M. Yanishevskiy

*Department of Higher Mathematics
Perm State University
15 Bukireva St., Perm, 614990, Russian Federation*

Within the general theory of relativity the Bianchi type VIII cosmological models with rotation and expansion have been built. The matter includes 3 components: perfect anisotropic fluid, imitating the rotating dark energy, clear radiation and scalar field. Different types of scalar field potential have been observed: a square one, Higgs's potential and a power of four potential. Evolution of the potential function is given in the way similar to inflation, at the same time the equations of state are not postulated initially. When solving the Einstein's equation we obtain evolution of density and pressure of the liquid, also it has been found that when the potential is square, the fluid's equation of state becomes vacuum-like and the fluid becomes asymptotically isotropic. The analysis of absence of closed time-like curves has been done, so the model has been proved to be casual. The order of present angular velocity value, calculated within the cosmological model, has been found to be quite satisfactory. The found solutions may be used for effects taking place nowadays and also during the inflationary stage.

Key words and phrases: cosmological expansion, scalar field, anisotropy of the Universe, accelerated expansion, type VIII Bianchi metric

References

1. K. Land, J. Magueijo, Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy, *Physical Review Letters* 95 (2005) 071301–071304.
2. A. Payez, J. R. Cudell, D. Hutsemekers, New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2012 (07) (2012) 041.
3. A. R. Liddle, M. Cortes, Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe, *Physical Review Letters* 111 (2013) 111302.
4. V. F. Panov, Rotating Bianchi Type VIII Cosmological Models, *Russian Physics Journal* (5) (1989) 98–103.
5. G. M. Bradley, E. Sviestins, Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow, *GRG* 16 (12) (1984) 1119–1133.
6. E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy, *Gravitation and Cosmology* 20 (1) (2014) 141–143.
7. V. G. Krechet, Modern Cosmological Data and Rotation of the Universe, *Russian Physics Journal* 48 (3) (2005) 219–223.
8. E. V. Kuvshinova, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations, *Gravitation and Cosmology* 20 (2) (2014) 138–140.

© Янишевский Д. М., 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Азимов Дильмурат М. — доктор технических наук, профессор Гавайского университета в Мааноа (e-mail: azimov@hawaii.edu, тел.: (808) 956-2863)

Бикеев Олег Николаевич — заведующий лабораторией квантовой электроники кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: bickejev@gmail.com, тел.: +7 (905) 7458125)

Бобрикова Екатерина Васильевна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: ebobrikova@gmail.com)

Бужин Игорь Геннадьевич — сотрудник в/ч 33965 (e-mail: bigvrn93@mail.ru, тел.: +7(495)9893155)

Вену Гопал Эчанта (Venu Gopal Achanta) (Индия) — профессор, профессор Института фундаментальных исследований Тата, Индия (e-mail: achanta@tifr.res.in, тел.: +91(98)69454067)

Гайдамака Юлия Васильевна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: ygaidamaka@sci.pfu.edu.ru)

Гупта Субхашиш Датта (Gupta Subhasish Dutta) (Индия) — профессор, кандидат физико-математических наук, профессор Института физики университета Хайдерабада, Индия (e-mail: sdghyderabad@gmail.com, тел.: +91(94)40837050)

Майсё Андре — профессор, профессор университета Сорбонна (Париж, Франция) и почётный президент WONUC (e-mail: a.maisseau@bluewin.ch)

Малых Михаил Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, доцент факультета наук о материалах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykhmd@yandex.ru, тел.: +7 (495)9550999)

Медведева Екатерина Георгиевна — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: egmedvedeva@gmail.com)

Миронов Юрий Борисович — кандидат технических наук, сотрудник в/ч 33965 (e-mail: mistiam@gmail.com, тел.: +7(495)9893155)

Мухаметзянов Ильдар Абдулович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: mukhia@mail.ru, тел.: +7(495)9550778)

Мухарлямов Роберт Гарабшевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: robgar@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550758)

Нирикшан Редди Котакану (Nireekshan Reddy Kothakapu) (Индия) — студент Института физики университета Хайдерабада, Индия (e-mail: knireekshanreddy@gmail.com)

Салпагаров Солтан Исмаилович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий (e-mail: sismalg@gmail.com)

Самуйлов Константин Евгеньевич — профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и теории вероятностей РУДН (e-mail: ksam@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7(495)9520250)

Севастьянов Леонид Антонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495)9522572)

Чекмарёва Ольга Ивановна — старший преподаватель кафедры теоретической физики и механики РУДН (e-mail: spacefrogling@mail.ru, тел.: +7(499)1581789)

Янишевский Даниил Михайлович — соискатель кафедры высшей математики Пермского государственного национального исследовательского университета (e-mail: ydm86@yandex.ru, тел.: +7 (922) 6465325)

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе \LaTeX (используется версия $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{AMS}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS, \TeX ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе \BibTeX и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям:

оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Количество комплектов:

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	литер

на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Стоимость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)