

**Координационный Совет научного журнала
«Вестник Российского университета дружбы народов»:**

Филиппов В. М. — ректор РУДН, доктор физико-математических наук, профессор, академик РАО — *председатель Совета*

Зарюто С. А. — заместитель директора ИПК РУДН — *ответственный секретарь Совета*

Члены Координационного Совета:

Абрамов А. Ю. — директор медицинского института РУДН, доктор медицинских наук, доцент

Балыхина Т. М. — декан факультета повышения квалификации преподавателей русского языка как иностранного РУДН, доктор педагогических наук, профессор

Барабаш В. В. — декан филологического факультета РУДН, доктор филологических наук, профессор

Воскресенский Л. Г. — декан факультета физико-математических и естественных наук РУДН, доктор химических наук, профессор

Ефремов А. П. — проректор по учебной работе РУДН, доктор физико-математических наук, профессор

Кирабаев Н. С. — первый проректор — проректор по научной работе РУДН, доктор философских наук, профессор

Мосейкин Ю. Н. — декан экономического факультета РУДН, доктор экономических наук, профессор

Плющиков В. Г. — директор Аграрно-технологического института РУДН, доктор сельскохозяйственных наук, профессор

Пономарев Н. К. — декан инженерного факультета РУДН, кандидат технических наук, доцент

Цыж В. А. — декан факультета гуманитарных и социальных наук РУДН, доктор философских наук, профессор

Черных Н. А. — декан экологического факультета РУДН, доктор биологических наук, профессор

Шаронов В. Н. — директор ИПК РУДН, кандидат физико-математических наук

Якушев В. В. — декан факультета русского языка и общеобразовательных дисциплин РУДН, кандидат химических наук, доцент

Ястребов О. А. — директор юридического института РУДН, доктор юридических наук, профессор

**Индекс журнала в каталоге подписных изданий
Агентства «Роспечать» — 18235**

ISSN Print 2312-9735
ISSN Online 2312-9743

© Российский университет дружбы народов, 2017

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ
«МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА»**

Рыбаков Юрий Петрович — Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики и механики РУДН — *главный редактор*

Севастьянов Леонид Антонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН — *заместитель главного редактора*

Члены редколлегии

Ильгисонис Виктор Игоревич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

Самуйлов Константин Евгеньевич — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Скубачевский Александр Леонидович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

Гупта Субхашин Датта (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

Мартикайнен Олли Эрки (Финляндия) — PhD., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

Медведев М. В. (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо (Испания) — профессор Барселонского университета

Саха Биджан (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Чулуунбаатар Очбадрах (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

EDITORIAL BOARD

“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”

Rybakov Yu. P. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia, Head to the Department of Theoretical Physics and Mechanics of PFUR — *Editor-in-Chief of the series*

Sevastianov L. A. — DSc in Physics and Mathematics, professor, professor of the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR — *Vice Editor-in-Chief of the series*

Members of the editorial board

Il'gisonis V. I. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center “Kurchatov Institute”

Samouylov K. E. — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

Skubachevski A. L. — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

Gupta Subhasish Dutta (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

Martikainen Olli Erkki (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

Medvedev M. V. (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

Ramirez Inostrozo Orlando Raphael (Spain) – DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

Saha Bijan (Bangladesh) – DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

Chuluunbaatar Ochbadrah (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

**Вестник
Российского
университета
дружбы народов**

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1993 году

Серия

Математика. Информатика. Физика

2017, Т. 25, № 1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1

Российский университет дружбы народов

СОДЕРЖАНИЕ

**Математическая теория телетрафика
и сети телекоммуникаций**

- Богданова Е. В., Милованова Т. А., Зарядов И. С.** Анализ системы
массового обслуживания с рекуррентным обслуживанием и полным обновлением 3
Зарипова Э. Р., Ардила Пинто А. Метод оценки времени установления
соединения по радиоканалу случайного доступа 9

Математическое моделирование

- Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.** Распространение
нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболоч-
ках, заполненных вязкой жидкостью 19
**Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Веницкий С. И., Дербов В. Л.,
Гуждж А.** Алгоритмы для решения параметрической самосопряжённой эл-
липтической краевой задачи в двумерной области методом конечных элемен-
тов высокого порядка точности 36
**Диваков Д. В., Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов
Л. А.** Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплё-
ночной волноводной линзе 56
Егоров А. А., Егорова М. А. Волновая модель распространения и изме-
нения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом
сообществе 69
Кулябов Д. С. Использование геометризации уравнений Максвелла при рас-
чёте оптических приборов 81
Сведения об авторах 91
Правила оформления статей 93

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics

SCIENTIFIC JOURNAL

2017, Vol. 25, № 1

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1

RUDN University

CONTENTS

Mathematical Theory of Teletraffic and Telecommunication Networks

- Bogdanova E. V., Milovanova T. A., Zaryadov I. S.** The Analysis of Queuing System with General Service Distribution and Renovation 3
- Zaripova E. R., Ardila Pinto A.** Performance and Modeling of Session Setup Procedure Using Random Access Channel 9

Mathematical Modeling

- Blinkov Y. A., Mesyanzhin A. V., Mogilevich L. I.** Propagation of Nonlinear Waves in Coaxial Physically Nonlinear Cylindrical Shells Filled with a Viscous Fluid 19
- Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S. I., Derbov V. L., Gózdź A.** Algorithms for Solving the Parametric Self-Adjoint 2D Elliptic Boundary-Value Problem Using High-Accuracy Finite Element Method 36
- Divakov D. V., Malykh M. D., Sevastianov A. L., Sevastianov L. A.** Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens . . . 56
- Egorov A. A., Egorova M. A.** The Wave Model of the Propagation and Changes of Linguistic Information in the Indo-European Model Language Community . . . 69
- Kulyabov D. S.** Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices 81
- Information about the authors** 91
- Guidelines for Authors** 93

Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

UDC 519.21

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-3-8

The Analysis of Queuing System with General Service Distribution and Renovation

E. V. Bogdanova*, T. A. Milovanova*, I. S. Zaryadov*[†]

** Department of Applied Probability and Informatics
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

*[†] Institute of Informatics Problems
Federal Research Center "Computer Science and Control"
Russian Academy of Sciences,
44-2 Vavilova str., Moscow, Russia, 119333*

We investigate the queuing system in which the losses of incoming orders due to the introduction of a special renovation mechanism are possible. The introduced queuing system consists of server with a general distribution of service time and a buffer of unlimited capacity. The incoming flow of tasks is a Poisson one. The renovation mechanism is that at the end of its service the task on the server may with some probability empty the buffer and leave the system, or with an additional probability may just leave the system. In order to study the characteristics of the system the Markov chain embedded upon the end of service times is introduced. Under the assumption of the existence of a stationary regime for the embedded Markov chain the formula for the probability generation function is obtained. With the help of the probability generation function such system characteristics as the probability of the system being empty, the average number of customers in the system, the probability of a task not to be dropped, the distribution of the service waiting time for non-dropped tasks, the average service waiting time for non-dropped requests are derived.

Key words and phrases: queuing system, renovation, general service distribution, probability characteristics

1. Introduction

Due to the study of mathematical models close to reality, there is a growing need to find new solutions and methods of queuing systems construction and analysis. One of the classical and already well-studied systems close to reality is the system $M/G/1/\infty$ with the Poisson incoming flow and general service distribution.

The described non-Markov random process — a process where the future state can not depend only on the state, viewed in the given time. The system $M/G/1/\infty$ can be investigated by a variety of different approaches and one of them is the construction of the embedded Markov chain [1].

Thanks to the Pollaczek–Khinchin formula [2] for a given stationary probability distribution some other characteristics can be also derived. These characteristics of the system $M/G/1/\infty$ with the standard service discipline FCFS (First Come, First Served) can be transferred to some other common discipline [1, 2].

However, trying to describe a real system, it is necessary to take into account the possibility of losing data in the system, for example, due to failure of an unreliable server [3] or due to arrival of some “viral” applications [4], and the other tasks in the buffer will be dropped. This situation may be investigated with the help of queuing system

Received 21st December, 2016.

The reported study was supported by the Russian Foundation for Basic Research RFBR, research projects No. 15-07-03007, 15-07-03406.

$M/G/1/\infty$ with renovation without repeated service [5–9]. Systems with renovation mechanism can be used for traffic control mechanism modeling [10].

We analyze the queueing system in which losses of the accepted customers are possible due to the so called renovation.

2. System Description

Consider $M/G/1/\infty$ queueing system with the general service time distribution $B(x)$, Poisson arrival rate λ and renovation. The renovation mechanism, due to [5,7,8], operates as follows. At the end of each service completion the customer leaving server with the (known) probability q empties the buffer and leaves the system. With the probability $p = 1 - q$ it leaves the system without having any effect on the buffer contents. If $p = 1$ one obtains the well-known $M/G/1/\infty$ queue.

As usual, if one considers the total number of customers $\{\nu_i, i \geq 0\}$ in the system just after i -th service completion, then $\{\nu_i, i \geq 0\}$ is the embedded Markov chain of the queue-length process $\{\nu(t), t \geq 0\}$. Denote the state set of the embedded Markov by $\mathcal{X} = \{0, 1, \dots\}$.

The matrix of transition probabilities for the embedded Markov chain has the form:

$$\begin{pmatrix} \beta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i q & \beta_1 p & \beta_2 p & \beta_3 p & \beta_4 p & \beta_5 p & \dots \\ \beta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i q & \beta_1 p & \beta_2 p & \beta_3 p & \beta_4 p & \beta_5 p & \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q & \beta_0 p & \beta_1 p & \beta_2 p & \beta_3 p & \beta_4 p & \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q & 0 & \beta_0 p & \beta_1 p & \beta_2 p & \beta_3 p & \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q & 0 & 0 & \beta_0 p & \beta_1 p & \beta_2 p & \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q & 0 & 0 & 0 & \beta_0 p & \beta_1 p & \dots \\ \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_0 p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

3. Stationary Distribution of the Embedded Markov Chain

Denote by $p_i, i \geq 0$, the probability, that there are i customers in the system upon service completion. Then, assuming that the stationary distribution exists, one has the following system for p_i :

$$p_0 = \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i q \right) p_0 + \left(\beta_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i q \right) p_1 + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \beta_i q \right) p_k, \quad (1)$$

$$p_i = \beta_i p p_0 + \sum_{k=1}^{i+1} p \beta_{i+1-k} p_k, \quad i \geq 1. \quad (2)$$

Here $\beta_i = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dB(x)$ denotes the probability that during service time exactly i ($i \geq 0$) other customers have entered the system. It is straightforward to show, that the probability generation function (PGF)

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$$

and can be written in the following form:

$$P(z) = \frac{(1-z) p p_0 \beta(\lambda - \lambda z) - z q}{p \beta(\lambda - \lambda z) - z}, \quad (3)$$

where

$$\beta(\lambda - \lambda z) = \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i z^i = \sum_{i=0}^{\infty} z^i \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} dB(x).$$

If $p = 1$ then (3) coincides with the Pollaczek-Khinchin formula for classic $M/G/1/\infty$ queue.

4. Performance Characteristics

Using the analytical property of $P(z)$ one can obtain the expression for the probability of system being empty upon service completion. Consider the equation

$$p \beta(\lambda - \lambda z) - z = 0.$$

It has the unique solution $0 < z_0 < 1$ for $z \in [0, 1]$. As the denominator of (3) vanishes at point $z = z_0$ then the numerator of (3) must also vanish at this point. Thus

$$(1 - z_0) p p_0 \beta(\lambda - \lambda z_0) - z_0 q = 0,$$

wherefrom it follows that

$$p_0 = \frac{q z_0}{(1 - z_0) p \beta(\lambda - \lambda z_0)}. \quad (4)$$

If $p = 1$ ($q = 1 - p = 0$) one gets the well-known expression $p_0 = 1 - \lambda b$, where b is the mean service time.

The average number N of customers in the system upon service completion is equal to

$$N = P'(1) = \frac{p}{q} (p_0 + \lambda b - 1). \quad (5)$$

Here λb is the average number of customers arrived during a single service time.

Let us denote by $p^{(\text{serv})}$ the probability that all the customers in the system just after the end of the service will not be dropped and will eventually receive service. Then

$$p^{(\text{serv})} = \frac{1}{1 - p_0} \sum_{i=1}^{\infty} p_i p^{i-1} = \frac{1}{p(1 - p_0)} (P(p) - p_0). \quad (6)$$

The $P(p)$ is the value of probability generation function (3) $P(z)$ with $z = p$.

Let us denote as $W^{(\text{serv})}(x)$ the probability, that the waiting time for the last customer in the buffer (just after the end of the service) will be less than x :

$$W^{(\text{serv})}(x) = \frac{1}{(1-p_0)p^{(\text{serv})}} \sum_{i=1}^{\infty} W_i^{(\text{serv})}(x)p_i,$$

here $W_i^{(\text{serv})}(x)$ is the probability, that the waiting time for the i -th customer in the buffer (just after the end of the service) will be less than x with the requirement that there were exactly i customers just after the end of service.

The Laplace–Stieltjes transformation of $W^{(\text{serv})}(x)$ has the form:

$$\omega^{(\text{serv})}(s) = \frac{1}{(1-p_0)p^{(\text{serv})}} \left(p_1 + \sum_{i=2}^{\infty} p_i p^{i-1} \beta(s)^{i-1} \right) = \frac{1}{(1-p_0)p^{(\text{serv})}} \frac{P(p\beta(s)) - p_0}{p\beta(s)}. \quad (7)$$

The mean waiting time of the customer which received service is equal to:

$$w^{(\text{serv})} = - \left(\omega^{(\text{serv})}(s) \right)'_{s=0} = \frac{b}{1-p_0} \left(\frac{P'(p)}{p^{(\text{serv})}} - 1 \right), \quad (8)$$

where

$$P'(p) = \frac{b}{p(\beta(\lambda q) - 1)^2} (p^2 p_0 + qp - p_0 p + \lambda p_0 p(1-p)pb - \lambda p^2 qb) = \frac{qp(1-p_0)}{(1-\beta(\lambda q))^2}.$$

5. Conclusion

The paper considers the queueing system with full renovation. Analytical expressions for the main performance characteristics are obtained. The study of $M/G/1/\infty$ queues with the general renovation as well as with renovation and re-service (due to [11]) is an open issue.

References

1. L. Kleinrock, Queueing Systems: Volume I — Theory, Wiley Interscience, New York, 1975.
2. P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno, Queueing Theory, VSP, Utrecht, Boston, 2004.
3. A. Dudin, V. Klimenok, V. Vishnevsky, Analysis of Unreliable Single Server Queueing System with Hot Back-Up Server, Communications in Computer and Information Science (499) (2015) 149–161.
4. P. P. Bocharov, C. D'Apice, R. Manzo, A. V. Pechinkin, Analysis of the Multi-Server Markov Queueing System with Unlimited Buffer and Negative Customers, Automation and Remote Control (1) (2007) 85–94.
5. A. Kreinin, Queueing Systems with Renovation, Journal of Applied Math. Stochast. Analysis 10 (4) (1997) 431–443.
6. P. P. Bocharov, I. S. Zaryadov, Probability distribution in queueing systems with renovation, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (1–2) (2007) 15–25.

7. I. S. Zaryadov, A. V. Pechinkin, Stationary Time Characteristics of the $GI/M/n/\infty$ System with Some Variants of the Generalized Renovation Discipline, *Automation and Remote Control* (12) (2009) 2085–2097.
8. I. S. Zaryadov, The $GI/M/n/\infty$ Queuing System with Generalized Renovation, *Automation and Remote Control* (4) (2010) 663–671.
9. I. S. Zaryadov, A. V. Gorbunova, The Analysis of Queueing System with Two Input Flows and Stochastic Drop Mechanism, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (2) (2015) 33–37.
10. I. S. Zaryadov, A. V. Korolkova, The Application of Model with General Renovation to the Analysis of Characteristics of Active Queue Management with Random Early Detection (RED), *T-Comm: Telecommunications and Transport* (7) (2011) 84–88.
11. P. P. Bocharov, A. V. Pechinkin, Application of Branching Processes to Investigate the $M/G/1$ Queueing System with Retrials, in: *Int. Conf. Distributed computer communication networks. Theory and Applications*, Tel-Aviv, 1999, pp. 20–26.

УДК 519.21

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-3-8

Анализ системы массового обслуживания с рекуррентным обслуживанием и полным обновлением

Е. В. Богданова*, Т. А. Милованова*, И. С. Зарядов*†

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *Институт проблем информатики
Федерального исследовательского центра «Информатика и управление»
Российской академии наук
ул. Вавилова, д. 44, корп. 2, Москва, Россия, 119333*

В работе исследуется система массового обслуживания, в которой возможны потери поступающих заявок из-за введённого специального механизма обновления. Система состоит из одного обслуживающего прибора с рекуррентным распределением времени обслуживания и накопителя неограниченной ёмкости, в рассматриваемую систему поступает пуассоновский поток заявок. Механизм обновления заключается в том, что в момент окончания обслуживания на приборе заявка либо может опустошить весь накопитель и покинуть систему, либо с дополнительной вероятностью просто покинуть систему. Для исследования характеристик рассматриваемой системы строится вложенная по моментам окончания обслуживания цепь Маркова. В предположении о существовании стационарного режима для построенной вложенной цепи Маркова выводится производящая функция числа заявок в системе, вероятность простоя системы, среднее число заявок в системе, вероятность отсутствия потерь, распределение времени ожидания начала обслуживания несброшенных заявок, среднее время ожидания обслуживания для несброшенной заявки.

Ключевые слова: полное обновление, система массового обслуживания, рекуррентное обслуживание, сброс заявок, вероятностные характеристики

Литература

1. *Kleinrock L. Queueing Systems: Volume I — Theory.* — New York: Wiley Interscience, 1975.
2. *Queueing Theory / P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno.* — Utrecht, Boston: VSP, 2004.
3. *Dudin A., Klimenok V., Vishnevsky V. Analysis of Unreliable Single Server Queueing System with Hot Back-Up Server // Communications in Computer and Information Science.* — 2015. — No 499. — Pp. 149–161.

4. *Zaryadov I. S., Pechinkin A. V.* Stationary Time Characteristics of the $GI/M/n/\infty$ System with Some Variants of the Generalized Renovation Discipline // Automation and Remote Control. — 2009. — No 12. — Pp. 2085–2097.
5. *Kreinin A.* Queueing Systems with Renovation // Journal of Applied Math. Stochast. Analysis. — 1997. — Vol. 10, No 4. — Pp. 431–443.
6. *Бочаров П. П., Зарядов И. С.* Стационарное распределение вероятностей в системах массового обслуживания с обновлением // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2007. — № 1-2. — С. 15–25.
7. *Zaryadov I. S., Pechinkin A. V.* Stationary Time Characteristics of the $GI/M/n/\infty$ System with Some Variants of the Generalized Renovation Discipline // Automation and Remote Control. — 2009. — No 12. — Pp. 2085–2097.
8. *Zaryadov I. S.* The $GI/M/n/\infty$ Queueing System with Generalized Renovation // Automation and Remote Control. — 2010. — No 4. — Pp. 663–671.
9. *Зарядов И. С., Горбунова А. В.* Анализ системы массового обслуживания с двумя входящими потоками и вероятностным сбросом // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2015. — № 2. — С. 33–37.
10. *Зарядов И. С., Королькова А. В.* Применение модели с обобщённым обновлением к анализу характеристик систем активного управления очередями типа Random Early Detection (RED) // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2011. — № 7. — С. 84–88.
11. *Bocharov P. P., Pechinkin A. V.* Application of Branching Processes to Investigate the $M/G/1$ Queueing System with Retrials // Int. Conf. Distributed computer communication networks. Theory and Applications. — Tel-Aviv: 1999. — Pp. 20–26.

УДК 621.39
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-9-18

Метод оценки времени установления соединения по радиоканалу случайного доступа

Э. Р. Зарипова, А. Ардила Пинто

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В настоящее время наблюдается стремительный рост числа устройств, обменивающихся между собой информацией в сети связи LTE (Long-Term Evolution), а также увеличение объёма передаваемых данных. Актуальной является задача уменьшения нагрузки, как сигнальной, так и пользовательской, которую обслуживают сети связи. Для этого разрабатывают и внедряют алгоритмы упрощённого взаимодействия между пользовательскими устройствами и сетью с целью минимизации затраченных ресурсов сети. В статье исследуется процедура установления соединения между устройством и базовой станцией LTE. Вопрос передачи малых данных, образуемых межмашинными соединениями (M2M, Machine-To-Machine), может быть решён с помощью использования радиоканала случайного доступа RACH (Random Access Channel) для установления соединения. Такое решение было предложено в техническом отчёте TR 37.868 консорциума 3GPP (3rd Generation Partnership Project). Для процедуры установления соединения по радиоканалу случайного доступа необходимо оценить предварительные вероятностно-временные характеристики, такие как время установления соединения, вероятность успешного установления соединения, вероятность коллизии, статистика по числу преамбул при успешном установлении соединения. В данной статье приведены формулы для расчёта всех необходимых характеристик. Численные результаты показывают точность предложенной аналитической модели в виде Марковской цепи.

Ключевые слова: межмашинные соединения, канал случайного доступа (RACH), вероятность коллизий, математическая модель, среднее время установления соединения

1. Введение

Всевозможные технологические устройства, в том числе отвечающие за безопасность жизнедеятельности, работают в автономном режиме без участия человека и поддерживают передачу малых данных. Традиционные технологии беспроводной связи, в том числе сети 3GPP LTE, не позволяют установить эффективно M2M-соединения для большого числа одновременно взаимодействующих устройств. Сложность в обслуживании таких устройств базовыми станциями сети связи пятого поколения 5G заключается не только в большом количестве M2M-устройств, но и в необходимости частой передачи данных. Как и для всех новых технологий, анализ особенностей M2M-трафика требует предварительного анализа характеристик в зависимости от числа M2M-устройств. Одно из возможных решений этой проблемы основано на использовании процедуры случайного доступа [1–3].

M2M-устройства, такие как пожарные датчики, периодически отправляют малые объёмы данных при работе в нормальном режиме. Тем не менее, в случае возникновения чрезвычайной ситуации M2M-устройства генерируют трафик взрывного характера, который может привести к перегрузке. Передающиеся в большом объёме сообщения о нештатной ситуации создают коллапс на базовых станциях, откуда перегрузка перераспределяется на все близлежащие узлы сети связи. В случае сетевого коллапса возникают задержки доступа, которые значимы при аварийных и чрезвычайных ситуациях. Целью данной работы является аналитическая модель

Статья поступила в редакцию 29 декабря 2016 г.
Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-07-03051, 16-07-00766.

процедуры установления соединения между оборудованием пользователя и базовой станцией. В соответствии с [2] опорная схема процедуры состоит из четырёх сообщений между пользовательским оборудованием (UE, User Equipment) и базовой станцией (BS, Base Station).

Разработчиками ведутся исследования, направленные на моделирование процедуры установления соединения по радиоканалу случайного доступа, например, найдены характеристики с помощью имитационного моделирования [4, 5], и через аналитические модели [6–8], обзор известных работ по данному вопросу представлен в [9]. В отличие от известных результатов, цель данного исследования заключается в получении решения в замкнутой форме, которое зависит от минимального числа параметров процедуры установления соединения и нетрудно для расчёта. Данная статья является продолжением работ [4, 6], где был предложен подход к аналитическому моделированию с использованием марковской цепи.

В техническом отчёте 3GPP [2] перечислены характеристики, рекомендуемые к исследованиям для M2M-соединений:

1. Вероятность коллизии, определяемая как отношение числа неудачных попыток, когда два или более M2M-устройства в один момент времени выбирают одну и ту же преамбулу, к общему числу возможных попыток установления соединения.
2. Вероятность успешного установления соединения, определяемая как вероятность успешного завершения соединения в пределах максимального числа разрешённых попыток отправки преамбул.
3. Статистика по количеству преамбул, необходимых для успешного установления соединения.
4. Статистика по времени установления соединения для процедуры установления соединения между первой попыткой отправки преамбулы до успешного соединения M2M-устройства с базовой станцией.

В текущей работе представлены все вероятностно-временные характеристики, предлагаемые к исследованию в TR 37.868. Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко описана процедура из четырёх сообщений по радиоканалу случайного доступа и основные упрощающие предположения. В разделе 3 представлены формулы для расчёта ключевых показателей в замкнутой форме. В разделе 4 представлены численные примеры вероятностно-временных характеристик и перечислены задачи дальнейших исследований.

2. Процедура установления соединения

Широко известна процедура установления соединения между пользователем и базовой станцией с использованием четырёх сообщений по радиоканалу случайного доступа [2, 4–9]. Процедура начинается с передачи преамбулы от оборудования пользователя к базовой станции (Msg1). После отправки преамбулы оборудование пользователя ожидает от базовой станции ответ в виде Msg2 (RAR, Random-Access Response). Если время ожидания Msg2 истекло и сообщение не получено, значит, произошла коллизия из-за наличия нескольких устройств, отправляющих одну и ту же преамбулу в один момент времени. В случае коллизии оборудование пользователя повторяет попытку передачи преамбулы после заранее заданного интервала ожидания. При превышении порога попыток передачи преамбулы процедура установления соединения по радиоканалу RACH признаётся неудачной. В случае успешной передачи преамбулы в виде Msg1 и получения ответа Msg2, оборудование пользователя и базовая станция обмениваются ещё одной парой сообщений Msg3 и Msg4. Сообщение HARQ (Hybrid Automatic Repeat request) в виде сообщения Msg3 передаётся по радиоканалу PUSCH (Physical Uplink Shared Channel). Ответное сообщение Msg4 является последним в процедуре установления соединения. Считается, что ответные сообщения Msg2 и Msg4 всегда гарантированно передаются. При

превышении порога попыток передачи сообщений Msg3/Msg4 [2] необходимо заново передавать преамбулу и последующие сообщения.

Введём ряд упрощающих предположений для процедуры установления соединения и построим математическую модель для этой процедуры в виде дискретной цепи Маркова в соответствии с [6]. Введём обозначения для интервалов времени, необходимых на отправку и обработку сообщений. Время установления соединения может быть рассчитано путём суммирования соответствующих временных интервалов, введённых ниже:

- Δ_1^1 — время ожидания для синхронизации до передачи Msg1;
- Δ_1^2 — время передачи Msg1;
- Δ_1^3 — время обработки Msg1 на базовой станции;
- Δ_1^4 — время ожидания ответа Msg2;
- $\Delta_1 := \Delta_1^1 + \Delta_1^2 + \Delta_1^3 + \Delta_1^4$ — время от начала процедуры до отправки сообщения Msg3 или повторной передачи преамбулы;
- Δ_2 — время ожидания для повторной передачи Msg1;
- Δ_3 — временной интервал после успешной передачи Msg1 и Msg2 до отправки сообщения HARQ (Msg3);
- Δ_4 — время для передачи сообщения Msg3, ожидания ответного сообщения Msg4 и обработки успешно полученного Msg4.

Введённые обозначения показаны на диаграмме последовательностей сообщений для случая успешного установления соединения без коллизий на рис. 1 и для случая с коллизиями на рис. 2.

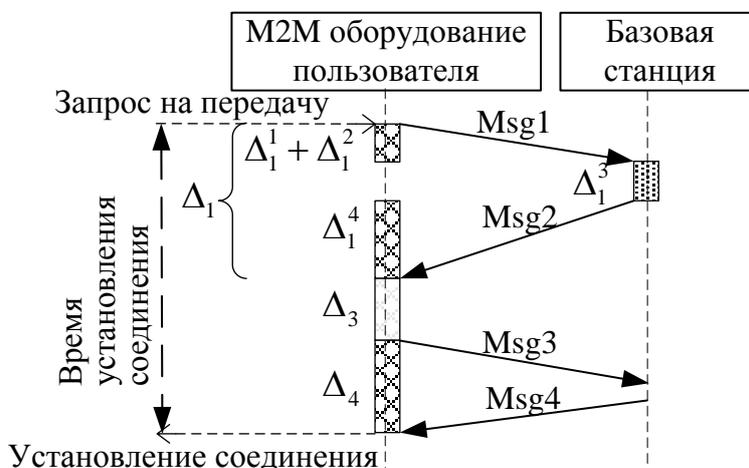


Рис. 1. Диаграмма последовательности сообщений без коллизий

При успешном соединении время установления равно сумме временных интервалов. При возникновении коллизии или при превышении порога на число попыток передачи сообщений Msg3 необходимы повторные попытки отправки преамбулы, что увеличивает время установления соединения. В настоящее время даны рекомендации для ограничения повторных передач для Msg1 и для Msg3 числами $N = 9$ и $M = 4$ [2] соответственно. Обозначим через p и g вероятность коллизий сообщений Msg1 и Msg2.

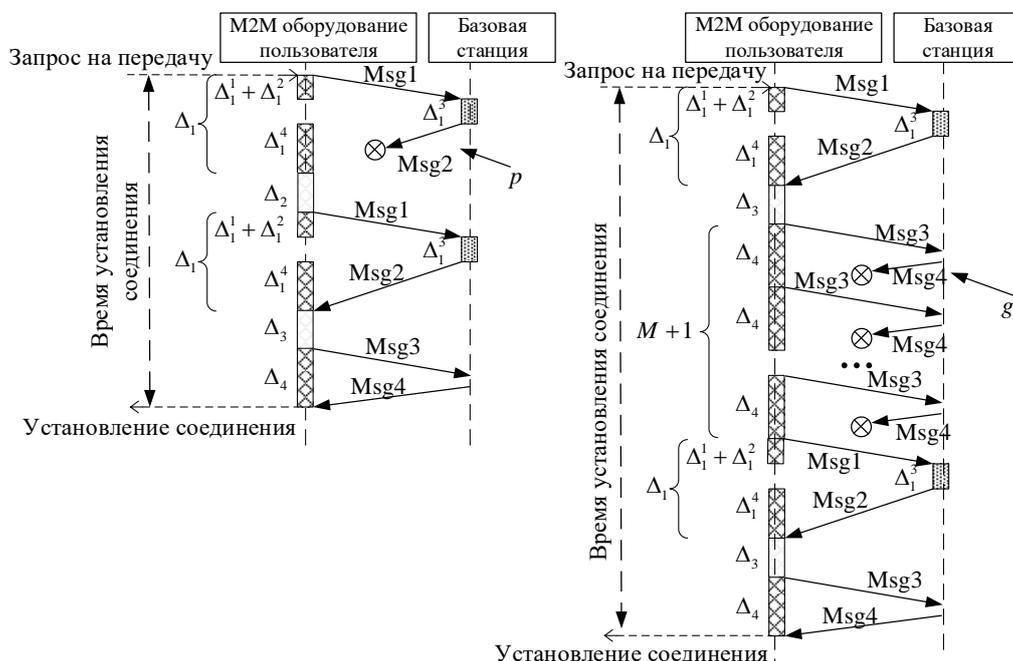


Рис. 2. Диаграммы последовательностей сообщений с коллизиями: (а) коллизии преамбулы, (б) превышение порога на число попыток при отправке сообщений Msg3

3. Математическая модель процедуры установления соединения

Опишем цепь Маркова $\{\xi_i, i = 0, \dots, (N + 1)(M + 1) + 1\}$ с дискретным временем и пространством состояний

$$X = \{(n, m, k), n = 0, \dots, N, m = 0, \dots, M, k = 0, \dots, n\} \cup \{\omega, v\},$$

с начальным состоянием $(0, 0, 0)$, двумя поглощающими состояниями ω и v . Начальное состояние представляет начало процедуры, после которой будет следовать первая попытка передачи преамбулы, поглощающее состояние ω , которое означает успешное установление соединения, и поглощающее состояние v , означающее отказ в установлении соединения. Другие состояния обозначены (n, m, k) , где n — число ретрансляций Msg1, m — число ретрансляций Msg3 после последнего успешно переданного сообщения Msg1, и k — число успешно переданных сообщений Msg1, после которого все $M + 1$ последующие передачи сообщений Msg3 не были переданы в результате коллизий. На рис. 3 изображён один из возможных путей от состояния $(0, 0, 0)$ до состояния (n, m, k) при успешном установлении соединения.

Отметим, что время установления соединения в процедуре установления соединения по радиоканалу случайного доступа определяется как интервал времени от момента попытки первой передачи преамбулы до момента окончания обработки успешно полученного Msg4. В статье не различаются два разных пути, имеющие одинаковое время установления соединения в одном и том же состоянии (n, m, k) , после которого соединение будет установлено.

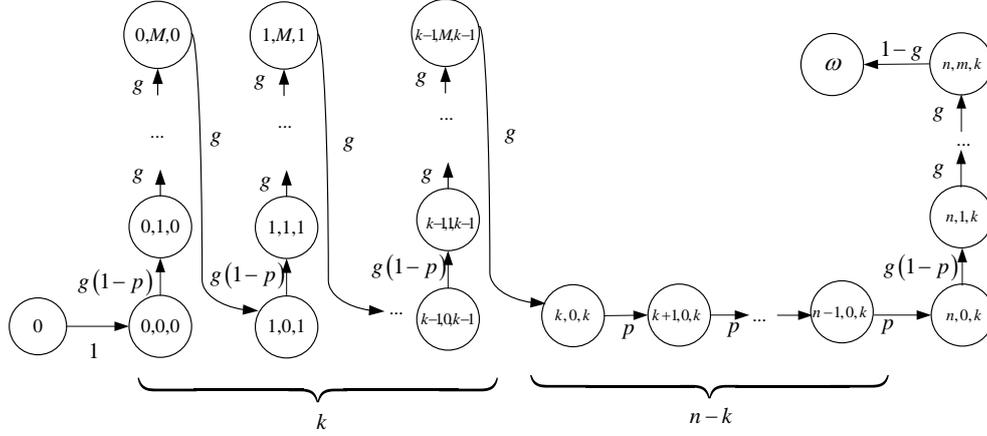


Рис. 3. Пример успешной процедуры с повторными передачами Msg1 и Msg3

В этих предположениях вероятность $P(n, m, k)$ попадания в состояние (n, m, k) из состояния $(0, 0, 0)$ в цепи Маркова $\{\xi_i\}$ определяется по формуле

$$P(n, m, k) = p^{n-k} C_n^k ((1-p)g^{M+1})^k (1-p)g^m, \quad (n, m, k) \in X. \quad (1)$$

Первый множитель p^{n-k} означает $n - k$ коллизий Msg1, множитель $((1-p)g^{M+1})^k$ — k успешных передач Msg1, после каждой из которых следует $M+1$ неуспешных передач сообщений Msg3, множитель $(1-p)g^m$ соответствует последней успешной передаче Msg1 с m ретрансляциями Msg3, биномиальный коэффициент C_n^k отражает число возможных путей, соответствующих такой процедуре.

Вероятность успешного установления соединения и вероятность отказа представлены формулами (2) и (3):

$$P(\omega) = \sum_{(n,m,k) \in X} P(n, m, k) \cdot (1-g) = 1 - (p + (1-p)g^{M+1})^{N+1}, \quad (2)$$

$$P(v) = 1 - P(\omega) = (p + (1-p)g^{M+1})^{N+1}. \quad (3)$$

Время $D(n, m, k)$ установления соединения из состояния (n, m, k) соответствует сумме временных интервалов, участвующих в процедуре и может быть описано формулой (4):

$$\begin{aligned} D(n, m, k) &= (n-k)(\Delta_1 + \Delta_2) + k(\Delta_1 + \Delta_3 + M\Delta_4) + \Delta_1 + \Delta_3 + (m+1)\Delta_4 = \\ &= (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot n + \Delta_4 \cdot m + (\Delta_3 + M\Delta_4 - \Delta_2) \cdot k + \Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через $Q(n, m, k)$ вероятность того, что процедура установления соединения будет завершена сразу после состояния (n, m, k) . Из определения вероятности $Q(n, m, k)$ получим формулу (5):

$$Q(n, m, k) = \frac{P(n, m, k) \cdot (1-g)}{P(\omega)}. \quad (5)$$

Среднее время установления соединения D определяется по формуле

$$D = \sum_{(n,m,k) \in X} Q(n, m, k) D(n, m, k), \quad (6)$$

среднее время установления соединения может быть вычислено в явном виде по формуле (7):

$$\begin{aligned} D = & (\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4) + \Delta_4 \cdot \frac{g - (M+1)g^{M+1} + Mg^{M+2}}{(1-g)(1-g^{M+1})} + \\ & + (\Delta_1 + \Delta_2) \cdot \frac{\beta(1 - (N+1)\beta^N + N\beta^{N+1})}{(1-p)(1-g^{M+1})(1-\beta^{N+1})} + \\ & + (\Delta_3 + M\Delta_4 - \Delta_2) \cdot \frac{g^{M+1}(1 - (N+1)\beta^N + N\beta^{N+1})}{(1-g^{M+1})(1-\beta^{N+1})}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\beta = p + g^{M+1}(1-p)$ — суммарная вероятность ретрансляции преамбулы.

Функция распределения (ФР) времени установления соединения представлена формулой (8),

$$F_d(x) = \sum_{(n,m,k) \in X} \frac{P(n, m, k) \cdot (1-g) \cdot u(x - D(n, m, k))}{P(\omega)}, \quad (8)$$

где $u(x)$ — функция Хевисайда.

Вероятность P_l , ФР $F_l(y)$ и преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) $\alpha(s)$ того, что для установления соединения будет необходимо l преамбул, представлены формулами (9), (10) и (11):

$$P_l = \sum_{\substack{n=l-1 \\ (n,m,k) \in X}} \frac{P(n, m, k) \cdot (1-g)}{P(\omega)} = \frac{(1-p)(1-g^{M+1})\beta^{l-1}}{1-\beta^{N+1}}, \quad l = \overline{1, N+1}, \quad (9)$$

$$F_l(y) = \sum_{1 \leq l \leq \lfloor y \rfloor} P_l = \frac{1 - \beta^{\lfloor y \rfloor}}{1 - \beta^{N+1}}, \quad (10)$$

$$\alpha(s) = \sum_{1 \leq l \leq N+1} P_l e^{-ls} = \frac{1 - \beta}{1 - \beta^{N+1}} \cdot \frac{1 - (\beta e^{-s})^{N+1}}{e^s - \beta}. \quad (11)$$

Для статистических данных можно использовать среднее число преамбул A , необходимых для успешного установления соединения (12) и δ -квантиль любого уровня $F_l(y_\delta) = \delta$ (13).

$$A = -\alpha'(s)|_{s=0} = \frac{1 - (N+2)\beta^{N+1} + (N+1)\beta^{N+2}}{(1-\beta^{N+1})(1-\beta)}, \quad (12)$$

$$y_\alpha = \log_\beta(1 - \alpha + \alpha \cdot \beta^{N+1}). \quad (13)$$

Отметим, что для вероятности коллизий p при отправке преамбулы предлагаются различные решения. Например, в [2] предложена формула (14), а в [8] формула (15). Формула (15) не учитывает попытки доступа, которые в тот момент времени

не нуждались в установлении соединения.

$$p = 1 - e^{-\gamma/L}, \quad (14)$$

$$p = 1 - e^{-\gamma/L} - \frac{\gamma}{L}e^{-\gamma/L}, \quad (15)$$

где γ — реальная интенсивность попыток доступа, а L — общее число возможных попыток доступа в секунду.

В текущей работе проведено сравнение (14) и (15) и использовалась для численного эксперимента формула (14), предложенная в [2].

4. Численный эксперимент

Для анализа вероятностно-временных характеристик рассмотрим одну соту сети LTE, поддерживающую обслуживание M2M-устройств, для данных, перечисленных в табл. 1 [2, 4–6, 9].

Таблица 1

Исходные параметры

Параметры	Обозначение	Значение
Количество возможных попыток доступа (индекс конфигурации физического канала случайного доступа б)	L	200
Максимальное число ретрансляций преамбул (Msg1)	N	9
Максимальное число ретрансляций сообщений HARQ (Msg3)	M	4
Число преамбул в слоте для передачи Msg1	N_{pr}	54
Вероятность коллизии преамбулы (Msg1)	p	[0; 1]
Вероятность коллизии HARQ (Msg3)	g	0,02; 0,5; 0,8; 0,95
Время от начала процедуры до отправки сообщения Msg 3 или повторной передачи преамбулы	Δ_1	10,5 мс
Время отклика (Backoff window)	Δ_2	20 мс
Временной интервал после успешной передачи Msg2 до отправки Msg3	Δ_3	5 мс
Временной интервал для отправки Msg3, ожидания и обработки Msg4	Δ_4	6 мс

Для эксперимента выбрана следующая схема генерируемого M2M-трафика: M2M-устройства генерируют запросы базовой станции равномерно, 90% M2M-устройств, находящихся в соте нуждаются в корректировке местоположения с периодичностью 10 с.

На рис. 4 и 5 показана зависимость вероятности успешного соединения и среднего времени установления соединения от вероятности коллизии и числа M2M-устройств в сети и различных вероятностях повторной передачи HARQ g .

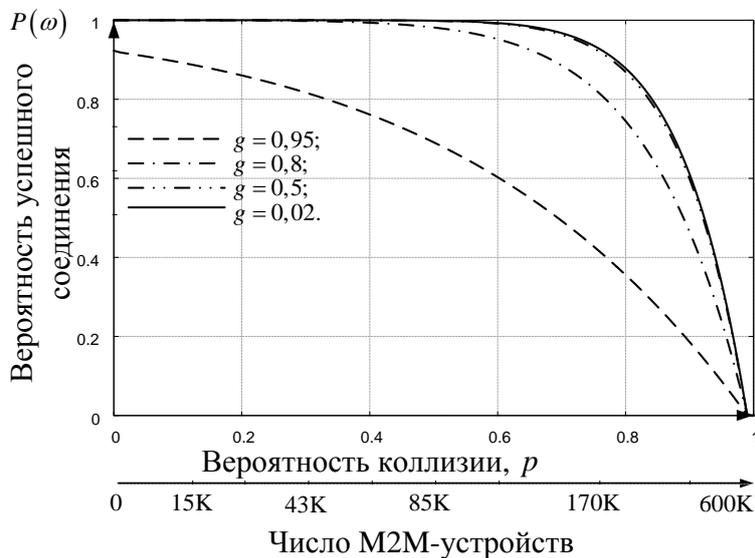


Рис. 4. Вероятность успешного установления соединения

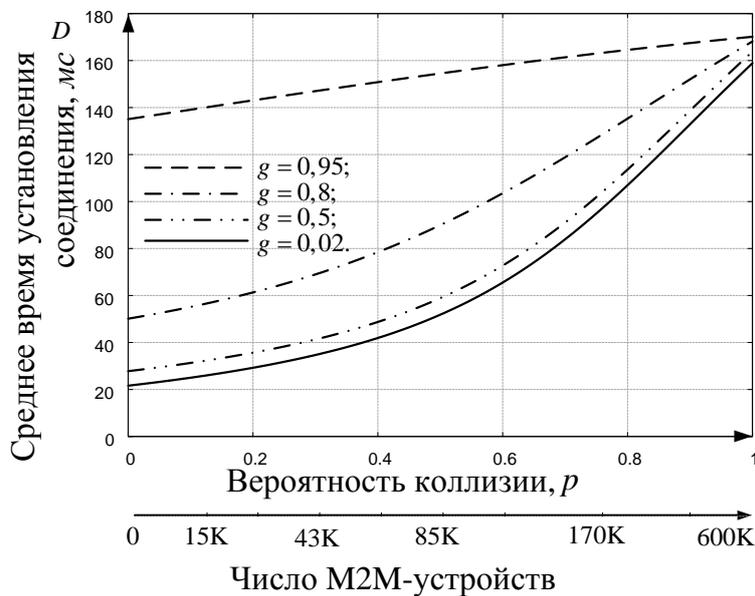


Рис. 5. Среднее время установления соединения

Графики показывают, что при $g \leq 0,5$ даже при вероятности коллизий $p = 0,6$ вероятность успешного доступа близка к 1. Среднее время установления соединения

зависит от изменения вероятности коллизии p и g и может достигать 170 мс из-за значительного количества повторных передач преамбулы и HARQ-сообщений.

5. Заключение

Полученные в данной статье результаты в части вероятности успешного установления соединения могут быть применены, например, в службах управления парком такси при аэропортах. Среднее время при установлении соединения крайне важно в области мониторинга землетрясений, поскольку даже десятки миллисекунд имеют значение при реагировании экстренными службами. Все перечисленные в [2] характеристики для сетей LTE выражены в явном виде и могут быть использованы для предварительного анализа.

Интересной задачей для дальнейших исследований является построение на основе данной математической модели процедуры установления соединений с использованием схемы I-RA (Improved Random Access) с D2D-RA-устройствами (Device-to-Device), агрегирующими информацию для передачи на базовую станцию от всех близлежащих M2M-устройств. Другой задачей является применение процедуры запрета классов вызовов ACB (Access Class Baring) на основе процедуры установления соединения по радиоканалу случайного доступа, исследованной в данной работе.

Литература

1. 3GPP LTE Release 10 & beyond (LTE-Advanced), MTC Enhancements.
2. Study on RAN Improvements for Machine-type Communications. Release 11. — TR 37.868. — 2011.
3. Study on enhancements to Machine-Type Communications and other mobile data applications; RAN Aspects. Release 12. — TR 37.869. — 2013.
4. Modelling a Random Access Channel with Collisions for M2M Traffic in LTE Networks / V. Borodakiy, K. Samouylov, Yu. Gaidamaka, P. Abaev, I. Buturlin, Sh. Ete-zov // NEW2AN/ruSMART / Ed. by S. Balandin et al. — Springer, Heidelberg. LNCS 8638, 2014. — Pp. 301–310.
5. Analyzing the Overload of 3GPP LTE System by Diverse Classes of Connected-Mode MTC Devices / O. Dementev, O. Galinina, M. Gerasimenko, T. Tirronen, J. Torsner, S. Andreev, Y. Koucheryavy // IEEE World Forum on Internet of Things. — 2014. — Pp. 309–312.
6. Baseline Analytical Model for Machine-type Communications over 3GPP RACH in LTE-advanced Networks / K. Samouylov, Yu. Gaidamaka, I. Gudkova, E. Zaripova, S. Shorgin // ISCIS 2016: Communications in Computer and Information Science. — Vol. 659. — Springer, 2016. — Pp. 203–213.
7. Wei C.-H., Bianchi G., Cheng R.-G. Modelling and Analysis of Random Access Channels with Bursty Arrivals in OFDMA Wireless Networks // IEEE Trans. on Wireless Communication. — 2015. — No 14. — Pp. 1940–1953.
8. RACH Collision Probability for Machine-Type Communications / R.-G. Cheng, C.-H. Wei, S.-L. Tsao, F.-C. Ren. — 2012. — Pp. 1–5.
9. Virtual Code Resource Allocation for Energy-Aware MTC Access over 5G Systems / M. Condoluci, G. Araniti, M. Dohler, A. Iera, A. Molinaro // Ad Hoc Networks. — 2016. — Vol. 43. — Pp. 3–15.

UDC 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-9-18

Performance and Modeling of Session Setup Procedure Using Random Access Channel

E. R. Zaripova, A. Ardila Pinto

*Department of Applied Probability and Informatics
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

We observe nowadays increasing the number of devices using Internet for data transmission in LTE network. Researchers offer their algorithms and methods for base station load reduction. Our approach allows minimizing network resources using Random Access Channel for session setup procedure. We obtain all performance measures for this procedure between user equipment and LTE base station. Procedure includes four messages: preamble transmission on the physical random access channel (Msg1), random access response of existing RACH procedure (Msg2), connection request, a.k.a. Hybrid automatic repeat request on the physical uplink shared channel (Msg3) and connection resolution (Msg4). This approach is used for small data transmission. If two or more devices select the same preamble, then collision occurs, and it is necessary to retransmit another preamble. Similarly, Msg3 may be blocked due to lack of resources. Our analytical model includes the dependence on collision probability. This solution has been proposed by 3GPP technical report 37.868. We obtain such performance measures as collision probability, dependent upon the number of attempts and the overall number of attempts in the period; access success probability; statistics of number of preamble transmissions; statistics of access delay. Numerical experiment demonstrate the accuracy of the proposed analytical model in the form of Markov chains.

Key words and phrases: LTE-advanced, machine-type communications, random access channel, Markov chain, access success probability, average access delay

References

1. 3GPP LTE Release 10 & beyond (LTE-Advanced), MTC Enhancements.
2. Study on RAN Improvements for Machine-type Communications. Release 11., TR 37.868 (Sept 2011).
3. Study on enhancements to Machine-Type Communications and other mobile data applications; RAN Aspects. Release 12., TR 37.869 (Sept 2013).
4. V. Borodakiy, K. Samouylov, Yu. Gaidamaka, P. Abaev, I. Buturlin, Sh. Etezzov, Modelling a Random Access Channel with Collisions for M2M Traffic in LTE Networks, Springer, Heidelberg. LNCS 8638, 2014, pp. 301–310.
5. O. Dementev, O. Galinina, M. Gerasimenko, T. Tirronen, J. Torsner, S. Andreev, Y. Koucheryavy, Analyzing the Overload of 3GPP LTE System by Diverse Classes of Connected-Mode MTC Devices, in: IEEE World Forum on Internet of Things, 2014, pp. 309–312.
6. K. Samouylov, Yu. Gaidamaka, I. Gudkova, E. Zaripova, S. Shorgin, Baseline Analytical Model for Machine-type Communications over 3GPP RACH in LTE-advanced Networks, in: ISCIS 2016: Communications in Computer and Information Science, Vol. 659, Springer, 2016, pp. 203–213.
7. C.-H. Wei, G. Bianchi, R.-G. Cheng, Modelling and Analysis of Random Access Channels with Bursty Arrivals in OFDMA Wireless Networks, IEEE Trans. on Wireless Communication (14) (2015) 1940–1953.
8. R.-G. Cheng, C.-H. Wei, S.-L. Tsao, F.-C. Ren, RACH Collision Probability for Machine-Type Communications (2012) 1–5.
9. M. Condoluci, G. Araniti, M. Dohler, A. Iera, A. Molinaro, Virtual Code Resource Allocation for Energy-Aware MTC Access over 5G Systems, Ad Hoc Networks 43 (2016) 3–15.

Математическое моделирование

УДК 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35

Распространение нелинейных волн в соосных физически нелинейных цилиндрических оболочках, заполненных вязкой жидкостью

Ю. А. Блинков*, А. В. Месянжин[†], Л. И. Могилевич[‡]

* Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, Россия, 410012

[†] ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики»

ул. Большая Садовая, д. 239, г. Саратов, Россия, 410005

[‡] Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
ул. Политехническая, д. 77, г. Саратов, Россия, 410054

В современной волновой динамике известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Они получены на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщённых уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Также методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках, отличающиеся от известных учётом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками. На основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, получены системы обобщённых уравнений КдВ. В представленной работе проведено исследование модели волновых явлений двух физически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочек типа Кирхгофа–Лява, содержащих вязкую несжимаемую жидкость, как между ними, так и внутри. Для рассмотренных систем уравнений с учётом влияния жидкости с помощью построения базиса Грёбнера получены разностные схемы типа Кранка–Николсона. Для генерации этих разностных схем использованы базовые интегральные разностные соотношения, которые аппроксимируют исходную систему уравнений. Применение техники базисов Грёбнера позволяет генерировать схемы, для которых с помощью эквивалентных преобразований можно получить дискретные аналоги законов сохранения исходных дифференциальных уравнений. На основе разработанного вычислительного алгоритма создан комплекс программ, позволяющий построить графики и получить численные решения задач Коши при точных решениях системы уравнений динамики соосных оболочек в качестве начального условия.

Ключевые слова: нелинейные волны, вязкая несжимаемая жидкость, цилиндрические упругие оболочки

1. Постановка задачи

В современной волновой динамике одним из важных направлений является изучение поведения волн деформаций в упругих оболочках. Для абсолютно жёсткой трубы с круговым сечением ламинарное движение вязкой несжимаемой жидкости под действием гармонического по времени перепада давления исследовано в [1]. Для трубы — упругой цилиндрической оболочки проведено аналогичное исследование в [2–5], а с учётом жидкости в [6].

Статья поступила в редакцию 19 сентября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00175-а).

Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейно вязкоупругих тонкостенных конструкциях, в том числе цилиндрических оболочках, без взаимодействия с вязкой несжимаемой жидкостью рассматривались ранее с позиции теории солитонов [7].

Известны математические модели волновых движений в бесконечно длинных геометрически и физически нелинейных оболочках [8,9], содержащих вязкую несжимаемую жидкость, на базе связанных задач гидроупругости, описываемых уравнениями динамики оболочек и вязкой несжимаемой жидкости, в виде обобщённых уравнений Кортвега де Вриза (КдВ). Выявлены эффекты влияния вязкой несжимаемой жидкости на поведение волны деформации в оболочке в зависимости от коэффициента Пуассона материала оболочки. В частности, при наличии жидкости в оболочке из неорганических материалов (различные трубопроводы в технологических сооружениях) выявлен экспоненциальный рост амплитуды волны. В случае органического материала (кровеносные сосуды) наличие жидкости приводит к быстрому затуханию волны.

Методом возмущений по малому параметру задачи получены математические модели волнового процесса в бесконечно длинных геометрически нелинейных соосных цилиндрических упругих оболочках [10,11], отличающиеся от известных учётом наличия несжимаемой вязкой жидкости между оболочками, на основе связанных задач гидроупругости, которые описываются уравнениями динамики оболочек и несжимаемой вязкой жидкости с соответствующими краевыми условиями, в виде системы обобщённых уравнений КдВ. Выявлены эффекты влияния несжимаемой вязкой жидкости между оболочками на поведение волны деформаций в соосных оболочках. Наличие волны деформаций во внешней оболочке приводит к возникновению волны деформаций во внутренней оболочке, которой не было в начальный момент времени, и происходит «перекачка энергии» (через слой жидкости) от внешней оболочки к внутренней, которая сопровождается немонотонным падением амплитуды волны во внешней оболочке, и, как следствие, немонотонным снижением скорости её распространения. При этом во внутренней оболочке происходит немонотонное увеличение амплитуды. Вследствие колебаний амплитуд и скоростей с течением времени их скорости и амплитуды выравниваются.

Рассмотрим две соосные бесконечно длинные упругие оболочки на рис. (1), внутри которых находится вязкая несжимаемая жидкость. Ширина щели, занимаемой жидкостью δ , радиус срединной поверхности оболочки R ; $R_1 = R^{(1)} - h_0^{(1)}/2$ — внутренний радиус внешней оболочки; $R_2 = R^{(2)} + h_0^{(2)}/2$ — внешний радиус внутренней оболочки; $R_3 = R^{(2)} - h_0^{(2)}/2$ — внутренний радиус внутренней оболочки, $R^{(1)}$, $R^{(2)}$ — радиусы срединных поверхностей внешней и внутренней оболочек; $h_0^{(1)}$, $h_0^{(2)}$ — их толщины. Все механические перемещения внутренней оболочки обозначены индексом (2) сверху, а внешней — индексом (1).

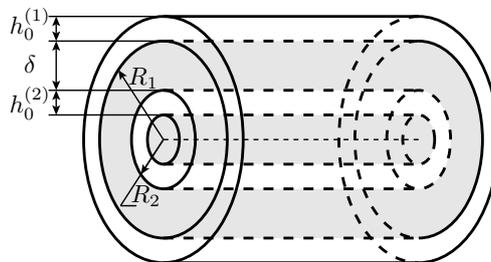


Рис. 1. Упругие бесконечно длинные соосные цилиндрические оболочки

Записывая уравнение движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Лява, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций e_i [12]:

$$\sigma_i = E e_i \mp m e_i^3,$$

где E — модуль Юнга, m — константа материала, которая определяется из опытов на сжатие или растяжение.

Уравнение движения несжимаемой вязкой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат (r, Θ, x) в случае осесимметричного течения [13, 14] записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right), \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границе оболочек и жидкости на рис. 1 при $r = R_i - W^{(i)}$ выполняются условия прилипания жидкости [14]

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = V_x + U^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_x}{\partial r}, \quad -\frac{\partial W^{(i)}}{\partial t} = V_r + U^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial x} - W^{(i)} \frac{\partial V_r}{\partial r}. \quad (2)$$

Здесь t — время; r, x — цилиндрические координаты; V_r, V_x — проекции на оси цилиндрической системы координат вектора скорости; $U^{(i)}$ — продольное упругое перемещение оболочки по оси x ; $W^{(i)}$ — прогиб оболочки, положительный к центру кривизны; R_1 — внутренний радиус внешней оболочки; R_2 — внешний радиус внутренней оболочки ($R_1 = R_2 + \delta$); δ — толщина слоя жидкости при кольцевом сечении трубы, $i = 1$ относится к внешней, а $i = 2$ относится к внутренней оболочке; p — давление в жидкости; ρ — плотность жидкости; ν — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнения динамики физически нелинейной оболочки записываются в виде [15, 16]

$$\begin{aligned} \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \left[U_x^{(i)} - \mu_0 \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \left\{ 1 \mp \frac{4m}{3E} \left[\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right] \right\} \right\rangle_x - \\ - \rho_0 h_0^{(i)} U_{tt}^{(i)} = -q_x^{(i)} - \tilde{q}_x(i-1), \\ \frac{E h_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12} W_{xxxx}^{(i)} - \frac{1}{R} \left(\mu_0 U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[1 \pm \frac{4m}{3E} \left(\left(U_x^{(i)} - \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right)^2 + U_x^{(i)} \frac{W^{(i)}}{R^{(i)}} \right) \right] \right\rangle + \\ + \rho_0 h_0^{(i)} W_{tt}^{(i)} = (-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь μ_0 — коэффициент Пуассона, ρ_0 — плотность материала оболочек; x — продольная координата. Нижние индексы у перемещений обозначают соответствующие частные производные.

Напряжения со стороны слоя жидкости определяются формулами

$$\begin{aligned} q_n &= \left[P_{rr} \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) + P_{rx} \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ q_x &= \left[P_{rx} \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) + P_{xx} \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) \right] \Big|_{r=R_i - W^{(i)}}, \\ P_{rr} &= -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad P_{rx} = \rho\nu \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right), \quad P_{xx} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial V_x}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

В подходе Эйлера здесь имеем

$$\begin{aligned} \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{n}_r} \right) &= \frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|}, \quad \cos \left(-\widehat{\bar{n}^{(i)}, \bar{i}} \right) = -\frac{R_i - W^{(i)}}{|\bar{N}|} \frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}, \\ \cos \left(-\widehat{\bar{n}, \bar{n}_r} \right) &= \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \quad \cos \left(-\widehat{\bar{n}, \bar{i}} \right) = -\frac{\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x}}{\left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}, \\ |\bar{N}| &= \left(R_i - W^{(i)} \right) \left(1 + \left(\frac{\partial W^{(i)}}{\partial x} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь \bar{n} — нормаль к срединной поверхности i -й оболочки, \bar{n}_r, \bar{i} — орты базиса (r, Θ, x) цилиндрической системы координат, центр которой расположен на геометрической оси. Если снять напряжения на невозмущённую поверхность оболочки, то можно считать $-\bar{n} = \bar{n}_r$ и $\cos \left(-\widehat{\bar{n}, \bar{n}_r} \right) = 1$, $\cos \left(-\widehat{\bar{n}, \bar{i}} \right) = 0$. Напряжения \tilde{q}_x, \tilde{q}_n со стороны жидкости, которая находится во внутренней оболочке определяется теми же формулами (4), (5), в которых плотность жидкости $\bar{\rho}$, коэффициент кинематической вязкости $\bar{\nu}$.

2. Уравнения динамики оболочек

Принимая длину волны l за характерный размер и обозначая амплитуду продольного перемещения u_m и прогиба w_m , переходим к безразмерным переменным.

$$W^{(i)} = w_m u_3^{(i)}, \quad U^{(i)} = u_m u_1^{(i)}, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}.$$

Здесь c_0 — скорость звука в оболочке.

Полагаем

$$\frac{u_m}{l} = \varepsilon \ll 1, \quad \frac{R^{(i)}}{l} = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right), \quad \frac{h_0^{(i)}}{R^{(i)}} = O(\varepsilon), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon).$$

Введём полухарактеристические (бегущие) координаты и растянутое время

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (6)$$

где c — неизвестная безразмерная скорость волны.

Разделим обе части 1-го уравнения (3) на $\frac{1}{l} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2 \frac{1}{l}$, получим

$$\left\langle \frac{u_m}{l} \left[u_{1\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \left(u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)2} \right) \right\} \right\rangle_{\xi} - \\ - \frac{u_m}{l} \left(c^2 u_{1\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{1\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{1\tau\tau}^{(i)} \right) = - \frac{l(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разделим обе части 2-го уравнения (3) на $\frac{1}{R^{(i)}} \frac{Eh_0^{(i)}}{1 - \mu_0^2} = \frac{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}{R^{(i)}}$, получим

$$\frac{u_m}{l} \left\langle \frac{h_0^{(i)2}}{12l^2} \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} u_{3\xi\xi\xi\xi}^{(i)} + \left[-\mu_0 u_{1\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_3^{(i)} \right] \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \pm \frac{4}{3} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \frac{m}{E} \left(u_{1\xi}^{(i)2} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{1\xi}^{(i)} u_3^{(i)} + \frac{w_m^2 l^2}{u_m^2 R^{(i)2}} u_3^{(i)2} \right) \right\} \right\rangle + \\ + \frac{w_m R^{(i)}}{l^2} \left(c^2 u_{3\xi\xi}^{(i)} - 2\varepsilon c u_{3\xi\tau}^{(i)} + \varepsilon^2 u_{3\tau\tau}^{(i)} \right) = R^{(i)} \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Разложим упругие перемещения по степеням $\varepsilon = u_m/l$:

$$u_1^{(i)} = u_{10}^{(i)} + \varepsilon u_{11}^{(i)} + \dots, \quad u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} + \varepsilon u_{31}^{(i)} + \dots,$$

подставим их в уравнения, разделим обе части уравнений на $\varepsilon = u_m/l$ и, оставляя члены ε^0 и ε^1 , получим

$$\left(u_{10\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right)_{\xi} + \varepsilon \left\{ u_{11\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \left(u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \mu_0 \left(\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\}_{\xi} - \\ - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} - \varepsilon c^2 u_{11\xi\xi}^{(i)} + 2\varepsilon c u_{10\xi\tau}^{(i)} = - \frac{l^2(q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1))}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}, \\ - \mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} + \varepsilon \left\langle -\mu_0 u_{11\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[\mu_0 u_{10\xi}^{(i)3} - (1 + \mu_0) \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{10\xi}^{(i)} u_{30}^{(i)} \left(u_{10\xi}^{(i)} - \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} \right) - \left(\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} \right)^3 u_{30}^{(i)3} \right] \right\rangle + \\ + \frac{w_m R^{(i)}}{u_m l} c^2 u_{30\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при ε^0 , будем иметь систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{10\xi\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30\xi}^{(i)} - c^2 u_{10\xi\xi}^{(i)} &= 0 \\ -\mu_0 u_{10\xi}^{(i)} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} &= 0. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что $\frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_{10\xi}^{(i)}$, $(1 - \mu_0^2 - c^2) u_{10\xi\xi}^{(i)} = 0$. Следовательно u_{10} — произвольная функция, а безразмерная скорость волны в замене координат (6) имеет значение $c = \sqrt{1 - \mu_0^2}$. Приравниваем коэффициенты при ε в правых и левых частях уравнений и учитываем предыдущие результаты, тогда получаем

$$\begin{aligned} \left[\mu_0^2 u_{11\xi}^{(i)} - \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} \mp \frac{4}{3} \frac{m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0^2) (1 - \mu_0 + \mu_0^2) u_{10\xi}^{(i)3} \right]_{\xi} + \\ + 2\sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\tau\xi}^{(i)} = -\frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} (q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1)), \\ -\mu_0 u_{11\xi} + \frac{w_m l}{u_m R^{(i)}} u_{31}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^{(i)2}}{l^2} \mu_0 (1 - \mu_0^2) u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} = R^{(i)} l \frac{(-1)^{i-1} q_n + \tilde{q}_n(i-1)}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2}. \end{aligned}$$

Умножим обе части второго уравнения на μ_0 , продифференцируем по ξ , затем вычтем его из первого уравнения и разделим обе части полученного уравнения на $2\sqrt{1 - \mu_0^2}$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} u_{10\xi\tau}^{(i)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R^{(i)}}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi}^{(i)} \mp \\ \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(i)2} u_{10\xi\xi}^{(i)} = -\frac{1}{2\sqrt{1 - \mu_0^2}} \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \times \\ \times \left[q_x^{(i)} + \tilde{q}_x(i-1) - \mu_0 \frac{R^{(i)}}{l} \left(\frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^{i-1} + (i-1) \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} \right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

В случае, когда жидкость отсутствует, правая часть уравнений становится равна нулю, и получаются независимые модифицированные уравнения Кортвега де Вриза (МКдВ).

3. Определение напряжений действующих на оболочки со стороны жидкости

3.1. Кольцевое сечение

Введём безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{\delta} v_x, \quad r = R_2 + \delta r^*, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \\ p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{\delta^3} P + p_0, \quad \psi = \frac{\delta}{R_2} = o(1), \quad \lambda = \frac{w_m}{\delta} = \frac{w_m R_2}{R_2 \delta} = o\left(\frac{\varepsilon}{\psi}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{w_m}{R_2} = (1), \quad \frac{w_m}{l} = \frac{w_m}{\delta} \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \lambda \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\delta}{l} = \frac{\delta}{R_i} \frac{R_i}{l} = \psi \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Во введённых безразмерных переменных получим уравнения гидродинамики

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left\{ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] \right\} + \frac{\partial P}{\partial r^*} = \\ = \left(\frac{\delta}{l}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\delta^2 v_r}{R_2^2(1+\psi_{r^*})^2} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right], \\ \frac{\delta c_0}{\nu} \frac{\delta}{l} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{\delta}{R_2(1+\psi_{r^*})} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}}, \\ \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\delta v_r}{R_2(1+\psi_{r^*})} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0 \end{aligned}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{l} \frac{u_m}{w_m} \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial t^*} = v_x - \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*}, \\ - \frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*} = v_r + \frac{u_m}{w_m} \frac{\delta}{l} \lambda u_1^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(i)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \end{aligned}$$

при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$.

Полагая теперь $\delta/l = 0$, $\delta/R_2 = 0$ (нулевое приближение по δ/l — гидродинамическая теория смазки), а также $\frac{\delta \delta c_0}{l \nu} = 0$ — ползущие течения, получим уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия: $v_r = -\frac{\partial u_3^{(i)}}{\partial t^*}$, $v_x = 0$ при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}$ и $r^* = -\lambda u_3^{(2)}$. Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ , имеем

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots$$

Для первых членов разложения получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x^0}{\partial r^{*2}}, \quad \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 1; \quad v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}; v_x^0 = 0 \quad \text{при} \quad r^* = 0.$$

С точностью до ψ , λ получим

$$\cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{n}_r}) \approx 1, \quad \cos(\widehat{-\vec{n}, \vec{i}}) \approx 0,$$

$$q_x^i = \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \left[\frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} + \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r^*}{\partial x^*} \right] \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\frac{w_m u_3^{(2)}}{\delta} \\ r_1^* = 1 - \frac{w_m}{\delta} u_3^{(1)}}} \approx \rho\nu \frac{w_m c_0}{\delta^2} \frac{\partial v_{x^*}}{\partial r^*} \Bigg|_{\substack{r_2^* = -\lambda u_3^{(2)} \\ r_1^* = 1 - \lambda u_3^{(1)}}},$$

$$\begin{aligned} q_n &= -\frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P - p_0 + 2\rho\nu \frac{w_m c_0}{l\delta} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} \left(P - 2 \frac{\delta^2}{l^2} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right) = \\ &= \left\{ \left(\frac{\delta}{l} \right)^2 = \psi_i^2 \varepsilon_i \right\} \approx -p_0 - \frac{\rho\nu c_0 l w_m}{\delta^3} P. \end{aligned}$$

Из уравнений движения жидкости получаем с учётом граничных условий

$$v_x^0 = \frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial P^0}{\partial x^*}. \quad (8)$$

Подставляя в уравнение неразрывности, получим

$$\frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = -\frac{r^{*2} - r^*}{2} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}. \quad (9)$$

Тогда, учитывая условия при $r^* = 0$, получаем

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{r^{*3}}{3} - \frac{r^{*2}}{2} \right) \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}}. \quad (10)$$

Удовлетворяя условиям при $r^* = 1$, найдём

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P^0}{\partial x^{*2}} &= 12 \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right), \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = 12 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ P^0 &= 12 \int \left[\int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^* \right] dx^*. \end{aligned}$$

При этом имеем

$$\begin{aligned} v_x^0 &= (r^{*2} - r^*) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = (2r^* - 1) 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \\ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=1} &= 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} \right) dx^*, \quad \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \Bigg|_{r^*=0} = 6 \int \left(\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right) dx^*. \end{aligned}$$

В результате найдём

$$\begin{aligned} P^0 &= 12 \int \left[\int \left(c \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial u_{30}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(1)}}{\partial \xi} - \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} - \varepsilon c \frac{\partial u_{31}^{(2)}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial u_{30}^{(1)}}{\partial \tau} \right) d\xi \right] d\xi = \\ &= 12\sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi, \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} q_n = \frac{\rho_0 \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} \int (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}) d\xi,$$

$$-\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho_0 \nu c_0 l w_m}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} (u_{30}^{(1)} - u_{30}^{(2)}).$$

Учитывая, что $w_m l u_{30}^{(i)} = \mu_0 u_m R^{(i)} u_{10\xi}^{(i)}$, найдём

$$\frac{1}{\rho_0 h_0^{(i)} c_0^2} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = \frac{\rho_0 \nu}{\delta^3 \rho_0 h_0^{(i)} c_0 \mu_0} 12 \sqrt{1 - \mu_0^2} [u_m R^{(2)} u_{10\xi}^{(2)} - u_m R^{(1)} u_{10\xi}^{(1)}],$$

$$q_x^{(i)} = \frac{\delta}{2l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} (-1)^i.$$

3.2. Круговое сечение

Рассматривая круговое сечение, введём безразмерные переменные и параметры

$$V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r; V_x = w_m \frac{c_0}{R_3} v_x; r^* = \frac{r}{R_3}; t^* = \frac{c_0}{l} t; x^* = \frac{1}{l} x,$$

$$p = \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 l w_m}{R_3^3} P + p_0; \frac{R_3}{l} = \psi = O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}); \lambda = \frac{w_m}{R_3} = O(\varepsilon).$$

В этих переменных получим уравнения гидродинамики

$$\psi^2 \left\{ \psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_r}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial r^*} \right\} =$$

$$= \psi^2 \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} v_r \frac{\partial v_r}{\partial r^*} - \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^{*2}} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^{*2}} \right],$$

$$\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t^*} + \lambda \left(v_r \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x^*} \right) \right] + \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^{*2}};$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r^*} + \frac{v_r}{r^*} + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия

$$\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t} = v_x + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_x}{\partial r^*}; -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t} = v_r + \frac{u_m R_3}{w_m l} \lambda u_1^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial x^*} - \lambda u_3^{(2)} \frac{\partial v_r}{\partial r^*}$$

при $r^* = 1 - \lambda u_3^{(2)}$; v_r, v_x – ограничены при $r^* = 0$: $r^* \frac{\partial v_r}{\partial r^*} = 0, r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} = 0$.

Полагая теперь $\psi = 0$ (нулевое приближение по ψ – гидродинамическая теория смазки [17]), а также $\psi \frac{R_3 c_0}{\tilde{\nu}} = 0$ – ползущие течения [18, 19], получаем уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial P}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = 0.$$

Раскладывая давление и компоненты скорости по степеням малого параметра λ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots, \quad v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots,$$

для первых членов разложений получим те же уравнения

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x^*} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} = 0$$

и граничные условия вида

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} \text{ при } r^* = 1; \quad r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0 \text{ при } r^* = 0.$$

Определим теперь в этих переменных напряжения со стороны жидкости на оболочке. С точностью до λ , ψ имеем

$$\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{n}_r}) = \frac{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 1,$$

$$\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{i}}) = -\frac{\lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)})}{R_3 (1 - \lambda u_3^{(2)}) \left(1 + \lambda \psi \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial x^*} \right)} \approx 0,$$

$$\tilde{q}_x = \tilde{\rho} \tilde{\nu} \frac{c_0 w_m}{R_3^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial r^*} + \psi^2 \frac{\partial v_r}{\partial x^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx \frac{w_m}{R_3} \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1},$$

$$\tilde{q}_n = \left[-p_0 - \frac{\tilde{\rho} \tilde{\nu} c_0 w_m l}{R_3^3} P + 2 \tilde{\rho} \tilde{\nu} \frac{w_m c_0}{l R_3} \frac{\partial v_r}{\partial r^*} \right] \Big|_{r^*=1-\lambda u_3^{(2)}} \approx -p_0 - \frac{w_m}{R_3} \left(\frac{l}{R^{(2)}} \right) \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P.$$

Получаем

$$\tilde{q}_x = \lambda \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \Big|_{r^*=1}, \quad \tilde{q}_n = -p_0 - \frac{\lambda}{\psi} \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 P. \quad (11)$$

Решение уравнений гидродинамики легко получить (это классические уравнения гидродинамической теории смазки). Из уравнений движения имеем

$$v_x = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial P}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x^*} = \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} + \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Здесь учтены граничные условия при $r^* = 1$, $r^* = 0$.

Подставляя в уравнение неразрывности, получаем

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^*) = -\frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{r^{*2} - 1}{4} \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Тогда, учитывая условия при $r^* = 0$, получим

$$v_r = -\frac{r^*}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{1}{4} \left(\frac{r^{*3}}{4} - \frac{r^*}{2} \right) \frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}}.$$

Удовлетворяя граничным условиям при $r^* = 1$, найдём

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^{*2}} = 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right].$$

Интегрируя, получим

$$\frac{\partial P}{\partial x^*} = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \frac{\partial^2 u_1^{(2)}}{\partial x^* \partial t^*} - \frac{\partial u_3^{(2)}}{\partial t^*} \right] dx^* = 16 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right];$$

$$P = 16 \int \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] dx^*,$$

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = \frac{r^*}{2} \frac{\partial}{\partial t^*} 16 \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right] \Big|_{r^*=1} = 8 \frac{\partial}{\partial t^*} \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_3}{w_m l} u_1^{(2)} - \int u_3^{(2)} dx^* \right].$$

Учитывая, что введены переменные (6), найдём с точностью до ε и с учётом связи (11)

$$P = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} u_{10}^{(2)}.$$

При этом

$$\left. \frac{\partial v_x}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_3}{w_m l} \left\{ 2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} - 1 \right\} \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}.$$

Тогда учитывая, что $\frac{w_m l}{u_m R_3} u_{30}^{(2)} = \mu_0 u_{10\xi}$, получаем

$$\tilde{q}_x - \mu_0 \frac{R^{(2)}}{l} \frac{\partial \tilde{q}_n}{\partial \xi} = - \frac{\tilde{\nu}}{R_3 c_0} \tilde{\rho} c_0^2 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m}{l} \left[1 - \left(2\mu_0 \frac{R^{(2)}}{R_3} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}^{(2)}}{\partial \xi}. \quad (12)$$

4. Уравнения динамики с учётом наличия жидкости между оболочками и во внутренней оболочке

Система уравнений (7) с учётом найденной правой части (12) примет вид

$$u_{10\xi\tau}^{(1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(1)} \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(1)2} u_{10\xi\xi}^{(1)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(1)} - u_{10\xi}^{(2)} \right] = 0,$$

$$u_{10\xi\tau}^{(2)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} u_{10\xi\xi\xi\xi}^{(2)} \mp \frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} u_{10\xi}^{(2)2} u_{10\xi\xi}^{(2)} + \\ + 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0} \frac{\nu}{R c_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta} \right)^3 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R} \right] \left[u_{10\xi}^{(2)} - u_{10\xi}^{(1)} \right] - 2(1 - 4\mu_0^2) \frac{\tilde{\rho} l}{\rho_0 h_0} \frac{\tilde{\nu}}{R c_0 \varepsilon} u_{10\xi}^{(2)} = 0.$$

Здесь с принятой точностью $\frac{h_0}{R} \approx O(\varepsilon)$, $\frac{\delta}{R_2} = \psi \ll 1$ обозначено $R^{(1)} \approx R^{(2)} = R$, при этом положено $h_0^{(1)} \approx h_0^{(2)} \approx h_0$. Можно также ввести обозначения $u_{10\xi}^{(1)} = c_3\phi^{(1)}$, $u_{10\xi}^{(2)} = c_3\phi^{(2)}$, $\eta = c_1\xi$, $t = c_2\tau$, где

$$c_2 = 6\mu_0^2 \frac{\rho l}{\rho_0 h_0 \varepsilon} \left(\frac{R}{\delta}\right)^2 \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right] \frac{\nu}{\delta c_0}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R}\right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}\right]^{\frac{1}{3}},$$

$$c_3 = \left[\frac{2m}{E\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l}\right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{c_3^2 c_1}{c_2}\right]^{-1} 6,$$

$$\sigma = \frac{1 - 4\mu_0^2}{3\mu_0^2} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \frac{\tilde{\rho}\tilde{\nu}}{\rho\nu} \left[1 + \frac{\delta}{2\mu_0 R}\right]^{-1}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \phi_t^{(1)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(1)} \mp 6\phi^{(1)2} \phi_{\eta}^{(1)} + \phi^{(1)} - \phi^{(2)} &= 0, \\ \phi_t^{(2)} + \phi_{\eta\eta\eta}^{(2)} \mp 6\phi^{(2)2} \phi_{\eta}^{(2)} + \phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Система уравнений (13) имеет в качестве точного решения с верхним знаком – при $6\phi^{(1)2} \phi_{\eta}^{(1)}$ и при $\sigma = 0$ (отсутствие жидкости во внутренней оболочке) следующее точное решение

$$\phi^{(1)} = \phi^{(2)} = k \tanh(k\eta + 2k^3 t). \quad (14)$$

5. Численное моделирование

В работах [20–22] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределённой системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом получается разностная схема, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из шаблонов интегрирования построения.

Запишем систему уравнений (13) в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(1)} \pm 2\phi^{(1)3}\right) dt + \phi^{(1)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(1)} - \phi^{(2)}\right) dt d\eta &= 0, \\ \oint_{\partial\Omega} \left(-\phi_{\eta\eta}^{(2)} \pm 2\phi^{(2)3}\right) dt + \phi^{(2)} d\eta + \iint_{\Omega} \left(\phi^{(2)} - \phi^{(1)} - \sigma\phi^{(2)}\right) dt d\eta &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^{(i)n} = \phi^{(i)}(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 2.

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u^{(i)}_{,\eta} d\eta = u^{(i)}(t, \eta_{j+1}) - u^{(i)}(t, \eta_j), \quad \int_{\eta_j}^{\eta_{j+2}} u^{(i)}_{\eta\eta} d\eta = u^{(i)}_{,\eta}(t, \eta_{j+2}) - u^{(i)}_{,\eta}(t, \eta_j). \quad (16)$$

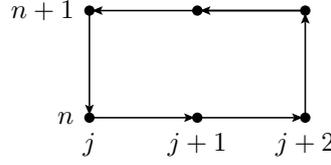


Рис. 2. Базовой контур для уравнения (15)

Используя для интегрирования по времени и первой производной по η формулу трапеций, а по второй производной по η формулу среднего значения и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (15), (16) в виде

$$\begin{aligned} & \left(- \left(u_{\eta\eta j}^{(1)n} + u_{\eta\eta j}^{(1)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(1)n+1} \right) \pm \right. \\ & \pm 2 \left(u_j^{(1)3n} + u_j^{(1)3n+1} - u_{j+2}^{(1)3n} - u_{j+2}^{(1)3n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{(1)n+1} - u_{j+1}^{(1)n} \right) \cdot 2h + \\ & \left. + \left(\left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(- \left(u_{\eta\eta j}^{(2)n} + u_{\eta\eta j}^{(2)n+1} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n} - u_{\eta\eta j+2}^{(2)n+1} \right) \pm \right. \\ & \pm 2 \left(u_j^{(2)3n} + u_j^{(2)3n+1} - u_{j+2}^{(2)3n} - u_{j+2}^{(2)3n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \left(u_{j+1}^{(2)n+1} - u_{j+1}^{(2)n} \right) \cdot 2h + \\ & \left. + \left(\left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) - \left(u_{j+1}^{(1)n+1} + u_{j+1}^{(1)n} \right) - \sigma \left(u_{j+1}^{(2)n+1} + u_{j+1}^{(2)n} \right) \right) \cdot h\tau = 0, \end{aligned}$$

$$\left(u_{\eta j+1}^{(i)n} + u_{\eta j}^{(i)n} \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^{(i)n} - u_j^{(i)n}, \quad u_{\eta j+1}^{(i)n} \cdot 2h = u_{j+2}^{(i)n} - u_j^{(i)n}.$$

Поскольку пакет [21] работает только в случае линейных разностных идеалов, а исходное дифференциальное уравнение (13) нелинейно, заменим нелинейную часть введением дополнительной функции $F^{(i)} = \mp 2u^{(i)3}$. За счёт выбора допустимого упорядочения так, чтобы $u^{(1)} \succ u^{(2)} \succ \dots \succ F^{(1)} \succ F^{(1)}$, а затем по переменным n, j , нелинейная часть не будет входить в лидирующие мономы системы при построении базиса Грёбнера и структура базиса позволит проверить принадлежность искомой разностной схемы.

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (13), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{(1)n+1} - u_j^{(1)n}}{\tau} + \\ & + \frac{\left(u_{j+2}^{(1)n+1} - 2u_{j+1}^{(1)n+1} + 2u_{j-1}^{(1)n+1} - u_{j-2}^{(1)n+1} \right) + \left(u_{j+2}^{(1)n} - 2u_{j+1}^{(1)n} + 2u_{j-1}^{(1)n} - u_{j-2}^{(1)n} \right)}{4h^3} \mp \\ & \mp 2 \frac{\left(u_{j+1}^{(1)3n+1} - u_{j-1}^{(1)3n+1} \right) + \left(u_{j+1}^{(1)3n} - u_{j-1}^{(1)3n} \right)}{4h} + \\ & + \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{(2)n+1} - u_j^{(2)n}}{\tau} + \\
& + \frac{(u_{j+2}^{(2)n+1} - 2u_{j+1}^{(2)n+1} + 2u_{j-1}^{(2)n+1} - u_{j-2}^{(2)n+1}) + (u_{j+2}^{(2)n} - 2u_{j+1}^{(2)n} + 2u_{j-1}^{(2)n} - u_{j-2}^{(2)n})}{4h^3} \mp \\
& \mp 2 \frac{(u_{j+1}^{(2)3n+1} - u_{j-1}^{(2)3n+1}) + (u_{j+1}^{(2)3n} - u_{j-1}^{(2)3n})}{4h} + \\
& + \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} - \frac{u_j^{(1)n+1} + u_j^{(1)n}}{2} - \sigma \frac{u_j^{(2)n+1} + u_j^{(2)n}}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линейризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

Количество итераций для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 2–3. Шаг по времени t брался равным половине шага по переменной η . Программа расчёта была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://scipy.org>).

При отсутствии жидкости во внутренней оболочке, как показано в работе [10], возникает нелинейная волна деформации во внутренней оболочке, в которой её не было в начальный момент времени, и амплитуды волн деформации в соосных оболочках со временем начинают совпадать. Эти амплитуды в два раза меньше исходной амплитуды волны деформации внешней оболочки в начальный момент времени.

Выполненные вычислительные эксперименты, показанные на рис. 3, позволили оценить влияние вязкой несжимаемой жидкости во внутренней оболочке на поведение нелинейной волны деформации при значении параметра $\sigma > 0$.

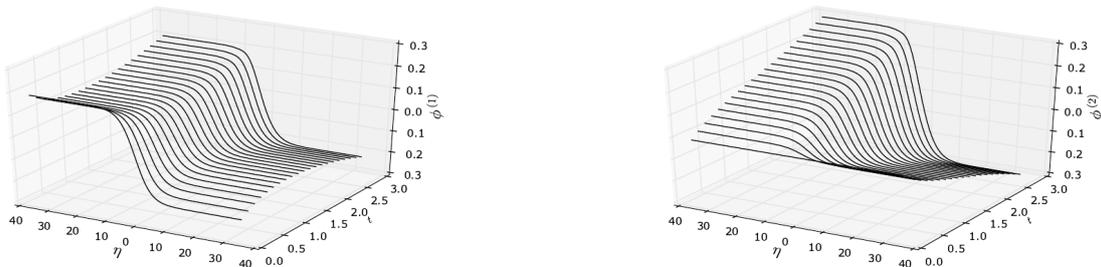


Рис. 3. Графики численного решения уравнений (13) при $\sigma = 0.7$ с начальным условием $\phi^{(2)} = 0$ и с $\phi^{(1)}$, взятого из точного решения (14) при $t = 0$ с $k = 0.2$

Сначала происходит выравнивание амплитуд с их дальнейшим линейным ростом, при этом угол наклона амплитуды волны больше во внутренней оболочке. Наблюдается линейный синхронный рост амплитуды волны относительно времени в обеих оболочках при более сильном во внутренней оболочке.

Литература

1. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубах // Собр.соч. — М.: Изд-во АН СССР, 1952. — С. 149–171.

2. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. — 1995. — Т. 3, № 1. — С. 52–58.
3. *Ерофеев В. И., Клюева Н.* Солитоны и нелинейные периодические волны деформации в стержнях, пластинах и оболочках (обзор) // Акустический журнал. — 2002. — Т. 48, № 6. — С. 725–740.
4. *Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в неоднородных цилиндрических оболочках: новое эволюционное уравнение // РАН. Акустический журнал. — 2001. — Т. 47, № 3. — С. 359–363.
5. *Аршинов Г. А., Землянухин А. И., Могилевич Л. И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН Акустический журнал. — 2000. — Т. 46, № 1. — С. 116–117.
6. *Блинкова А. Ю., Блинков Ю. А., Могилевич Л. И.* Нелинейные волны в соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую жидкость между ними, с учетом рассеяния энергии // Вычислительная механика сплошных сред. — 2013. — Т. 6, № 3. — С. 336–345. — ISSN 1999-6691.
7. Формирование солитонов деформации в континууме Коссера со стесненным вращением / В. И. Ерофеев, А. И. Землянухин, В. М. Катсон, С. Ф. Шешенин // Вычислительная механика сплошных сред. — 2009. — Т. 2, № 4. — С. 67–75.
8. Математическое и компьютерное моделирование динамики нелинейных волн в физически нелинейных упругих цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость / А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, А. Д. Ковалев, Л. И. Могилевич // Известия Саратовского университета. Новая серия. Физика. — 2012. — Т. 12, № 2. — С. 12–18.
9. Нелинейные волны деформаций в геометрически и физически нелинейной вязкоупругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой / А. Ю. Блинкова, Ю. А. Блинков, С. В. Иванов, Л. И. Могилевич // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2015. — Т. 15, № 2. — С. 193–202.
10. *Блинков Ю. А., Ковалева И. А., Могилевич Л. И.* Моделирование динамики нелинейных волн в соосных геометрически и физически нелинейных оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — Т. 3. — С. 42–51.
11. *Блинков Ю. А., Месянжин А. В., Могилевич Л. И.* Математическое моделирование волновых явлений в двух геометрически нелинейных упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 184–197.
12. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. — М.: Иностранная литература, 1961.
13. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. — М.: Дрофа, 2003.
14. *Валландер С. В.* Лекции по гидроаэромеханике. — Л.: ЛГУ, 1978. — С. 296.
15. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. — М.: Наука, 1972. — С. 432.
16. *Вольмир А. С.* Оболочки в потоке жидкости и газа: задачи гидроупругости. — М.: Наука, 1979. — С. 320.
17. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — С. 712.
18. *Попов И. Ю., Чивилихин С. А., Гусаров В. В.* Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Доклады РАН. — 2007. — Т. 412, № 2. — С. 201–203.
19. Солитон в стенке нанотрубки и стоково течение в ней / И. Ю. Попов, О. А. Родыгина, С. А. Чивилихин, В. В. Гусаров // Письма в ЖТФ. — 2010. — Т. 36, № 18. — С. 48–54.
20. *Блинков Ю. А., Гердт В. П.* Специализированная система компьютерной алгебры GINV // Программирование. — 2008. — Т. 34, № 2. — С. 67–80.
21. *Gerdt V. P., Blinkov Y. A.* Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations // CASC: 11th International Workshop, Kobe, Japan, Sept. 13–17, 2009.

Proceedings / Ed. by V. P. Gerdt, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. — Pp. 94–105.

22. On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations / P. Amodio, Y. Blinkov, V. Gerdt, R. La Scala // Computer Algebra in Scientific Computing: 15th International Workshop, CASC 2013, Berlin, Germany, September 9-13, 2013. Proceedings / Ed. by V. P. Gerdt, W. Koepf, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov. — Springer International Publishing, 2013. — Pp. 46–60.

UDC 532.516:539.3

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-19-35

Propagation of Nonlinear Waves in Coaxial Physically Nonlinear Cylindrical Shells Filled with a Viscous Fluid

Y. A. Blinkov*, A. V. Mesyanzhin†, L. I. Mogilevich‡

* *Saratov State University,*

83, Astrahanskaya str., Saratov, Russian Federation, 410012

† *Industrial Automatics Design Bureau JSC,*

239, B. Sadovaya str., Saratov, Russian Federation, 410005

‡ *Yuri Gagarin State Technical University of Saratov,*

77, Politekhnicheskaya str., Saratov, Russian Federation, 410054

Investigation of deformation waves behavior in elastic shells is one of the important trends in contemporary wave dynamics. There exist mathematical models of wave motions in infinitely long geometrically non-linear shells, containing viscous incompressible liquid, based on the related hydroelasticity problems, which are derived by the shells dynamics and viscous incompressible liquid equations in the form of generalized KdV equations. Also, mathematical models of the wave process in infinitely long geometrically non-linear coaxial cylindrical elastic shells are obtained by means of disturbances method. These models differ from the known ones by the consideration of incompressible liquid presence between the shells, based on the related hydroelasticity problems. These problems are described by shells dynamics and viscous incompressible liquid equations with corresponding edge conditions in the form of generalized KdV equations system. The paper presents the investigation of wave occurrences of two geometrically non-linear elastic coaxial cylindrical shells model of Kirchhoff-Love type, containing viscous incompressible liquid between them, as well as inside. The difference schemes of Crank-Nicholson type are obtained for the considered equations system by taking into account liquid impact and with the help of Gröbner bases construction. To generate these difference schemes, the basic integral difference correlations, approximating initial equations system, were used. The usage of Gröbner bases technology provides generating the schemes, for which it becomes possible to obtain discrete analogs of the laws of preserving initial equations system. To do this, equivalent transformations were made. On the basis of computation algorithm the complex of programs, permitting to construct graphs and obtain numerical solutions under exact solutions of coaxial shell dynamics equations system, was made.

Key words and phrases: nonlinear waves, viscous incompressible liquid, elastic cylinder shell

References

1. I. S. Gromeka, On the Theory of Fluid Motion in Narrow Cylindrical Tubes, in: Collected Works, Publishing House of the Academy of Sciences of the USSR, Moscow, 1952, pp. 149–171, in Russian.
2. A. I. Zemljanuhin, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves of Deformation in the Cylindrical Shells, Math. Universities. Applied Nonlinear Dynamics 3 (1) (1995) 52–58, in Russian.
3. V. I. Erofeev, Solitons and Nonlinear Periodic Strain Waves in Rods, Plates, and Shells (A Review), Acoustical Physics 48 (6) (2002) 643. doi:10.1134/1.1522030.

4. A. I. Zemlyanukhin, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves in Inhomogeneous Cylindrical Shells: A New Evolution Equation, *Acoustical Physics* 47 (3) (2001) 303–307. doi:10.1007/bf03353584.
5. G. A. Arshinov, A. I. Zemljaniuhin, L. I. Mogilevich, Two-Dimensional Solitary Waves in a Nonlinear Viscoelastic Deformable Medium, *RAS Acoustic Magazine* 46 (1) (2000) 116–117, in Russian.
6. A. Blinkova, Y. Blinkov, L. Mogilevich, Non-Linear Waves in Coaxial Cylinder Shells Containing Viscous Liquid Inside with Consideration for Energy Dispersion, *Comp. Contin. Mech.* 6 (3) (2013) 336–345. doi:10.7242/1999-6691/2013.6.3.38.
7. V. Erofejev, A. Zemlyanukhin, V. Catson, S. Sheshenin, Formation of strain solitary waves in the Cosserat continuum with restricted rotation, *Comp. Contin. Mech.* 2 (4) (2009) 67–75. doi:10.7242/1999-6691/2009.2.4.32.
8. A. J. Blinkova, S. V. Ivanov, A. D. Kovalev, L. I. Mogilevich, Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them, *Proceedings of Saratov University. New Ser. Ser. Physics* 12 (2) (2012) 12–18, in Russian.
9. A. Y. Blinkova, Y. A. Blinkov, S. V. Ivanov, L. I. Mogilevich, Nonlinear Deformation Waves in a Geometrically and Physically Nonlinear Viscoelastic Cylindrical Shell Containing Viscous Incompressible Fluid and Surrounded by an Elastic Medium, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 15 (2) (2015) 193–202. doi:10.18500/1816-9791-2015-15-2-193-202.
10. J. A. Blinkov, I. A. Kovaleva, L. I. Mogilevich, Nonlinear Waves Dynamics Modeling in Coaxial Geometrically And Physically Nonlinear Shell Containing Viscous Incompressible Fluid in Between, *Bulletin of PFUR. Series Mathematics. Information Sciences. Physics.* 3 (2013) 42–51, in Russian.
11. Y. A. Blinkov, A. V. Mesyanzhin, L. I. Mogilevich, Wave Occurrences Mathematical Modeling in Two Geometrically Nonlinear Elastic Coaxial Cylindrical Shells, Containing Viscous Incompressible Liquid, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.* 16 (2) (2016) 184–197, in Russian. doi:10.18500/1816-9791-2016-16-2-184-197.
12. G. Kauderer, *Nonlinear Mechanics, Foreign Literature*, Moscow, 1961, in Russian.
13. L. G. Lojckanskij, *Fluid Mechanics*, Drofa, Moscow, 2003, in Russian.
14. S. V. Vallander, *Lectures on Hydromechanics*, L., Ed. LSU, 1978, in Russian.
15. A. S. Vol'mir, *Nonlinear Dynamics of Plates and Shells*, Nauka, Moscow, 1972, in Russian.
16. A. S. Vol'mir, *Skins in the Liquid and Gas Flow: Hydroelasticity Problem*, Nauka, Moscow, 1979, in Russian.
17. H. Schlichting, *The Theory of the Boundary Layer*, Nauka, Moscow, 1974, in Russian.
18. I. Y. Popov, S. A. Chivilihin, V. V. Gusarov, Dynamics of Electric Roller Nanotubes in a Viscous Fluid, *Reports of the Russian Academy of Sciences* 412 (2) (2007) 201–203, in Russian.
19. I. Y. Popov, O. A. Rodygina, S. A. Chivilihin, V. V. Gusarov, Soliton in a Nanotube Wall and Stokes Flow in the Nanotube, *Technical Physics Letters* 36 (9) (2010) 852–855. doi:10.1134/s1063785010090221.
20. Y. A. Blinkov, V. P. Gerdt, Specialized Computer Algebra System GINV, *Programming and Computer Software* 34 (2) (2008) 112–123. doi:10.1134/S0361768808020096.
21. V. P. Gerdt, Y. A. Blinkov, *Involution and Difference Schemes for the Navier–Stokes Equations*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009, pp. 94–105. doi:10.1007/978-3-642-04103-7_10.
22. P. Amodio, Y. Blinkov, V. Gerdt, R. La Scala, *On Consistency of Finite Difference Approximations to the Navier-Stokes Equations*, Springer International Publishing, 2013, pp. 46–60. doi:10.1007/978-3-319-02297-0_4.

UDC 517.958, 530.145.6, 519.632.4
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-36-55

Algorithms for Solving the Parametric Self-Adjoint 2D Elliptic Boundary-Value Problem Using High-Accuracy Finite Element Method

A. A. Gusev*, O. Chuluunbaatar*[†], S. I. Vinitsky*[‡],
V. L. Derbov[§], A. Gózdź[¶]

* *Joint Institute for Nuclear Research*

6, Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, Russia, 141980

[†] *Institute of Mathematics, National University of Mongolia, Ulaanbaatar, Mongolia*

[‡] *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)*

6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

[§] *Saratov State University, Saratov, Russia*

[¶] *Institute of Physics, University of M. Curie-Skłodowska, Lublin, Poland*

We consider the calculation schemes for solving elliptic boundary-value problems (BVPs) within the framework of the Kantorovich method that provides the reduction of an elliptic BVP to a system of coupled second-order ordinary differential equations (ODEs). The surface basis functions of the expansion depend on the independent variable of the ODEs parametrically. Here we use the basis functions calculated by means of the finite element method (FEM), as well as the probe parametric surface basis functions calculated in the analytical form.

We propose new calculation schemes and algorithms for solving the parametric self-adjoint elliptic boundary-value problem (BVP) in a 2D finite domain, using high-accuracy finite element method (FEM) with rectangular and triangular elements. The algorithm and the programs calculate with the given accuracy the eigenvalues, the surface eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter of the BVP for parametric self-adjoint elliptic differential equation with the Dirichlet and/or Neumann type boundary conditions on the 2D finite domain, and the potential matrix elements, expressed as integrals of the products of surface eigenfunctions and/or their first derivatives with respect to the parameter. The parametric eigenvalues (potential curves) and the potential matrix elements computed by the program can be used for solving bound-state and multi-channel scattering problems for systems of coupled second-order ODEs by means of the Kantorovich method.

We demonstrate the efficiency of the proposed calculation schemes and algorithms in benchmark calculations of 2D elliptic BVPs describing quadrupole vibrations of a collective nuclear model.

Key words and phrases: parametric elliptic boundary-value problem, finite element method, Kantorovich method, systems of second-order ordinary differential equations

1. Introduction

The adiabatic representation is widely applied for solving multichannel scattering and bound-state problems for systems of several quantum particles in molecular, atomic and nuclear physics [1–4].

Such problems are described by elliptic boundary value problems (BVPs) in a multidimensional domain of the configuration space, solved using the Kantorovich method, i.e., the reduction to a system of self-adjoint ordinary differential equations (SODEs) using the basis of surface functions of an auxiliary BVP depending on the independent

Received 9th January, 2017.

The authors thank Artur Dobrowolski for collaboration.

This work was supported by the Polish–French COPIN collaboration of the project 04-113, the Bogoliubov-Infeld JINR program and the Russian Foundation for Basic Research (grants 17-01-00298, 17-01-00785).

The reported study was funded within the Agreement N 02.a03.21.0008 dated 24.04.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN University.

variable of the SODEs parametrically. The elements of matrices of variable coefficients of these SODEs including the matrix of the first derivatives are determined by the integrals of products of surface eigenfunctions and/or their first derivatives with respect to the parameter. Thus, the key problem of such method is to develop effective algorithms and programs for calculating with given accuracy the surface eigenfunctions and the corresponding eigenvalues of the auxiliary BVP, together with their derivatives with respect to the parameter, and the corresponding integrals that present the matrix elements of the effective potentials in the SODEs [5–7].

In this paper we propose new calculation schemes and algorithms for the solution of the parametric 2D elliptic boundary-value problem using high-accuracy finite element method (FEM) with rectangular and triangular elements. The algorithms were implemented in a package of programs that calculate with the given accuracy eigenvalues, eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter of the parametric self-adjoint elliptic differential equations with the boundary conditions of the Dirichlet and/or Neumann type in the 2D finite domain and the integrals of products of the surface eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter that express the matrix elements of the effective potentials in the SODEs.

We also propose a method of constructing the etalon potential in the auxiliary parametric BVP that allows the calculation of the parametric surface basis functions in the analytical form. These functions can be then used for the reduction of the original 2D BVP to the SODEs containing the additional potential matrix, representing the discrepancy between the original potential and the etalon one, averaged with the basis functions. The efficiency of the calculation schemes and algorithms is demonstrated by benchmark calculation of the 2D BVPs describing quadrupole vibrations in the collective nuclear model [4, 8, 9].

The structure of the paper is the following. In Section 2 the Kantorovich method for solving the 2D and 3D BVPs is considered. In Sections 3 and 4 the 2D FEM schemes and algorithms for solving the parametric 2D BVP and calculating derivatives with respect to the parameter together with the corresponding matrix elements are presented. In Section 5 the benchmark calculations of 2D FEM algorithms and programs are analyzed. In Conclusion we discuss the results and perspectives.

2. Kantorovich method with the etalon potential

Let us consider the BVP in the domain $\Omega(x_f, x_s) \subset \mathbf{R}^{n-1} \times \mathbf{R}^1$:

$$\left(-\frac{1}{f_{s1}(x_s)} \frac{\partial}{\partial x_s} f_{s2}(x_s) \frac{\partial}{\partial x_s} + \frac{D(x_f; x_s)}{f_{s3}(x_s)} + V(x_f, x_s) - E \right) \Psi(x_f, x_s) = 0, \quad (1)$$

where $D(x_f; x_s)$ is a self-adjoint elliptic differential operator in the finite region $\Omega(x_f; x_s) \subset \mathbf{R}^{n-1}$, E is the spectral parameter, corresponding to the energy of the quantum system, $f_{si}(x_s) > 0$, $\partial_{x_s} f_{si}(x_s)$ and $V(x_f, x_s)$ $\partial_{x_s} V(x_f, x_s)$ are real-valued continuous bounded functions in $\Omega(x_f, x_s)$, and $\Psi(x_f, x_s)$ satisfies the Dirichlet and/or Neumann boundary condition (BC) at the boundary $\partial\Omega \equiv \partial\Omega(x_f, x_s)$ of the domain $\Omega(x_f, x_s)$ and the orthonormalization conditions

$$\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \int_{\Omega(x_f, x_s)} f_{s1}(x_s) \Psi_i(x_f, x_s) \Psi_j(x_f, x_s) dx_f^{n-1} dx_s = \delta_{ij}. \quad (2)$$

The solution $\Psi(x_f, x_s) \in W_2^2(\Omega)$ of the BVP (1) is sought in the form of the Kantorovich expansion [3]

$$\Psi_i(x_f, x_s) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \Phi_j(x_f; x_s) \chi_{ji}(x_s), \quad (3)$$

using the set of parametric eigenfunctions $\Phi_j(x_f; x_s) \in \mathcal{F}(x_s) \sim W_2^2(\Omega(x_f; x_s))$ of the parametric BVP in the domain $\Omega(x_f; x_s) \subset \mathbf{R}^{n-1}$

$$(D(x_f; x_s) - \varepsilon_j(x_s)) \Phi(x_f; x_s) = 0. \quad (4)$$

For example, $D(x_f; x_s)$ at $n - 1 = 2$ is determined in a conventional form in Section 3. To avoid cumbersome notations, below we will use the simplest definition of $D(x_f; x_s)$ at $n - 1 = 1$

$$D(x_f; x_s) = -\frac{\partial^2}{\partial x_f^2} + V_o(x_f; x_s, g(x_s)), \quad (5)$$

where $V_o(x_f; x_s, g(x_s))$ is the etalon potential defined in the interval $x_f \in (x_f^{\min}(x_s), x_f^{\max}(x_s)) = \Omega_{x_f}(x_s)$ and depending on the variable $x_s \in \Omega_{x_s}$ as a parameter. We assume that these functions obey the BCs

$$\Phi_j(x_f^{\min}(x_s); x_s) = 0, \quad \Phi_j(x_f^{\max}(x_s); x_s) = 0 \quad (6)$$

at the boundary points $\{x_f^{\min}(x_s), x_f^{\max}(x_s)\} = \partial\Omega_{x_f}(x_s)$, of the interval $\Omega_{x_f}(x_s)$. The eigenfunctions satisfy the orthonormality condition

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) \Phi_j(x_f; x_s) dx_f = \delta_{ij}. \quad (7)$$

Here $\varepsilon(x_s) : \varepsilon_1(x_s) < \dots < \varepsilon_{j_{\max}}(x_s) < \dots$ is the desired set of real eigenvalues.

During the simulation the etalon potential $V_o(x_f; x_s, g(x_s))$ in Eq. (5) will be chosen as $V_o(x_f; x_s, g(x_s)) = V(x_f, x_s)$ or calculated separately for different values of $x_s \in \Omega_{x_s}$ from the conditions

$$\min_{g(x_s)} \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} (V(x_f, x_s) - V_o(x_f; x_s, g(x_s)))^2 dx_f. \quad (8)$$

If this parametric eigenvalue problem has no analytical solution, then it is solved numerically by the FEM: at $n - 1 = 1$ using the program ODPEVP [6] and at $n - 1 = 2$ using the program, implementing the algorithm presented in Section 3.

Substituting the expansion (3) into Eq. (1) with Eqs. (6) and (7) taken into account, we arrive at the set of self-adjoint ODEs for the unknown vector functions $\chi^{(i)}(x_s, E) \equiv \chi^{(i)}(x_s) = (\chi_1^{(i)}(x_s), \dots, \chi_{j_{\max}}^{(i)}(x_s))^T \in W_2^2(\Omega_{x_s})$:

$$\left(-\mathbf{I} \frac{1}{f_{s1}(x_s)} \frac{d}{dx_s} f_{s2}(x_s) \frac{d}{dx_s} + \mathbf{W}(x_s) - 2E \mathbf{I} + \frac{f_{s2}(x_s)}{f_{s1}(x_s)} \frac{d\mathbf{Q}(x_s)}{dx_s} + \frac{1}{f_{s1}(x_s)} \frac{df_{s2}(x_s)}{dx_s} \mathbf{Q}(x_s) \right) \chi^{(i)}(x_s) = 0. \quad (9)$$

Here \mathbf{I} , $\mathbf{W}(x_s)$ and $\mathbf{Q}(x_s)$ are the $j_{\max} \times j_{\max}$ matrices

$$W_{ij}(x_s) = \frac{\varepsilon_i(x_s)}{f_{s3}(x_s)} \delta_{ij} + \frac{f_{s2}(x_s)}{f_{s1}(x_s)} H_{ij}(x_s) + V_{ij}(x_s), \quad I_{ij} = \delta_{ij}, \quad (10)$$

$$H_{ij}(x_s)=H_{ji}(x_s)=\int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \frac{\partial \Phi_i(x_f; x_s)}{\partial x_s} \frac{\partial \Phi_j(x_f; x_s)}{\partial x_s} dx_f, \quad (11)$$

$$Q_{ij}(x_s)=-Q_{ji}(x_s)=-\int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) \frac{\partial \Phi_j(x_f; x_s)}{\partial x_s} dx_f. \quad (12)$$

The effective potentials $V_{ij}(x_s)=V_{ji}(x_s)$ are calculated by integrating the difference $\delta V(x_f, x_s) = V(x_f, x_s) - V_o(x_f; x_s, g(x_s))$ with the basis functions:

$$V_{ij}(x_s) = \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) \delta V(x_f, x_s) \Phi_j(x_f; x_s) dx_f. \quad (13)$$

If the etalon potential is equal to the original one, $V_o(x_f; x_s, g(x_s))=V(x_f, x_s)$ then $V_{ij}(x_s)=0$. If the original potential $V(x_f, x_s)$ is presented in the tabular form, e.g., as in Ref. [4], then the etalon potential $V_o(x_f; x_s, g(x_s))$ can be considered as a certain approximation or interpolation of the original one, and the approximation error $\delta V(x_f, x_s) \neq 0$. In this case the etalon potential $V_o(x_f; x_s, g(x_s))$ can be determined minimizing $\delta V(x_f, x_s)$ in accordance with the condition (8) of the least squares method. Then the integrals $V_{ij}(x_s)$ of the approximation error $\delta V(x_f, x_s)$ averaged with the parametric basis functions are included into the final system of ODEs. It means that we take the approximation error of the original potential into account and require the solutions of the 2D BVP (1) to have the given accuracy, see, e.g., Section 5.4.

The solutions of the discrete spectrum $E : E_1 < E_2 < \dots < E_v < \dots$ obey the BCs at the points $x_s^t = \{x_s^{\min}, x_s^{\max}\} = \partial \Omega_{x_s}$, bounding the interval Ω_{x_s} and satisfy the orthonormality conditions

$$\chi^{(p)}(x_s^t) = 0, \quad x_s^t = x_s^{\min}, x_s^{\max}, \quad \int_{x_s^{\min}}^{x_s^{\max}} f_{s1}(x_s) (\chi^{(i)}(x_s))^T \chi^{(j)}(x_s) dx_s = \delta_{ij}. \quad (14)$$

3. FEM algorithm for solving the parametric 2D BVP

Let us consider a boundary value problem for the parametric self-adjoint 2D PDE in the domain $\Omega_{x,y} = (x_{\min}, x_{\max}) \times (y_{\min}, y_{\max})$

$$(D(x, y; z) - \varepsilon_i(z)) \Phi_i(x, y; z) = 0, \\ D \equiv D(x, y; z) = -\frac{1}{f_1(x)} \frac{\partial}{\partial x} f_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{f_3(x) f_4(y)} \frac{\partial}{\partial y} f_5(x, y) \frac{\partial}{\partial y} + U(x, y; z), \quad (15)$$

with the Dirichlet and/or Neumann boundary conditions

$$\lim_{x \rightarrow x_t} f_2(x, y) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial x} = 0 \text{ or } \Phi_i(x_t, y; z) = 0, \quad y \in [y_{\min}, y_{\max}], \\ \lim_{y \rightarrow y_t} f_5(x, y) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial y} = 0 \text{ or } \Phi_i(x, y_t; z) = 0, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}], \quad (16)$$

where $t = \min, \max$. Here $z \in \Omega_z = [z_{\min}, z_{\max}]$ is a parameter, the functions $f_1(x) > 0$, $f_2(x, y) > 0$, $f_3(x) > 0$, $f_4(y) > 0$, $f_5(x, y) > 0$, and $\partial_x f_2(x, y)$, $\partial_y f_5(x, y)$, $U(x, y; z)$, $\frac{\partial U(x, y; z)}{\partial z}$ and $\frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial z}$ are continuous and bounded for $(x, y) \in \Omega_{x, y}$. Also assume that the BVP (15), (16) has only the discrete spectrum, so that $\varepsilon(x_s) : \varepsilon_1(x_s) < \dots < \varepsilon_{j_{\max}}(x_s) < \dots$ is the desired set of real eigenvalues. The eigenfunctions satisfy the orthonormality conditions

$$\langle \Phi_i | \Phi_j \rangle = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_1(x) f_4(y) \Phi_i(x, y; z) \Phi_j(x, y; z) dx dy = \delta_{ij}. \quad (17)$$

The FEM calculation scheme is derived from the variational functional

$$\begin{aligned} \langle \Phi_i | D - \varepsilon(z) | \Phi_j \rangle = & \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy \left(f_4(y) f_2(x, y) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j(x, y; z)}{\partial x} + \right. \\ & + \left. \frac{f_1(x)}{f_3(x)} f_5(x, y) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j(x, y; z)}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \Phi_i(x, y; z) f_1(x) f_4(y) (U(x, y; z) - \varepsilon(z)) \Phi_j(x, y; z) \right). \quad (18) \end{aligned}$$

1. The domain $\Delta = [x_{\min}, x_{\max}] \times [y_{\min}, y_{\max}]$ is covered by the system of $n \times m$ subdomains $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ in such a way that $\Delta = \bigcup_{i=1}^n \bigcup_{j=1}^m \Delta_{ij}$. In each subdomain Δ_{ij} the nodes $\{x_{i,r}^p\}_{r=0}^p$ and $\{y_{j,r}^p\}_{r=0}^p$

$$x_{i,r}^p = x_{i-1} + \frac{h_i^x}{p} r, \quad h_i^x = x_i - x_{i-1}, \quad y_{j,r}^p = y_{j-1} + \frac{h_j^y}{p} r, \quad h_j^y = y_j - y_{j-1},$$

and the Lagrange elements $\{\phi_{i,r}^p(x)\}_{r=0}^p$ and $\{\psi_{j,r}^p(y)\}_{r=0}^p$

$$\phi_{i,r}^p(x) = \prod_{s=0, s \neq r}^p \frac{x - x_{i,s}^p}{x_{i,r}^p - x_{i,s}^p}, \quad \psi_{j,r}^p(y) = \prod_{s=0, s \neq r}^p \frac{y - y_{j,s}^p}{y_{j,r}^p - y_{j,s}^p}$$

are determined. By means of the Lagrange elements $\phi_{i,r}^p(x)$ and $\psi_{j,r}^p(y)$, we define the set of piecewise polynomial functions $N_l^p(x)$ and $M_l^p(y)$ as follows:

$$N_l^p(x) = \begin{cases} \begin{cases} \phi_{1,0}^p(x), & x \in \Delta_{1j}, \\ 0, & x \notin \Delta_{1j}, \end{cases} & l=0, \\ \begin{cases} \phi_{i,r}^p(x), & x \in \Delta_{ij}, \\ 0, & x \notin \Delta_{ij}, \end{cases} & l=r+p(i-1), r=\overline{1, p-1}, \\ \begin{cases} \phi_{i,p}^p(x), & x \in \Delta_{ij}, \\ \phi_{i+1,0}^p(x), & x \in \Delta_{i+1j}, \\ 0, & x \notin \Delta_{ij} \cup \Delta_{i+1j}, \end{cases} & l=ip, i=\overline{1, n-1}, \\ \begin{cases} \phi_{n,p}^p(x), & x \in \Delta_{nj}, \\ 0, & x \notin \Delta_{nj}, \end{cases} & l=np, \end{cases}$$

for any j and

$$M_l^p(y) = \begin{cases} \begin{cases} \psi_{1,0}^p(y), & y \in \Delta_{i1}, \\ 0, & y \notin \Delta_{i1}, \end{cases} & l=0, \\ \begin{cases} \psi_{j,r}^p(y), & y \in \Delta_{ij}, \\ 0, & y \notin \Delta_{ij}, \end{cases} & l=r+p(j-1), r=\overline{1, p-1}, \\ \begin{cases} \psi_{j,p}^p(y), & y \in \Delta_{ij}, \\ \psi_{j+1,0}^p(y), & y \in \Delta_{ij+1}, \\ 0, & y \notin \Delta_{ij} \cup \Delta_{ij+1}, \end{cases} & l=jp, j=\overline{1, m-1}, \\ \begin{cases} \psi_{m,p}^p(y), & y \in \Delta_{im}, \\ 0, & y \notin \Delta_{im}, \end{cases} & l=mp, \end{cases}$$

for any i .

The functions $\{N_l^p(x)\}_{l=0}^{np}$ and $\{M_l^p(y)\}_{l=0}^{mp}$ form a basis in the space of polynomials of the p -th order. Now, the function $\Phi(x, y; z) \in \mathcal{F}_z^h \sim \mathcal{H}^1(\Omega_{h_x, h_y})$ is approximated by a finite sum of piecewise polynomial functions $N_l^p(x)$ and $M_l^p(y)$

$$\Phi^h(x, y; z) = \sum_{l_y=0}^{mp} \sum_{l_x=0}^{np} \xi^{l_x l_y}(z) N_{l_x}^p(x) M_{l_y}^p(y). \quad (19)$$

2. The domain $\Omega(x, y) = \bigcup_{q=1}^Q \Delta_q$, specified as a polygon in the plane ($x \equiv z_1, y \equiv z_2$) $\in \mathcal{R}^2$, is covered with finite elements, the triangles Δ_q with the vertices $(z_{11}, z_{21}), (z_{12}, z_{22}), (z_{13}, z_{23})$ (here $z_{ik} \equiv z_{ik;q}$, $i = \overline{1, 2}$, $k = \overline{1, 3}$, $q = \overline{1, Q}$). On each of the triangles Δ_q (the boundary is considered to belong to the triangle) the shape functions $\varphi_l^p(z_1, z_2)$ are introduced. For this purpose we divide the sides of the triangle into p equal parts and draw three families of parallel straight lines through the partition points. The straight lines of each family are numbered from 0 to p , so that the line passing through the side of the triangle has the number 0, and the line passing through the opposite vertex of the triangle has the number p .

Three straight lines from different families intersect in one point $A_l \in \Delta_q$, which will be numbered by the triplet (n_1, n_2, n_3) , $n_i \geq 0$, $n_1 + n_2 + n_3 = p$, where n_1 , n_2 and n_3 are the numbers of the straight lines passing parallel to the side of the triangle that does not contain the vertex (z_{11}, z_{21}) , (z_{12}, z_{22}) and (z_{13}, z_{23}) , respectively. The coordinates of this point $z_l = (z_{1l}, z_{2l})$ are determined by the expression $(z_{1l}, z_{2l}) = (z_{11}, z_{21})n_1/p + (z_{12}, z_{22})n_2/p + (z_{13}, z_{23})n_3/p$.

As shape functions we use the Lagrange triangular polynomials $\varphi_l^p(z_1, z_2)$ of the order p that satisfy the condition $\varphi_l^p(z_{1l'}, z_{2l'}) = \delta_{ll'}$, i.e., equal 1 in one of the points A_l and zero in the other points.

In this method the piecewise polynomial functions $N_l^p(z_1, z_2)$ in the domain Ω are constructed by joining the shape functions $\varphi_l^p(z_1, z_2)$ in the triangle Δ_q :

$$N_l^p(z_1, z_2) = \left\{ \varphi_l^p(z_1, z_2), A_l \in \Delta_q; 0, A_l \notin \Delta_q \right\}$$

and possess the following properties: functions $N_l^p(z_1, z_2)$ are continuous in the domain Ω ; the functions $N_l^p(z_1, z_2)$ equal 1 in one of the points A_l and zero in the rest points; $N_l^p(z_{1l'}, z_{2l'}) = \delta_{ll'}$ in the entire domain Ω . Here l takes the values $l = \overline{1, N}$.

The functions $N_l^p(x, y)$ form a basis in the space of polynomials of the p -th order. Now, the function $\Phi(x, y; z) \in \mathcal{F}_z^h \sim \mathcal{H}^1(\Omega_{h_x, h_y})$ is approximated by a finite sum of piecewise basis functions $N_l^p(x, y)$

$$\Phi^h(x, y; z) = \sum_{l=1}^N \xi^l(z) N_l^p(x, y). \quad (20)$$

The vector function $\xi_\nu^h = \{\xi_\nu^{lxly}(z)\}_{l_y=0}^{mp} \}_{l_x=0}^{np}$ or $\xi^h = \{\xi^l(z)\}_{l=1}^N$ has a generalized first-order partial derivative and belongs to the Sobolev space $\mathcal{H}^1(\Omega_{h_x, h_y})$ [10]. After substituting the expansion (19) or (20) into the variational functional (18) and minimizing it [10, 11], we obtain the generalized eigenvalue problem

$$\mathbf{A}^p \xi^h = \varepsilon^h \mathbf{B}^p \xi^h. \quad (21)$$

Here \mathbf{A}^p is the stiffness matrix; \mathbf{B}^p is the positive definite mass matrix; ξ^h is the vector approximating the solution on the finite-element grid; and ε^h is the corresponding eigenvalue. The matrices \mathbf{A}^p and \mathbf{B}^p have the following form:

$$\mathbf{A}^p = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_{ji}^p, \quad \mathbf{B}^p = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{ji}^p, \quad \text{or } \mathbf{A}^p = \{a_{ll'}^p\}_{ll'=1}^N, \quad \mathbf{B}^p = \{b_{ll'}^p\}_{ll'=1}^N,$$

where the local matrices \mathbf{a}_{ji}^p and \mathbf{b}_{ji}^p are calculated for rectangular elements as

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{ji}^p)_{\mu\nu}^{qr} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ f_2(x, y) f_4(y) \frac{4}{(h_i^x)^2} \frac{d\phi_{i,q}^p(x)}{d\eta_x} \frac{d\phi_{i,r}^p(x)}{d\eta_x} \psi_{j,\mu}^p(y) \psi_{j,\nu}^p(y) + \right. \\ &+ \frac{f_1(x)}{f_3(x)} f_5(x, y) \phi_{i,q}^p(x) \phi_{i,r}^p(x) \frac{4}{(h_j^y)^2} \frac{d\psi_{j,\mu}^p(y)}{d\eta_y} \frac{d\psi_{j,\nu}^p(y)}{d\eta_y} + \\ &\left. + f_1(x) f_4(y) U(x, y; z) \phi_{i,q}^p(x) \phi_{i,r}^p(x) \psi_{j,\mu}^p(y) \psi_{j,\nu}^p(y) \right\} \frac{h_i^x}{2} \frac{h_j^y}{2} d\eta_x d\eta_y, \\ (\mathbf{b}_{ji}^p)_{\mu\nu}^{qr} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f_1(x) f_4(y) \phi_{i,q}^p(x) \phi_{i,r}^p(x) \psi_{j,\mu}^p(y) \psi_{j,\nu}^p(y) \frac{h_i^x}{2} \frac{h_j^y}{2} d\eta_x d\eta_y, \end{aligned} \quad (22)$$

$$x = x_{i-1} + 0.5h_i^x(1 + \eta_x), \quad y = y_{j-1} + 0.5h_j^y(1 + \eta_y), \quad \mu, \nu, q, r = \overline{0, p},$$

or the matrix elements $a_{ll'}^p$ and $b_{ll'}^p$ are calculated for triangular elements as

$$\begin{aligned} a_{ll'}^p &= \int_{\Delta_q} f_1(x) f_4(y) \varphi_l^p(z_1, z_2) \varphi_{l'}^p(z_1, z_2) U(z_1, z_2; z) dz_1 dz_2 + \\ &+ \int_{\Delta_q} f_2(x, y) f_4(y) \frac{\partial \varphi_l^p(z_1, z_2)}{\partial z_1} \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z_1, z_2)}{\partial z_1} dz_1 dz_2 + \\ &+ \int_{\Delta_q} \frac{f_1(x)}{f_3(x)} f_5(x, y) \frac{\partial \varphi_l^p(z_1, z_2)}{\partial z_2} \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z_1, z_2)}{\partial z_2} dz_1 dz_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |J| \int_{\Delta} f_1(x) f_4(y) \varphi_l^p(z'_1, z'_2) \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2) U(z_1, z_2; z) dz'_1 dz'_2 + \\
&+ |J|^{-1} \int_{\Delta} f_2(x, y) f_4(y) \left((z_{21} - z_{23}) \frac{\partial \varphi_l^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1} + (z_{22} - z_{21}) \frac{\partial \varphi_l^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} \right) \times \\
&\quad \times \left((z_{21} - z_{23}) \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1} + (z_{22} - z_{21}) \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} \right) dz'_1 dz'_2 + \\
&+ |J|^{-1} \int_{\Delta} \frac{f_1(x)}{f_3(x)} f_5(x, y) \left((z_{11} - z_{13}) \frac{\partial \varphi_l^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1} + (z_{12} - z_{11}) \frac{\partial \varphi_l^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} \right) \times \\
&\quad \times \left((z_{11} - z_{13}) \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_1} + (z_{12} - z_{11}) \frac{\partial \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2)}{\partial z'_2} \right) dz'_1 dz'_2, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ll'}^p &= \int_{\Delta_q} f_1(x) f_4(y) \varphi_l^p(z_1, z_2) \varphi_{l'}^p(z_1, z_2) dz_1 dz_2 = \\
&= |J| \int_{\Delta} f_1(x) f_4(y) \varphi_l^p(z'_1, z'_2) \varphi_{l'}^p(z'_1, z'_2) dz'_1 dz'_2, \quad (24)
\end{aligned}$$

where Δ_q is a triangular element with the vertices $(z_{11}, z_{21})(z_{12}, z_{22})(z_{13}, z_{23})$, Δ is the triangle with vertices $(0, 0)(1, 0)(0, 1)$, and

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial z'_1} & \frac{\partial z_1}{\partial z'_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial z'_1} & \frac{\partial z_2}{\partial z'_2} \end{vmatrix} = -z_{22}z_{13} + z_{22}z_{11} + z_{21}z_{13} + z_{23}z_{12} - z_{23}z_{11} - z_{21}z_{12}$$

is the Jacobian of the transformation from the global frame ($x \equiv z_1, y \equiv z_2$) to the local one (z'_1, z'_2) ; $dz_1 dz_2 = J dz'_1 dz'_2$ and (z_1, z_2) are expressed via (z'_1, z'_2) by the relations:

$$z_1 = z_{11} + (z_{12} - z_{11})z'_1 + (z_{13} - z_{11})z'_2, \quad z_2 = z_{21} + (z_{22} - z_{21})z'_1 + (z_{23} - z_{21})z'_2. \quad (25)$$

In this case we have explicit expression for shape functions $\varphi_l^p(z'_1, z'_2)$:

$$\varphi_l^p(z'_1, z'_2) = \prod_{n'_1=0}^{n_1-1} \frac{1 - z'_1 - z'_2 - n'_1/p}{n_1/p - n'_1/p} \prod_{n'_2=0}^{n_2-1} \frac{z'_1 - n'_2/p}{n_2/p - n'_2/p} \prod_{n'_3=0}^{n_3-1} \frac{z'_2 - n'_3/p}{n_3/p - n'_3/p}.$$

Remark. We start from the initial (global) coordinate frame ($x \equiv z_1, y \equiv z_2$) in which the coordinates of vertices of the triangle Δ_q are equal to $(z_{11}, z_{21}), (z_{12}, z_{22}), (z_{13}, z_{23})$, and the local coordinate frame ($x \equiv z'_1, y \equiv z'_2$) in which the coordinates of the same vertices of the triangle Δ are equal to $(z'_{11}, z'_{21}) = (0, 0), (z'_{12}, z'_{22}) = (1, 0), (z'_{13}, z'_{23}) = (0, 1)$.

We seek the relation between the global and the local coordinates of the triangle vertices in the form

$$z_1 = c_{10} + c_{11}z'_1 + c_{12}z'_2, \quad z_2 = c_{20} + c_{21}z'_1 + c_{22}z'_2. \quad (26)$$

Substituting the coordinates of three vertices in the global and the local frame into Eq.(26), we obtain the system of algebraic equations for calculating the coefficients c_{**} :

$$z_{11}=c_{10}, \quad z_{21}=c_{20}, \quad z_{12}=c_{10}+c_{11}, \quad z_{22}=c_{20}+c_{21}, \quad z_{13}=c_{10}+c_{12}, \quad z_{23}=c_{20}+c_{22}.$$

Substituting the calculated coefficients into Eq.(26), we arrive at the formula (25) for the transformation of coordinates $(z_1, z_2) \rightarrow (z'_1, z'_2)$, from which we express the inverse transformation of coordinates $(z'_1, z'_2) \rightarrow (z_1, z_2)$

$$\begin{aligned} z'_1 &= -J^{-1}(z_{23}z_{11} - z_{21}z_{13}) + J^{-1}(z_{23} - z_{21})z_1 - J^{-1}(z_{13} - z_{11})z_2, \\ z'_2 &= J^{-1}(z_{22}z_{11} - z_{21}z_{12}) + J^{-1}(-z_{22} + z_{21})z_1 + J^{-1}(z_{12} - z_{11})z_2, \\ J &= (-z_{22}z_{13} + z_{22}z_{11} + z_{21}z_{13} + z_{23}z_{12} - z_{23}z_{11} - z_{21}z_{12}), \end{aligned}$$

where J^{-1} is the Jacobian of the inverse transformation from the local frame (z'_1, z'_2) to the global one $(x \equiv z_1, y \equiv z_2)$: $dz'_1 dz'_2 = J^{-1} dz_1 dz_2$.

The integrals (22) and (23)–(24) are evaluated using the Gaussian quadrature of the order $p + 1$. Note that in the present approach the maximum half-band width of the matrices \mathbf{A}^p and \mathbf{B}^p is small compared to their dimension and is not greater than $(p + 1)(p + 1)$.

In order to solve the generalized eigenvalue problem (21), the subspace iteration method [10, 11] elaborated by Bathe [11] for the solution of large symmetric banded-matrix eigenvalue problems has been chosen. This method uses the skyline storage mode which stores the components of the matrix column vectors within the banded region of the matrix, and is ideally suited for banded finite-element matrices. The procedure chooses a vector subspace of the full solution space and iterates upon the successive solutions in the subspace (for details, see [11]). The iterations continue until the desired set of solutions in the iteration subspace converges to within the specified tolerance on the Rayleigh quotients for the eigenpairs. If the matrix \mathbf{A}^p in Eq. (21) is not positively defined, the problem (21) is replaced with the following problem:

$$\tilde{\mathbf{A}}^p \boldsymbol{\xi}^h = \tilde{\varepsilon}^h \mathbf{B}^p \boldsymbol{\xi}^h, \quad \tilde{\mathbf{A}}^p = \mathbf{A}^p - \alpha \mathbf{B}^p. \quad (27)$$

The number α (the shift of the energy spectrum) is chosen such that the matrix $\tilde{\mathbf{A}}^p$ is positive defined. The eigenvector of the problem (27) is the same, and $\varepsilon^h = \tilde{\varepsilon}^h + \alpha$.

4. The algorithm for calculating the parametric derivatives of eigenfunctions and the matrices of effective potentials

Taking a derivative of the boundary problem (15)–(17) with respect to the parameter z , we find that $\partial_z \Phi_i(x, y; z)$ is a solution of the following boundary problem

$$\begin{aligned} (D(x, y; z) - \varepsilon_i(z)) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial z} &= - \left[\frac{\partial}{\partial z} (U(x, y; z) - \varepsilon_i(z)) \right] \Phi_i(x, y; z), \quad (28) \\ \lim_{x \rightarrow x_t} f_2(x, y) \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y; z)}{\partial x \partial z} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \Phi_i(x_t, y; z)}{\partial z} = 0, \quad y \in [y_{\min}, y_{\max}], \\ \lim_{y \rightarrow y_t} f_5(x, y) \frac{\partial^2 \Phi_i(x, y; z)}{\partial y \partial z} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial \Phi_i(x, y_t; z)}{\partial z} = 0, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}], \end{aligned}$$

where $t = \min, \max$. The parametric BVP (28), (29) has a unique solution, if and only if it satisfies the conditions

$$\frac{\partial \varepsilon_i(z)}{\partial z} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dx dy f_1(x) f_4(y) (\Phi_i(x, y; z)) \frac{\partial U(x, y; z)}{\partial z} \Phi_i(x, y; z), \quad (29)$$

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dx dy f_1(x) f_4(y) (\Phi_i(x, y; z)) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial z} = 0. \quad (30)$$

Below we present an efficient numerical method that allows the calculation of $\partial_z \Phi_i(x, y; z)$ with the same accuracy as achieved for the eigenfunctions of the BVP (15)–(17) and the use of it for computing the matrices of the effective potentials defined as

$$H_{ij}(z) = H_{ji}(z) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx f_1(x) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy f_4(y) \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial z} \frac{\partial \Phi_j(x, y; z)}{\partial z}, \quad (31)$$

$$Q_{ij}(z) = -Q_{ji}(z) = - \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx f_1(x) \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} dy f_4(y) \Phi_i(x, y; z) \frac{\partial \Phi_j(x, y; z)}{\partial z}.$$

The boundary problem (28)–(30) is reduced to the linear system of inhomogeneous algebraic equations with respect to the unknown $\partial \xi^h / \partial z$:

$$\mathbf{L} \frac{\partial \xi^h}{\partial z} \equiv (\mathbf{A}^p - \varepsilon^h \mathbf{B}^p) \frac{\partial \xi^h}{\partial z} = b, \quad b = - \left(\frac{\partial \mathbf{A}^p}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon^h}{\partial z} \mathbf{B}^p \right) \xi^h. \quad (32)$$

The normalization condition (17), the condition of orthogonality between the function and its parametric derivative (30), and the additional conditions (29) for the solution of (32) read as

$$\left(\xi^h \right)^T \mathbf{B}^p \xi^h = 1, \quad \left(\frac{\partial \xi^h}{\partial z} \right)^T \mathbf{B}^p \xi^h = 0, \quad \frac{\partial \varepsilon^h}{\partial z} = \left(\xi^h \right)^T \frac{\partial \mathbf{A}^p}{\partial z} \xi^h. \quad (33)$$

Then the potential matrix elements $H_{ij}^h(z)$ and $Q_{ij}^h(z)$ (31) corresponding to Eqs. (11)–(12) can be calculated using the formulas

$$H_{ij}^h(z) = \left(\frac{\partial \xi_i^h}{\partial z} \right)^T \mathbf{B}^p \frac{\partial \xi_j^h}{\partial z}, \quad Q_{ij}^h(z) = - \left(\xi_i^h \right)^T \mathbf{B}^p \frac{\partial \xi_j^h}{\partial z}. \quad (34)$$

Since ε^h is an eigenvalue of (21), the matrix \mathbf{L} in Eq. (32) is degenerate. In this case the algorithm for solving Eq. (32) can be written in three steps as follows:

Step k1. Calculate the solutions \mathbf{v} and \mathbf{w} of the auxiliary inhomogeneous systems of algebraic equations

$$\bar{\mathbf{L}} \mathbf{v} = \bar{\mathbf{b}}, \quad \bar{\mathbf{L}} \mathbf{w} = \mathbf{d}, \quad (35)$$

with the non-degenerate matrix $\bar{\mathbf{L}}$ and the right-hand sides $\bar{\mathbf{b}}$ and \mathbf{d}

$$\bar{L}_{ss'} = \begin{cases} L_{ss'}, & (s - S)(s' - S) \neq 0, \\ \delta_{ss'}, & (s - S)(s' - S) = 0, \end{cases}$$

$$\bar{b}_s = \begin{cases} b_s, & s \neq S, \\ 0, & s = S, \end{cases} \quad d_s = \begin{cases} L_{sS}, & s \neq S, \\ 0, & s = S, \end{cases}$$

where S is the number of the element of the vector $\mathbf{B}^p \boldsymbol{\xi}^h$ having the greatest absolute value.

Step k2. Evaluate the coefficient γ

$$\gamma = -\frac{\gamma_1}{(\mathbf{D}_S - \gamma_2)}, \quad \gamma_1 = \mathbf{v}^T \mathbf{B}^p \boldsymbol{\xi}^h, \quad \gamma_2 = \mathbf{w}^T \mathbf{B}^p \boldsymbol{\xi}^h, \quad \mathbf{D}_S = (\mathbf{B}^p \boldsymbol{\xi}^h)_S. \quad (36)$$

Step k3. Evaluate the vector $\partial_z \boldsymbol{\xi}^h$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}_s^h}{\partial z} = \begin{cases} v_s - \gamma w_s, & s \neq S, \\ \gamma, & s = S. \end{cases} \quad (37)$$

From the above consideration it is evident, that the computed derivative has the same accuracy as the calculated eigenfunction.

Let $D(x, y; z)$ in Eq. (15) be a continuous and bounded positively defined operator on the space \mathcal{H}^1 with the energy norm, $\Phi_i(x, y; z) \in \mathcal{H}^2$ being the exact solutions of Eqs. (15)–(17), and $\varepsilon_i^h(z)$, $\Phi_i^h(x, y; z) \in \mathcal{H}^1$ being the corresponding numerical solutions. Then the following estimates are valid [10, 12]

$$|\varepsilon_i(z) - \varepsilon_i^h(z)| \leq c_1 h^{2p}, \quad \|\Phi_i(x, y; z) - \Phi_i^h(x, y; z)\|_0 \leq c_2 h^{p+1}, \quad (38)$$

where

$$\|\Phi_i(x, y; z)\|_0^2 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} f_2(x, y) dx f_5(x, y) dy \Phi_i(x, y; z) \Phi_i(x, y; z),$$

h is the largest distance between any two points in Δ_q (see [12], p. 161), p is the order of the finite elements, i is the number of the corresponding solutions, and the constants c_1 and c_2 are independent of the step h .

The following theorem can be formulated.

Theorem 1. *Let $D(x, y; z)$ in Eq. (15) be a continuous and bounded positively defined operator on the space \mathcal{H}^1 with the energy norm. Also let $\partial_z U(x, y; z)$ be continuous and bounded for each value of the parameter z . Then for the exact values of the solutions $\partial_z \varepsilon_i(z)$, $\partial_z \Phi_i(x, y; z) \in \mathcal{H}^2$, $H_{ij}(z)$, $Q_{ij}(z)$ from (28)–(31) and the corresponding numerical values $\partial_z \varepsilon_i^h(z)$, $\partial_z \Phi_i^h(x, y; z) \in \mathcal{H}^1$, $H_{ij}^h(z)$, $Q_{ij}^h(z)$ from (32)–(34) the following estimates are valid:*

$$\left| \frac{\partial \varepsilon_i(z)}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_i^h(z)}{\partial z} \right| \leq c_3 h^{2p}, \quad \left\| \frac{\partial \Phi_i(x, y; z)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_i^h(x, y; z)}{\partial z} \right\|_0 \leq c_4 h^{p+1}, \quad (39)$$

$$|Q_{ij}(z) - Q_{ij}^h(z)| \leq c_5 h^{2p}, \quad |H_{ij}(z) - H_{ij}^h(z)| \leq c_6 h^{2p},$$

where h is the largest distance between any two points of the finite element Δ_q , p is the order of finite elements, i, j are the numbers of the corresponding solutions, and the constants c_3, c_4, c_5 and c_6 are independent of the step h .

The proof is straightforward following the proof schemes in accordance with [10, 13].

5. Benchmark calculations

5.1. The solution of 2D BVP in the triangular domain

As a benchmark example we consider the exactly solvable BVP for a membrane in the form of equilateral triangle with side equal to $4\pi/3$, in the conventional variables $(x, y) \in \Omega(x, y)$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \varepsilon_i\right) \Phi_i(x, y) = 0 \quad (40)$$

with the Dirichlet or Neumann conditions at the boundary $\partial\Omega(x, y)$ of the region $\Omega(x, y)$. In both cases the eigenvalues ε_i are integer [14–16].

The BVPs were solved on the uniform finite-element grid composed of n^2 equilateral triangles with the side equal to $4\pi/(3n)$. In Table 1 we present the estimations of the finite-element scheme order p depending on the size of elements.

Table 1
Discrepancies $\delta\varepsilon_i(n) = |\varepsilon_i^h(n) - \varepsilon_i|$ of the first $\varepsilon_1 = 3$ and the fourth $\varepsilon_4 = 3$ eigenvalues of the BVP(40) with Dirichlet and Neumann boundary conditions, respectively, and the Runge coefficients $\text{Ru}_i = \log_2((\delta\varepsilon_i(n) - \delta\varepsilon_i(2n))/(\delta\varepsilon_i(2n) - \delta\varepsilon_i(4n)))$ for the schemes of the first $p = 1$ and the second $p = 2$ orders; n is the number of elements

p	n	$\delta\varepsilon_1(n)$	$\delta\varepsilon_1(2n)$	$\delta\varepsilon_1(4n)$	Ru_1
1	6	0.06914677126132	0.01717343333794	0.00428595766335	2.011
2	3	0.00470310603030	0.00030790240009	0.00001932528605	3.928
p	n	$\delta\varepsilon_4(n)$	$\delta\varepsilon_4(2n)$	$\delta\varepsilon_4(4n)$	Ru_4
1	6	0.06914677126135	0.01717343333808	0.00428595766371	2.011
2	3	0.00470310603029	0.00030790240005	0.00001932528593	3.928

They are seen to correspond rigorously to the theoretical estimations (38) of the order $O(h^{2p})$ of the eigenvalues approximation. The first eight eigenfunctions of the BVPs (40) with the Neumann and Dirichlet boundary conditions are shown in Figs. 1 and 2.

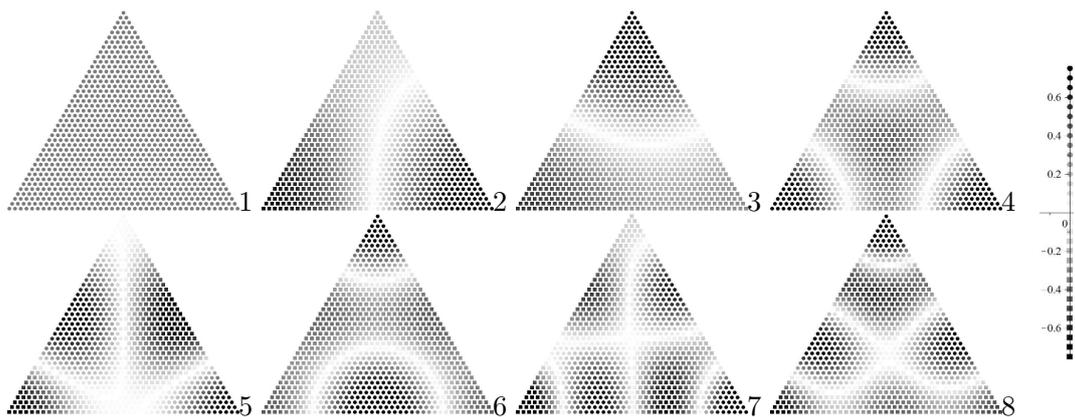


Figure 1. The first eight eigenfunctions of the BVPs (40) in the triangle region with the Neumann boundary conditions. The eigenvalues $\varepsilon_i = 0, 1, 1, 3, 4, 4, 7, 7$ at $i = 1, \dots, 8$.

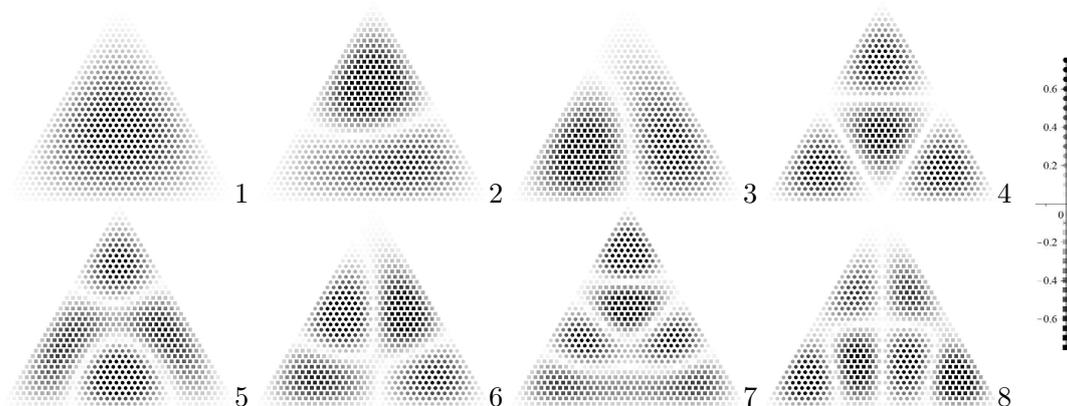


Figure 2. The first eight eigenfunctions of the BVP (40) in the triangle region with the Dirichlet boundary conditions. The eigenvalues $\varepsilon_i = 3, 7, 7, 12, 13, 13, 19, 19$ at $i = 1, \dots, 8$.

5.2. Solution of the parametric 2D BVP for the oscillator potential

We consider the parametric 2D BVP (15)–(17) at $f_1(x) = f_2(x, y) = f_3(x) = f_4(y) = f_5(x, y) = 1$, with the potential function

$$U(x, y; z) \equiv U(z_1, z_2; z_3) = (z_1 - z_3)^2 + (3/2)^2 z_2, \quad (41)$$

which has the known spectrum $\varepsilon_{j=\{j_1, j_2\}} = (2(j_1 - 1) + 1) + 3/2(2(j_2 - 1) + 1)$ and the eigenfunctions $\Phi_{j_1, j_2}(z_1, z_2; z_3) = \Phi_{j_1-1}(z_1; z_3)\Phi_{j_2-1}(z_2; 0)$, where $\Phi_{j_1}(z_1; z_3)$ and $\Phi_{j_2-1}(z_2; 0)$ are determined in (45) at $\omega_1(x_s) = 1$, $z_{01}(x_s = z_3) = z_3$ and $\omega_2(x_s) = 3/2$, $z_{02}(x_s) = 0$, respectively. The matrix elements $Q_{i=\{i_1, i_2\}, j=\{j_1, j_2\}}$ and $H_{i=\{i_1, i_2\}, j=\{j_1, j_2\}}$ are calculated in the analytical form

$$Q_{ij}(x_s) = \delta_{i_2 j_2} \text{sign}(j_1 - i_1) \frac{\sqrt{2n}}{2} \delta_{|j_1 - i_1|, 1},$$

$$H_{ij}(x_s) = \delta_{i_2 j_2} \left(\frac{(2n+1)}{2} \delta_{j_1 - i_1, 0} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{2} \delta_{|j_1 - i_1|, 2} \right) \quad (42)$$

where $n = \max(i_1, j_1) - 1$.

Solving the BVP, we use 294 finite elements, i.e. *equilateral triangles* with the side equal to 1 that form a regular hexagon with the vertices $\{(7 \cos \pi n/3, 7 \sin \pi n/3)\}_{n=0}^5$. In each element the interpolation polynomials of the six order were applied. Stiffness and mass matrices with dimensions of 5167×5167 were used. The calculated eigenvalues ε_i^h are: $\varepsilon_i^h = (2.500000001, 4.500000002, 5.500000005, 6.500000014, 7.500000025)$, and the exact ones ε_i are: $\varepsilon_i = (2.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5)$.

The calculated matrices Q_{ij}^h and H_{ij}^h , $i, j = 1, \dots, 5$ from Eq. (34) of the parametric 2D BVP with the potential function (41) are

$$Q_{ij}^h = \begin{pmatrix} -0.00000000 & 0.70710678 & -0.00000000 & -0.00000000 & 0.00000000 \\ -0.70710678 & -0.00000000 & -0.00000000 & 1.00000000 & 0.00000000 \\ -0.00000000 & 0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000000 & 0.70710678 \\ 0.00000000 & -1.00000000 & 0.00000000 & -0.00000000 & 0.00000000 \\ -0.00000000 & 0.00000000 & -0.70710678 & 0.00000000 & 0.00000000 \end{pmatrix},$$

$$H_{ij}^h = \begin{pmatrix} 0.50000000 & -0.00000000 & 0.00000000 & -0.70710678 & 0.00000000 \\ -0.00000000 & 1.49999999 & -0.00000000 & -0.00000000 & -0.00000000 \\ 0.00000000 & -0.00000000 & 0.49999999 & -0.00000000 & 0.00000000 \\ -0.70710678 & -0.00000000 & -0.00000000 & 2.50000001 & -0.00000000 \\ 0.00000000 & -0.00000000 & 0.00000000 & -0.00000000 & 1.49999999 \end{pmatrix}$$

From the comparison of the calculated and the exact values of ε_i and Q_{ij} , H_{ij} from (42), one can see that the achieved accuracy of results is of the order of 8–9 significant digits.

The parametric surface eigenfunctions and their derivatives with respect to the parameter under the dipole splitting are shown in Fig. 3.

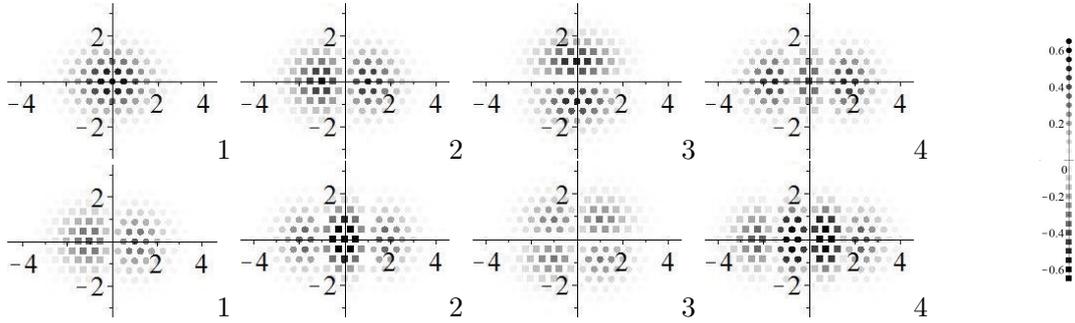


Figure 3. The first four eigenfunctions of the parametric 2D BVP with the potential function (41) and their derivatives with respect to the parameter at $z = 0$.

5.3. The solution of 2D BVP for the C_{3v} oscillator potential

Let us consider the 2D BVP (15)–(17) for $x=a_{22}$, $y=a_{20}$ with the potential function $U(x, y) = 2mV(x, y)$ and the spectral parameter $\varepsilon = 2mE$, and $f_1(x) = f_2(x, y) = f_3(x) = f_4(y) = f_5(x, y) = 1$. The quadrupole potential energy is approximated by the quartic potential:

$$V(a_{22}, a_{20}) = c_1(a_{22}^2 + a_{20}^2) + c_2(a_{22}^2 a_{20} - a_{20}^3/3) + c_3(a_{22}^2 + y^2)^2 + c_0 \quad (43)$$

We use the set of parameters $c_1 = -120$, $c_2 = 240$, $c_3 = 1200$, $c_0 = 65/16$ that provide a crude approximation for the shape of $^{156}\text{Gd}_{92}$, which has been fitted in the following points¹: the minima at $(a_{22}, a_{20}) = (0, 1/4)$, $V(0, 1/4) = 0$; the maxima at $(a_{22}, a_{20}) = (0, 0)$, $V(0, 0) = 65/16$; and the saddle point at $(a_{22}, a_{20}) = (0, -1/5)$, $V(0, -1/5) = 729/400$ (see Fig. 4).

We choose the mass parameter to be $m = B_2 = 124$. Thus, there are ground and doubly degenerate excited states, localized in three wells.

The BVP was solved using three algorithms (and the forth in Section 5.4):

1. The solution of the BVP was calculated using the FEM scheme from Section 3 on the *rectangular* grid $[-0.4, -0.3, \dots, 0.4] \times [-0.4, -0.3, \dots, 0.4]$ with Lagrange interpolation polynomials of the order $p = 12$. The first 18 eigenvalues were calculated with 9 significant digits and are presented in Table 2.

¹The fitting points in our parametrization are related to those of Ref. [4] as $a_{22} = \sqrt{2}\alpha_{22}$, $a_{20} = \alpha_{20}$.

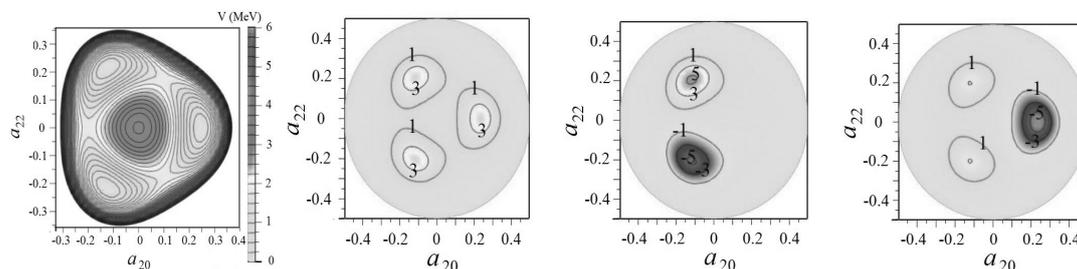


Figure 4. The potential energy of the C_{3v} oscillator having the quadrupole shape, the eigenfunction $\Psi_1(a_{22}, a_{20})$ of the ground state (irr. A1) and the degenerate eigenfunctions $\Psi_2(a_{22}, a_{20})$ (irr. E1) and $\Psi_3(a_{22}, a_{20})$ (irr. E2)

Table 2
The first energy levels of the 2D BVP using triangular ε_i^Δ and rectangular ε_i^\square finite elements and the Kantorovich method ε_i^h using $j_{\max}=28$ parametric basis functions, classified by irrs (Class.) of the C_{3v} point group, E_i (MeV)

i	ε_i^Δ	ε_i^\square	ε_i^h	$E_i^h = \varepsilon_i^h / 2m$	Class.
1	381.754344	381.754355	381.754351	1.53933206	A1
2	387.240633	387.240644	387.240641	1.56145419	E1
3	387.240633	387.240646	387.240641	1.56145419	E2
4	617.024951	617.024967	617.024963	2.48800388	E1
5	617.024951	617.024989	617.024963	2.48800388	E2
6	667.104970	667.105020	667.104992	2.68993948	A2
7	695.166557	695.166590	695.166575	2.80309103	A1
8	785.680037	785.680100	785.680078	3.16806483	E1
9	785.680037	785.680136	785.680078	3.16806483	E2
10	898.045395	898.045497	898.045434	3.62115094	A1
11	915.823095	915.823200	915.823167	3.69283535	E1
12	915.823095	915.823309	915.823167	3.69283535	E2
13	993.158636	993.158784	993.158708	4.00467221	E2
14	993.158636	993.158872	993.158708	4.00467221	E1
15	1063.73690	1063.73709	1063.73692	4.28926178	A1
16	1119.21670	1119.21668	1119.21649	4.51296973	A2
17	1174.72840	1174.71177	1174.71166	4.73674057	E1
18	1174.75531	1174.71183	1174.71166	4.73674057	E2

- In the solution of the BVP we used 54 finite elements in the form of *equilateral triangles* with the side equal to $1/6$, forming a regular hexagon with the vertices $\{(0.5 \cos \pi n/3, 0.5 \sin \pi n/3)\}_{n=0}^5$. In each finite element the interpolation polynomials of the fifth order were applied. The stiffness and the mass 721×721 matrices were used. The calculated eigenvalues are presented in Table 2.

3. The problem (1)–(43) was also solved using the Kantorovich method implemented in the FEM program KANTBP 2 [5], with $j_{\max}=28$ parametric basis functions calculated using the FEM program ODPEVP [6]. The solution was calculated in the domain $\sqrt{a_{20}^2+a_{22}^2}<1/2$ with Dirichlet BCs at the boundary $\sqrt{a_{20}^2+a_{22}^2}=1/2$ using the scheme presented in Section 2. The calculations were performed in the case of $(x_f, x_s) = (a_{22}, a_{20})$ as well as $(x_f, x_s) = (a_{20}, a_{22})$ on the FE grid $\{-1/2, -1/3, -1/6, 0, 1/6, 1/3, 1/2\}$ with Lagrange interpolation polynomials of the order $p = 12$.

The point symmetry group C_{3v} of the problem (1), (43) has four irreducible representations (irrs.) A1, A2, E1 and E2 to classify the solutions, the E-type states being doubly degenerate [17,18]. The calculated eigenvalues are presented in Table 2. The first eigenfunctions for each of the irrs. A1, E1, E2 are shown in Fig. 4.

5.4. Parametric surface functions for KM in the analytical form

Let us consider the BVP for Eq. (5) with the etalon potential $V_o(x_f; x_s, g(x_s))$:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_f^2} + V_o(x_f; x_s, g) - \varepsilon_i(x_s) \right) \Phi_i(x_f; x_s) = 0, \quad (44)$$

$$V_o(x_f, x_s, g) = V_0(x_s) + \omega^2(x_s)(x_f - z_0(x_s))^2,$$

where $g(x_s)$ is the set of parameters, $g(x_s) = \{V_0(x_s), \omega^2(x_s), z_0(x_s)\}$. In the considered case the parametric eigenvalue problem (5)–(7) has an exact solution, i.e., the parametric eigenfunctions $\Phi_i(x_f; x_s)$ and potential curves $\varepsilon_i(x_s)$ are expressed in the analytical form

$$\varepsilon_i(x_s) = V_0(x_s) + \omega(x_s)(2(i-1)+1),$$

$$\Phi_1(x_f; x_s) = \frac{\omega^{1/4}(x_s)}{\pi^{1/4}} \exp(-\omega(x_s)(x_f - z_0(x_s))^2/2), \quad (45)$$

$$\Phi_i(x_f; x_s) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\omega(x_s)}(x_f - z_0(x_s))}{\sqrt{i-1}} \Phi_{i-1}(x_f; x_s) - \frac{\sqrt{i-2}}{\sqrt{i-1}} \Phi_{i-2}(x_f; x_s).$$

The integration in the effective potentials (11) with the basis functions (45) is carried out analytically, which yields the expressions

$$Q_{ij}(x_s) = \text{sign}(j-i) \left(\frac{\sqrt{2n\omega(x_s)}}{2} \frac{dz_0(x_s)}{dx_s} \delta_{|j-i|,1} - \frac{\sqrt{n(n-1)}}{4} \frac{d\omega(x_s)}{dx_s} \delta_{|j-i|,2} \right),$$

$$H_{ij}(x_s) = \left(\frac{n^2+n+1}{8\omega^2(x_s)} \delta_{j-i,0} - \frac{\sqrt{n(n-1)}(n-2)(n-3)}{16\omega^2(x_s)} \delta_{|j-i|,4} \right) \left(\frac{d\omega(x_s)}{dx_s} \right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{\omega(x_s)(2n+1)}{2} \delta_{j-i,0} - \frac{\omega(x_s)\sqrt{n(n-1)}}{2} \delta_{|j-i|,2} \right) \left(\frac{dz_0(x_s)}{dx_s} \right)^2 -$$

$$- \left(\frac{n\sqrt{2n}}{4\sqrt{\omega(x_s)}} \delta_{|j-i|,1} + \frac{\sqrt{2n(n-1)}(n-2)}{4\sqrt{\omega(x_s)}} \delta_{|j-i|,3} \right) \frac{dz_0(x_s)}{dx_s} \frac{d\omega(x_s)}{dx_s},$$

where $n = \max(i, j) - 1$. The effective potentials are calculated by integrating the difference $V(x_f, x_s) - V_o(x_f; x_s)$ with the basis functions:

$$V_{ij}(x_s) = \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} \Phi_i(x_f; x_s) (V(x_f, x_s) - V_o(x_f; x_s)) \Phi_j(x_f; x_s) dx_f.$$

During the simulation the adiabatic parameters $V_0(x_s)$, $\omega(x_s)$, $z_0(x_s)$ of the etalon potential (44) were found from the conditions

$$\min_{V_0(x_s), \omega^2(x_s), z_0(x_s)} \int_{x_f^{\min}(x_s)}^{x_f^{\max}(x_s)} (V(x_f, x_s) - V_o(x_f; x_s))^2 dx_f. \quad (46)$$

For the potential (43) from the condition (46) we have

$$\begin{aligned} \omega(x_s) &= \sqrt{2m} \sqrt{\frac{960}{7} + 240x_s + 2400x_s^2}, \quad z_0(x_s) = 0, \quad \text{at } x_s = a_{20}, \quad x_f = a_{22}, \\ \omega(x_s) &= \sqrt{2m} \sqrt{\frac{960}{7} + 2400x_s^2}, \quad z_0(x_s) = -\frac{7(20x_s^2 - 1)}{80(35x_s^2 + 2)}, \quad \text{at } x_s = a_{22}, \quad x_f = a_{20}. \end{aligned}$$

We performed the calculations for these parameters in the case when $(x_f, x_s) = (a_{22}, a_{20})$, as well as $(x_f, x_s) = (a_{20}, a_{22})$. The results coincide with those of the calculations of ε_i^h performed in the previous Section 5.3 and presented in Table 2 with 9 significant digits.

6. Conclusion

We elaborated new calculation schemes and algorithms for solving the parametric 2D elliptic BVP using the high-accuracy FEM with rectangular (22) and triangular (23)–(24) elements. The algorithm and the programs calculate with the given accuracy the eigenvalues, the eigenfunctions and their first derivatives with respect to the parameter of the parametric self-adjoint elliptic differential equations with boundary conditions of the Dirichlet and/or Neumann type in the finite 2D domain (15)–(17), (18) and the corresponding inhomogeneous boundary-value problem (28)–(33), obtained by taking a parametric derivative of the original 2D BVP. The program also calculates the potential matrix elements, the integrals of the eigenfunctions multiplied by their first derivatives with respect to the parameter (34). The parametric eigenvalues (potential curves) and the matrix elements computed by the program can be used for solving the bound-state and multi-channel scattering problems for a system of the coupled second-order ODES with using the Kantorovich method. We demonstrated the efficiency of the proposed calculation schemes, algorithms and codes by the example of solving the boundary-value problem of a quadruple vibration collective nuclear model.

We proposed the construction of parametric surface functions in the analytical form as eigenfunctions of the etalon equation (44), which provides the solution of the 2D BPV with given accuracy and reduces the expenditures of computer resources compared to the conventional basis, numerically calculated using FEM. One can construct parametric functions using different types of etalon potentials, e.g., that of the two-center problem with harmonic oscillator potentials [19]. This approach can be generalized for the BVP in a multidimensional domain using, e.g., the multistep Kantorovich method [3].

The proposed algorithms and codes can be adapted and applied to the analysis of quantum transparency effect, to the study of resonance three-body scattering problems, the quantum diffusion of molecules, the penetration of micro-clusters through surfaces, the fragmentation mechanism in producing very neutron-rich light nuclei, and heavy-ion collisions, as well as the microscopic study of tetrahedral-symmetric nuclei.

References

1. S. I. Vinitiskii, L. I. Ponomarev, Adiabatic representation in three-body problem with coulomb interaction, *Soviet Journal of Particles and Nuclei* 13 (1982) 557–587, in Russian.
2. G. A. Parker, R. T. Pack, Quantum Reactive Scattering in Three Dimensions Using Hyperspherical (APH) Coordinates., VI. Analytic Basis Method for Surface Functions, *Journal of Chemical Physics* 98 (1993) 6883–6896.
3. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitisky, A. G. Abrashkevich, V. L. Derbov, Numerical Solution of Elliptic Boundary-Value Problems for Schrödinger-Type Equations Using the Kantorovich Method, *Mathematical Modelling and Geometry* 2 (2014) 54–80.
4. A. Dobrowolski, K. Mazurek, A. Góźdz, Consistent Quadrupole-Octupole Collective Model, *Physical Review C* 94 (2017) 054322.
5. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitisky, A. G. Abrashkevich, KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach, *Computer Physics Communications* 179 (2008) 685–693.
6. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitisky, A. G. Abrashkevich, ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem, *Computer Physics Communications* 180 (2009) 1358–1375.
7. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitisky, A. G. Abrashkevich, POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation, *Computer Physics Communications* 185 (2014) 2636–2654.
8. K. Kumar, M. Baranger, Complete Numerical Solution of Bohr’s Collective Hamiltonian, *Nuclear Physics A* 392 (1967) 608–652.
9. A. Dobrowolski, A. Góźdz, K. Mazurek, J. Dudek, Tetrahedral symmetry in nuclei: New predictions based on the collective model, *International Journal of Modern Physics E* 20 (2011) 500–506.
10. G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1973.
11. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New York, 1982.
12. E. B. Becker, G. F. Carey, J. Tinsley Oden, *Finite Elements. An Introduction. Vol. I*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New Jersey, 1981.
13. O. Chuluunbaatar, The scientific doctoral thesis (2010).
14. F. Pockels, Über die partielle differential-gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren auftreten in der mathematischen physik, B. G. Teubner, Leipzig, 1891.
15. M. V. Berry, M. Wilkinson, Diabolical Points in the Spectra of Triangles, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 392 (1984) 15–43.
16. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitisky, V. L. Derbov, Solution of the Boundary-Value Problem for a Systems of ODEs of Large Dimension: Benchmark Calculations in the Framework of Kantorovich Method, *Bulletin of PFUR. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* 3 (2016) 31–37.
17. J. F. Cornwell, *Group Theory in Physics*, Academic Press, New York, 1984.

18. I. N. Belyaeva, N. A. Chekanov, A. A. Gusev, V. A. Rostovtsev, Yu. A. Ukolov, Y. Uwano, S. I. Vinitzky, A MAPLE Symbolic-Numeric Program for Solving the 2D-Eigenvalue Problem by a Self-Consistent Basis Method, *Lecture Notes in Computer Science* 3718 (2005) 32–39.
19. J. M. Eisenberg, W. Greiner, *Nuclear Theory. Vol. 1*, North-Holland, Amsterdam, 1970.

УДК 517.958, 530.145.6, 519.632.4

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-36-55

Алгоритмы для решения параметрической самосопряжённой эллиптической краевой задачи в двумерной области методом конечных элементов высокого порядка точности

А. А. Гусев*, О. Чулуунбаатар*†, С. И. Веницкий*‡, В. Л. Дербов§, А. Гуждж¶

* *Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980*

† *Институт математики
Монгольский национальный университет, Улан-Батор, Монголия*

‡ *Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

§ *Саратовский государственный университет, г. Саратов*

¶ *Институт физики, Университет им. М. Кюри-Скłodовска, Люблин, Польша*

Рассмотрены вычислительные схемы решения краевых эллиптических задач в рамках метода Канторовича — редукции эллиптической краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с использованием поверхностных функций, зависящих от независимой переменной системы обыкновенных дифференциальных уравнений как параметра, вычисленные как методом конечных элементов, так и пробных параметрических поверхностных базисных функций, вычисленных в аналитической виде.

Предложены новые вычислительные схемы и алгоритмы для решения параметрической самосопряжённой эллиптической краевой задачи в двумерной области, используя метод конечных элементов высокого порядка точности с прямоугольными и треугольными элементами.

Комплексы программ, реализующие алгоритмы, вычисляют с заданной точностью собственные значения, собственные функции и их первые производные по параметру, связанные с параметрической самосопряжённой краевой задачей для эллиптических дифференциальных уравнений с условиями Дирихле или Неймана на границе в конечной двумерной области, а также потенциальные матричные элементы — интегралы от произведения собственных функций и их первых производных по параметру. Параметрические собственные значения (так называемые потенциальные кривые) и матричные элементы, вычисленные с помощью комплекса программ, можно применять для решения задачи на связанные состояния и многоканальной задачи рассеяния для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью метода Канторовича.

Эффективность предложенных схем расчёта и алгоритмов демонстрируется решением двумерных эллиптических краевых задач, описывающих квадрупольные колебания в коллективной модели атомного ядра.

Ключевые слова: параметрические эллиптические краевые задачи, метод конечных элементов, метод Канторовича, системы ОДУ второго порядка

Литература

1. Веницкий С. И., Пономарев Л. И. Адиабатическое представление в задаче трех тел с кулоновским взаимодействием // *Физика элементарных частиц и атомного ядра*. — 1982. — Т. 13. — С. 1336–1418.

2. *Parker G. A., Pack R. T.* Quantum Reactive Scattering in Three Dimensions Using Hyperspherical (APH) Coordinates., VI. Analytic Basis Method for Surface Functions // *Journal of Chemical Physics*. — 1993. — Vol. 98. — Pp. 6883–6896.
3. Numerical Solution of Elliptic Boundary-Value Problems for Schrödinger-Type Equations Using the Kantorovich Method / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich, V. L. Derbov // *Mathematical Modelling and Geometry*. — 2014. — Vol. 2. — Pp. 54–80.
4. *Dobrowolski A., Mazurek K., Gózdź A.* Consistent Quadrupole-Octupole Collective Model // *Physical Review C*. — 2017. — Vol. 94. — P. 054322.
5. KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Computer Physics Communications*. — 2008. — Vol. 179. — Pp. 685–693.
6. ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Computer Physics Communications*. — 2009. — Vol. 180. — Pp. 1358–1375.
7. POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Computer Physics Communications*. — 2014. — Vol. 185. — Pp. 2636–2654.
8. *Kumar K., Baranger M.* Complete Numerical Solution of Bohr’s Collective Hamiltonian // *Nuclear Physics A*. — 1967. — Vol. 392. — Pp. 608–652.
9. Tetrahedral Symmetry in Nuclei: New Predictions Based on the Collective Model / A. Dobrowolski, A. Gózdź, K. Mazurek, J. Dudek // *International Journal of Modern Physics E*. — 2011. — Vol. 20. — Pp. 500–506.
10. *Стрэнг Г., Фикс Г.* Теория метода конечных элементов. — Москва: Мир, 1977.
11. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. — Москва: Стройиздат, 1982.
12. *Becker E. B., Carey G. F., Tinsley Oden J.* Finite Elements. An Introduction. Vol. I. — New Jersey: Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1981.
13. *Chuluunbaatar O.* The Scientific Doctoral Thesis. — 2010.
14. *Pockels F.* Über die partielle differential-gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren auftreten in der mathematischen physik. — Leipzig: B. G. Teubner, 1891.
15. *Berry M. V., Wilkinson M.* Diabolical Points in the Spectra of Triangles // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical & Engineering Sciences*. — 1984. — Vol. 392. — Pp. 15–43.
16. Решение краевых задач для систем ОДУ большой размерности: эталонные расчеты в рамках метода Канторовича / А. А. Гусев, О. Чулуунбаатар, С. И. Витницкий, В. Л. Дербов // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2016. — Т. 3. — С. 31–37.
17. *Cornwell J. F.* Group Theory in Physics. — New York: Academic Press, 1984.
18. A MAPLE Symbolic-Numeric Program for Solving the 2D-Eigenvalue Problem by a Self-Consistent Basis Method / I. N. Belyaeva, N. A. Chekanov, A. A. Gusev, V. A. Rostovtsev, Yu. A. Ukolov, Y. Uwano, S. I. Vinitzky // *Lecture Notes in Computer Science*. — 2005. — Vol. 3718. — Pp. 32–39.
19. *Eisenberg J. M., Greiner W.* Nuclear Theory. Vol. 1. — Amsterdam: North-Holland, 1970.

УДК 519.63; 537.876.4
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68

Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплёночной волноводной линзе

Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе рассматривается задача дифракции электромагнитного ТЕ-поляризованного монохроматического излучения на трёхмерном утолщении волноводного слоя регулярно-планарного трёхслойного диэлектрического волновода, формирующем тонкоплёночную волноводную линзу. Предлагается приближенная математическая модель, в которой открытый волновод рассматривается внутри вспомогательного закрытого волновода, приводящая к корректной математической постановке задачи дифракции.

В работе показано, что параметры направляемых мод открытого волновода устойчивы к сдвигам границ объемлющего закрытого волновода. Следовательно, предлагаемый подход адекватно описывает распространение поляризованного света в открытом плавно-нерегулярном волноводе. За счёт локального утолщения волноводного слоя возникает эффект деполяризации излучения, который требует рассмотрения векторного характера распространяющегося электромагнитного излучения.

В работе задача дифракции решается в адиабатическом приближении по малому параметру, соответствующему нерегулярности. Проведение численных экспериментов позволило показать, что с уменьшением малого параметра матрица коэффициентов отражения стремится к нулю, а матрица коэффициентов прохождения стремится к единичной матрице. Причём обменные вклады, которым соответствуют недиагональные элементы матриц, стремятся к нулю на порядок быстрее, чем диагональные члены. Так что, эффектами деполяризации в рассматриваемой конфигурации можно пренебречь.

Ключевые слова: волноводное распространение света, математическая модель, интегрально-оптический волновод, модифицированный неполный метод Галёркина, асимптотический метод

1. Введение

В работе рассматривается задача математического моделирования дифракции электромагнитного поляризованного монохроматического излучения на трёхмерном утолщении волноводного слоя, формирующем структуру волноводной линзы на регулярно-планарном диэлектрическом волноводе.

Задачу можно рассматривать в декартовой системе координат, связанной с геометрией планарных волноводов. Плоские поверхности раздела между волноводным слоем, подложкой и покровным слоем параллельны (компланарны) плоскости xOz . Ось Oy перпендикулярна этим плоским поверхностям. Излучение распространяется вдоль оси Oz (в направлении возрастания переменной z), геометрия системы до помещения в неё утолщения и невозмущённое электромагнитное поле излучения инвариантны относительно движений вдоль оси Ox , то есть $\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0$.

Тогда невозмущённое электромагнитное монохроматическое, поляризованное излучение

$$\vec{E} = \vec{E}(y, z)e^{-i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(y, z)e^{-i\omega t}$$

Статья поступила в редакцию 20 декабря 2016 г.

Исследование выполнено в рамках соглашения № 02.а03.21.0008 от 24.04.2016 г. между Министерством образования и науки Российской Федерации и Российским университетом дружбы народов. Работа выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ № 15-07-08795, № 16-07-00556. Приведённые в статье рисунки и вычисления были выполнены при помощи Sage Mathematics Software.

удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в Гауссовой системе единиц в описанной системе координат распадается на две независимые подсистемы для ТЕ- и ТМ-поляризаций.

Если же нерегулярный участок интегрально-оптического волновода не обеспечивает инвариантности электромагнитного поля вдоль оси Oy , то на нем происходит деполяризация мод, т.е. все компоненты поля становятся отличными от тождественного нуля, что характерно для гибридных мод. Если нерегулярность мала, то и гибридизация (деполяризация) мала по сравнению с полем в регулярной части волновода [1–7].

Итак, рассмотрим распространение ТЕ-мод в планарном регулярном волноводе, состоящем из трёх слоев: подложки, волноводного слоя и покровного слоя, характеризующихся различными коэффициентами преломления n_s, n_f и n_c соответственно. Примем направление распространения волны за ось z , а ось y направим перпендикулярно слоям. Тогда

$$n = \begin{cases} n_s & y < 0, \\ n_f, & 0 < y < h_0, \\ n_c, & h_0 < y. \end{cases}$$

Поместим сверху на основном волноводном слое небольшое утолщение — дополнительный волноводный слой переменной толщины $h(x, z)$ порядка длины волны излучения на участке радиуса R порядка нескольких длин волн излучения (то есть за единицу измерения длины выбрана длина волны электромагнитного излучения), формирующий тонкоплёночную волноводную линзу [8]. Дополнительный волноводный слой имеет тот же показатель преломления, что и основной слой, сечение получившейся волноводущей системы изображено на рис. 1.

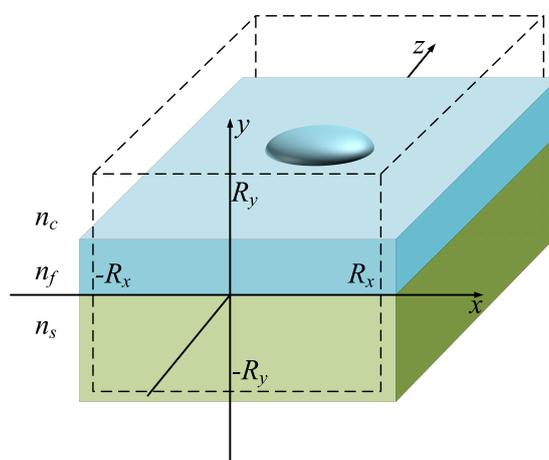


Рис. 1. Плоский волновод, вставленный в ящик $R_x \times R_y$

Будем считать, что дополнительный волноводный слой представляет собой тело

$$h_1 < y < h_2(x, z), \quad |x| < L_x, \quad |z| < L_z.$$

Ниже для примера используется

$$h(x, z) = h_1 + \delta \sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

где δ — параметр, характеризующий «малость» утолщения. Наша цель — исследовать дифракцию света на этой линзе.

2. Описание приближенной математической модели

Отметим, что рассматриваемое локальное утолщение волноводного слоя не обеспечивает инвариантности поля вдоль оси Oy . Однако, в силу малости возмущения регулярности, эффекты деполяризации малы по сравнению с основным вкладом поля регулярного волновода. Это позволяет на начальном этапе рассмотрения пренебречь векторным характером распространяющегося электромагнитного излучения.

В скалярном приближении распространение волны можно описать уравнением Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 q u = 0,$$

где $q = q_0(y) + \delta \cdot q_1(x, y, z)$ и

$$q_0 = \begin{cases} n_s^2, & y < 0, \\ n_f^2, & 0 < y < h_0, \\ n_c^2, & h_0 < y, \end{cases}$$

а малая добавка δq_1 характеризует утолщение.

Поставить сразу парциальные условия изучения невозможно, поскольку спектральная задача для оператора $\Delta_{\perp} + k^2 q_0(x, y)$ на \mathbb{R}^2 имеет смешанный спектр: дискретный и непрерывный. Простейший путь к постановке условий — рассмотреть открытый волновод в закрытом волноводе, то есть ограничить рассматриваемое пространство \mathbb{R}^3 компактной областью G : $|x| < R_x$, $|y| < R_y$, изображённой на рис. 1 пунктиром. Мы полагаем, что в реальной системе объекты, помещённые достаточно далеко от волноводного слоя, не влияют существенным образом на интересующие нас характеристики волны. Данное предположение вносит дополнительное возмущение в задачу. Мы предполагаем его малым в начале рассмотрения.

Результаты численных экспериментов, проведённых нами в последующих разделах, подтверждают сделанное предположение, поэтому примем $u|_{y=\pm R_y} = 0$, а также, что поле на некотором удалении от утолщения не зависит от x , поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=\pm R_x} = 0.$$

Остаётся поставить парциальные условия излучения. Обозначим собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} v + k^2 q_0(y)v + \lambda v = 0, \\ v|_{y=\pm R_y} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=\pm R_x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

как λ_n и v_n соответственно. Система собственных функций этой задачи полна в пространстве $L^2(G)$ [9].

Волну, падающую на линзу, при $z < -L_z$ можно описать как разложение

$$\sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}$$

по собственным функциям, отвечающим отрицательным собственным значениям, причём $i\gamma_n = \sqrt{\lambda_n}$, N — число отрицательных собственных значений задачи (1).

Отражённую от линзы волну при $z < -L_z$ можно представить как

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_n v_n(x, y) e^{-i\gamma_n z},$$

а прошедшую при $z > L_z$ как

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z},$$

где R_n, T_n — неизвестные числа, а суммы распространяются на все собственные функции задачи (1).

Задача отыскания функции u и последовательности чисел $\{T_n\}, \{R_n\}$, именуемых коэффициентами прохождения и отражения вида

$$\begin{cases} \Delta_{\perp} u + k^2 q(x, y) u = 0, \\ u|_{y=\pm R_y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=\pm R_x} = 0, \\ u|_{z < -L_z} = \sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n v_n(x, y) e^{-i\gamma_n z}, \\ u|_{z > L_z} = \sum_{n=1}^N F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}, \end{cases} \quad (2)$$

имеет (и притом единственное) решение и является корректной задачей математической физики [10, 11]. Мы будем использовать её в качестве математической модели для описания поля открытого волновода.

3. Решение задачи дифракции в первом порядке теории возмущений

Чтобы получить простые формулы для решения задачи (2), рассмотрим заполнение вида

$$q = q_0(y) + \delta \cdot q_1(x, y, z)$$

и будем искать решение в виде

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z} + \delta \cdot u' + \dots$$

в рамках теории возмущений, возможность применения которой к задачам с парциальными условиями излучения была обоснована в [11, 12].

Для отыскания возмущённой части решения вида

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(x, y)$$

имеем соотношение вида

$$\Delta u + k^2 q_0(y) u = -k^2 q_1(x, y, z) \sum_{n=1}^{\infty} F_n v_n(x, y) e^{i\gamma_n z}$$

или, после проектирования на v_n , вида

$$\frac{d^2 u_n}{dz^2} + \gamma_n^2 u_n = -k^2 \sum_{m=1}^{\infty} F_m e^{i\gamma_m z} q_{nm}(z), \quad (3)$$

где

$$q_{nm}(z) = \iint_G q_1(x, y, z) v_n(x, y) v_m(x, y) dx dy.$$

Функция Грина для уравнения (3) с парциальными условиями излучения может быть выписана явно [13], а само решение с её помощью записано в виде

$$u_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i\gamma_n |z-\xi| + i\gamma_m \xi} q_{nm}(\xi) d\xi.$$

Таким образом, полное поле дается формулой

$$u = \sum_n \left(F_n e^{i\gamma_n z} + \sum_m \delta Z_{nm}(z) F_m + \dots \right) v_n(x, y),$$

где поправки первого порядка малости по δ имеют вид:

$$\delta Z_{nm} = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \iiint_{(x,y,\xi) \in \text{supp } \delta q} e^{i\gamma_n |z-\xi| + i\gamma_m \xi} \delta q(x, y, \xi) d\xi.$$

Следует заметить, что q_1 имеет компактный носитель, поэтому на самом деле здесь интеграл распространяется на конечный отрезок. При $z > L_z$ модуль $|z - \xi| = z - \xi$, поэтому

$$u_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} e^{i\gamma_n z} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)\xi} q_{nm}(\xi) d\xi,$$

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} F_m \int_{\xi=-\infty}^{\infty} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)\xi} q_{nm}(\xi) d\xi.$$

Полагая

$$\delta T_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)z} v_n v_m \cdot q_1(x, y, z) dx dy dz,$$

можем переписать предыдущую формулу как

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta T_{nm} \cdot F_m.$$

Теорема 1. В первом порядке теории возмущений коэффициенты прохождения и отражения n -ой моды даются формулами

$$\delta T_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta T_{nm} \cdot F_m, \quad \delta R_n = \frac{k^2}{2i\gamma_n} \sum_{m=1}^{\infty} \delta R_{nm} \cdot F_m,$$

где

$$\delta T_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)z} v_n v_m \cdot \delta q \cdot dx dy dz,$$

$$\delta R_{nm} = \iiint_{G \times \{|z| < L_z\}} e^{i(\gamma_m + \gamma_n)z} v_n v_m \cdot \delta q \cdot dx dy dz.$$

Матрицы δT и δR будем называть матрицами прохождения и отражения.

4. Границы применимости модели

С точки зрения скалярной волновой оптики поле в открытом волноводе, помещённом в закрытый волновод, представляет собой линейную комбинацию волн

$$v_n(x, y) e^{\pm i\gamma_n z},$$

где v — собственные функции задачи (1), отвечающие отрицательным собственным значениям, причём $i\gamma_n = \sqrt{\lambda_n}$.

Собственные функции задачи (1) уже при небольших частотах k чётко распадаются на два класса: локализованные и не локализованные в волноводном слое. Первые мы будем интерпретировать как канализированные средним слоем, а вторые — как канализированные объемлющим закрытым волноводом — ящиком.

Гипотеза, лежащая в основе предложенной модели, может быть сформулирована следующим образом: если падающая волна представляет собой суперпозицию локализованных мод, то коэффициенты прохождения и отражения T_n и R_n локализованных мод не зависят заметным образом от параметров R_x, R_y ящика. Расхождения, которые неизбежно возникают при применении ящиков различных размеров, несут информацию, полезную для численного анализа модели:

- n -ю моду можно вычислить при нескольких различных значениях R_x, R_y , величина $\delta\lambda_n$ характеризует дисперсию, которая не может быть уточнена в рамках рассматриваемой модели,
- вклады нелокализованных мод в любую величину характеризуют в своей совокупности рассеянную энергию, сами же по себе не имеют физического смысла.

Так называемые «точные» модели также приносят погрешности, оценка которых зачастую не производится. Чем выше номер локализованной моды, тем более заметна зависимость собственных значений от R_x, R_y . Однако идея предельного перехода $R \rightarrow \infty$ плоха не только с вычислительной точки зрения. Это обстоятельство указывает на то, что рассматриваемая модель — модель с парциальным распределением точности [14].

5. Вычисление локализованных собственных функций

Все собственные значения задачи (1) можно найти по методу разделения переменных. Полагая

$$v = v(y) \cos \frac{\pi s}{2R_x} (x - R_x), \quad s \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

и подставляя (4) в (1), получим одномерную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} v'' + k^2 q_0(y)v + \left(\lambda - \left(\frac{\pi s}{2R_x} \right)^2 \right) v = 0, \\ v|_{y=\pm R_y} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Поэтому достаточно найти все собственные значения при $s = 0$, остальные получаются из них сдвигом на $((\pi s)/(2R_x))^2$. При этом собственное значение λ отвечает локализованной моде, если $v(y)$ экспоненциально убывает в покровном слое и подложке [15–17]: $-k^2 n_f^2 < \lambda - ((\pi s)/(2R_x))^2 < \min(-k^2 n_c^2, -k^2 n_s^2)$. Отсюда, будет ли мода локализована при $s > 0$ или нет, существенно зависит от выбора R_x .

Обратимся к вычислению локализованных мод, не зависящих от x ($s = 0$), сшиванием решений на двух разрывах коэффициента преломления. Для удобства опишем обозначения, которые используются в пакете `Luneburg` под Sage.

- 0 – подложка, 1 – волноводный слой, 2 – покровный слой,
- `n=[ns,nf,nc]` – список с показателями преломления,
- `h=[h0,h1]` – отрезок оси y , который занимает волноводный слой,

Функция `luneburg_eigenplot(n,h,k,Ry)` проводит численный расчёт дисперсионной зависимости и строит график дисперсионной кривой (в логарифмическом масштабе), нули которой суть искомые собственные значения. Будем далее рассматривать размеры волноводной структуры в единицах длины волны электромагнитного излучения. Рассмотрим открытый волновод с толщиной волноводного слоя в 1 длину волны и

$$n = \begin{cases} 1.1 & y < 0, \\ 2 & 0 < y < 1, \\ 1 & 1 < y, \end{cases}$$

помещённого в ящик с $R_y = 10$ длин волн, при $k = 3$ этот график можно построить командой:

```
sage: load('sage/luneburg.sage')
sage: var('x,y,z')
sage: luneburg_eigenplot([1.1,2,1],[0,1],3,10)
```

На рис. 2 представлены графики при $R_y = 2$ и $R_y = 10$. Хорошо видно, что положение нулей не зависит от R_y . По графику видно, что имеется ровно две собственных функции, возле $\lambda = -31$ и -18 .

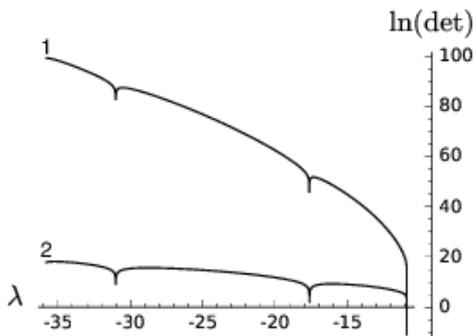


Рис. 2. График левой части характеристического уравнения при $n = [1.1, 2, 1]$, $k = 3$ для двух значений: (1) для $R_y = 10$; (2) для $R_y = 2$

Замечание 1. По графику хорошо видно, что задача имеет ту же вычислительную особенность, которая в [18] описывается в разделе, посвящённом построению графиков. Отделение корней здесь будет нетривиальной задачей.

Для более точного вычисления корней и собственных функций служит функция `luneburg_eigenfunction(n,h,k,Ry,lambda)`, где λ — приближенное значение для собственного значения, найденное по графику, искомое собственное значение должно лежать на отрезке $[\lambda, \lambda + 1]$. Эта функция в качестве выходных данных предоставляет список, 0-м элемент которого служит уточнённое собственное значение, а 1-м элементом — собственная функция, описанная как кусочно-аналитическое выражение и нормированная на $L^2(-R_y, R_y)$. Для рассматриваемого примера имеем два собственных значения:

```
sage: luneburg_eigenfunction([1.1,2,1],[0,1],3,10,-32)
[-31.00587372275704, piecewise(y|-->-(1.749050320801987e-20)*
e^(4.48507232079451*y + 44.8507232079451) +
(1.749050320801987e-20)*e^(-4.48507232079451*y -
44.8507232079451) on (-10, 0), y|-->-0.5262885275712399*
cos(2.234754187207837*y) - 1.0562423917910484*
sin(2.234754187207837*y) on [0, 1], y|-->
(2.3432737836960847e-19)*e^(4.69104185898581*y -
46.9104185898581) - (2.3432737836960847e-19)*
e^(-4.69104185898581*y + 46.9104185898581) on (1, 10); y)]
sage: luneburg_eigenfunction([1.1,2,1],[0,1],3,10,-18)
[-17.624762558080413, piecewise(y|-->(4.939108333233261e-12)*
e^(2.59514210749246*y + 25.9514210749246) -
(4.939108333233261e-12)*e^(-2.59514210749246*y -
25.9514210749246) on (-10, 0), y|-->0.920889502548748*
cos(4.286634745569021*y) + 0.5575093905265337*
sin(4.286634745569021*y) on [0, 1], y|-->
(2.9481241586952706e-12)*e^(2.936794606042515*y -
29.36794606042515) - (2.9481241586952706e-12)*
e^(-2.936794606042515*y + 29.36794606042515) on (1, 10); y)]
```

Графики собственных функции построены на рис. 3 и 4. Следует обратить внимание на то, что, например, в покровном слое собственная функция имеет экспоненциально растущий член с амплитудой $1.7 \cdot 10^{-20}$, который на отрезке $1 < y < 10$ не оказывает заметного влияния на поведение собственной функции. Однако едва ли разумно отбрасывать этот член, ведь второе слагаемое имеет тот же порядок.

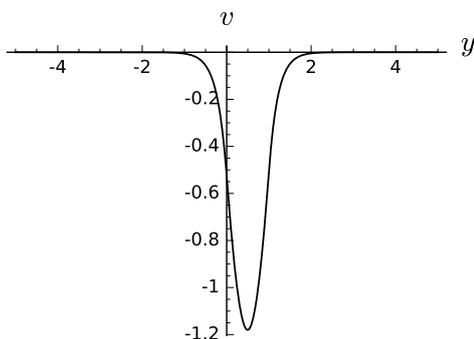


Рис. 3. График собственной функции моды TE_0 при $n = [1.1, 2, 1], k = 3$

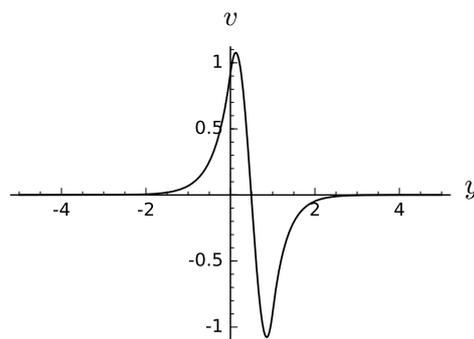


Рис. 4. График собственной функции моды TE_1 при $n = [1.1, 2, 1], k = 3$

6. Волноводная линза

Обратимся теперь к дифракции на утолщении волноводного слоя. Пусть для примера волноводный слой имеет утолщение в форме полусферы,

$$x^2 + z^2 < R, \quad h_1 < y < h_1 + \delta \sqrt{R^2 - x^2 - z^2},$$

заполненной веществом с показателем преломления n_l . В полярной системе координат

$$\delta T_{nm} = (n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} e^{i(\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi} v_n v_m r dr d\varphi dy.$$

Если v_n и v_m не зависят от x , то T_{nm} имеет вещественное значение, поскольку

$$\int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin(\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi = 0.$$

При этом для вычисления удобно пользоваться выражением

$$\delta T_{nm} = (n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} v_n v_m \rho_{nm}(y) dy,$$

где

$$\rho_{nm}(y) = \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos((\gamma_m - \gamma_n)r \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

В частности,

$$\begin{aligned} \delta T_{11} &= 2\pi(n_l^2 - n_c^2) \int_{y=1}^{h_1+\delta} dy v_1(y)^2 \int_{r=0}^{\sqrt{R^2\delta^2 - (y-h_1)^2/\delta}} r dr = \\ &= \pi(n_l^2 - n_c^2) \int_{y=h_1}^{h_1+\delta} \left(R^2 - \frac{(y-h_1)^2}{\delta^2} \right) v_1(y)^2 dy. \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла можно воспользоваться стандартной подпрограммой Sage:

```
sage: h1=1
sage: R=1
sage: delta=0.1
sage: nf=2
sage: nc=1
sage: ns=1.1
sage: nl=1.8
sage: v=luneburg_eigenfunction([ns,nf,nc],[0,1],3,10,-32)[1]
sage: numerical_integral(pi*(nl^2-nc^2)*(v.expression_at(2))^2*
```

```
(R^2-(y-h1)^2/delta^2),h1,h1+delta)
(0.0871817000736067, 9.679113074768287e-16)
```

Вторая величина из числа выходных параметров `numerical_integral`, — ошибка вычисления интеграла. В этом примере стенка ящика была помещена на расстоянии десятка толщин волноводного слоя от этого слоя ($R_y = 10$), если же придвинуть стенку ящика на расстояние 1 толщины волноводного слоя ($R_y = 2$), то величина δT_{11} почти не изменится:

```
sage: v=luneburg_eigenfunction([ns,nf,nc],[0,1],3,2,-32)[1]
sage: numerical_integral(pi*(nl^2-nc^2)*(v.expression_at(1.5))^2*
(R^2-(y-h1)^2/delta^2),h1,h1+delta)
(0.08716079779015289, 9.67679245513252e-16)
```

Именно это обстоятельство свидетельствует о применимости используемой модели: перемещение стенок ящика не влияет сколько-нибудь заметным образом на величину T_{11} .

Остальные элементы матриц δT и δR для первых двух локализованных мод можно вычислить тем же путём. Так при $\delta = 0.1$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.0871817000736067 & 0.0367243736664542 \\ 0.0367243736664542 & 0.299853381650346 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0.0181280522835082 & 0.0345146071574481 \\ 0.0345146071574481 & 0.0656532582915378 \end{pmatrix},$$

при $\delta = 0.01$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.0116699996604377 & 0.000482453707056942 \\ 0.000482453707056942 & 0.0361978913181138 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 0.000273495110082350 & 0.000482170019481738 \\ 0.000482170019481738 & 0.000850060161436371 \end{pmatrix},$$

при $\delta = 0.001$ получается

$$\delta T = \begin{pmatrix} 0.00120423307443047 & 4.96623379696062 \times 10^{-6} \\ 4.96623379696062 \times 10^{-6} & 0.00369188780662724 \end{pmatrix},$$

$$\delta R = \begin{pmatrix} 2.83607252631433 \times 10^{-6} & 4.96620475470580 \times 10^{-6} \\ 4.96620475470580 \times 10^{-6} & 8.69624769266800 \times 10^{-6} \end{pmatrix}.$$

Можно видеть, что с уменьшением δ матрицы коэффициентов δR и δT стремятся к нулю.

7. Заключение

В работах по исследованию оптических волноводов обычно без дополнительного обоснования принимают, что поле внутри волноводного слоя не зависит от электромагнитных явлений, происходящих на расстоянии в несколько десятков длин волн от него. Это, разумеется, не вполне верно: некоторые характеристики поля внутри волновода зависят от этих явлений, но исследователей интересуют те параметры волноводного излучения, которые очень слабо зависят от окружения волновода.

Данное рассуждение является основанием для формулировки математической модели (2) волноводного распространения поляризованного света в плавно-нерегулярном интегрально-оптическом волноводе. Предложенная модель не является точной, так как часть излучаемой открытым волноводом световой энергии канализируется бесконечно высокими стенками потенциала на границе объемлющего закрытого волновода.

Достоинством модели является корректность формулируемой задачи. Для исследования её решений, их зависимости от граничных условий и от коэффициентов уравнения можно использовать широкий ассортимент строгих математических методов и апробированных компьютерных программ.

Этим преимуществом можно воспользоваться для исследования того возмущения, которое вносится при помещении открытого волновода внутрь объемлющего закрытого волновода. Проведение численных экспериментов позволило показать, что с уменьшением дельта матрица коэффициентов отражения δR стремится к нулю, а матрица коэффициентов прохождения стремится к единичной матрице, то есть $\delta T \rightarrow 0$. Причём обменные вклады, которым соответствуют внедиагональные элементы матриц, стремятся к нулю на порядок быстрее, чем диагональные члены.

Сравнение полученных в данной работе результатов с результатами работы [19], в которой неполным методом Галёркина была исследована аналогичная волноводная конфигурация в случае закрытого волновода, то есть случай такого R_y , который приближает стенки объемлющего волновода вплотную к границам открытого волновода, показало качественное совпадение численных результатов.

Литература

1. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 8. — С. 42–54.
2. Севастьянов А. Л. Численная реализация модели интегрально-оптической линзы Люнеберга в нулевом приближении // Письма в ЭЧАЯ. — 2011. — Т. 8, № 5(168). — С. 804–811.
3. Устойчивое компьютерное моделирование тонкопленочной обобщенной волноводной линзы Люнеберга / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян, Л. А. Севастьянов // Математическое моделирование. — 2014. — Т. 26, № 11. — С. 37–44.
4. Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. Аналитические вычисления вывода системы дифференциальных уравнений в частных производных для коэффициентных функций Канторовича // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 7. — С. 103–110.
5. Диваков Д. В., Севастьянов Л. А. Применение неполного метода Галёркина к нерегулярным переходам в открытых планарных волноводах // Математическое моделирование. — 2015. — Т. 27, № 7. — С. 44–50.
6. Многослойные оптические покрытия: монография / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов, А. А. Хохлов. — Москва: РУДН, 2014.
7. Интегральная оптика: теория и компьютерное моделирование. Монография / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, Л. А. Севастьянов, А. Л. Севастьянов. — Москва: РУДН, 2015.
8. Zernike F. Luneburg Lens for Optical Waveguide Use // Optics Communications. — 1974. — Vol. 12. — Pp. 379–381.
9. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973.
10. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869–1888.

11. Малеых М. Д. О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 4. — С. 3–5.
12. Боголюбов А. Н., Малеых М. Д. К теории возмущений спектральных характеристик волноведущих систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2003. — Т. 43, № 7. — С. 1049–1061.
13. Werner P. Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern // Z. Angew. Math. Mech. — 1987. — Bd. 67, No. 4. — Ss. 43–54.
14. Малеых М. Д. О моделях с парциальным распределением точности // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2014. — № 3. — С. 76–80.
15. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. — Мир, 1984.
16. Маркузе Д. Оптические волноводы. — Москва: Мир, 1974.
17. Tamir T. Guided-Wave Optoelectronics. — Berlin: Springer-Verlag, 1990.
18. Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Third Edition / W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — Cambridge University Press, 2007.
19. Диваков Д. В. Моделирование распространения собственных мод закрытого волновода неполным методом Галеркина // Современные проблемы прикладной математики и информатики (МРАМС'2014): Тезисы докладов международной конференции / ОИЯИ. — Дубна: 2014. — С. 61–65.

UDC 519.63; 537.876.4

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68

Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens

D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov

*Department of Applied Probability and Informatics
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russian Federation, 117198*

The paper deals with the problem of electromagnetic TE-polarized monochromatic light diffraction on three-dimensional thickening of the waveguide layer of regular three-layered open planar dielectric waveguide, which forms thin-film waveguide lens. The authors propose an approximate mathematical model in which open waveguide is placed inside the auxiliary closed waveguide, that leads to well-posed diffraction problem. It is shown, that properties of guided modes of the open waveguide are stable with respect to shifts of the closed waveguide boundaries. So, the proposed approach describes the propagation of polarized light in the open smoothly irregular waveguide adequately.

The three-dimensional thickening of the waveguide layer forces us to deal with electromagnetic field in vector form due to depolarization effect. The diffraction problem, presented in the work, is solved in adiabatic approximation by the small parameter of irregularity of the waveguide layer.

The numerical experiments show that decreasing of the small parameter tends the reflection coefficient matrix to zero-matrix, tends the transmittance coefficient matrix to identity matrix, and besides the non-diagonal matrix elements, corresponding to modes interaction, tend to zero by an order faster than diagonal matrix elements, which shows that depolarization effects in the given configuration can be neglected.

Key words and phrases: waveguide propagation of light, mathematical model, integrated-optical waveguide, modified incomplete Galerkin method, asymptotic method

References

1. A. A. Egorov, A. L. Sevastyanov, E. A. Ayryan, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, Zero Approximation of Vector Model for Smoothly-Irregular Optical Waveguide, *Mathematical Models and Computer Simulations* 22 (8) (2010) 42–54, in Russian.
2. A. L. Sevastyanov, The numerical implementation of the model of integrated-optical luneburg lens in the zero approximation.
3. A. A. Egorov, A. L. Sevastyanov, E. A. Ayryan, L. A. Sevastyanov, Stable Computer Modeling of Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens, *Mathematical Models and Computer Simulations* 26 (11) (2014) 37–44, in Russian.
4. A. L. Sevastyanov, L. A. Sevastyanov, A. A. Tyutyunnik, Analytical Calculations of Derivation Partial Differential Equations for Coefficient Kantorovich Functions, *Mathematical Models and Computer Simulations* 27 (7) (2015) 103–110, in Russian.
5. D. V. Divakov, L. A. Sevastyanov, Application of Incomplete Galerkin Method to Irregular Junction in Open Planar Waveguides, *Mathematical Models and Computer Simulations* 27 (7) (2015) 44–50, in Russian.
6. A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, K. A. A., *Multilayer Optical Coatings: Monograph*, PFUR, Moscow, 2014, in Russian.
7. A. A. Egorov, K. P. Lovetskiy, L. A. Sevastyanov, A. L. Sevastyanov, *Integrated Optics: Theory and Computer Modeling. Monograph*, PFUR, Moscow, 2015, in Russian.
8. F. Zernike, Luneburg Lens for Optical Waveguide Use, *Optics Communications* 12 (1974) 379–381.
9. O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 1985.
10. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of the Excitation of the Waveguide with Inhomogeneous Filling, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 39 (11) (1999) 1869–1888, in Russian.
11. M. D. Malykh, On a Method to Increase the Lower Limit of the Continuous Spectrum in the Spectral Theory of Waveguide Systems, *Moscow University Physics Bulletin* (4) (2006) 3–5, in Russian.
12. A. N. Bogolyubov, M. D. Malykh, On the Theory of Spectral Characteristics of Waveguide Systems Disturbances, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 43 (7) (2003) 1049–1061, in Russian.
13. P. Werner, Resonanzphänomene in akustischen und elektromagnetischen Wellenleitern, *Z. Angew. Math. Mech.* 67 (4) (1987) 43–54.
14. M. D. Malykh, On the Models with Partial Distribution of Accuracy, *Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”* (3) (2014) 76–80.
15. M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides*, Wiley, New York, 1981.
16. D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand, New York, 1974.
17. T. Tamir, *Guided-Wave Optoelectronics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
18. W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing. Third Edition*, Cambridge University Press, 2007.
19. D. V. Divakov, Simulation of Propagation of Waveguide Eigenmodes in Closed Waveguides Using Incomplete Galerkin Method, in: *Modern problems of applied mathematics and computer science: МРАМС 2014, JINR, Dubna, 2014*, pp. 61–65, in Russian.

Волновая модель распространения и изменения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе

А. А. Егоров*[†], М. А. Егорова[‡]

* *Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН
ул. Вавилова, д. 38, Россия, Москва, 119991*

[†] *Учебно-научный Центр Совета ВОИР РУДН*

[‡] *Кафедра иностранных языков факультета гуманитарных и социальных наук
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе рассмотрена волновая математическая модель, описывающая распространение и изменение лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе. Дана краткая информация об анатолийской и курганной гипотезах формирования праиндоевропейцев. Математическая модель процесса волнового распространения и изменения информации описывается системой интегро-дифференциальных уравнений. Даны результаты предварительного теоретического анализа и компьютерного моделирования. В частности, получена оценка максимально возможного времени (~ 24000 лет) развития/возникновения рассматриваемой индоевропейской языковой «семьи» в рамках данной модели. Результаты компьютерного моделирования показывают, что из двух основных гипотез формирования праиндоевропейцев — анатолийской и курганной — последняя лучше соответствует полученным нами временным оценкам. В заключение получены данные о гипотетическом праиндоевропейском алфавите, а именно — о числе возможных «символов/знаков» (или «букв») алфавита праиндоевропейцев на основании полученных нами данных. Исходя из полученных результатов установлено, что диапазон возможных значений для символов алфавита ограничен примерно значениями: $3 \div 32$. Кроме того, есть хорошая корреляция наших данных с выводами генетиков о возможном времени появления (примерно 14000–20000 лет назад) гаплогруппы Y-DNA R1a (считается, что носителями праиндоевропейских языков были в первую очередь мужчины с данной гаплогруппой).

Ключевые слова: математическая модель, интегрально-дифференциальное уравнение, математическая лингвистика, индоевропейские языки, индоевропейская хронология, индоевропейское распространение, анатолийская и курганная гипотезы

1. Введение

В настоящей работе рассмотрена волновая математическая модель, описывающая распространение и изменение лингвистической информации в некоторых сообществах [1, 2]. В рамках этой модели было проведено численное исследование распространения лингвистической информации в модельном индоевропейском (ИЕ) языковом сообществе, в том числе на начальном этапе его формирования.

Информация — это (от лат. *informare* — сообщать, изображать, составлять понятие о чём-либо; *informatio* — разъяснение, изложение) сведения, содержащиеся в конкретном высказывании и представляющие собой объект передачи, хранения, переработки, воспроизведения. В более узком смысле под *лингвистической информацией* могут пониматься, например, семантика (определяет соотношение между словами и их значениями) и грамматика (правила, выражающие общие синтаксические свойства слов и групп слов, позволяющие производить и/или описывать правильные предложения языка) некоторого языка; в принципе это может быть и количество групп языков или просто число языков в некоторой языковой семье.

Бифуркация (от латинского *bifurcus* — раздвоенный) — появление нового качества в поведении динамической системы при малом изменении её параметров [3, 4]. Если при перестройке объекта он не изменяется во времени, то вместо термина бифуркация можно использовать термин «катастрофа».

При построении математических моделей распространения и изменения лингвистической информации в языковых сообществах в качестве априорной информации использовали данные независимых исследований, как из лингвистики, так и из других научных областей, например, из истории, генетики и археологии [5–20].

В статье даны некоторые результаты предварительного теоретического анализа и компьютерного моделирования. Установлено, что для рассмотренной математической модели процесса распространения и изменения лингвистической информации наиболее характерной чертой является известный в математической лингвистике логистический характер поведения моделируемой динамической системы.

2. Число языков. Анатолийская и Курганная гипотезы формирования протоиндоевропейцев

Рассмотрим данные, следующие из оценки временных рамок возникновения и развития языков и их семей. Известно, что сейчас существует по разным данным примерно от 6000 до 8000 языков [9, 11], из которых собственно индоевропейских примерно 300–500. Так, по данным [11], живых индоевропейских языков сейчас примерно 445. В [12] справедливо отмечено о числе живых языков: «В последней версии международного лингвистического каталога “Этнолог” [11] приводится цифра в 7106 единиц, но абсолютной точности здесь быть не может, потому что не существует единого строгого критерия, который позволял бы определить, где кончаются диалекты, то есть региональные варианты, одного языка и начинаются, собственно говоря, разные языки».

Приведённые данные по числу языков позволяют получить следующие временные оценки, в основе которых лежит сделанное в нашей работе по динамической нелинейной модели распространения и изменения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе предположение [21]: использование нелинейной модели, где есть циклы вида S^{2^p} , позволяет получить не только «встроенный» внутренний временной масштаб с шагом в 500 лет, но и определить временную «длину» данной лингвистической временной «линейки», вдоль которой развивается динамика исследуемой лингвистической системы. Действительно, для циклов вида S^{2^p} , где $p = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ имеем следующий ряд значений для числа языков L , соответствующего данному ряду последовательных их удвоений, начиная с одного возможного ИЕ праязыка, первоосновы всех современных ИЕ языков: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 и т. д., исходя из этого несложно получить следующую простую формулу для оценки возможного числа языков в таком динамическом процессе: $L = 2^p$. Откуда получаем формулу для численной оценки количества соответствующих данному числу языков циклов p : $p = \log_2 L$. Например, для 6000 всех языков получаем: $p = \log_2 6000 \approx 12,55$, т. е. примерно 13 поколений, что соответствует примерно времени $13 \cdot 500$ лет = 6500 лет. Только для индоевропейских языков имеем: $p = \log_2 500 \approx 8,97$, т. е. примерно 9 поколений или 4500 лет. Учёт вероятных исчезнувших языков и всевозможных диалектов увеличит эти оценки, особенно в случае всех языков, что вполне естественно. С этой точки зрения можно рассматривать данные оценки как оценки времён, когда различные языки окончательно разошлись.

Напомним кратко об Анатолийской и Курганной гипотезах формирования протоиндоевропейцев. *Анатолийская гипотеза* локализует индоевропейскую прародину

в западной Анатолии (современная Турция). Данные, полученные Греем и Аткинсоном методами байесовского анализа, по их мнению, указывают на возраст праиндоевропейского языка в интервале от 8000 до 9500 лет и на анатолийское происхождение языка (см., например, [13]). *Курганная гипотеза* была предложена Марией Гимбутас в 1956 г., чтобы соединить данные археологических и лингвистических исследований для определения местонахождения прародины народов носителей праиндоевропейского языка. Гипотеза является наиболее популярной в отношении происхождения ПИЕ. По ней протоиндоевропейские народы существовали в причерноморских степях и юго-восточной Европе примерно с V по III тысячелетие до н.э. (а возможно и ранее) [5, 6, 13, 14, 18]. Важнейшим этапом в развитии курганной культуры было одомашнивание лошади и использование повозок, что сделало носителей культуры мобильными и существенно расширило их влияние [6, 14]. В курганной гипотезе полагается, что причерноморские степи были прародиной протоиндоевропейцев и по всему этому региону говорили на поздних диалектах праиндоевропейского языка.

Используем полученные данные при численном исследовании распространения и изменения лингвистической информации в некотором модельном индоевропейском (ИЕ) языковом сообществе, в том числе на начальном этапе его формирования (см. также [21]). При этом будем полагать, что время начала разделения (т. е. по сути «исчезновения») гипотетического праиндоевропейского (ПИЕ) языка (в англоязычной литературе используется термин Proto-Indo-European language — PIE) произошло приблизительно не позднее 6500 (курганная гипотеза) или не позднее 9500 (анатолийская гипотеза) лет назад [5, 14].

3. Волновая модель распространения и изменения лингвистической информации в сообществе

Как известно, при описании языковых явлений в сообществах наиболее часто употребляются термины: передача и распространение (см., например, [16, 17]). Действительно, лингвисты давно обратили внимание на волновую природу многих языковых явлений (см., например, [16, 17]). Однако в этой области пока предложено мало математических моделей, позволяющих учитывать именно волновой характер различных лингвистических явлений. Многообразие волновых процессов в природе приводит к тому, что никаких абсолютных общих свойств волн выделить не удаётся. Среди многообразия волн можно выделить некоторые типы, которые возникают во многих ситуациях из-за математического сходства описывающих их теоретических моделей. Целый ряд таких моделей описывается волновыми уравнениями.

Для описания процессов распространения информации в языковом сообществе предлагается применить математический аппарат, который широко используется при исследовании различных волновых явлений (см, например, [22–25]). Как известно, скалярное волновое уравнение

$$c^2 \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi(z, t)}{\partial t^2} = 0,$$

являющееся уравнением гиперболического типа, описывает математические модели различных реальных процессов в биологических, экологических и социальных системах (см., например, [3, 23–25]). В рассматриваемом одномерном случае пространственная координата (ось z) направлена вдоль направления распространения волны; c — некоторая положительная константа (скорость волны). Решение $\Psi(z, t)$ волнового уравнения известно и даётся формулой Даламбера [22].

Предлагаемая нами математическая модель, описывающая процессы волнового распространения и изменения некоторой информации в анализируемой распределённой системе, может быть представлена в одномерном виде как модификация

исходного волнового уравнения, которая позволяет учесть процессы изменения информации, распространяющейся в системе, в результате взаимодействия как между членами данного ИЕ языкового сообщества, так и между членами данного ИЕ языкового сообщества и членами других (например, соседних) не ИЕ языковых сообществ [1, 2]. Заметим, что в общем случае процесс волнового распространения информации может сопровождаться процессами диффузии информации в окрестности ареалов, куда доходят волны лингвистической информации. Напомним, что по определению *информация* — сведения об объектах и явлениях окружающей среды (живой и неживой природы), а также об их параметрах, свойствах и состояниях. В данном случае интересующие нас сведения о тех или иных информационных волновых процессах в рассматриваемой системе могут быть получены с помощью функции Ψ . На данном этапе исследования из всех возможных характеристик волнового процесса нас интересуют в первую очередь две: амплитуда волны Ψ и интенсивность волны $|\Psi|^2$. Более того, полученное в итоге решение, как среднее по ансамблю статистически идентичных лингвистических систем (из данного языкового сообщества), описывает по сути интересующую нас информацию I (скалярная функция), которая определяется с помощью величины $|\Psi|^2$. Для удобства решения все величины могут быть приведены к безразмерному виду с использованием характерных параметров системы: размера L_c (критический размер области, занятый сообществом, ниже которого начинается его вымирание), частоты $f_c = 1/T_c$ (в качестве T_c может быть взято, например, время разделения 2-х языков, т. е. 500 лет) и времени T_c . Для модельных расчётов можно положить начальное значение $|\Psi_0|^2 = 1$ либо использовать полученные в первой модели [22] значения I как некоторые начальные значения.

Математическая модель процесса волнового распространения и изменения информации в рассматриваемой системе описывается следующей системой интегродифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^2 a_n}{\partial z^2} - \dot{\beta}_n \frac{\partial a_n}{\partial z} + \sum_n a_m B_{mn}(z) + \int q(\rho, z) D_n(\rho, z) d\rho = 0, \quad (1)$$

где a и q — некоторые коэффициенты (собственные значения); $\dot{\beta}_n$ — комплексный волновой параметр системы; B_{mn} , D_n — некоторые функции, определяемые с помощью собственных (базисных) скалярных функций системы.

При выводе (1) предполагалось, что рассматриваемая система имеет определённые ограничения в пространстве, оказывающие влияние на рассматриваемый волновой процесс, а именно полагалось, что информационный поток распространяется в ограниченном по ширине канале. Применительно к некоторым экологическим и социальным системам подобные волновые и квазиволноводные явления были достаточно подробно рассмотрены нами ранее.

Приближённое искомое решение ищется с помощью спектрального метода в следующем виде:

$$\Psi(X, t) = \sum_n a_n(\rho, t) \Psi_n(X_n, t) + \int q(\rho, t) \Psi_p(X_p, t) d\rho, \quad (2)$$

где первое слагаемое в правой части (2) определяет величину «информации» в распределённой системе, обусловленную контактами «незнающих» со «знающими» (сумма по дискретному набору значений информации у её $N < +\infty$ носителей); второе информационное слагаемое определяется как интеграл (т. е. в общем случае это может быть некоторый континуум, включающий только «незнающих»); $\rho \geq 0$.

Коэффициенты a и q могут рассматриваться как некоторые эффективные амплитуды (весовые коэффициенты) в соответствующих (дискретном и интегральном)

разложениях. Например, в случае соперничества в рассматриваемом лингвистическом сообществе формирующих его этносов коэффициент $q \geq 0$ может характеризовать утрату «пассионарной» энергии [25]. В самом простом случае коэффициент q можно задать в виде матрицы, элементами которой являются действительные положительные числа. В общем случае коэффициенты a_n и q_i могут меняться как во времени, так и в зависимости от места (ландшафта) действия, описываемого с помощью множества X . Учитывая положительную определённость информации $I \geq 0$ [26], мы, естественно, определяем информацию следующим образом: $I \propto |\Psi|^2$, поскольку в общем случае Ψ — волновая функция, которая по определению является комплекснозначной величиной; в частном случае это может быть действительная функция U , характеризующая некоторое возмущение (волну) в рассматриваемой системе. Заметим, что наш теоретический подход в некоторой степени аналогичен подходу, использованному, в частности, в работах [23, 25, 27] при построении математических моделей динамики полей различной природы.

Ниже на рис. 1 приведены два типичных графика, характеризующие некоторые стационарные распределения информации (среднее по ансамблю статистически идентичных лингвистических систем), получающиеся в рамках данной комплексной нелинейной модели распространения лингвистической информации в данной системе. Здесь [21] проявляется явление самоорганизации, которое в общем случае не следует сводить только к установлению пространственного порядка в рассматриваемой открытой распределённой системе.

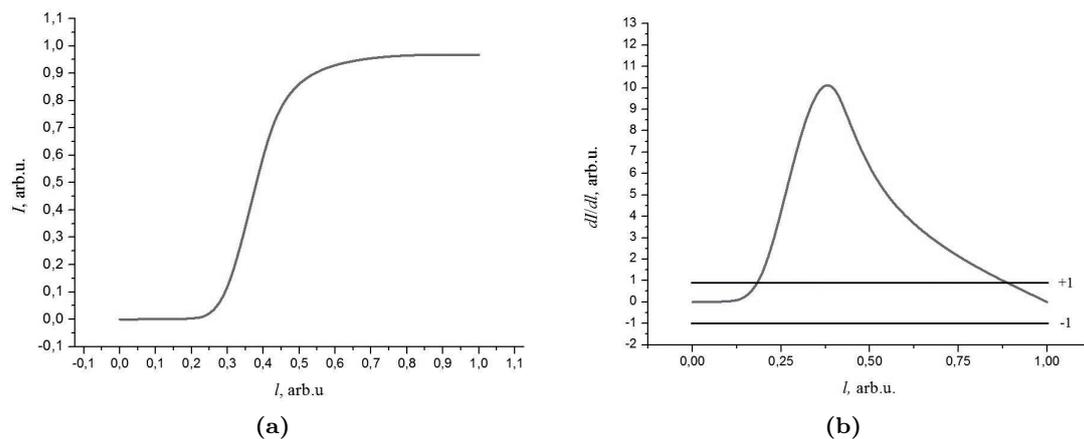


Рис. 1. (а) — график зависимости функции $I(X)$ от нормированной величины l ; (б) — график первой производной зависимости, приведённой слева

Используя методы теории катастроф [3, 4], можно пояснить характер поведения рассматриваемой открытой лингвистической системы в зависимости, например, от параметра системы l (нормированная длина участка, на котором распространяется исходная информация). С этой целью исследуем график первой производной данной зависимости. Эту функцию по аналогии с теорией катастроф можно рассматривать как некоторую потенциальную функцию диссипативной системы, имеющую минимумы (локальные и глобальные). Для определения интервала значений функции, где модуль первой производной не превышает 1, проводятся горизонтальные линии $+1$ и -1 . В этом интервале соблюдается условие устойчивости особой точки (точек), где $|dI/dl| \leq 1$.

Полученный на рис. 1 справа график первой производной соответствует известному случаю бифуркации состояния равновесия («частица» в потенциальной яме с

барьером или полочкой). Здесь возможны два состояния равновесия системы: при $l < 0,25$ и при $l > 0,75$, а между ними есть высокий потенциальный барьер. Здесь можно применить понятие фазового перехода, при котором происходит качественное изменение системы. Например, если система начинает движение из любой точки участка $0 < l < 0,35$, то итерации I_n сходятся к $I^* = 0$ — устойчивая неподвижная точка. Аналогично, если система начинает движение из любой точки участка $0,35 < l < 0,5$, то интегрированные значения $I_n \rightarrow \text{const}$, т. е. динамический режим становится стационарным или имеет период, равный единице: возникает цикл S^1 . Проведённые расчёты показали, что при вариации параметров в системе возможны также и другие циклы типа S^{2^p} .

Из рис. 1 видно, что для этой модели наиболее характерной чертой является известный в математической лингвистике логистический характер поведения моделируемой динамической системы [2, 5–8]. Полученные результаты позволяют в частности высказать предположение, что около 3500–4000 лет назад в рассматриваемом модельном ИЕ языковом сообществе могли возникнуть 2 основных лингвистических популяции, характеризующиеся сейчас как деление индоевропейских языков на так называемые языковые ареалы «сатем-кентум» [6, 8]. Лингвисты предполагают, что такое деление могло возникнуть около 2000–2500 гг. до н.э. Действительно, если две лингвистических популяции стартуют в окрестности точки экстремума $l = 0,37$ одна слева, а другая справа от неё, то они полностью расходятся примерно за 8–10 суммарных итераций (количество поколений в ансамбле лингвистических систем), что соответствует примерно 2000 г. до н.э. Однако заметим, что возможны и другие изоглоссы, которые делят на две подгруппы индоевропейские языки иначе, чем «сатем-кентум» [8], что, очевидно, представляет интерес при дальнейшем исследовании.

Заметим, что в данной модели мы используем в качестве «встроенного» внутреннего временного масштаба (с шагом в 500 лет) последовательность итераций, при которых происходит последовательное увеличение площади, занимаемой развивающимся сообществом. При этом предполагаем, что каждая итерация даёт последовательное увеличение языкового разнообразия в сообществе, т. е. рост числа языков является также следствием роста площади, на которую распространяется исходное сообщество. Как следствие, можно также определить временную «длину» лингвистической «линейки», вдоль которой развивается динамика динамической распределённой системы.

В волновой модели для ряда полученных графиков (характерных S-кривых), подобных графику слева на рис. 1, величина «лингвистической информации», после перехода динамической системой критической точки $l = 0,37$, может достигать максимума примерно за 4–8 поколений в случае цикла S^2 , и за примерно 8–48 итераций в случае цикла S^1 , т. е. в среднем чуть больше, чем в первой модели [22]. Скорее всего, число 48 определяет возможное максимальное время (~ 24000 лет) развития (или существования) рассматриваемой языковой «семьи» в рамках данной теоретической модели. Подчеркнём, что в дальнейшем планируется уточнение сделанных при исследовании предположений, а также выбранных параметров, в том числе с учётом новых лингвистических и генетических данных.

Приведём ещё одну полезную оценку для возможного времени возникновения данного сообщества. С этой целью воспользуемся методикой определения времени диффузии T_{dif} системы в минимум по величине кривизны (d^2I/dl^2) потенциальной функции системы в точках максимума и минимума [4]. В результате находим нижнюю оценку для времени диффузии сообщества: $T_{\text{dif}} \approx 2600 \div 4900$ лет. Такой большой разброс определяется в первую очередь погрешностью определения критического размера L_c области, занятого лингвистической популяцией, ниже которого начинается её вымирание, поскольку имеющиеся исторические и археологические данные не позволяют определить эту величину абсолютно точно (если это вообще возможно).

В этой связи полезно напомнить, что с формальной точки зрения можно вести отсчёт времени существования языков от момента появления речевого аппарата у “*Homo sapiens*” около 100 000 лет назад (по данным археологии) [9]. Однако предполагается, что «язык в его современном виде мог возникнуть на земле около 40 000 лет назад» [9]. Однако там же в [9] отмечено, что «на самом деле язык вполне мог возникнуть одновременно с появлением *Homo sapiens* более 100 000 лет назад» [9]. С этой точки зрения наша временная оценка в 24000 лет уже не выглядит чрезмерно завышенной, но тогда остаётся вопрос о типе языковой семьи. Скорее всего, в то время это могло быть сообщество по крайней мере трёх находящихся в контакте языковых семей: праиндоевропейской, прауральской (возможно прауральско-алтайской) и пракавказской.

В заключение посмотрим, возможно, ли что-то сказать о гипотетическом ПИЕ алфавите, а именно — о числе возможных «символов/знаков» (или «букв») алфавита праиндоевропейцев на основании полученных нами данных.

Получим оценку исходя из данных, полученных для волновой модели. С этой целью используем следующую формулу хорошо известную в теории информации [28]:

$$I_0 = (2F_m T + 1) \log_2 \sqrt{(P_S + P_N)/P_N}, \quad (3)$$

где F_m — (максимальная) частота, с которой модулируется передаваемое сообщение, например, речевое; T — длительность сообщения; число различных символов алфавита \mathfrak{S} при средних мощностях сигнала P_S (величина некоторой передаваемой в сообществе лингвистической информации I_0) и шума P_N (величина некоторых «помех» передаваемой в сообществе лингвистической информации) принято равным величине: $\mathfrak{S} = \sqrt{(P_S + P_N)/P_N}$. Величина P_S/P_N в (3) — отношение сигнала к шуму.

Для ненормированной зависимости $I(X)$ на графике слева на рис. 1 находим: $I_{0,\max} = 1493$ бита (участок кривой близкий к насыщению справа). В средней части кривой, сразу после перехода динамической системой критической точки $l = 0,37$ вправо, получаем искомую оценку: $I_0 \approx I_{0,\max}/2 = 747$ бит, т. е. несколько больше, чем аналогичная величина (примерно 523 бита), полученная в первой модели в аналогичной точке (однако в пределах ансамбля есть реализации, где эти отличия минимальны). При оценке величины I_0 использованы: табличные расчётные данные, величина $P_N = 1$ (погрешность вычисления данных завышена с учётом возможных реальных «помех»), частоту основного тона (у разных людей — мужчин, женщин, детей — находится примерно в диапазоне 50–450 Гц) взяли небольшой $F_m = 75$ Гц (или s^{-1}), а $T = 3$ с. В результате получили: $I_0 = (2 \cdot 75 \cdot 3 + 1) \log_2 \sqrt{(490 + 5)/5} \approx 1493$ бита.

Возьмём снова данные с рис. 1 для величины $I(X)$ и оценим возможное число символов алфавита \mathfrak{S} . При варьировании уровня сигнала и фиксированном уровне шума мы можем получить ряд значений для $\mathfrak{S}_a = \sqrt{(P_{S_a} + P_N)/P_N}$. Рассмотрим для примера диапазон изменения уровня сигнала P_{S_a} от 1 до 200 при $P_{N_1} = 0,01$. Возьмём ряд значений P_{S_n} из данного диапазона и найдём возможное число знаков в алфавите \mathfrak{S} : $P_{S_1} = 1$, $\mathfrak{S}_{S_1} \approx 10$; $P_{S_{10}} = 10$, $\mathfrak{S}_{S_{10}} \approx 32$; $P_{S_{20}} = 20$, $\mathfrak{S}_{S_{20}} \approx 45$. Для сравнения приведём аналогичные значения при более реальной величине $P_{N_2} = 0,1$: $P_{S_1} = 1$, $\mathfrak{S}_{S_1} \approx 3$; $P_{S_{10}} = 10$, $\mathfrak{S}_{S_{10}} \approx 10$; $P_{S_{30}} = 30$, $\mathfrak{S}_{S_{30}} \approx 17$; $P_{S_{50}} = 50$, $\mathfrak{S}_{S_{50}} \approx 22$; $P_{S_{80}} = 80$, $\mathfrak{S}_{S_{80}} \approx 28$; $P_{S_{100}} = 100$, $\mathfrak{S}_{S_{100}} \approx 32$.

Мы можем оценить некоторую минимальную величину «помех» при передаче лингвистической информации в данном модельном сообществе. Получаем, что уровень $P_{N,\min}$ составляет в данном случае примерно $1/500 = 0,002$ от заданного уровня «сигнала» и не может быть ниже этой величины (хотя в численных расчётах в отсутствие «помех» эта величина, конечно, может быть ниже, поскольку ограничивается в основном точностью численных расчётов). Как видно из приведённых примеров,

в первом случае P_{S_a} удовлетворяет этому ограничению ($P_{S_a} \geq P_{N,\min}$) только при уровне $P_{S_a} < 20$, начиная с которого $P_{N_1}/P_{S_a} \geq 0,002$. А во втором случае — при уровне $P_{S_a} \leq 50$. При низком уровне «помехи» эти диапазоны будут немного шире.

Исходя из полученных результатов приходим к выводу, что диапазон возможных значений для символов алфавита ограничен следующими значениями: в первом случае это $\mathfrak{Z}_n \approx 10 \div 32$, а во втором — $\mathfrak{Z}_n \approx 3 \div 22$. Как следствие, получаем, что \mathfrak{Z}_n ограничено диапазоном значений: $10 \div 22$. В случае же объединения двух множеств получим более широкий диапазон: $\mathfrak{Z}_n = 3 \div 32$. Полученные данные соответствуют данным нашей работы [21].

Для сравнения приведём известные в научной литературе данные по числу знаков в алфавитах некоторых языков.

Финикийское письмо является одной из первых алфавитных письменностей в мире. Появилась около 3500 лет назад. Финикийская письменность дала начало нескольким ветвям алфавитных письменностей, и на сегодняшний день практически все алфавитные письменности мира имеют корни именно в финикийском письме. Отличительные особенности: использовался консонантный принцип, то есть для записи слов использовались только согласные звуки, а значение гласных оставлялось на понимание читателя; текст записывался справа налево. Число знаков в алфавите: 22.

Греческий алфавит. Время создания алфавита: около VIII века до н.э. Число знаков в алфавите: 24 буквы. В доклассическую эпоху в некоторых диалектах греческого применялись ещё 6 букв. Происхождение: из финикийского алфавита. Греческий алфавит развился в следующие виды письменности: готское письмо, глаголица, кириллица, коптское письмо, армянское письмо, этрусский алфавит, латинский алфавит.

Глаголица — одна из первых славянских азбук. Языки: старославянский, церковнославянский, ранние славянские языки. Тип письма: консонантно-вокалическое письмо. Время создания алфавита: примерно IX век н.э. Направление письма: слева направо. Число знаков в алфавите: 41. Происхождение: греческий (финикийский).

Кириллица — кириллический (или кирилловский) алфавит; один из двух (наряду с глаголицей) древних алфавитов для старославянского языка. Тип письма: консонантно-вокалическое письмо. Языки: старославянский, церковнославянский, русский, сербский, болгарский, македонский, украинский, молдавский и многие другие. Время создания алфавита: примерно IX век; в современном виде с конца XVI века. Состав первоначальной кириллической азбуки неизвестен; «классическая» старославянская кириллица из 43 букв.

Санскрит — древний литературный язык Индии со сложной синтетической грамматикой. Само слово «санскрит» означает «обработанный, совершенный». Возраст ранних памятников доходит до 3500 лет. Классификация: индоевропейская семья, индоиранская ветвь, индоарийская группа. Единой системы письменности для санскрита не существует. Это объясняется тем, что литературные произведения передавались в основном устно. С примерно XIX века используется письменность деванагари и др. Классический санскрит насчитывает около 36 фонем¹. Если учитывать аллофоны² (а система письма их учитывает), то общее количество звуков в языке увеличивается до 48.

С учётом данных по древнему санскриту (примерно 3700 лет назад) из книги [29] можно оценить минимальное возможное число «знаков» в алфавите прасанскрита величиной: $\mathfrak{Z} = 9$.

¹Фонема (от др.-греч. *φώνημα* — «звук») — минимальная смысловозначительная единица в языке. Фонема не имеет самостоятельного лексического или грамматического значения, она служит для различения и отождествления значимых единиц языка, таких как морфемы и слова. Морфема — наименьшая единица языка, имеющая некоторый смысл.

²Аллофон (от греч. *ἄλλος* — другой, и *φωνή* — звук) — реализация фонемы, её вариант, обусловленный конкретным фонетическим окружением. В отличие от фонемы аллофон является не абстрактным понятием, а конкретным речевым звуком.

Как видно из приведённых данных для этих языков, они в основном удовлетворяют заданному диапазону: $\mathfrak{S}_n = 3 \div 32$ символов.

Полученные результаты, по сути, позволяют сделать вывод, что предложенная нами математическая волновая модель распространения и изменения лингвистической информации в сообществе достаточно адекватно описывает исследуемое явление. Вместе с тем проведённое исследование показало, что необходима дальнейшая тонкая настройка моделей, в том числе с учётом априорной лингвистической и другой информации об исследуемых языковых сообществах.

Итак, в настоящей работе приведены результаты компьютерного моделирования, которые показывают в частности хорошее соответствие двум основным гипотезам о формировании праиндоевропейцев: анатолийской и курганной. Кроме того, есть хорошая корреляция наших данных с выводами генетиков о возможном времени появления (примерно 14000–20000 лет назад) гаплогруппы Y-DNA R1a (считается, что носителями ПИЕ-языков были в первую очередь мужчины с данной гаплогруппой) [30, 31]. При этом совокупность данных, полученных при исследовании обеих моделей, говорит о предпочтительности курганной гипотезы. Данный вывод хорошо согласуется с выводами большинства исследователей во всём мире: лингвистов, генетиков, историков и археологов.

4. Заключение

В данной работе изложены теоретические принципы нового метода исследования лингвистических сообществ (и процессов распространения в них лингвистической информации) как динамических диссипативных систем. Этот подход может стать особенно перспективным в первую очередь для качественного анализа поведения подобных лингвистических систем. Результаты компьютерного моделирования показывают, что курганная гипотеза формирования праиндоевропейцев лучше соответствует полученным временным оценкам.

Полученные в статье результаты позволяют также высказать предположение, что около 3500–4000 лет назад в рассматриваемом модельном ИЕ языковом сообществе могли возникнуть две основные лингвистические популяции, характеризующие сейчас как деление индоевропейских языков на так называемые языковые ареалы «сатем-кентум». Хотя возможны и другие изоглоссы, которые делят на две подгруппы индоевропейские языки иначе, чем «сатем-кентум».

Литература

1. Егоров А. А. Некоторые закономерности распространения информации в обществе // Сборник тезисов докладов Научно-технической конференции «Сети связи и сетевые технологии», 24–26 июня 1997, Суздаль. — М.: ЦНИИС, 1997. — С. 46–49.
2. Егоров А. А., Егорова М. А. О моделях распространения лингвистической информации в языковом сообществе // Тезисы докладов XXI-й Всероссийской конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики». 5–11 сентября 2016 г., Новороссийск, Абрау-Дюрсо, Россия. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016. — С. 82–83.
3. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. — 1988.
4. *Gilmore R.* Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. — New York: Wiley, 1981.
5. Ancestry-Constrained Phylogenetic Analysis Supports the Indo-European Steppe Hypothesis / W. Chang, C. Cathcart, D. Hall, A. Garrett // *Language*. — 2015. — Vol. 91, No 1. — Pp. 194–244.
6. *Anthony D. W.* The Horse, the Wheel, and Language: How Bronze-Age Riders from the Eurasian Steppes Shaped the Modern World. — Princeton: Princeton University Press, 2007.

7. *Kornai A.* *Mathematical Linguistics.* — London: Springer, 2008.
8. *Бурлак С. А., Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание. — М.: Издательский центр «Академия», 2005.
9. Атлас языков мира. Происхождение и развитие языков во всем мире. — 1998.
10. *Яхонтов С. Е.* Теоретические основы классификации языков мира. — М., 1980. — С. 148–157.
11. *Ethnologue: Languages of the World.* — www.ethnologue.com.
12. *Старостин Г. С. и др.* К истокам языкового разнообразия. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015.
13. *Gray R. D., Atkinson Q. D.* Language-Tree Divergence Times Support the Anatolian Theory of Indo-European Origin // *Nature.* — 2003. — Vol. 426. — Pp. 435–439.
14. *Pereltsvaig A., Lewis M. W.* *The Indo-European Controversy: Facts and Fallacies in Historical Linguistics.* — Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
15. Развитие модели распространения информации в социуме / А. П. Михайлов, А. П. Петров, Н. А. Маревцева, И. В. Третьякова // *Математическое моделирование.* — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 65–74.
16. *Labov W.* Transmission and Diffusion // *Language.* — 2007. — Vol. 83. — Pp. 344–387.
17. *Heggarty P., Maguire W., McMahon A.* Splits or waves? Trees or webs? How Divergence Measures and Network Analysis Can Unravel Language Histories // *Phil. Trans. R. Soc. B.* — 2010. — Vol. 365. — Pp. 3829–3843.
18. Massive Migration from the Steppe is a Source for Indo-European Languages in Europe / W. Haak, I. Lazaridis, N. Patterson et al. // *Nature.* — 2015. — Vol. 522. — Pp. 207–211.
19. Ancient Human Genomes Suggest Three Ancestral Populations for Present-Day Europeans / I. Lazaridis, N. Patterson, A. Mittnik et al. // *Nature.* — 2014. — Vol. 513. — Pp. 409–428.
20. Аркаим – Синташта: древнее наследие Южного Урала. Сборник научных трудов. — Челябинск: изд. Челябинского гос. ун-та, 2010.
21. *Егоров А. А., Егорова М. А.* Динамическая нелинейная модель распространения и изменения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе // *Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика».* — 2016. — С. 37–48.
22. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
23. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — С. 301.
24. *Мари Д.* Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. — М.: Мир, 1983.
25. Математические модели социальных систем / А. К. Гуц, В. В. Коробицын, А. А. Лаптев, Л. А. Паутова, Ю. В. Фролова. — Омск: ОГУ, 2000.
26. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. — М.: Наука, 1973.
27. *Mathematical Modeling* / Ed. by J. G. Andrews, R. R. McLone. — London: Butterworths, 1976.
28. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 1. — М.: Радио, 1966.
29. *Vorsboom W.* Alphabet or Abracadabra? Reverse Engineering the Western Alphabet. — Victoria, BC, Canada: FriesenPress, 2015.
30. Separating the Post-Glacial Coancestry of European and Asian Y Chromosomes within Haplogroup R1a / P. A. Underhill, N. M. Myres, S. Rootsi, M. Metspalu, M. A. Zhivotovsky, R. J. King et al. // *European Journal of Human Genetics.* — 2010. — Vol. 18. — Pp. 479–484.
31. *Klyosov A. A., Rozhanskii I. L.* Haplogroup R1a as the Proto Indo-Europeans and the Legendary Aryans as Witnessed by the DNA of Their Current Descendants // *Advances in Anthropology.* — 2012. — Vol. 2, No 1. — Pp. 1–13.

UDC 517+519.2:80

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-69-80

The Wave Model of the Propagation and Changes of Linguistic Information in the Indo-European Model Language Community

A. A. Egorov*[†], M. A. Egorova[‡]

* *General Physics Institute, Russian Academy of Sciences
38, Vavilov str., Moscow, Russia, 119991*

[†] *Educational and Scientific Center of the RUDN' VOIR Council*

[‡] *Foreign Languages Department of Humanitarian and Social Sciences Faculty
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

Paper considers the wave mathematical model describing the distribution and change of linguistic information in Indo-European model linguistic community. Brief information about the Anatolian and Kurgan hypothesis of formation of Proto-Indo-Europeans (PIE) is given. The mathematical model of wave propagation and changing of information is described by system of integral-differential equations. Results of the preliminary theoretical analysis and computer modeling are given. In particular, an estimate of the maximum possible time (~ 24000 years) of development/emergence of considered Indo-European “family” is obtained in the framework of this model. Results of computer modeling show, that from two main hypotheses of formation of the PIE — Anatolian and Kurgan, the latter better matches obtained by us temporary estimates. Finally, data on a hypothetical PIE alphabet — namely, the number of possible “characters/symbols” (or “letters”) alphabet of PIE on the basis of our data were obtained. Based on the results, it was found that the range of possible values for alphabetic characters is limited to about values: $3 \div 32$. In addition, there is a good correlation of our data with the findings of geneticists on a possible time of occurrence (~ 14000 – 20000 years ago) of the haplogroup Y-DNA R1a (it is believed that PIE language speakers were primarily men with this haplogroup).

Key words and phrases: mathematical model, integral-differential equation, mathematical linguistics, Indo-European languages, Indo-European chronology, Indo-European dispersal, Anatolian and Kurgan hypothesis

References

1. A. A. Egorov, Some Patterns of Dissemination of Information in Society, in: Proc. of Conference “Communication Networks and Network technologies”, June, 24–26, 1997, Moscow, 1997, pp. 46–49, in Russian.
2. A. A. Egorov, M. A. Egorova, About Models of Dissemination of Linguistic Information in the Language Community, in: Proc. of XXI-th All-Russian Conference “Theoretical Foundations and Designing of Numerical Algorithms of Solution of Mathematical Physics Problems”, September 5–11, 2016, Novorossiysk, Russia, IAM of RAS, Moscow, 2016, pp. 82–83, in Russian.
3. E. of foreword A. Samarskii (Ed.), Computers and Nonlinear Phenomena: Information Technology and Modern Science, Science, Moscow, 1988, in Russian.
4. R. Gilmore, Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, Wiley, New York, 1981.
5. W. Chang, C. Cathcart, D. Hall, A. Garrett, Ancestry-Constrained Phylogenetic Analysis Supports the Indo-European Steppe Hypothesis, *Language* 91 (1) (2015) 194–244.
6. D. W. Anthony, The Horse, the Wheel, and Language: How Bronze-Age Riders from the Eurasian Steppes Shaped the Modern World, Princeton University Press, Princeton, 2007.
7. A. Kornai, Mathematical Linguistics, Springer, London, 2008.
8. S. A. Burlak, S. A. Starostin, Comparative and Historical Linguistics, Publishing center “Academy”, Moscow, 2005, in Russian.

9. Atlas of the World's Languages. The Origin and Development of Languages Worldwide, Leake press, Moscow, 1998.
10. S. E. Yahontov, Assessment of the Degree of Closeness of Related Languages, Moscow, 1980, Ch. Theoretical Bases of Classification of World Languages, pp. 148–157, in Russian.
11. Ethnologue: Languages of the World.
URL www.ethnologue.com
12. G. S. Starostin, et al., To the Source of Linguistic Diversity, Publishing House "Delo" RANHiGS, Moscow, 2015, in Russian.
13. R. D. Gray, Q. D. Atkinson, Language-Tree Divergence Times Support the Anatolian Theory of Indo-European Origin, *Nature* 426 (2003) 435–439.
14. A. Pereltsvaig, M. W. Lewis, The Indo-European Controversy: Facts and Fallacies in Historical Linguistics, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
15. A. P. Mikhailov, A. P. Petrov, N. A. Marevtseva, I. V. Tretyakova, Development of a Model of Information Dissemination in Society, *Mathmod.* 26 (3) (2014) 65–74, in Russian.
16. W. Labov, Transmission and Diffusion, *Language* 83 (2007) 344–387.
17. P. Heggarty, W. Maguire, A. McMahon, Splits or Waves? Trees or Webs? How Divergence Measures and Network Analysis Can Unravel Language Histories, *Phil. Trans. R. Soc. B.* 365 (2010) 3829–3843.
18. W. Haak, I. Lazaridis, N. Patterson, et al., Massive Migration from the Steppe is a Source for Indo-European Languages in Europe, *Nature* 522 (2015) 207–211.
19. I. Lazaridis, N. Patterson, A. Mittnik, et al., Ancient Human Genomes Suggest Three Ancestral Populations for Present-Day Europeans, *Nature* 513 (2014) 409–428.
20. Arkaim – Sintashta: the Ancient Heritage of the Southern Urals. Coll. of Scientific Works, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 2010, in Russian.
21. A. A. Egorov, M. A. Egorova, Dynamic Non-Linear Model of Distribution and Changes of Linguistic Information in the Indo-European Model Language Community, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (2016) 37–48 In Russian.
22. V. Y. Arsenin, *Methods of Mathematical Physics and Special Functions*, Science, Moscow, 1974, in Russian.
23. A. M. Nahushev, *Equations of Mathematical Biology*, Higher School, Moscow, 1995, in Russian.
24. J. Murray, *Non-Linear Differential Equations in Biology*, Mir, Moscow, 1983, in Russian.
25. A. K. Guts, V. V. Korobitsyn, A. A. Laptev, L. A. Pautova, J. V. Frolova, *Mathematical Models of Social Systems*, OSU, Omsk, 2000, in Russian.
26. A. M. Yaglom, I. M. Yaglom, *Probability and Information*, Science, Moscow, 1973, in Russian.
27. J. G. Andrews, R. R. McLone (Eds.), *Mathematical Modeling*, Butterworths, London, 1976.
28. I. S. Gonorovsky, *Radio Circuits and Signals. Part 1*, Radio, Moscow, 1966, in Russian.
29. W. Borsboom, *Alphabet or Abracadabra? Reverse Engineering the Western Alphabet*, FriesenPress, Victoria, BC, Canada, 2015.
30. P. A. Underhill, N. M. Myres, S. Rootsi, M. Metspalu, M. A. Zhivotovsky, R. J. King, et al., Separating the Post-Glacial Coancestry of European and Asian Y Chromosomes within Haplogroup R1a, *European Journal of Human Genetics* 18 (2010) 479–484.
31. A. A. Klyosov, I. L. Rozhanskii, Haplogroup R1a as the Proto Indo-Europeans and the Legendary Aryans as Witnessed by the DNA of Their Current Descendants, *Advances in Anthropology* 2 (1) (2012) 1–13.

УДК 537.8:514.762.37
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-81-90

Использование геометризации уравнений Максвелла при расчёте оптических приборов

Д. С. Кулябов*[†]

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

[†] *Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Развитие физики в XX-м веке было тесно связано с развитием математического аппарата. Общая теория относительности продемонстрировала силу геометрического подхода. К сожалению проникновение этого аппарата в другие области физики происходит достаточно медленно. Например, было несколько попыток внедрения геометрических методов в электродинамику, однако до последнего времени они оставались лишь теоретическими упражнениями.

Интерес к геометрическим методам в электродинамике вызван практической необходимостью. Представляется заманчивым следующий алгоритм конструирования электромагнитного прибора. Строятся предполагаемые траектории распространения электромагнитных волн. Затем по этим траекториям вычисляются параметры среды. Также представляет интерес и обратная задача.

В работе рассматривается методика расчёта оптических приборов на основе метода геометризации уравнений Максвелла. В основе метода лежит представление материальных уравнений Максвелла в виде эффективной геометрии пространства-времени. Таким образом мы получаем задачу, сходную с некой биметрической теорией гравитации, что позволяет применять хорошо разработанный аппарат дифференциальной геометрии. На основании этого мы можем как исследовать распространение электромагнитного поля по заданным параметрам среды, так и находить параметры среды по заданному закону распространения электромагнитного поля.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, материальные уравнения Максвелла, геометризация уравнений Максвелла, риманова геометрия, криволинейные координаты

1. Введение

Аппарат дифференциальной геометрии являлся основным языком физики XX-го века. Его базовые элементы развивались в рамках общей теории относительности. Возникает желание применить этот развитый и к другим областям физики, в частности к оптике.

Первые попытки применения методов дифференциальной геометрии в электродинамике следует отнести к публикациям И. Е. Тамма [1–3]. В 1960 году Е. Плебаньский предложил метод геометризации материальных уравнений электромагнитного поля [4–7], ставший классическим. Все последующие работы либо использовали его, либо пытались немного подправить, не меняя идеологии [8]. К сожалению, в статье Плебаньского [4] нет никакого вывода формул, а идеология вывода также не выражена явно. Кроме того, методика Плебаньского выглядит скорее как хитрый трюк. Автор постарался выполнить геометризацию уравнений Максвелла более формально.

Статья поступила в редакцию 1 декабря 2016 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.a03.21.0008).

2. Обозначения и соглашения

1. Будем использовать нотацию абстрактных индексов [9]. В данной нотации тензор как целостный объект обозначается просто индексом (например, x^i), компоненты обозначаются подчёркнутым индексом (например, $x^{\underline{i}}$).
2. Будем придерживаться следующих соглашений. Греческие индексы (α, β) будут относиться к четырёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{\alpha} = \underline{0}, \underline{3}$. Латинские индексы из середины алфавита (i, j, k) будут относиться к трёхмерному пространству и в компонентном виде будут иметь следующие значения: $\underline{i} = \underline{1}, \underline{3}$.
3. Запятой в индексе обозначается частная производная по соответствующей координате ($f_{,i} := \partial_i f$); точкой с запятой — ковариантная производная ($f_{;i} := \nabla_i f$).
4. Для записи уравнений электродинамики в работе используется система СГС симметричная [10].

3. Представления уравнений Максвелла

Будем использовать запись уравнений Максвелла в криволинейных координатах. Более подробное описание дано в статьях [11–15].

Уравнения Максвелла в 3-х мерной форме имеют вид:

$$\begin{cases} e^{ijk} \nabla_j E_k = -\frac{1}{c} \partial_t B^i, \\ \nabla_i D^i = 4\pi \rho, \\ e^{ijk} \nabla_j H_k = \frac{1}{c} \partial_t D^i + \frac{4\pi}{c} j^i, \\ \nabla_i B^i = 0. \end{cases} \quad (1)$$

где e^{ijk} — альтернирующий тензор.

Запишем уравнение Максвелла через тензоры электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ [16–18]:

$$\nabla_\alpha F_{\beta\gamma} + \nabla_\beta F_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma F_{\alpha\beta} = F_{[\alpha\beta;\gamma]} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = \frac{4\pi}{c} j^\beta, \quad (3)$$

где тензоры $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют следующие компоненты

$$F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ -E_2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ -E_3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad G^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} 0 & -D^1 & -D^2 & -D^3 \\ D^1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D^2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D^3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Здесь $E_{\underline{i}}, H_{\underline{i}}$ — компоненты векторов напряжённости электрического и магнитного полей соответственно; $D^{\underline{i}}, B^{\underline{i}}$ — компоненты векторов электрической и магнитной индукции соответственно.

Запишем уравнения (2) и (3) через дифференциальные формы в формализме расслоенных пространств. Будем рассматривать расслоение

$$Y \rightarrow X, \quad (5)$$

где $X = M^4$ — четырёхмерное пространство. При этом мы не делаем предположение о метрике данного пространства.

Зададим F (2-форма), G (бивектор) и j (вектор):

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} dx^{\underline{\alpha}} \wedge dx^{\underline{\beta}}, & F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} F_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} dx^{\underline{\alpha}} \wedge dx^{\underline{\beta}}, & F &\in \Lambda^2, \\ G &= \frac{1}{2} G^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \partial_{\underline{\alpha}} \wedge \partial_{\underline{\beta}}, & G^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} G^{\underline{\alpha}\underline{\beta}} \partial_{\underline{\alpha}} \wedge \partial_{\underline{\beta}}, & G &\in \Lambda_2, \\ j &= j^{\underline{\alpha}} \partial_{\underline{\alpha}} & j^{\alpha} &= j^{\underline{\alpha}} \partial_{\underline{\alpha}}, & j &\in \Lambda_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Тогда уравнения (2) и (3) примут вид:

$$dF = 0, \quad (7)$$

$$\delta G = \frac{4\pi}{c} j. \quad (8)$$

Здесь $\delta = \sharp^{-1} d \sharp$ — дивергенция, $\sharp : \Lambda_k \rightarrow \Lambda^{n-k}$ задаёт двойственность Пуанкаре.

При этом $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ имеют смысл кривизны в кокасательном (T^*X) и касательном (TX) расслоениях. Связь между этими величинами задаётся следующим образом:

$$G^{\alpha\beta} = \lambda(F_{\gamma\delta}). \quad (9)$$

Тогда уравнение (8) примет вид:

$$\delta \lambda = \frac{4\pi}{c} j. \quad (10)$$

В линейном случае соотношение (9) можно задать как

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}. \quad (11)$$

В этом случае уравнение (8) примет вид:

$$\delta \left(\frac{1}{2} \lambda F \right) = \frac{4\pi}{c} j. \quad (12)$$

Будем считать, что λ задаёт на X некоторую эффективную метрику.

4. Тензор проницаемостей

Будем считать, что отображение $\lambda : \Lambda^2 \rightarrow \Lambda_2$ линейное и локальное. Тогда его можно представить в следующем виде:

$$G^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \quad (13)$$

где $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор проницаемостей, содержащий информацию как об диэлектрической и магнитной проницаемостях, так и об электромагнитной связи [1, 3].

Из (13) видно, что $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет следующую симметрию:

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda^{[\alpha\beta][\gamma\delta]} \quad (14)$$

Для уточнения симметрии, тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ можно представить в следующем виде [19–22]:

$$\begin{aligned}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} + {}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}, \\ {}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}^{(1)}\lambda^{([\alpha\beta][\gamma\delta])}, \\ {}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}^{(2)}\lambda^{([\alpha\beta][\gamma\delta])}, \\ {}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} &= {}^{(3)}\lambda^{[\alpha\beta\gamma\delta]}.\end{aligned}\tag{15}$$

Очевидно, что $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 36 независимых компонент, ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 20 независимых компонент, ${}^{(2)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 15 независимых компонент, ${}^{(3)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 1 независимую компоненту.

Далее будем рассматривать только часть ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$. Запишем материальные уравнения:

$$\begin{aligned}D^i &= \varepsilon^{ij} E_j + {}^{(1)}\gamma_j^i B^j, \\ H_i &= (\mu^{-1})_{ij} B^j + {}^{(2)}\gamma_i^j E_j,\end{aligned}\tag{16}$$

где ε^{ij} и μ^{ij} — тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей, ${}^{(1)}\gamma_j^i$ и ${}^{(2)}\gamma_j^i$ — перекрёстные члены.

Учитывая структуру тензоров $F_{\alpha\beta}$ и $G^{\alpha\beta}$ (4), а также уравнения связи (16), запишем

$$\begin{aligned}\underline{F}_{0i} &= \underline{E}_i, \quad \underline{G}^{0i} = -\underline{D}^i, \\ \underline{G}^{ij} &= -\varepsilon^{ijk} \underline{H}_k, \quad \underline{F}_{ij} = -\varepsilon_{ijk} \underline{B}^k.\end{aligned}\tag{17}$$

Из (16) и (17) выпишем структуру тензора $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$\lambda^{0i0j} = \varepsilon^{ij}, \quad \lambda^{ijmn} = \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{lmn} (\mu^{-1})_{lk}.\tag{18}$$

5. Линейная локальная геометризация уравнений Максвелла

Плебанским была предложена простейшая геометризация уравнений Максвелла [4, 5, 23, 24]. Несмотря на некоторые недостатки, этот метод нашёл применение, например, в трансформационной оптике, где соотношение $\varepsilon_{ij} = \mu_{ij}$ является желательным [7, 25, 26].

Основная идея геометризации по Плебанскому заключается в следующем:

1. Записать уравнения Максвелла в среде в пространстве Минковского.
2. Записать вакуумные уравнения Максвелла в эффективном римановом пространстве.
3. Приравнять соответствующие члены уравнений.
4. В результате мы получим выражение диэлектрической и магнитной проницаемостей через геометрические объекты.

Однако данный подход к геометризации выглядит скорее как трюк. Автор постарался выполнить данные вычисления более формально.

5.1. Вспомогательные соотношения для метрического тензора

Нам понадобятся простые соотношения для метрического тензора.

$$g_{\alpha\delta} g^{\delta\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}\tag{19}$$

Выражение (19) приводит к следующим частным соотношениям:

$$g_{0\delta}g^{\delta i} = g_{00}g^{0i} + g_{0k}g^{ki} = \delta_0^i = 0, \quad (20)$$

$$g_{i\delta}g^{\delta j} = g_{i0}g^{0j} + g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j. \quad (21)$$

Соотношение (20) перепишем в виде

$$g^{0i} = -\frac{1}{g_{00}}g_{0k}g^{ki}. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (21), получаем:

$$\left(g_{ik} - \frac{1}{g_{00}}g_{0i}g_{0k}\right)g^{kj} = \delta_i^j. \quad (23)$$

Это соотношение будет использовано позднее для упрощения записи итоговых уравнений.

5.2. Уравнения связи для движущихся сред

Минковским были выведены уравнения связи для изотропных движущихся сред [16, 27] (уравнения Минковского для движущихся сред). Пусть u^α — 4-скорость среды. Считая диэлектрическую и магнитную проницаемости ε и μ скалярами, можно записать

$$G^{\alpha\beta}u_\beta = \varepsilon F^{\alpha\beta}u_\beta, \quad *F^{\alpha\beta}u_\beta = \mu *G^{\alpha\beta}u_\beta. \quad (24)$$

В трёхмерном виде уравнения (24) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon \left(E^i + \left[\frac{u_j}{c}, B_k \right]^i \right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i = \varepsilon E^i + (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i, \\ B^i &= \mu \left(H^i - \left[\frac{u_j}{c}, D_k \right]^i \right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i = \mu H^i - (\varepsilon\mu - 1) \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i. \end{aligned} \quad (25)$$

Тамм расширил уравнения (25) для анизотропного случая [1, 3], а именно, считая, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид

$$\varepsilon_j^i = \text{diag}(\varepsilon_1^1, \varepsilon_2^2, \varepsilon_3^3), \quad \mu_j^i = \text{diag}(\mu_1^1, \mu_2^2, \mu_3^3), \quad (26)$$

и вектор скорости u^i системы отсчёта — параллельным одной из главных осей анизотропии. Тогда уравнения Минковского для движущихся сред приобретут следующий вид:

$$D^i = \varepsilon_l^i \left(E^l + \left[\frac{u_j}{c}, B_k \right]^l \right) - \left[\frac{u_j}{c}, H_k \right]^i, \quad B^i = \mu_l^i \left(H^l - \left[\frac{u_j}{c}, D_k \right]^l \right) + \left[\frac{u_j}{c}, E_k \right]^i. \quad (27)$$

5.3. Общая геометризация

Проведём геометризацию уравнений Максвелла. Введём эффективную метрику в X $g_{\alpha\beta}$. Тогда запишем лагранжиан электромагнитного поля в виде лагранжиана Янга–Миллса:

$$L = -\frac{1}{16\pi c}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\beta}F_{\gamma\delta} - \frac{1}{c^2}A_\alpha j^\alpha.$$

Построим тензор $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ следующим образом:

$$\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta} = 2\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta} = \sqrt{-g}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) + \sqrt{-g}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}).$$

Тогда уравнение (13) примет следующий вид:

$$G^{\alpha\beta} = \sqrt{-g}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma})F_{\gamma\delta}.$$

Для наглядности распишем по компонентам:

$$\begin{aligned} G^{0i} &= \sqrt{-g}(g^{00}g^{ij} - g^{0i}g^{0j})F_{0j} + \sqrt{-g}(g^{0j}g^{ik} - g^{0k}g^{ij})F_{jk}, \\ G^{ij} &= \sqrt{-g}(g^{i0}g^{jk} - g^{0j}g^{ik})F_{0k} + \sqrt{-g}(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk})F_{kl}. \end{aligned}$$

На основании (17) получим:

$$\begin{aligned} D^i &= -\sqrt{-g}g^{00}\left(g^{ij} - \frac{1}{g^{00}}g^{0i}g^{0j}\right)E_j - \sqrt{-g}(g^{0j}g^{ik} - g^{0k}g^{ij})\varepsilon_{jkl}B^l, \\ -\varepsilon^{ijk}H_k &= \sqrt{-g}(g^{i0}g^{jk} - g^{0j}g^{ik})E_k - \sqrt{-g}(g^{ik}g^{jl} - g^{il}g^{jk})\varepsilon_{klm}B^m. \end{aligned}$$

На основании (17) с учётом соотношения (23) получим:

$$D^i = -\sqrt{-g}g^{00}g^{ij}E_j + \sqrt{-g}\varepsilon_{klj}g^{0k}g^{il}B^j, \quad (28)$$

$$H_i = \sqrt{-g}\varepsilon_{mni}\varepsilon_{klj}g^{nk}g^{ml}B^j + \sqrt{-g}\varepsilon^{klj}g_{0k}g_{il}E_j. \quad (29)$$

Из (28) можно формально выписать выражение для диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{ij} = -\sqrt{-g}g^{00}g^{ij}. \quad (30)$$

При этом геометрический смысл второго члена в (28) нуждается в дальнейшем уточнении.

Из (29) можно формально выписать выражение для магнитной проницаемости:

$$(\mu^{-1})_{ij} = \sqrt{-g}\varepsilon_{mni}\varepsilon_{klj}g^{nk}g^{ml}. \quad (31)$$

Таким образом, геометризованные уравнения связи координатах имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon^{ij}E_j + {}^{(1)}\gamma_j^i B^j, \quad H_i = (\mu^{-1})_{ij}B^j + {}^{(2)}\gamma_i^j E_j, \\ \varepsilon^{ij} &= -\sqrt{-g}g^{00}g^{ij}, \\ (\mu^{-1})_{ij} &= \sqrt{-g}\varepsilon_{mni}\varepsilon_{klj}g^{nk}g^{ml}, \quad {}^{(1)}\gamma_j^i = {}^{(2)}\gamma_j^i = \sqrt{-g}\varepsilon_{klj}g^{0k}g^{il}. \end{aligned} \quad (32)$$

Леонгард предложил интерпретировать перекрёстный член в уравнениях (32) как скорость движения геометризованной системы отсчёта [6]. Действительно, на основании (25) уравнения (32) можно переписать в виде:

$$D^i = \varepsilon^{ij}E_j + \left[\frac{u_j}{c}, B_k\right]^i, \quad H_i = (\mu^{-1})_{ij}B^j + \left[\frac{u^j}{c}, E^k\right]_i, \quad (33)$$

где u^i — трёхмерная скорость движения системы отсчёта.

6. Заключение

Автор предложил формальный подход к проблеме геометризации уравнений электромагнитного поля. В качестве иллюстрации представлен метод локальной линейной геометризации уравнений Максвелла. Следует отметить, что данный метод нельзя считать полностью удовлетворительным. Действительно, полный тензор проницаемостей $\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$ имеет 36 независимых компонент. И даже его основная часть, тензор ${}^{(1)}\lambda^{\alpha\beta\gamma\delta}$, имеет 20 независимых компонент. В то время как риманов метрический тензор имеет только 10 независимых компонент.

Также следует сказать, что предложенный метод отличается по идеологии и результатам от метода Плебаньского.

Литература

1. *Тамм И. Е.* Электродинамика анизотропной среды в специальной теории относительности // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1924. — Т. 56, № 2-3. — С. 248–262.
2. *Тамм И. Е.* Кристаллооптика теории относительности в связи с геометрией биквадратичной формы // Журнал Русского физико-химического общества. Часть физическая. — 1925. — Т. 57, № 3-4. — С. 209–240.
3. *Tamm I. E., Mandelstam L. I.* Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitätstheorie // *Mathematische Annalen*. — 1925. — Bd. 95, No. 1. — Ss. 154–160.
4. *Plebanski J.* Electromagnetic Waves in Gravitational Fields // *Physical Review*. — 1960. — Vol. 118, No 5. — Pp. 1396–1408.
5. *Felice F.* On the Gravitational Field Acting as an Optical Medium // *General Relativity and Gravitation*. — 1971. — Vol. 2, No 4. — Pp. 347–357.
6. *Leonhardt U., Philbin T. G., Haugh N.* General Relativity in Electrical Engineering. — 2008. — Pp. 1–19.
7. *Leonhardt U., Philbin T. G.* Transformation optics and the geometry of light // *Progress in Optics*. — 2009. — Vol. 53. — Pp. 69–152.
8. *Thompson R. T., Cummer S. A., Fraundhiener J.* A Completely Covariant Approach to Transformation Optics // *Journal of Optics*. — 2011. — Vol. 13, No 2. — P. 024008.
9. *Пенроуз Р., Рундлер В.* Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — М.: Мир, 1987. — Т. 1.
10. *Сивухин Д. В.* О Международной системе физических величин // *Успехи физических наук*. — 1979. — Т. 129, № 10. — С. 335–338.
11. *Kulyabov D. S., Korolkova A. V., Korolkov V. I.* Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System // *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"*. — 2012. — No 1. — Pp. 96–106.
12. *Korol'kova A. V., Kulyabov D. S., Sevast'yanov L. A.* Tensor Computations in Computer Algebra Systems // *Programming and Computer Software*. — 2013. — Vol. 39, No 3. — Pp. 135–142.
13. *Kulyabov D. S.* Geometrization of Electromagnetic Waves // *Mathematical Modeling and Computational Physics*. — Dubna: JINR, 2013. — P. 120.
14. *Кулябов Д. С., Королькова А. В.* Уравнения Максвелла в произвольной системе координат // *Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика*. — 2013. — № 1 (28). — С. 29–44.
15. *Кулябов Д. С., Немчинова Н. А.* Уравнения Максвелла в криволинейных координатах // *Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»*. — 2011. — № 2. — С. 172–179.
16. *Minkowski H.* Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern // *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*. — 1908. — Ss. 53–111.
17. *Стрэттон Д. А.* Теория электромагнетизма. — М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.

18. Терлеуцкий Я. П., Рыбаков Ю. П. Электродинамика. — Москва: Высшая школа, 1990. — С. 352.
19. Post E. The Constitutive Map and Some of its Ramifications // *Annals of Physics*. — 1972. — Vol. 71, No 2. — Pp. 497–518.
20. Gilkey P. B. Algebraic Curvature Tensors // *Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor*. — World Scientific Publishing Company, 2001. — Pp. 1–91.
21. Obukhov Y. N., Hehl F. W. Possible Skewon Effects on Light Propagation // *Physical Review D – Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*. — 2004. — Vol. 70, No 12. — Pp. 1–14.
22. Hehl F. W., Obukhov Y. N. Linear Media in Classical Electrodynamics and the Post Constraint // *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*. — 2005. — Vol. 334, No 4. — Pp. 249–259.
23. Leonhardt U. Optical Conformal Mapping // *Science*. — 2006. — Vol. 312. — Pp. 1777–1780.
24. Pendry J. B., Schurig D., Smith D. R. Controlling Electromagnetic Fields // *Science*. — 2006. — Vol. 312, No 5781. — Pp. 1780–1782.
25. Nicolet A., Zolla F., Geuzaine C. Transformation optics, generalized cloaking and superlenses // *IEEE Transactions on Magnetics*. — 2010. — Vol. 46, No 8. — Pp. 2975–2981.
26. Schurig D., Pendry J. B., Smith D. R. Calculation of Material Properties and Ray Tracing in Transformation Media // *Optics express*. — 2006. — Vol. 14, No 21. — Pp. 9794–9804.
27. Зоммерфельд А. Электродинамика. — Москва: Издательство иностранной литературы, 1958.

UDC 537.8:514.762.37

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-81-90

Geometrization of Maxwell's Equations in the Construction of Optical Devices

D. S. Kulyabov*[†]

* *Department of Applied Probability and Informatics
RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia)
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198*

[†] *Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, Russia, 141980*

The development of physics in the XX-th century was closely linked to the development of the mathematical apparatus. The General Relativity demonstrated the power of the geometric approach. Unfortunately, the infiltration of this apparatus in other domains of physics is rather slow. For example, there were some attempts of integration of the geometric methods in electrodynamics, but until recently they remained only as a theoretical exercise.

Interest to the geometric methods in electrodynamics is summoned by practical necessity. The following algorithm of designing of the electromagnetic device is possible. We construct the estimated trajectories of propagation of electromagnetic waves. Then we calculate the parameters of the medium along these trajectories. The inverse problem is also interesting.

The paper considers the techniques of construction of optical devices based on the method of geometrization of Maxwell's equations. The method is based on representation of material equations in the form of an effective space-time geometry. Thus we get a problem similar to that of some bimetric theory of gravity. That allows to use a well-developed apparatus of differential geometry. On this basis, we can examine the propagation of the electromagnetic field on the given parameters of the medium. It is also possible to find the parameters of the medium by a given law of propagation of electromagnetic fields.

Key words and phrases: Maxwell's equations, constitutive equations, Maxwell's equations geometrization, Riemann geometry, curvilinear coordinates

References

1. I. E. Tamm, *Electrodynamics of an Anisotropic Medium in a Special Theory of Relativity*, Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part physical 56 (2-3) (1924) 248–262.
2. I. E. Tamm, *Crystal Optics Theory of Relativity in Connection with Geometry Biquadratic Forms*, Russian Journal of Physical and Chemical Society. Part physical 57 (3-4) (1925) 209–240.
3. I. E. Tamm, L. I. Mandelstam, *Elektrodynamik der anisotropen Medien in der speziellen Relativitätstheorie*, Mathematische Annalen 95 (1) (1925) 154–160.
4. J. Plebanski, *Electromagnetic Waves in Gravitational Fields*, Physical Review 118 (5) (1960) 1396–1408. doi:10.1103/PhysRev.118.1396.
5. F. Felice, *On the Gravitational Field Acting as an Optical Medium*, General Relativity and Gravitation 2 (4) (1971) 347–357. doi:10.1007/BF00758153.
6. U. Leonhardt, T. G. Philbin, N. Haugh, *General Relativity in Electrical Engineering* (2008) 1–19 arXiv:0607418v2.
7. U. Leonhardt, T. G. Philbin, *Transformation Optics and the Geometry of Light*, in: Progress in Optics, Vol. 53, 2009, pp. 69–152. arXiv:0805.4778v2, doi:10.1016/S0079-6638(08)00202-3.
8. R. T. Thompson, S. A. Cummer, J. Fraundniener, *A Completely Covariant Approach to Transformation Optics*, Journal of Optics 13 (2) (2011) 024008. doi:10.1088/2040-8978/13/2/024008.
9. R. Penrose, W. Rindler, *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1987.
10. D. V. Sivukhin, *The International System of Physical Units*, Soviet Physics Uspekhi 22 (10) (1979) 834–836. doi:10.1070/PU1979v022n10ABEH005711.
11. D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, V. I. Korolkov, *Maxwell's Equations in Arbitrary Coordinate System*, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics" (1) (2012) 96–106. arXiv:1211.6590.
12. A. V. Korol'kova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevast'yanov, *Tensor Computations in Computer Algebra Systems, Programming and Computer Software* 39 (3) (2013) 135–142. arXiv:1402.6635, doi:10.1134/S0361768813030031.
13. D. S. Kulyabov, *Geometrization of Electromagnetic Waves*, in: Mathematical Modeling and Computational Physics, JINR, Dubna, 2013, p. 120.
14. D. S. Kulyabov, A. V. Korol'kova, *Maxwell's Equations in an Arbitrary Coordinate System*, Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics (1 (28)) (2013) 29–44, in Russian. arXiv:1211.6590.
15. D. S. Kulyabov, N. A. Nemchaninova, *Maxwell's Equations in Curvilinear Coordinates*, Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia Series: Mathematics. Information Sciences. Physics (2) (2011) 172–179, in Russian.
16. H. Minkowski, *Die Grundlagen für die electromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1908) 53–111.
17. J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, MGH, 1941.
18. Ya. P. Terletskiy, Yu. P. Rybakov, *Electrodynamics*, High School, Moscow, 1990, in Russian.
19. E. Post, *The Constitutive Map and Some of its Ramifications*, Annals of Physics 71 (2) (1972) 497–518. doi:10.1016/0003-4916(72)90129-7.
20. P. B. Gilkey, *Algebraic Curvature Tensors*, in: Geometric Properties of Natural Operators Defined by the Riemann Curvature Tensor, World Scientific Publishing Company, 2001, pp. 1–91. doi:10.1142/9789812799692_0001.
21. Y. N. Obukhov, F. W. Hehl, *Possible Skewon Effects on Light Propagation*, Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology 70 (12) (2004) 1–14. arXiv:0409155, doi:10.1103/PhysRevD.70.125015.
22. F. W. Hehl, Y. N. Obukhov, *Linear Media in Classical Electrodynamics and the*

- Post Constraint, *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics* 334 (4) (2005) 249–259. arXiv:0411038, doi:10.1016/j.physleta.2004.11.038.
23. U. Leonhardt, Optical Conformal Mapping, *Science* 312 (June) (2006) 1777–1780. arXiv:0602092, doi:10.1126/science.1218633.
 24. J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, Controlling Electromagnetic Fields, *Science* 312 (5781) (2006) 1780–1782. doi:10.1126/science.1125907.
 25. A. Nicolet, F. Zolla, C. Geuzaine, Transformation Optics, Generalized Cloaking and Superlenses, *IEEE Transactions on Magnetics* 46 (8) (2010) 2975–2981. arXiv:1002.1644, doi:10.1109/TMAG.2010.2043073.
 26. D. Schurig, J. B. Pendry, D. R. Smith, Calculation of Material Properties and Ray Tracing in Transformation Media, *Optics express* 14 (21) (2006) 9794–9804. arXiv:0607205, doi:10.1364/OE.14.009794.
 27. A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics: Electrodynamics*, Academic Press, 1964.

© Кулябов Д. С., 2017

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Ардилла Пинто Альдемар — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: aldemar.ardila@gmail.com, тел.: +7 (495) 9550999)

Блинков Юрий Анатольевич (Россия) — заведующий кафедрой математического и компьютерного моделирования, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, доктор физико-математических наук, (e-mail: blinkovua@info.sgu.ru, тел.: +79033288638)

Богданова Екатерина Владимировна — студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: official_kb@mail.ru, тел.: +7(495)9550927)

Виницкий Сергей Ильич — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научного отдела теории атомного ядра лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна; профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: vinitzky@theor.jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-348)

Гуждж Анджей (Gózdź Andrzej, Польша) — профессор, профессор кафедры теоретической физики института физики университета им. М. Кюри-Склодовска, г. Люблин (e-mail: andrzej.gozdz@umcs.pl, тел.: +4881 5376239)

Гусев Александр Александрович — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: gooseff@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-536)

Дербов Владимир Леонардович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики физического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (e-mail: derbov@sgu.ru, тел.: +7 (8452) 51-17-57)

Диваков Дмитрий Валентинович — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: dmitriy.divakov@gmail.com, тел.: +7 (495)9522572)

Егоров Александр Алексеевич — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук; профессор-консультант УНЦ Совета ВОИР РУДН (e-mail: alexandr_egorov@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550813)

Егорова Майя Александровна — кандидат политических наук, доцент кафедры иностранных языков факультета гуманитарных и социальных наук РУДН (e-mail: egorova_ma@pfur.ru, тел.: +7 (495) 9550813)

Зарипова Эльвира Ринатовна — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: ezarip@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495) 9550999)

Зарядов Иван Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, старший научный сотрудник ИПИ ФИЦ ИУ РАН (e-mail: izaryadov@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7(495)9550927)

Кулябов Дмитрий Сергеевич — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН; старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: ds@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495) 9520250)

Малых Михаил Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, доцент факультета наук о материалах Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykhmd@yandex.ru, тел.: +7 (495)9550999)

Месянжин Артём Вячеславович (Россия) — ведущий математик, ОАО «Конструкторское бюро промышленной автоматики», (e-mail: a.v.mesyanzhin@gmail.com, тел.: +79271102263)

Милованова Татьяна Александровна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: tmilovanova77@mail.ru, тел.: +7(495)9550927)

Могилевич Лев Ильич (Россия) — профессор кафедры прикладная математика и системный анализ, Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю. А., доктор технических наук, (e-mail: mogilevich@sgu.ru, тел.: +7 (8452)264804)

Севастьянов Антон Леонидович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: alsevastyanov@gmail.com, тел.: +7 (495)9522572)

Севастьянов Леонид Антонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevast@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495)9522572)

Чулуунбаатар Очбадрах (Chuluunbaatar Ochbadrah, Монголия) — доктор физико-математических наук, начальник сектора научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: chuka@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 62529)

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе \LaTeX (используется версия $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{AMS}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS, \TeX ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе \BibTeX и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям:

оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Количество комплектов:

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

ПВ	место	литер

на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Стоимость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

Научный журнал
ВЕСТНИК
Российского университета дружбы народов

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА
2017, Т. 25, № 1

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»
(ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198)

Редактор *К. В. Зенкин*
Компьютерная вёрстка: *А. В. Королькова*

Адрес редакции:
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, г. Москва, Россия, 115419
тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@pfur.ru

Адрес редакционной коллегии
серии «Математика. Информатика. Физика»:
ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419
тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university,
vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru
сайты: <http://journals.rudn.ru/miph>, <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

Подписано в печать 24.01.2017. Выход в свет 25.01.2017. Формат 70×100/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».
Усл. печ. л. 11,68 Тираж 500 экз. Заказ № 25

Цена свободная

Типография ИПК РУДН
ул. Орджоникидзе, 3, ГСП-1, г. Москва, Россия, 115419, тел. 952-04-41

Scientific journal

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics

2017, Vol. 25, № 1

Editor *K. V. Zenkin*

Computer design: *A. V. Korolkova*

Address of editorial board:

Peoples' Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@pfur.ru

Address of editorial board

“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru
sites: <http://journals.rudn.ru/miph>, <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

Printing run 500 copies

Open price

Address of PFUR publishing house

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419
Tel. +7 (495) 952-04-41