

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ СЕРИИ  
«МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА»**

**Рыбаков Юрий Петрович** — Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической физики и механики РУДН — *главный редактор*

**Севастьянов Леонид Антонович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН — *заместитель главного редактора*

**Члены редколлегии**

**Ильгисонис Виктор Игоревич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

**Скубачевский Александр Леонидович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

**Датта Гупта Субхашини** (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

**Мартикайнен Олли Эрки** (Финляндия) — PhD., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

**Медведев М. В.** (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

**Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо** (Испания) — профессор Барселонского университета

**Саха Биджан** (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

**Чулуунбаатар Очбадрах** (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

**EDITORIAL BOARD**  
**Series “Mathematics. Information Sciences. Physics”**

**Rybakov Yu. P.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia, Head to the Department of Theoretical Physics and Mechanics of PFUR — *Editor-in-Chief of the series*

**Sevastianov L. A.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, professor of the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR — *Vice Editor-in-Chief of the series*

**Members of the editorial board**

**Il’gisonis V. I.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center “Kurchatov Institute”

**Samouylov K. E.** — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

**Skubachevski A. L.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

**Datta Gupta Subhashish** (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

**Martikainen Olli Erkki** (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

**Medvedev M. V.** (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

**Ramirez Inostrozo Orlando Raphael** (Spain) – DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

**Saha Bijan** (Bangladesh) – DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

**Chuluunbaatar Ochbadrah** (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

**Вестник  
Российского  
университета  
дружбы народов**

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ**

Основан в 1993 году

*Серия*

**Математика. Информатика. Физика  
2016, № 4**

Российский университет дружбы народов

---

**СОДЕРЖАНИЕ**

**Математика**

**Щербаков Е. А., Щербаков М. Е.** О существовании глобальной полугеодезической параметризации поверхностей . . . . . 5

**Математическая теория телетрафика  
и сети телекоммуникаций**

**Гайдамака Ю. В., Бобрикова Е. В., Медведева Е. Г.** Применение жидкостных моделей к анализу одноранговой сети . . . . . 15

**Вишневский В. М., Самуйлов К. Е., Наумов В. А., Яркина Н. В.** Модель соты LTE с межмашинным трафиком в виде мультисервисной системы массового обслуживания с эластичными и потоковыми заявками и марковским входящим потоком . . . . . 26

**Математическое моделирование**

**Егоров А. А., Егорова М. А.** Динамическая нелинейная модель распространения и изменения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе . . . . . 37

**Гостев И. М., Севастьянов Л. А.** Об одном методе дифференцирования плоской дискретной кривой при обработке изображений . . . . . 49

**Гусев А. А., Чулуунбаатар О., Виницкий С. И., Дербов В. Л.** Алгоритмы решения краевых задач для атомных тримеров в коллинеарной конфигурации методом Канторовича . . . . . 56

**Кулябов Д. С.** Геометрический подход к лагранжу и гамильтонову формализмам электродинамики . . . . . 77

**Физика**

<b>Бабурова О. В., Фролов Б. Н., Кудлаев П. Э., Романова Е. В.</b> Сферически-симметричное решение теории гравитации Вейля–Дирака и её следствия . . .	84
Сведения об авторах . . . . .	93
Правила оформления статей . . . . .	95

# Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia

SCIENTIFIC JOURNAL

Founded on 1993

*Series*

**Mathematics. Information Sciences. Physics**  
**2016, No 4**

Peoples' Friendship University of Russia

---

## CONTENTS

### Mathematics

**Shcherbakov E. A., Shcherbakov M. E.** On Almost Global Half-Geodesic  
Parameterization . . . . . 5

### Mathematical Theory of Teletraffic and Telecommunication Networks

**Gaidamaka Y. V., Bobrikova E. V., Medvedeva E. G.** The Application of  
Fluid Models to the Analysis of Peer-to-Peer Network . . . . . 15

**Vishnevsky V. M., Samouylov K. E., Naumov V. A., Yarkina N. V.**  
Multiservice Queuing System with Elastic and Streaming Flows and Markovian  
Arrival Process for Modelling LTE Cell with M2M Traffic . . . . . 26

### Mathematical Modeling

**Egorov A. A., Egorova M. A.** Dynamic Non-Linear Model of Distribution and  
Changes of Linguistic Information in the Indo-European Model Language Community 37

**Gostev I. M., Sevastyanov L. A.** About One Method of Differentiation of a  
Flat Discrete Planar Curve in Image Processing . . . . . 49

**Gusev A. A., Chuluunbaatar O., Vinitsky S. I., Derbov V. L.** Algorithms  
for Solving the Boundary-Value Problems for Atomic Trimers in Collinear Configu-  
ration using the Kantorovich Method . . . . . 56

**Kulyabov D. S.** A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian  
Formalism of Electrodynamics . . . . . 77

## Physics

<b>Babourova O. V., Frolov B. N., Kudlaev P. E., Romanova E. V.</b> Spherically Symmetric Solution of the Weyl–Dirac Theory of Gravitation and its Consequences . . . . .	84
Information about the authors . . . . .	93
Guidelines for Authors . . . . .	95

---

# Математика

UDC 517.5

## On Almost Global Half-Geodesic Parameterization

E. A. Shcherbakov, M. E. Shcherbakov

*Kuban State University, Krasnodar, Russian Federation*

The problem of existence of Global Half-Geodesic Surface Parameterization is considered. The problem is well known and it is yet unsolved in general case. It is known that for the twice-differentiable surfaces it has local solution. At the same time example of paraboloid of revolution proves that it is not possible in the general case to use local nets in order to construct the global half-geodesic ones. In order to solve the problem the authors follow the way leading to the construction of isothermal parameterization for the surfaces with positive first quadratic form. To this end they deduce partial differential equation for the mappings giving necessary parameterization.

In the contrast with the case of isothermal parameterization when the equation is Beltrami equation corresponding to the homogeneous elliptic system this equation is essentially non-linear one. Besides the new system admits degeneration at the points where the Jacobian of the solution is equal to zero or infinity. The speed of degeneration strongly affecting properties of the solutions is also unknown.

In order to surpass these difficulties the authors change the challenge. Instead of the geodesics covering the whole surface they propose to find the geodesics covering the surface up to the set of Hausdorff null measure. Using the theory of  $K$ -quasiconformal mappings they construct non-regular generalized solutions of non-linear Beltrami equation that nevertheless detect the necessary family of the geodesics. The constructed theory permits to study non-classical equilibrium forms of liquid drops.

**Key words and phrases:** first quadratic form of the parametric surface, quasiconformal mappings, generalized solution, non-linear Beltrami equation, Sobolev spaces, imbedding theorems, weak convergence of the functions, almost global half-geodesic parameterization

### 1. Formulation of the problem

Let  $X = X(\xi, \eta)$ ,  $(\xi, \eta) \in D$  be a continuously differentiable parametric surface and  $\omega$  — its first quadratic form

$$\omega = Ad\xi^2 + 2Bd\xi d\eta + Cd\eta^2. \quad (1)$$

Let us suppose that the following conditions are satisfied

$$A \geq A_0 > 0, \quad \Delta = AC - B^2 \geq \Delta_0 > 0. \quad (2)$$

It is well-known [1] that there exists a homeomorphism  $z = z(\zeta)$ ,  $\zeta = \xi + i\eta$  of the disk  $D$  onto itself reducing the quadratic form  $\omega$  in the isothermal coordinates  $(x, y)$  to the canonical one

$$\omega = \Lambda(x, y)(dx^2 + dy^2). \quad (3)$$

The function  $z = z(\zeta)$  satisfies the following Beltrami equation

$$z_{\bar{\zeta}}(\zeta) = \frac{A - \sqrt{\Delta} + iB}{A + \sqrt{\Delta} - iB} z_{\zeta}(\zeta). \quad (4)$$

The isothermal coordinates proved to be very useful in various applications, especially in the theory of minimal surfaces.

The other canonical representation of the type

$$\omega^*(u, v) = du^2 + Hdv^2 \quad (5)$$

is also widely known [2].

The parameterization of the surface reducing the first quadratic form to the form (5) has the name of half-geodesic parameterization.

Locally we can introduce for the surfaces under consideration the coordinates  $(u, v)$  transforming their first quadratic form into the form (5).

Sometimes it is possible (for example for the surfaces of the negative curvature or for the analytic ones) to get this reduction over the whole surface. For the general case the problem still stands to be open.

Meanwhile sometimes the global half-geodesic parameterization is also necessary, especially in the case when the functional giving the Gauss curvature under variation is required (see for example [3–5]).

The existence of such parameterization is connected with existence of the family of the geodesics covering the whole surface.

In this article we are going to prove the existence of the family of geodesics without self-intersections covering the surfaces  $X$  we consider almost everywhere. It is sufficient, for example, for the generalization of the variational problems studied in the articles [3–5] to the case of the surfaces lacking the axial symmetry.

In order to fulfill this task we will proceed as follows. As in the case of isothermal parameterization we deduce Beltrami differential equation for the transformations resolving the problem of the existence of half-geodesic parameterization. After this using the method of successive approximations we prove the existence of the solutions of the equation. Finally, we prove that almost all level lines of the imaginary parts of the solution the equation for the inverse transformation are geodesics covering almost all the surface  $X$ .

The main difficulty we encounter on this way lies in non-linear nature of Beltrami equation we get in our case. Besides, it degenerates at the points where the Jacobian of the transformation turns to be zero or infinite.

The instrument of changing the variables turns not to be perfect but still it permits us to detect almost all the geodesics of the surface and prove that they cover it without self-intersection up to the set of null Hausdorff measure.

## 2. Basic equations

It is easy to prove the following theorem.

**Theorem 1.** *Let  $X = X(x, y)$  be continuously differentiable parametric surface with the first quadratic form  $\omega$  of the type (3). Let us suppose that there exists a topological sense preserving transformation  $w : D \rightarrow D$ ,  $w = u + iv$  reducing the form  $\omega$  to the form  $\omega^*$  from formula (5). In this case, the function  $w$  satisfies the conjugate nonlinear Beltrami equation*

$$w_{\bar{z}}(z) = \frac{\Lambda(z) - J_w(z)}{J_w(z) + \Lambda(z)} \bar{w}_z. \quad (6)$$

The inverse function  $z = z(w)$ ,  $z = x + iy$ , satisfies the nonlinear Beltrami equation

$$z_{\bar{w}}(w) = -\frac{\Lambda(z(w)) J_z(w) - 1}{\Lambda(z(w)) J_z(w) + 1} z_w(w). \quad (7)$$

Besides the following equality takes place

$$H(u, v) = \Lambda(z(u, v)) (x_v^2 + y_v^2) = \Lambda^2(z(u, v)) J_z^2(w).$$

This theorem constitutes the first part of our program.

### 3. Construction of the solutions of the basic equations

Let us start now with the study of the second part of our program. We will prove that the solution of the conjugate non-linear Beltrami equation (6) exists. It is clear that this equation degenerates at the points where the Jacobian of the solution is equal to zero or infinity. This entails many difficulties as we cannot apply directly the well-developed theory of quasiconformal mappings with bounded characteristics.

In what follows we restrict our considerations to the twice-differentiable surfaces symmetrical relatively to a plane  $P$ . Besides, we suppose that the intersection of the surface  $X$  with the plane  $P$  is also geodesics. We denote by the letter  $\Xi$  the class of the surfaces of this type.

In order to find the needed solution we will use the method of iterations. We divide this process into two stages.

#### 3.1. First stage

At the first stage the process of the iterations is as following. Firstly, for each number  $m \in N$  fixed we construct the sequence of  $K$ -quasiconformal mappings satisfying the following equations

$$w_{\bar{z}}^{(n+1)}(m, z) = \frac{\Lambda(z) - J_{w^{(n)}}(z)}{J_{w^{(n)}}(z) + \Lambda(z)} \frac{1 - \frac{1}{m} \bar{w}^{(n+1)}(m, z)}{1 + \frac{1}{m} \bar{w}^{(n+1)}(m, z)}. \quad (8)$$

As the first element of the sequence we introduce into equation (8) as  $J_{w^0}$  the Jacobian of the conformal mapping  $w^0$  of the unit disk  $D$  onto itself normalized by the correspondence of the three pairs of the boundary points

$$w^0(-1) = -1, \quad w^0(i) = p, \quad w^0(1) = 1, \quad 0 < \arg p < \pi.$$

Let

$$w^{(n)}(m, z) = u^{(n)}(m, z) + iv^{(n)}(m, z).$$

Then the functions  $u^{(n+1)}(m, z)$ ,  $v^{(n+1)}(m, z)$  satisfy the following system of the equations equivalent to the equation (8),

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{m} + \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}(m, z) \right) u_x^{(n+1)}(m, z) &= \left( 1 + \frac{1}{m} J_{w^{(n)}}(m, z) \right) v_y^{(n+1)}(m, z), \\ \left( \frac{1}{m} + \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}(m, z) \right) u_y^{(n+1)}(m, z) &= - \left( 1 + \frac{1}{m} \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}(m, z) \right) v_x^{(n+1)}(m, z). \end{aligned} \quad (9)$$

Let now  $z^{(n+1)} = x^{(n+1)} + iy^{(n+1)}$  be the mapping inverse to the mapping  $w^{(n+1)}$ . We can easily prove that it satisfies the following non-linear Beltrami equation

$$z_{\bar{w}}^{(n+1)}(m, w) = - \frac{J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}(w)) - \Lambda(z^{(n+1)}(w))}{J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}(w)) + \Lambda(z^{(n+1)}(w))} \frac{1 - \frac{1}{m} z_w^{(n+1)}(m, w)}{1 + \frac{1}{m} z_w^{(n+1)}(m, w)}.$$

The functions  $x^{(n+1)}$ ,  $y^{(n+1)}$  satisfy the equations

$$\frac{\frac{1}{m} J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}) + \Lambda(z^{(n+1)}(w))}{J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}) + \frac{1}{m} \Lambda(z^{(n+1)}(w))} x_u^{(n+1)}(m, w) = y_v^{(n+1)}(m, w),$$

$$x_v^{(n+1)}(m, w) = -\frac{\frac{1}{m}J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}) + \Lambda(z^{(n+1)}(w))}{J_{w^{(n)}}(m, z^{(n+1)}) + \frac{1}{m}\Lambda(z^{(n+1)}(w))}y_u^{(n+1)}(m, w). \quad (10)$$

The following theorem concerns the properties of the successive approximations and their limits.

**Theorem 2.** *The sequences  $\{w^{(n)}(m, z)\}$ ,  $\{z^{(n)}(m, w)\}$  are compact in the sense of uniform convergence in the disk  $\bar{D}$ . Derivatives of the first order of the functions  $w^{(n)}$ ,  $z^{(n)}$  constitute the sequences compact in the space  $L_2(D)$  in the sense of the weak convergence.*

Let

$$w(m, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} w^{(n)}(m, z), \quad z(m, w) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(n)}(m, w)$$

be the limit functions of the convergent sequences and  $J_w(z)$ ,  $J_z(w)$  — their respective Jacobians. Then the functions  $w$ ,  $z$  satisfy the following equations

$$w_{\bar{z}}(m, z) = \frac{\Lambda(z) - J_w(z) \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} \bar{w}_z(m, z)}{J_w(z) + \Lambda(z) \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}}, \quad (11)$$

$$z_{\bar{w}}(m, w) = \frac{1 - J_z(w) \Lambda(z(w)) \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}} z_w(m, w)}{1 + J_z(w) \Lambda(z(w)) \frac{1 - \frac{1}{m}}{1 + \frac{1}{m}}} \quad (12)$$

almost everywhere in the disk  $D$ .

**Proof.** The sequences  $\{w^{(n)}(m, z)\}$ ,  $\{z^{(n)}(m, w)\}$  are the sequences of  $K = K(m)$ -quasiconformal mappings normalized by the correspondences of the three pairs of the boundary points. It means that they are compact in the sense of uniform convergence in the disk  $\bar{D}$  [6–10].

Using the equations (8), (10) we get that the Dirichlet integrals of the functions  $w^{(n)}$ ,  $z^{(n)}$  are uniformly bounded in the space  $L_2(D)$ . From the theorem of Banach-Alaoglu [11] it follows that the sequences of the functions  $w_z^{(n)}(m, z)$ ,  $z_w^{(n)}(m, w)$ ,  $w_{\bar{z}}^{(n)}(m, z)$ ,  $z_{\bar{w}}^{(n)}(m, w)$  are compact in the space  $L_2(D)$  in the sense of weak convergence.

Let us now prove that the functions  $w$ ,  $z$  satisfy the equations (11), (12) respectively almost everywhere in  $D$ .

To this end we'll use the following quite evident lemmas.

**Lemma 1.** *Let*

$$J_\infty = \left\{ z \in D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \sup J_{w^{(n)}}(z) = \infty \right\}$$

and  $\mu(J_\infty)$  — its Lebesgue measure. Then

$$\mu(J_\infty) = 0.$$

**Lemma 2.** *There exists a sequence  $\{D_n\}$  of the measurable sets  $D_n \subset D$  such that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(D_n) = \pi$$

and the sequences

$$\{J_{w^{(n)}}\}, \quad \left\{ w_{\bar{z}}^{(n)}(m, z) \right\}, \quad \left\{ w_z^{(n)} \right\}$$

are uniformly bounded on each of the sets  $D_n$ .

Now in order to complete the proof of the theorem it is sufficient to show that the  $K$ -quasiconformal mapping  $w = w(m, z)$  is the solution of the equation (11) on each of the set  $D_n$  and  $z = z(m, w)$  is the solution of the equation (12) on the set  $w(D_n)$ .

It is clear that it is sufficient to this end to show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} w_z^{(k)}(m, z) J_{w^{(k)}}(z) \Phi(z) dx dy = \iint_{D_n} w_z(m, z) J_w(z) \Phi(z) dx dy \quad (13)$$

for any function  $\Phi(z)$  continuous on the set  $D$ .

As we only know that the sequences  $\{J_{w^{(k)}}\}$ ,  $\{w_z^{(k)}\}$  converge in the weak sense in the spaces  $L^p(D_n)$ ,  $p > 1$ , the problem we are to solve seems not to be trivial [12]. But as the sequences  $\{J_{w^{(n)}}\}$ ,  $\{w_{\bar{z}}^{(n)}(m, z)\}$ ,  $\{w_z^{(n)}\}$  are bounded on the sets  $D_n$  the equality (13) proves to be valid which leads us to the following lemma.

**Lemma 3.** *Let  $\{w^{(n)}\}$  be a sequence of quasiconformal mappings converging almost everywhere to the mapping  $w$ . Let us suppose that the sequence  $\{J_{w^{(n)}}\}$  converges weakly in the space  $L^1(D)$  and the sequences  $\{w_{\bar{z}}^{(n)}(m, z)\}$ ,  $\{w_z^{(n)}\}$  converge weakly in the space  $L^2(D)$ . Let us suppose that sequences*

$$\{J_{w^{(n)}}\}, \quad \{w_{\bar{z}}^{(n)}(m, z)\}, \quad \{w_z^{(n)}\}$$

*are uniformly bounded on each  $D_n$ . Then the equality (13) takes place for any function  $\Phi(z)$  continuous on the set  $D$ .*

From the lemma 3 we get now that almost everywhere on each set  $D_n$  the function satisfies the equation (11), i.e. it satisfies this equation almost everywhere in  $D$ .

In the same way we prove that the function  $z(m, w)$  also satisfies the equation (12) almost everywhere in  $D$ .

The theorem is proved.  $\square$

### 3.2. Second stage

We have proved that there exists the sequence  $\{w(m, z)\}$  of quasiconformal mappings satisfying equation (11). We can rewrite this equation in the following scalar form

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m} + \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}\right) u_x(m, z) &= \left(\frac{1}{m} - \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}\right) v_y(m, z), \\ \left(\frac{1}{m} + \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}\right) u_y(m, z) &= - \left(\frac{1}{m} - \Lambda^{-1} J_{w^{(n)}}\right) v_x(m, z). \end{aligned} \quad (14)$$

Here the symbol  $J_{w^{(n)}}$  denotes the Jacobian of the mapping  $w(m, z) = u(m, z) + iv(m, z)$ .

In what follows, we denote  $w(m, z)$  as  $w^{(m)}(z)$ ,  $w^{(m)}(z) = u^{(m)}(z) + iv^{(m)}(z)$ .

**Theorem 3.** *Let  $X$  be a surface of the class  $\Xi$ . Then there exists a sequence  $\{w^{(m)}\}$  of the quasiconformal mappings  $w^{(m)}(z)$ ,  $w^{(m)}(z) = u^{(m)}(z) + iv^{(m)}(z)$ , satisfying the equations (14) such that the sequence  $\{u^{(m)}(z) + iv^{(m)2}\}$  is bounded in the space  $W^{1,2}(D)$ . The sequence  $\{w^{(m)}\}$  converges uniformly on the disk  $D$  to the function  $w(z) = u(z) + iv(z)$ .*

The sequence  $\{z^{(m)}\}$  of the functions  $z^{(m)}$  inverse to the functions  $w^{(m)}(z)$  is bounded in the space  $W^{1,1}(D)$  and compact in the sense of convergence in the space  $L^q(D)$ ,  $1 \leq q < 2$ .

Let  $D_c$  be the set of pointwise convergence of the convergent subsequence of the sequence  $\{z^{(m)}\}$ . The function  $z = z(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} z^{(m)}$  realizes injective mapping of the set  $D_c$  into the set  $D$ . The limit function  $w$  represents the inverse function to the function  $z = z(w)$  on the set  $z(D_c)$  and the function  $z = z(w)$  defined over the set  $D_c$  is inverse to the function  $w = w(z)$  there.

The function  $w = w(z)$  satisfies the equations (11) almost everywhere in  $D$  and the function  $z = z(w)$  satisfies the equation (12) almost everywhere in  $D$ .

Besides, for almost all  $v$ ,  $-1 < v < 1$ , the lines  $\gamma_v = z(u, v)$ ,  $-1 < u < 1$ , represent geodesics of the surface  $X$  covering the surface  $X$  up to the set of the null Hausdorff measure.

**Proof.** Let us start with the following lemma.

**Lemma 4.** The functions  $u^{(m)}$  of the sequence  $\{u^{(m)}\}$  are equicontinuous in  $\bar{D}$  and uniformly bounded in the Sobolev space  $W^{1,2}(D)$ .

**Proof (Proof of the lemma 4).** Firstly, let us note that from the equations (14) it follows that

$$\begin{aligned} u_x^{(m)2} + u_y^{(m)2} &< \Lambda + \frac{1}{m} J_{w^{(m)}}, \\ v_x^{(m)2} + v_y^{(m)2} &< \Lambda + m J_{w^{(m)}}. \end{aligned} \quad (15)$$

Let us consider the functions  $\omega^{(m)}$ ,

$$\omega^{(m)} = u^{(m)} + \frac{i}{m} v^{(m)}.$$

The mappings  $\omega^{(m)}$  coincide with the mappings  $w^{(m)}$  up to the affine mapping. It means that the mappings  $\omega^{(m)}$  are topological ones. The inequality (15) means that the sequence of topological mappings  $\omega^{(m)}$  is bounded in the space  $W^{1,2}(D)$ . This implies that the mappings  $\omega^{(m)}$  are equicontinuous in the closed disk  $\bar{D}$  [10].

The lemma is proved.  $\square$

We note that

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \omega^{(m)} = 0.$$

It means that we can judge only on the continuous properties of the functions  $u^{(m)}$ . As for the functions  $v^{(m)}$  they stay for a while unknown to us. Nevertheless, it is easy to prove the following lemma.

**Lemma 5.** The sequence  $\{v^{(m)2}\}$  is uniformly bounded in the space  $W^{1,2}(D)$ .

Using lemmas 4 and 5 we prove the following lemma.

**Lemma 6.** The sequence  $\{w^{(m)}\}$  is compact in the sense of the uniform convergence on the disk  $D$ .

Let us now consider the inverse functions  $z^{(m)}$  and prove the following lemma.

**Lemma 7.** The sequence  $\{z^{(m)}\}$  of the functions  $z^{(m)}$  inverse to the functions  $w^{(m)}(z)$  is bounded in the space  $W^{1,1}(D)$  and is compact in the sense of convergence in the space  $L^q(D)$ ,  $1 \leq q < 2$ .

For almost all the lines,  $\gamma_v = \{v = \text{const}\}$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ , the sequence  $\{z^{(m)}\}$  is bounded in the space  $W^{1,2}(\gamma_v)$  and it is compact in the sense of uniform convergence on such lines. The limit function  $z = z(w)$  transforms the collection  $V$  of the lines  $\gamma_v$  of the uniform convergence of the sequence  $\{z^{(m)}\}$  onto the set  $z(V)$  covering almost all the disk  $D$ .

**Proof (Proof of the lemma 7).** As the functions  $z^{(m)}$  satisfy the equations (11) then the following property takes place for the derivatives of the functions  $x^{(m)} = \text{Re } z^{(m)}$ ,  $y^{(m)} = \text{Im } z^{(m)}$ .

$$x_u^{(m)2} + y_u^{(m)2} + x_v^{(m)2} + y_v^{(m)2} \leq c \left( \frac{1}{\Lambda} + \Lambda J_z^2 \right). \tag{16}$$

Using the inequality (16) we get that the sequence  $\{z^{(m)}\}$  is bounded in the space  $W^{1,1}(D)$ . It means that the sequence  $\{z^{(m)}\}$  is compact in the space  $L^q(D)$ ,  $1 \leq q < 2$  [13]. It is well-known [14] that it contains subsequence convergent almost everywhere in the disk  $D$ . As always, we denote the convergent subsequence as the sequence itself. This means that for almost all the lines  $\gamma_v$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ , the sequence  $\{z^{(m)}\}$  converges almost everywhere on each of them. It is clear that the function  $w$  is inverse to the limit function  $z = z(w)$  on the set  $z(D_c)$ . Moreover, the convergence of the bounded sequence  $\{z^{(m)}\}$  is uniform on the lines  $\gamma_v$ . Really, the integrals

$$\int_{\gamma_v} J_{z^{(m)}} du$$

are uniformly bounded for almost all  $v$ ,  $v \in (-1, 1)$ .

From this property we easily get that for almost all  $v$ ,  $v \in (-1, 1)$  the integrals

$$\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} \left[ x_u^{(m)2} + y_u^{(m)2} \right] du$$

are uniformly bounded. It means that the functions  $z^{(m)}$  of the sequence  $\{z^{(m)}\}$  are equicontinuous on almost each of the lines  $\gamma_v$ ,  $-1 \leq v \leq 1$ . The limit function  $z$  of convergent subsequence is absolutely continuous on almost all the lines  $\gamma_v$ ,  $-1 < v < 1$ , as the function of the variable  $u$  and images of the lines  $\gamma_v$  do not intersect.

We are going to prove now that the image  $z(V)$  cover the set  $D$  up to the set of the measure equal to zero.

Firstly, let us note that it is well-known [11] that there exists a function  $J \in L^1(D)$  such that for each function  $\Phi$  continuous and with compact support in  $D$  we have the following property

$$\iint_D (J_{z^{(n)}}(w) - J(w)) \Phi(w) dudv = 0.$$

Secondly, we note that the point  $z_0$  such that  $w(z_0) \in V$  belongs to  $z(V)$ .

Let us now suppose that there exists a set  $e$  of the positive measure such that  $e^* = w(e) \subset V^c$ . The complement  $V^c$  of the set  $V$  has null measure. Thus, we get that  $\mu(e^*) = 0$ . From this and weak convergence of  $J_{z^{(n)}}$  we get a contradiction.

The lemma is proved. □

The following lemma whose proof is standard gives us the differential equations, which the functions  $z = z(w)$ ,  $w = w(z)$  satisfy.

**Lemma 8.** *The first order derivatives of the function  $w = w(z) = u + iv$  exist,  $u \in W^{1,2}(D)$ ,  $v \in W^{1,2}(D)$  and the function  $w = w(z)$  satisfies the equation (6).*

The function  $z = z(w)$  has generalized derivatives  $z_w$ ,  $z_{\bar{w}}$  belonging to the space  $L^1(D)$ , which satisfy the equation (7).

For the completion of the proof of the theorem it remains still to prove that almost all the lines  $\{\nu = \text{const}\}$ ,  $-1 < \nu < 1$ , are geodesics.

For the solution of this problem we use standard approach [15].

We see now that all the properties of the functions  $w(z)$ ,  $z(w)$  were proved in the lemmas 4–8.

The theorem is proved. □

## Summary

Using the theory of  $K$ -quasiconformal mappings we have constructed the solutions of non-linear Beltrami equations giving almost global half-geodesic parameterization of the twice differentiable surfaces with positive quadratic form.

## References

1. I. Vekua, *Generalized Analytic Functions*, Gosudarstvennoe Izdatelstvo Fiziko-matematicheskoi Literaturi, Moscow, 1988, (In Russian).
2. G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Vol. 2, Izhevskiy institut komp'yuternykh issledovaniy, Moscow, Izhevsk, 2013, (Translated in Russian).
3. E. Shcherbakov, Generalized Minimal Liouville Surfaces, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* 54 (2) (2009) 179–192.
4. E. Shcherbakov, Equilibrium State of a Pendant Drop with Interphase Layer, *Journal of Analysis and its Applications*, European Mathematical Society (*Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*) 44 (2012) 1–15.
5. E. Shcherbakov, M. Shcherbakov, Equilibrium of the Pendant Drop Taking into Account the Flexural Rigidity of the Intermediate Layer, *Doklady Physics* 53 (6) (2012) 243–244, (In Russian).
6. B. Bojarsky, Generalized Solutions of PDE System of the First Order and Elliptic Type with Discontinuous Coefficients, *Mat. Sb.* 43 (4) (1957) 451–503, (In Russian).
7. V. Monachov, *Free Boundary Value Problems for Elliptic Type Systems*, Nauka, Novosibirsk, 1977, (In Russian).
8. K. Astala, T. Iwaniec, G. Martin, *Elliptic Partial Differential Equations and Quasiconformal Mappings in the Plane*, Princeton University Press, 2009.
9. G. Suvorov, *Families of the Plane Topological Mappings*, Redaktsionno-izdatel'skiy otdel Sibirskogo otdeleniya AN SSSR, Novosibirsk, 1965, (In Russian).
10. O. Lehto, K. Virtanen, *Quasiconformal Mappings in the Plane*, Springer-Verlag, 1973.
11. V. Hatson, S. Pym, *Application of Functional Analysis and Operator Theory*, Academic Press, 1980.
12. V. Fabian, On Uniform Convergence of Measures, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorieverw. Geb.* 15 (1970) 139–143.
13. A. Kufner, O. John, S. Fučík, *Function Spaces*, Academic Publishing House of Czechoslovak Academy of Science, Prague, 1977.
14. P. Halmos, *Measure theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 1974.
15. M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.

УДК 517.5

**О существовании глобальной полугеодезической параметризации поверхностей****Е. А. Щербаков, М. Е. Щербаков***Кубанский государственный университет, г. Краснодар, Россия*

В статье рассматривается задача о существовании глобальной полугеодезической параметризации поверхностей. Эта проблема хорошо известна и является до сих пор нерешённой в общем виде. Известно, что для дважды непрерывно дифференцируемых поверхностей эта проблема имеет локальное решение. Однако, пример параболоида вращения указывает на то, что невозможно, вообще говоря, использовать локальные сети для построения глобальной координатной сети, определяемой полугеодезической параметризацией. Для решения задачи авторы идут по пути, приводящему к построению изотермической параметризации для поверхностей с положительно определённой первой квадратичной формой. С этой целью они выводят дифференциальное уравнение, которому должно удовлетворять отображение реализующее нужную параметризацию.

В отличие от классического случая изотермической параметризации, новое уравнение представляет собой существенно нелинейное уравнение. Кроме того, эллиптическая система, определяемая новым уравнением, допускает вырождение в точках, в которых якобиан её решения обращается в ноль или бесконечность. При этом множество вырождения является заранее неизвестным. Неизвестна и скорость вырождения системы, которая существенно влияет на свойства неравномерно эллиптических систем.

Для преодоления указанных трудностей авторы видоизменяют постановку задачи: вместо семейства геодезических, покрывающих поверхность полностью, они ограничиваются семействами таких линий, которые покрывают её лишь с точностью до множества нулевой меры Хаусдорфа. С помощью теории  $K$ -квазиконформных отображений они строят негладкие отображения, являющиеся обобщёнными решениями нелинейного уравнения Бельтрами, которые, тем не менее, позволяют выделить нужное семейство геодезических. Построенная авторами параметризация даёт возможность исследовать неклассические равновесные формы жидких капель.

**Литература**

1. *Векуа И. Н.* Обобщённые аналитические функции. — Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1988.
2. *Дарбу Ж. Г.* Лекции по общей теории поверхностей. — Москва, Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2013. — Т. 2.
3. *Shcherbakov E.* Generalized minimal Liouville surfaces // *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. — 2009. — Vol. 54, No 2. — Pp. 179–192.
4. *Shcherbakov E.* Equilibrium State of a Pendant Drop with Interphase Layer // *Journal of Analysis and its Applications, European Mathematical Society (Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen)*. — 2012. — Vol. 44. — Pp. 1–15.
5. *Щербаков Е. А., Щербаков М. Е.* О равновесии висящей капли с учётом упругости промежуточного слоя // *Доклады РАН*. — 2012. — Т. 444, № 4. — С. 1–2.
6. *Боярский Б.* Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // *Математический сборник*. — 1957. — Т. 43, № 4. — С. 451–503.
7. *Монахов В. Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. — Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1977.
8. *Astala K., Iwaniec T., Martin G.* Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane. — Princeton University Press, 2009.
9. *Суворов Г. Д.* Семейства плоских топологических отображений. — Новосибирск: Редакционно-издательский отдел Сибирского отделения АН СССР, 1965.
10. *Lehto O., Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane. — Springer-Verlag, 1973.

11. *Hatson V., Pym S.* Application of Functional Analysis and Operator Theory. — Academic Press, 1980.
12. *Fabian V.* On Uniform Convergence of Measures // *Z. Wahrscheinlichkeitstheorieverw. Geb.* — 1970. — Vol. 15. — Pp. 139–143.
13. *Kufner A., John O., Fučík S.* Function Spaces. — Prague: Academic Publishing House of Czechoslovak Academy of Science, 1977.
14. *Halmos P.* Measure Theory. — New York Inc.: Springer-Verlag, 1974.
15. *do Carmo M. P.* Differential Geometry of Curves and Surfaces. — New Jersey: Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1976.

© Shcherbakov E. A., Shcherbakov M. E., 2016

---

# Математическая теория телетрафика и сети телекоммуникаций

УДК 621.39

## Применение жидкостных моделей к анализу одноранговой сети

Ю. В. Гайдамака, Е. В. Бобрикова, Е. Г. Медведева

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В статье показано применение жидкостных моделей к анализу потоков в инфокоммуникационных сетях. Модели, исследованные в статье, учитывают особенности получивших широкое распространение одноранговых P2P-сетей, использующихся для обмена файлами, параллельных вычислений, IP-телефонии, передачи потокового видео и др. В статье проведён обзор основных типов P2P-сетей и связанных с ними аналитических моделей. В построенных в статье жидкостных моделях сетевой трафик описывается в терминах изменения во времени скоростей потоков данных между пользователями и числа пользователей сети. Первая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет анализировать среднее время загрузки файла. Вторая модель в виде дифференциального уравнения в частных производных является расширением первой и учитывает случайный объем данных, запрашиваемых пользователями. Она может быть использована для анализа как устойчивого состояния системы при загрузке, так и неустановившегося состояния, и подходит для исследования поведения системы при большом числе пользователей. Помимо среднего времени загрузки файла вторая модель, учитывающая состав присутствующих в сети пользователей, позволяет анализировать такие показатели эффективности сети, как число личеров и сидов в сети.

**Ключевые слова:** одноранговая сеть, жидкостная модель, личер, сид, пир, время загрузки файла

## 1. Введение

Жидкостные модели традиционно используются для анализа потоков в инфокоммуникационных сетях. Эти модели в виде систем дифференциальных уравнений описывают эволюцию потоков данных и позволяют анализировать самые разнообразные параметры системы — число узлов сети, скорости передачи данных, очереди в узлах сети, механизмы управления скоростью передачи и др. После появления в начале 2000 гг. технологии P2P (англ. peer-to-peer) и последующего широкого распространения основанных на ней одноранговых сетей жидкостные модели стали использоваться для анализа потоков в таких сетях. Для файлообменных одноранговых сетей, основанных на протоколе BitTorrent [1] (так называемых «BitTorrent-like» сетей), жидкостные модели позволяют анализировать скорость загрузки файла в зависимости от динамики числа пользователей в сети. Важным отличием жидкостных моделей от других математических моделей одноранговых сетей является возможность исследовать с их помощью поведение сети при большом числе пользователей, а также учитывать возможные резкие изменения числа пользователей сети, связанные с массовым подключением или отключением пользователей, заинтересованных в получении данных (англ. peers churn).

В статье проведён обзор основных типов P2P-сетей и связанных с ними аналитических моделей, к которым относятся модели в виде цепей Маркова, модели

---

Статья поступила в редакцию 8 сентября 2016 г.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 14-07-00090, 15-07-03051, 15-07-03608.

Авторы благодарят зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН проф. К.Е. Самуйлова за полезные советы при подготовке статьи.

теории массового обслуживания и жидкостные модели. В разделе 2 статьи изложены основные принципы однорангового обмена в P2P-сетях, наложенных на инфокоммуникационную сеть Интернет. Проведена классификация P2P-сетей с точки зрения механизмов обработки запроса и топологии сети. Показаны примеры моделей сетей в виде цепей Маркова, систем и сетей массового обслуживания. В разделе 3 статьи построены две жидкостные модели, в которых сетевой трафик описывается в терминах изменения во времени скоростей потоков данных между пользователями и числа пользователей сети. Первая модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений и позволяет анализировать среднее время загрузки файла для сети, где пользователи запрашивают файлы одинакового объёма. Во второй модели объём файла является случайной величиной с заданным распределением. В заключении статьи на основании проведённого анализа сделаны выводы о масштабируемости файлообменного механизма.

## 2. Основные принципы однорангового обмена

Концепция P2P возникла из необходимости преодоления некоторых ограничений классических методов обмена ресурсами, основанных на принципе клиент/сервер. Сеть, устроенная по принципу P2P — это распределённая система без или с минимальным централизованным управлением и с разной вычислительной мощностью каждой машины в сети. Применения P2P-сетей разнообразны, в качестве примера можно привести мультикаст-приложения, параллельные вычисления, обмен файлами, IP-телефония, обмен мгновенными сообщениями, поисковые системы и др. Этот тип сети характеризуется, как правило, хорошей масштабируемостью и очень высокой динамичностью (приход абонентов в сеть/ уход абонентов из сети), [2].

P2P-сети получили беспрецедентное развитие, что сопровождалось значительным ростом их сложности. Большой интерес в связи с этим представляют аналитические модели, которые позволяют за короткое время рассчитывать характеристики сети, оценивать её производительность и дают хорошее представление о работе системы при низких затратах на проведение исследований по сравнению с другими методами оценки производительности P2P-сетей, такими как измерения и имитационный подход. Основными моделями, используемыми исследователями при изучении P2P-сетей, являются модели теории вероятностей [3], теории случайных процессов, в частности, цепи Маркова [4–8], не так давно стали применяться модели теории массового обслуживания [9, 10].

P2P-сети предоставляют возможности большому числу (сотням тысяч) узлов сотрудничать в целях обмена ресурсами. Узлы сети являются равноправными, и никакой из узлов не осуществляет специальное управление и не выполняет административные функции. Поскольку обслуживание распространяется на все участвующие узлы, то сеть должна хорошо масштабироваться даже при очень больших её размерах. Технология P2P, обладающая возможностью обходить узкие места и хорошей отказоустойчивостью, предназначена для использования в крупномасштабных распределённых средах, где пользователи, определяющие узлы сети, называемые также пирами (англ. peer) могут делиться своими ресурсами (например, вычислительной мощностью, ёмкостью, пропускной способностью) автономно и децентрализованно. Принцип P2P достаточно успешно реализуется в таких областях, как, например, общий доступ к файлам, совместное использование вычислительных мощностей, обмен мгновенными сообщениями. Пир может играть роль клиента, когда он потребляет ресурсы, роль сервера, когда он предлагает ресурсы, роль маршрутизатора, когда он распространяет запросы, полученные от других узлов сети, и роль узла-источника данных при обмене данными с другими пирами. Существует множество типов P2P-сетей, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Они различаются как механизмом обработки запроса, так и логической топологией, поэтому можно выделить три семейства P2P-сетей: централизованные сети, децентрализованные (структурированные и неструктурированные) сети и смешанные сети.

Централизованная сеть включает в себя единственный сервер, который напрямую связывает всех подключённых пиров и идентифицирует файлы, предлагаемые другими клиентами. Преимущество этой методики заключается в централизованной индексации всех каталогов и названий общих файлов, содержащихся у пользователей сети. Клиент отправляет запрос на сервер, и тот возвращает список пиров, подключённых в данный момент и имеющих нужные файлы. Передача файлов будет осуществляться между конечными пользователями без участия сервера. При таких условиях файлы можно считать хранящимися на центральном сервере. Централизованные сети такого вида плохо масштабируются и содержат единственную точку отказа (англ. a single point of failure). Примером такой сети является Napster [11].

Децентрализованные неструктурированные сети называются также чистыми P2P-сетями, в которых все узлы равноправны: нет сервера, нет привилегированных узлов, каждый узел имеет высокую степень автономности. Узлы упорядочены произвольно (случайным образом) по отношению к обнаружению желаемого контента. Для поиска требуемого ресурса запрос будет пересылаться от одного пира к другому до тех пор, пока не достигнет клиента, имеющего желаемый ресурс. Чтобы избежать слишком долгого блуждания по сети в поисках ресурса, система идентифицирует каждый запрос со значением таймера TTL (Time To Live), это значение обычно равно 7 (как в http). При достижении таймером значения 0 запрос не возвращается. Главный недостаток этого механизма связан с ограничением времени поиска из-за истечения времени таймера, так что поиск ресурса прекращается, хотя необходимый файл доступен в P2P-сети. Как правило, эти сети плохо масштабируются из-за высокого объёма сигнального трафика. С другой стороны, такие сети предоставляют пользователям очень высокий уровень анонимности. Наиболее известные примеры таких сетей Gnutella [12] и FreeNet [13].

Из-за проблемы, связанной с обменом большого числа сообщений в неструктурированных P2P-сетях, возникли структурированные P2P-сети. Здесь расположение узлов представляет собой строгую геометрическую структуру и используется вариант технологии распределённой хэш-таблицы (Distributed Hash Table (DHT)). Такие P2P-сети строятся как структурированное наложение, где каждый узел содержит определённый набор контента (или набор указателей на расположение контента). Эти сведения часто используются для выбора направления маршрутизации запросов/сообщений в системе. Поэтому поиск контента детерминирован и эффективен. В качестве примеров таких систем можно назвать Chord, HPM [14].

Смешанная P2P-сеть сложнее в реализации, так как она сочетает в себе элементы централизованной и децентрализованной (распределённой) сетей. В основе смешанной сети лежит набор серверов, управляющий группой пользователей согласно централизованной архитектуре. Каждый сервер в свою очередь связан с другими серверами посредством распределённой архитектуры. Таким образом, если пользователь ищет файл, который не индексируется сервером, к которому этот пользователь прикреплен, то запрос пересылается на другой сервер. Это архитектура помогает улучшить пропускную способность наряду с сокращением трафика запросов.

### 3. Жидкостные модели

Аналитические модели для прогнозирования поведения сети строятся с учётом типа P2P-сети. На этапе проектирования сети применяются как методы имитационного моделирования, так и построение математических моделей. Последнее безусловно является более дешёвым и эффективным вариантом.

Для изучения ёмкости (англ. capacity) файлообменной P2P-сети типа BitTorrent в неустойчивом состоянии используется однородный ветвящийся процесс; в устойчивом состоянии простейшая марковская модель [4]. Оказывается, в неустойчивом состоянии ёмкость сети растёт экспоненциально и стабилизируется в устойчивом состоянии. Разделение контента на части и параллельная их раздача, организованные

оптимальным образом, помогают улучшить производительность P2P-сети, что особенно важно для случая, когда пиры интенсивно покидают сеть. Марковская модель, предложенная в [4], служит основой для построения простой детерминированной жидкостной модели, рассматриваемой в [5, 15, 16]. Жидкостная модель используется для изучения изменения числа пиров в сети, а также для анализа среднего времени загрузки в файлообменных сетях типа BitTorrent [15]. В модели учитывается состав пользователей сети, а именно личеры и сиды. В файлообменных сетях личером называется пользователь, который не имеет полной копии файла. Это либо вновь пришедший пользователь, который только начинает загружать файл, либо пользователь, одновременно загружающий отсутствующие у него части файла и раздающий имеющиеся части, но не имеющий файл целиком. Как только личер полностью загрузил себе файл, он становится сидом, то есть пользователем, который уже имеет весь файл целиком и раздаёт части этого файла личерам. Построим базовую модель [15] в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Итак, пусть  $x(t)$  — число личеров в сети и  $y(t)$  — число сидов в сети в момент  $t > 0$ ,  $\lambda$  — интенсивность поступления личеров в сеть и  $\mu$  — интенсивность раздачи данных пользователем любого типа (личером или сидом). Будем считать, что все пользователи сети имеют одинаковую интенсивность раздачи, и обозначим  $C > \mu$  — интенсивность загрузки данных пользователем любого типа. Личеры могут прервать или отменить процесс загрузки файла, например, если файл долго загружается, и пользователь не хочет ждать завершения загрузки,  $\theta$  — интенсивность отмены личером процесса загрузки. Личер, который успешно загрузил все части файла, может сразу покинуть сеть или остаться в ней в качестве сида на некоторое случайное время,  $\gamma$  — интенсивность ухода сидов из сети. Кроме того, возможно, что не все личеры участвуют в процессе раздачи данных — некоторые только закачивают данные и не раздают их,  $\eta$  — эффективность обмена файлами, которая соответствует доле личеров, участвующих в процессе раздачи данных,  $\eta \in [0, 1]$ .

Изменение числа пользователей  $x(t)$  и  $y(t)$  файлообменной P2P-сети описывается простейшей жидкостной моделью, которая является системой ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \lambda - (\min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} + \theta x(t)), \\ \frac{dy(t)}{dt} = \min\{Cx(t), \mu(\eta x(t) + y(t))\} - \gamma y(t). \end{cases} \quad (1)$$

Проанализируем некоторые характеристики системы (1). Предположим, что в некоторый момент в сети установилось постоянное число пользователей, т.е. выполняются условия

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} = 0.$$

Тогда из (1) имеем

$$\begin{cases} 0 = \lambda - \theta \bar{x} - \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\}, \\ 0 = \min\{C\bar{x}, \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})\} - \gamma \bar{y}, \end{cases}$$

где  $(\bar{x}, \bar{y})$  — точка покоя или положение равновесия системы (1). В [5] показано, что точка покоя  $(\bar{x}, \bar{y})$  системы (1) асимптотически устойчива.

Рассматривая случай, когда суммарная интенсивность загрузки не превосходит суммарной интенсивности раздачи, т.е.  $C\bar{x} \geq \mu(\eta \bar{x} + \bar{y})$ , и противоположный случай,

получаем следующие соотношения для  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ :

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{\lambda}{\beta(1 + \theta/\beta)}, \\ \bar{y} = \frac{\lambda}{\gamma(1 + \theta/\beta)}, \end{cases}$$

где  $\frac{1}{\beta} := \max \left\{ \frac{1}{C}, \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right) \right\}$ . Формула Литтла в данном случае имеет вид:

$$\frac{\lambda - \theta\bar{x}}{\lambda} \bar{x} = (\lambda - \theta\bar{x})T,$$

где  $T$  — среднее время загрузки файла, а  $\lambda - \theta\bar{x}$  представляет собой интенсивность успешного окончания загрузки. Используя здесь полученные соотношения для  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , находим, что среднее время загрузки файла имеет вид

$$T = \frac{1}{\theta + \beta}. \quad (2)$$

Формула (2) позволяет сделать следующие выводы:

- среднее время загрузки  $T$  не зависит от интенсивности  $\lambda$  поступления личеров, поэтому файлообменные сети хорошо масштабируются;
- при увеличении доли  $\eta$  раздающих личеров время  $T$  загрузки файла уменьшается;
- при увеличении интенсивности  $\gamma$  ухода сидов время  $T$  загрузки файла увеличивается, поскольку уменьшается число раздающих пользователей и, как следствие, обеспечиваемая ими скорость раздачи;
- при увеличении интенсивности  $C$  загрузки время  $T$  загрузки уменьшается, однако, с достижением интенсивностью  $C$  значения, при котором выполняется неравенство

$$\frac{1}{C} \leq \frac{1}{\eta} \left( \frac{1}{\mu} - \frac{1}{\gamma} \right),$$

дальнейшее увеличение интенсивности  $C$  не приводит к уменьшению времени  $T$ , время  $T$  остаётся постоянным.

Обратим внимание на случай, когда интенсивность  $C$  загрузки пользователей больше, чем интенсивность раздачи  $\mu$ . Это ограничение возникает, например, при передаче данных по широко распространённой технологии асимметричной цифровой абонентской линии (англ. Asymmetric Digital Subscriber Line, ADSL), когда доступная полоса пропускания канала распределена между исходящим и входящим трафиком асимметрично.

Из формулы для  $\beta$  следует, что, если интенсивность  $\gamma$  ухода сидов из системы меньше интенсивности раздачи  $\mu$ , то интенсивность  $C$  загрузки определяет производительность сети, т.е.  $\beta = C$ .

Прокомментируем случай  $\eta = 0$ , когда личеры не участвуют в процессе раздачи данных, а только загружают данные от сидов. Если  $\gamma < \mu$ , выше сделанные выводы для случая  $\eta > 0$  остаются в силе, и  $T = 1/C$ . В противном случае, если  $\gamma > \mu$ , из системы (1) следует, что

$$\frac{dy(t)}{dt} \leq (\mu - \gamma)y(t).$$

Это означает, что число сидов  $\gamma(t)$  уменьшается, по крайней мере, экспоненциально. Таким образом, при  $\gamma > \mu$  число сидов будет экспоненциально стремиться к нулю, и система прекратит функционирование. Отметим, что при  $\eta > 0$  система

достигнет стационарного состояния независимо от значения интенсивности  $\gamma$  ухода сидов из системы. Поэтому в файлообменных P2P сетях важно, чтобы личеры раздавали друг другу данные. Даже если файлообмен не является эффективным (т.е.  $\eta \rightarrow 0$ ), участие личеров в процессе раздачи играет важную роль в поддержании функционирования системы.

В [5] обсуждаются другие особенности сетей типа BitTorrent, такие как эффективность загрузки и стимулирующие механизмы.

Отметим, что модель в [5] позволяет получить в явном виде условия равновесия системы и его устойчивости. Модель в [5] является прямой предшественницей обобщения в виде представленной далее модели на основе дифференциального уравнения в частных производных (ДУЧП).

В данном разделе построена жидкостная модель, описывающая динамику числа и состава пользователей (личеры и сиды) и особенности процесса загрузки частей файла в P2P-сети [17]. Модель является расширением ранее построенных моделей, в частности [4, 5, 15], и представляет собой ДУЧП. Построенная модель может быть использована для анализа как устойчивого состояния системы, когда число и состав пользователей не изменяются, так и неустановившегося состояния. Отметим также, что указанная модель подходит для описания обычного поведения системы при большом числе пользователей.

Рассмотрим P2P-сеть [4], где поступление новых пиров в сеть представляет собой пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ . Каждый пир  $n$  требует некоторого количества контента  $\sigma_n$  которое будем считать случайным с сопряжённой интегральной функцией распределения  $H(\sigma) := P(\sigma_n > \sigma)$ . Будем считать, что  $H$  является нормированной, такой что  $E[\sigma_n] = \int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma = 1$ . Пример  $H(\sigma)$  в экспоненциальном случае:  $H(\sigma) = e^{-\sigma}$  и в детерминированном случае:  $H(\sigma) = 1_{[0,1)}(\sigma)$ , где все пиры требуют одинаковый объем контента. Обозначим через  $x(t)$  общее количество личеров, присутствующих в системе в момент времени  $t$ .

Предположим, что общее число сидов в системе фиксировано и равно  $y_0$ , личеры после окончания загрузки полного файла немедленно покидают систему. Это идеализация довольно распространённой на практике ситуации, когда торренты в основном полагаются на группу постоянно присутствующих в системе сидов. Предполагается, что все действующие пиры участвуют в раздаче одинаково, пропускную способность раздачи каждого пира обозначим через  $\mu$  (количество контента в секунду).

Состояние системы определяется объёмом контента, который осталось загрузить каждому присутствующему в сети пиру, чтобы иметь полную копию запрошенного файла. Пусть  $F(t, \sigma)$  число личеров, у которых в момент  $t$  остаточная нагрузка больше чем  $\sigma$ . Если размер системы большой, мы можем считать функцию  $F(t, \sigma)$  жидкостной (действительной) переменной. Если личеры обслуживаются со скоростью  $r$  (возможно зависящей от общего числа пиров), то эволюционное уравнение для  $F(t, \sigma)$  имеет вид:

$$F(t + dt, \sigma) = F(t, \sigma + rdt) + \lambda H(\sigma) dt.$$

Первое слагаемое в правой части равенства определяет загрузку контента, второе слагаемое отвечает за вновь прибывших пиров.

Вычитая  $F(t, \sigma)$  из обеих частей данного равенства, деля на  $dt$ , и устремляя  $dt$  к нулю, мы приходим к следующему уравнению (ДУЧП) состояния системы:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda H(\sigma) + r \frac{\partial F}{\partial \sigma}.$$

Чтобы полностью задать модель, нужно выбрать подходящую функцию  $r = r(F, y, \sigma)$ . Введём следующие предположения, которые соответствуют принципам обмена данными в BitTorrent-like системах:

1) для обмена данными используется общая пропускная способность раздачи всех пользователей, личеров и сидов, т.е.  $\bar{R}_{up} = \mu(x + y_0)$ ;

2) полоса пропускания распределяется равномерно между всеми загружающими пирами независимо от состояния их процесса загрузки, т.е. в системе используется дисциплина равномерного разделения процессора (англ. Processor Sharing, PS).

В этих предположениях скорость загрузки данного личера при числе личеров  $x$  определяется равенством  $r = \mu \left( \frac{x+y_0}{x} \right)$  и, следовательно, динамика системы описывается следующим ДУЧП:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda H(\sigma) + \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma}, \quad (3)$$

где  $x(t) := F(t, 0)$  — число личеров в сети и  $F(t, \infty) = 0$  — граничное условие для любого  $t$ .

В качестве примера рассмотрим случай экспоненциальной функции распределения  $H(\sigma) = e^{-\sigma}$ . В этом случае решение можно искать разделением переменных, т.е. в виде  $F(t, \sigma) = x(t)e^{-\sigma}$ . Подставляя указанную функцию в уравнение (3), после преобразований получаем

$$\dot{x}(t) = \lambda - \mu(x(t) + y_0). \quad (4)$$

Это ОДУ рассмотрено в [15], т.е. представляет собой первое уравнение системы (1) с учётом введённых выше предположений. Уравнение (4) описывает случай фиксированного числа сидов. Предположение об экспоненциальной функции распределения  $H(\sigma)$  объёма запрашиваемого контента соответствует случаю, когда контент представляет собой набор файлов, и пиры могут быть заинтересованы в разных его частях, поэтому объём запрашиваемого контента может быть случайной величиной с заданным распределением. На практике более интересен случай, когда все пиры требуют один и тот же контент (файл или набор файлов фиксированного размера), так что функция распределения детерминированная и имеет вид  $H(\sigma) = 1_{[0,1]}(\sigma)$ . В данном случае уравнение (3) сводится к следующему уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \lambda + \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (5)$$

для  $0 \leq \sigma \leq 1$  с граничным условием  $F(t, 1) = 0$  для любого  $t$ . В [17] показано аналитически и подтверждено имитационным моделированием, что ДУЧП (5) описывает динамику системы точнее, чем ОДУ (4).

Проанализируем равновесие динамического уравнения (3). Значения параметров системы в положении равновесия будем обозначать символами со звёздочкой \*. Полагая  $\partial F / \partial t = 0$  и интегрируя на положительной вещественной полуоси, получаем

$$\lambda \int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma + \mu \left( \frac{x^* + y_0}{x^*} \right) \int_0^{\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} d\sigma = 0.$$

Из условия нормировки  $\int_0^{\infty} H(\sigma) d\sigma = 1$  и из условий для  $F$  имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial F^*}{\partial \sigma} d\sigma = -F^*(0) = -x^*.$$

Итак, в положении равновесия число личеров должно удовлетворять следующему условию:

$$\lambda - \mu(x^* + y_0) = 0.$$

Рассмотрим функцию  $\rho := \frac{\lambda}{\mu}$ , которая является аналогом предложенной нагрузки на систему, здесь  $\frac{1}{\mu}$  — среднее время загрузки файла. Если  $\rho < y_0$ , сиды могут справляться с нагрузкой без помощи личеров, и мы имеем систему, поддерживаемую сидами. В данном случае, не существует равновесия при положительном  $x^*$  и решение ДУЧП приближается к 0 при  $t \rightarrow \infty$ .

Наиболее важным является случай, когда  $\rho > y_0$ . Здесь сиды в одиночку не могут справиться с нагрузкой, и система может быть стабилизирована только с помощью вклада личеров. Вводя функцию  $\bar{H} = \int_0^{\infty} H(s) ds$ , связанную с распределением остаточного времени жизни из теории восстановления, используя граничное условие  $F^*(\infty) = 0$ , условие равновесия примет вид

$$F^*(\sigma) = (\rho - y_0)\bar{H}(\sigma). \quad (6)$$

Поэтому в положении равновесия в системе присутствуют  $x^* = \rho - y_0$  личеров, при этом суммарный объем контента, который осталось загрузить всем присутствующим в сети личерам, имеет распределение остаточного времени жизни  $\bar{H}$ . Для случая детерминированного распределения  $H(\sigma) = 1_{[0,1)}(\sigma)$  имеем  $\bar{H}(\sigma) = 1 - \sigma$  для  $\sigma \in [0, 1]$ . Из (6) следует, что в этом случае в положении равновесия и сиды, и личеры участвуют в процессе загрузки.

Для анализа локальной устойчивости равновесия (6) вводим дополнительные переменные  $\delta x$ ,  $f$ , такие что  $x = x^* + \delta x$  и  $F = F^* + f$ , и возмущающую функцию  $n(t)$  в поступления пиров. Тогда (3) принимает вид

$$\frac{\partial(F^* + f)}{\partial t} = (\lambda + n(t))H(\sigma) + (r^* + \delta r)\frac{\partial(F^* + f)}{\partial \sigma}.$$

Используя условие равновесия и отбрасывая слагаемые высшего порядка, можно получить линейризованное уравнение. Далее, используя методы теории управления с обратной связью, можно установить локальную устойчивость системы около положения равновесия и оценить отклонение от равновесия.

Рассмотрим случай, когда отсутствует поступление личеров в сеть, следовательно, спустя конечное время система опустошится вследствие того, что все имеющиеся в сети личеры закончили загрузку. Оценим время до окончания загрузки. В уравнении (3) исключим слагаемое, отвечающее за поступление личеров в сеть:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \mu \left( \frac{x + y_0}{x} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma}.$$

Предполагаем, что  $F(0, \sigma) = \varphi(\sigma)$  — строго убывающая дифференцируемая функция  $\sigma$ , причём  $x_0 := \varphi(0)$  — начальное число личеров и  $\varphi(\infty) = 0$ .

**Утверждение.** Время, необходимое для того, чтобы P2P-система с  $y_0$  пирами при начальном условии  $\varphi(\sigma)$  с дисциплиной обслуживания PS полностью опустошилась (время до окончания загрузки), определяется по формуле

$$T = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\sigma)}{\varphi(\sigma) + y_0} d\sigma.$$

**Следствие.** В случае детерминированного распределения время до окончания загрузки  $T$  удовлетворяет неравенству

$$T \leq \frac{1}{\mu} \frac{x_0}{x_0 + y_0}. \quad (7)$$

При этом равенство в приведённом выше выражении достигается, когда начальное условие  $\varphi$  приближается к функции  $x_0 1_{[0,1)}(\sigma)$ .

Заметим, в частности, что  $T$  ограничена сверху величиной  $\frac{1}{\mu}$ , т.е. время до окончания конечно и не превышает среднего времени загрузки  $\frac{1}{\mu}$  — времени передачи копии файла. Эта единое ограничение сохраняется и не зависит от первоначального числа личеров. Это свидетельствует о хорошей масштабируемости файлообменного механизма P2P: если спрос большой, предложение изменяется в соответствии с ним.

Сравним выводы утверждения и следствия из него с аналогичными выводами для модели (4) на основе ОДУ, в которой не учитывается процесс загрузки. При отсутствии поступления личеров в сеть уравнение (4) принимает вид

$$\dot{x}(t) = -\mu(x(t) + y_0), \quad x(0) = x_0.$$

В этом случае время до окончания загрузки определяется по формуле

$$T' = \int_0^{\infty} \frac{1}{\mu} \frac{1}{x + y_0} dx = \frac{1}{\mu} \log \left( 1 + \frac{x_0}{y_0} \right). \quad (8)$$

Итак, модель (4) даёт  $T' \rightarrow \infty$  при  $x_0 \rightarrow \infty$  только логарифмически. Имитационный эксперимент, выполненный с использованием сетевого симулятора ns2, показал, что оценка времени до окончания загрузки с помощью формулы (7) даёт лучшее приближение, чем оценка (8) для модели (4).

## 4. Заключение

Анализ построенных жидкостных моделей и проведённое имитационное моделирование подчёркивают хорошую масштабируемость P2P-сети. Исследование показало, что построенная в виде системы ОДУ модель (4), в которой не различаются требования к объёму файлов в процессе загрузки, не позволяет провести анализ этой важной характеристики сети. В таком анализе решающую роль играет информация об объёме файлов, запрашиваемых пользователями, учитывающаяся в построенной в виде ДУЧП модели (3).

В дальнейших исследованиях планируется рассмотреть обобщённую модель ДУЧП для случая присутствия в системе нескольких классов пиров с неоднородной пропускной способностью раздачи, а также для случая переменного числа сидов. В указанных случаях можно получить результаты, аналогичные приведённым выше, и также проверить их, используя имитацию пакетного уровня.

## Литература

1. The BitTorrent Protocol Specification. — [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003).
2. Amad M., Meddahi A., Aissani D. P2P Networks Management Survey // International Journal of Computer Sciences Issues (IJCSI). — 2012. — Vol. 9(1), No 3. — Pp. 143–148.

3. *Адаму А., Гайдамака Ю. В.* Аппроксимация нормальным законом вероятностных характеристик модели сети P2P TV // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 3. — С. 63–68.
4. *Yang X., de Veciana G.* Service Capacity of Peer to Peer Networks // Proceedings of IEEE INFOCOM. — Vol. 4. — 2004. — Pp. 2242–2252.
5. *Qiu D., Srikanth R.* Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks // Proceedings of ACM SIGCOMM. — Vol. 34, No 4. — 2004. — Pp. 367–378.
6. *Clevenot F., Nain P.* A Simple Model for the Analysis of the Squirrel Peer-to-Peer Caching System // Proceedings of IEEE INFOCOM. — 2004.
7. *Адаму А., Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К.* Построение и анализ модели воспроизведения каналов вещательного телевидения в P2P сети // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 3 (1). — С. 47–53.
8. *Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К.* Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // Т-Comm: Телекоммуникации и Транспорт. — 2013. — № 11. — С. 77–81.
9. *Ramachandran K. K., Sikdar B.* A Queuing Model for Evaluating the Transfer Latency of Peer-to-Peer Systems // Proceedings of IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems. — Vol. 21, No 3. — 2010. — Pp. 367–378.
10. *Mordji Z., Amad M., Aissani D.* A Derived Queuing Network Model for Structured P2P Architectures // VECoS 2014. — 2014. — Pp. 76–84.
11. Napster company info. — <http://us.napster.com/availability>.
12. The Gnutella Protocol Specification v0.4. — <https://gnunet.org/node/147>.
13. What is Freenet? Freenet company info. — <https://freenetproject.org>.
14. HPM: A Novel Hierarchical Peer-to-Peer Model for Lookup Acceleration with Provision of Physical Proximity / M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, Z. Zhangb // Journal of Network and Computer Applications. — 2012. — Vol. 35, No 6. — Pp. 1818–1830.
15. *Самуйлов К. Е., Бобрикова Е. В.* Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2012. — № 7. — С. 180–184.
16. *Бобрикова Е. В., Литвин А. А.* Динамика изменения числа пользователей файлообменной P2P-сети // Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием «Информационно-телекоммуникационные технологии и математическое моделирование высокотехнологичных систем» 23–27 апреля 2012. — 2012. — С. 67–68.
17. *Ferragut A., Paganini F.* Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks // IEEE Trans. on Control of Network Systems. — Vol. 3(1). — 2016. — Pp. 34–45.

UDC 621.39

## The Application of Fluid Models to the Analysis of Peer-to-Peer Network

**Y. V. Gaidamaka, E. V. Bobrikova, E. G. Medvedeva**

*RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

The application of the fluid models to the analysis of the streams in information and communication networks is presented. The models, considered in the paper, take into account the specificities of widespread P2P networks (peer-to-peer), used for file-sharing, parallel computing, IP telephony, video streaming, etc. The review of the main types of P2P networks and their associated analytical models are presented in the paper. The fluid models, presented in the paper, describe network traffic in terms of the changes over time data stream rates between users and in terms of the number of network users. The first model is a system of ordinary differential equations and allows to analyze the average file download time. The second model is the extension of the first model and is represented in the form of partial differential equation. It takes

into account a random amount of data requested by users. It can be used to analyze both the transient state and steady state during the download. This model is suitable to study the behavior of the system with a large number of users. In addition to the average download time the second model, taking into account the population in the network, allows to analyze such parameters of the network performance as the number of leechers and seeders in the network.

**Key words and phrases:** peer-to-peer network (P2P), fluid model, leecher, seeder, peer, latency

## References

1. The BitTorrent Protocol Specification.  
URL [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003)
2. M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, P2P Networks Management Survey, International Journal of Computer Sciences Issues (IJCSI) 9(1) (3) (2012) 143–148.
3. A. Adamu, Y. V. Gaidamaka, Approximation of a Universal Streaming Probability with the Normal Distribution, Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Informatics. Physics” (3) (2011) 63–68, in Russian.
4. X. Yang, G. de Veciana, Service Capacity of Peer to Peer Networks, in: Proceedings of IEEE INFOCOM, Vol. 4, 2004, pp. 2242–2252.
5. D. Qiu, R. Srikant, Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks, in: Proceedings of ACM SIGCOMM, Vol. 34, 2004, pp. 367–378.
6. F. Clevnet, P. Nain, A Simple Model for the Analysis of the Squirrel Peer-to-Peer Caching System, in: Proceedings of IEEE INFOCOM, 2004.
7. A. Adamu, Y. V. Gaidamaka, A. K. Samuilov, Playback Model for Broadcast Television Channels in P2P Networks, Bulletin of PFUR. Series “Mathematics. Informatics. Physics” 3 (1) (2010) 47–53, in Russian.
8. Y. V. Gaidamaka, A. K. Samuilov, Analysis of Playback Continuity for Video Streaming in Peer-to-Peer Networks with Data Transfer Delays, T-Comm: Telecommunications and Transport (11) (2013) 77–81, in Russian.
9. K. K. Ramachandran, B. Sikdar, A Queuing Model for Evaluating the Transfer Latency of Peer-to-Peer Systems, in: Proceedings of IEEE Transaction on Parallel and Distributed Systems, Vol. 21, 2010, pp. 367–378.
10. Z. Mordji, M. Amad, D. Aissani, A Derived Queuing Network Model for Structured P2P Architectures, in: VECoS 2014, 2014, pp. 76–84.
11. Napster company info.  
URL <http://us.napster.com/availability>
12. The Gnutella Protocol Specification v0.4.  
URL <https://gnunet.org/node/147>
13. What is Freenet? Freenet company info.  
URL <https://freenetproject.org>
14. M. Amad, A. Meddahi, D. Aissani, Z. Zhangb, HPM: A Novel Hierarchical Peer-to-Peer Model for Lookup Acceleration with Provision of Physical Proximity, Journal of Network and Computer Applications 35 (6) (2012) 1818–1830.
15. K. E. Samouylov, E. V. Bobrikova, A Simple Fluid Model of P2P File Sharing Network, T-Comm: Telecommunications and Transport (7) (2012) 180–184, in Russian.
16. E. V. Bobrikova, A. A. Litvin, The Evolution of the Number of Peers in a P2P File Sharing System, in: Proceedings of All-Russian Conference with International Participation Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of IT-systems 23–27 April 2012, 2012, pp. 67–68, in Russian.
17. A. Ferragut, F. Paganini, Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks, Vol. 3(1), 2016, pp. 34–45.

---

УДК 621.39

**Модель соты LTE с межмашинным трафиком в виде мультисервисной системы массового обслуживания с эластичными и потоковыми заявками и марковским входящим потоком**

**В. М. Вишнеvский<sup>\*</sup>, К. Е. Самуйлов<sup>†</sup>,  
В. А. Наумов<sup>‡</sup>, Н. В. Яркина<sup>†</sup>**

<sup>\*</sup> *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*

<sup>†</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>‡</sup> *Исследовательский институт инноваций, Хельсинки, Финляндия*

Интернет вещей (ИВ) имеет все шансы стать “третьей волной” в развитии Интернета и существенно поменять лицо отрасли связи как в технологическом, так и в экономическом отношении. Однако для того чтобы это стало реальностью, должна быть создана инфокоммуникационная инфраструктура, обеспечивающая функции сетевого доступа и управления миллионам, а то и миллиардам ИВ-устройств. Сети LTE займут центральное место в этой инфраструктуре при условии, что соответствующие стандарты будут доработаны для обеспечения массового межмашинного взаимодействия без ущерба для предоставления традиционных услуг абонентам. Настоящая работа посвящена построению модели распределения радиоресурсов в соте сети LTE, обслуживающей два типа трафика: телефонии и межмашинного взаимодействия. Модель построена в виде мультисервисной системы массового обслуживания с потоковыми и эластичными заявками. Ресурсы для пропуска трафика межмашинного взаимодействия выделяются диапазонами фиксированного размера, а поступление запросов на его передачу описывается с помощью марковского входящего потока (Markovian Arrival Process, MAP). В работе получены стационарное распределение вероятностей состояний системы и формулы для стационарных вероятностей потерь заявок.

**Ключевые слова:** Интернет вещей, сеть LTE, мультисервисная система массового обслуживания, марковский входящий поток, MAP-поток

## 1. Введение

В последние годы эволюция сетей сотовой подвижной связи была направлена в первую очередь на повышение скорости передачи данных и обеспечение высокого качества обслуживания (quality of service, QoS), что связано прежде всего с распространением мультимедийных и интерактивных приложений. Однако расширение межмашинных коммуникаций (machine to machine, M2M), влекущее за собой развитие Интернета вещей (ИВ; Internet of Things, IoT), предъявляет к сетям иные, во многом противоположные требования, обусловленные характеристиками трафика, генерируемого приложениями данного типа, а также ограничениями на передающие устройства (дешевизна, долгий срок службы элементов питания).

Интернет вещей — это не просто совокупность разнообразных приборов и датчиков, связанных между собой проводными и беспроводными каналами связи и подключенных к сети Интернет. Под ИВ понимают глобальную инфокоммуникационную инфраструктуру с возможностями автоматического конфигурирования, которая объединяет физические и виртуальные “вещи”, обладающие не только физическими свойствами, но и виртуальной субъектностью, и таким образом обеспечивает более тесную интеграцию реального и виртуального миров, где взаимодействие осуществляется как между людьми, так и между устройствами. Предполагается, что в

---

Статья поступила в редакцию 30 октября 2016 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и DST (Индия) (грант № 16-49-02021) в рамках совместного научно-исследовательского проекта Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук и CMS Колледжа Коттаям.

будущем “вещи” станут активными участниками хозяйственной, социальной и информационной деятельности, смогут взаимодействовать между собой и с окружающим миром путем обмена информацией об окружающей среде, автономного реагирования на события реального мира и влияния на них, выполняя действия или запуская процессы в том числе и без прямого участия человека [1].

Существующие и потенциальные приложения ИВ весьма разнообразны, однако по требованиям к устройствам и характеристикам трафика их разделяют на две крупные категории: массовые (также называемые massive MachineType Communications, mMTC) и критические. Данные категории и сферы применения соответствующих приложений и устройств представлены в табл. 1. Перечисленные в табл. 1 характеристики обозначают, условно говоря, границы шкалы, на которой можно разместить самые различные приложения ИВ. Исходя из известных на сегодняшний день технологий, можно предположить, что приложения массового типа будут обеспечивать существенно большее число подключений по сравнению с критическими приложениями, однако последние смогут приносить более высокий доход оператору сети связи.

Таблица 1

## Основные категории приложений ИВ

Тип приложений	Массовый	Критический
<b>Характеристики устройств и трафика</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– низкая стоимость устройств и их эксплуатации;</li> <li>– низкое энергопотребление;</li> <li>– малый объем передаваемых данных;</li> <li>– чрезвычайно большое количество устройств</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– высочайшая надежность;</li> <li>– крайне низкая задержка передачи данных;</li> <li>– крайне высокая готовность</li> </ul>
<b>Примеры сфер применения</b>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– «умные» здания и города;</li> <li>– «умное» сельское хозяйство;</li> <li>– коммунальное хозяйство (счетчики, освещение и т. п.);</li> <li>– логистика и отслеживание грузов;</li> <li>– носимые устройства и др.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>– телемедицина, включая удаленную хирургию;</li> <li>– безопасность дорожного движения и беспилотный транспорт;</li> <li>– робототехника и др.</li> </ul>

Концепция ИВ была официально представлена отрасли Международным Союзом Электросвязи еще в 2005 г. в одноименном докладе [2], однако, для того чтобы это направление стало полноценной “третьей волной” в развитии сети Интернет (“второй волной” принято считать распространение доступа в Интернет с мобильных устройств), необходимо развертывание сетевой и информационной инфраструктуры, которая могла бы поддержать лавинообразный рост M2M-соединений и обеспечить необходимые функции управления. Весьма вероятно, что такая инфраструктура не будет однородной, по крайней мере на начальном этапе развития ИВ. Уже сегодня на место в ней претендуют как широко известные, так и новые, разработанные специально для обслуживания массового ИВ технологии и протоколы сетевого доступа, среди которых стандарты проводной связи (Ethernet, оптоволоконные сети доступа, VASnet и др.), стандарты сотовой подвижной связи (GPRS, EDGE, HSPA, LTE и LTE Advanced), технологии ячеистых (mesh) сетей (например, ZigBee), технологии энергоэффективных сетей дальнего радиуса действия (low-power wide-area network, LPWAN), включая SigFox и LoRa, стандарты сетей связи через линии

электропередачи (PRIME, G3) и стандарты беспроводных локальных и городских вычислительных сетей (Wi-Fi и WiMAX) [3].

Стандарты сетей сотовой подвижной связи занимают в этом ряду особое место, поскольку обладают такими преимуществами, как широчайшая зона покрытия, устойчивое положение операторов на рынке услуг связи и поддержка производителей оборудования, возможность обслуживать широкий спектр ИВ-приложений, не ограничиваясь простейшими передающими устройствами, управление качеством обслуживания (QoS), управление доступом и безопасностью. При работе над вышедшем в середине 2016 г. релизом 13 спецификаций LTE (LTE Advanced Pro), межмашинным коммуникациям и ИВ было уделено особое внимание. За очень короткое время 3GPP подготовил вошедший в этот релиз специальный стандарт для обслуживания межмашинных соединений массового типа NB-IoT (Narrowband Internet of Things — узкополосный Интернет вещей), позволяющий оператору сети LTE использовать имеющуюся инфраструктуру для развертывания сети доступа для простейших стационарных ИВ-устройств (скорость передачи данных до 200 кбит/с) и призванный составить конкуренцию быстро распространяющимся технологиям LPWAN SigFox и LoRa. Кроме того, в арсенале 3GPP для обслуживания M2M-трафика массового типа имеются технологии EC-GSM-IoT (Extended Coverage GSM for IoT) и LTE Cat-M1 (также известная как enhanced Machine-Type-Communications, eMTC, или LTE-M), первая из которых предназначена для развертывания сети массового ИВ на сети GSM, тогда как вторая позволяет обслуживать M2M-устройства с максимальной скоростью передачи 1 Мбит/с и ограниченной мобильностью в сотах LTE. Важнейшую роль в обеспечении межмашинного взаимодействия играет изначально предназначенный для обслуживания основного трафика LTE стандарт 3GPP LTE Cat 1. Он применяется для подключения M2M-устройств, которым необходима полная мобильность и/или передача данных со скоростью более 1 Мбит/с. К таким устройствам относятся носимые устройства, устройства, осуществляющие передачу видео или аудио, устройства, которыми оснащен автотранспорт и др.

На данный момент не существует общепринятого подхода к обслуживанию M2M-устройств в сетях связи общего пользования, в том числе оптимального метода для распределения ограниченного количества радиоресурсов между пользователями услуг связи и большим количеством подобных устройств. Однако учитывая большой рыночный потенциал данного сегмента, операторы совместно с международными стандартизирующими организациями формулируют широкий класс задач планирования радиоресурсов для эффективного обслуживания трафика ИВ [4–9]. Общими для большинства исследований являются такие характеристики M2M-трафика, как малый размер передаваемых блоков данных и большое количество подключаемых устройств. Значительное число работ посвящено исследованию задачи предотвращения перегрузок на базовой станции беспроводной сети последующего поколения с M2M-трафиком [4, 6, 10, 11]. Результаты подобных исследований позволяют оператору принять решение использовать ту или иную схему выделения доступных частотно-временных ресурсов для передачи блоков данных от M2M-устройств [8, 12, 13]. Схема динамического распределения радиоресурсов соты сети LTE, когда для обслуживания трафика межмашинного взаимодействия выделяются фиксированные диапазоны пропускной способности, а остальные ресурсы доступны для пользователей телефонии, предложена в [14]. Здесь же в терминах математической теории телетрафика построена модель такой соты и рассмотрены ее ветвятно-временные характеристики, для того чтобы оценить эффективность предложенной схемы для обеспечения требований к качеству обслуживания. Однако в предложенной модели поступление запросов на передачу блоков данных от M2M-устройств для простоты моделируется с помощью пуассоновского входящего потока. В настоящей работе также рассматривается сота LTE с трафиком телефонии и M2M, однако, в отличие от [14], поступление запросов на передачу M2M-трафика описывается с помощью более общего марковского входящего потока (Markovian Arrival Process, MAP).

## 2. Постановка задачи

Будем рассматривать соту сети LTE, в которой предоставляется услуга телефонии (или любая другая услуга, требующая широкополосной передачи потоков данных), а также передаются блоки данных M2M-устройств. Перед тем как перейти к построению математической модели, сделаем ряд упрощающих предположений относительно функционирования рассматриваемой соты сети (см. рис. 1). Будем предполагать, что все пользователи услуги телефонии и M2M-устройства имеют одинаковое значение отношения сигнал/шум и не меняют своего положения относительно базовой станции. Таким образом, устанавливаемые радиоканалы будут иметь одинаковые характеристики, и скорость передачи данных будет зависеть только от количества выделенных единиц канального ресурса. Под единицей канального ресурса (ЕКР) подразумевается некая условная величина, которая соответствует минимально допустимой скорости передачи данных (например, в бит/с) для заданного количества выделенных физических ресурсных блоков. Будем считать, что пиковая пропускная способность соты составляет  $C$  ЕКР.

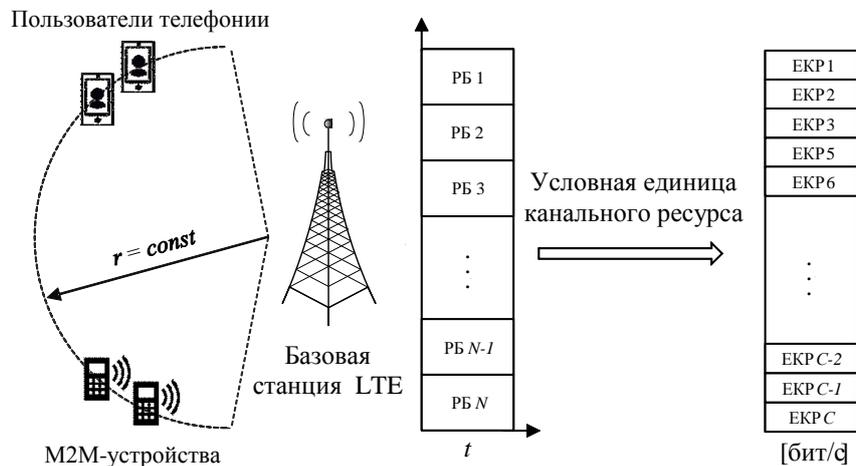


Рис. 1. Упрощающие предположения и условная единица канального ресурса

С ростом интенсивности предложенной нагрузки планировщик на базовой станции сети LTE должен определять оптимальный размер диапазона радиоресурсов, исходя из установленных оператором сети ограничений на качество обслуживания, например вероятность потерь запросов пользователей телефонии и среднее время передачи блоков данных M2M-устройств. Поскольку зачастую блоки M2M-данных имеют крайне малый размер и поступают от большого количества устройств, оказывается нецелесообразно выделять для передачи данных от одного M2M-устройства целый ресурсный блок (РБ, диапазон частот), который является минимальным ресурсным элементом, выделяемым планировщиком базовой станции LTE [15]. В [6, 10, 12] рассматривается выделение одного ресурсного блока для передачи данных от множества M2M-устройств. В частности, в исследовании [12] предложена модель обслуживания M2M-устройств с помощью искусственно (виртуально) выделенных поднесущих на доступной частотной емкости соты LTE.

Для того чтобы сети беспроводной связи последующих поколений стали эффективным механизмом обслуживания M2M-трафика необходимо разработать такие методы распределения радиоресурсов, которые обеспечат минимальное влияние на качество обслуживания традиционных абонентов, приносящих пока основной доход операторам сетей связи. Поэтому будем считать, что часть ЕКР соты доступна

только трафику телефонии и не может использоваться для передачи данных от М2М-устройств.

### 3. Система массового обслуживания

Функционирование такой соты LTE может быть описано в терминах теории телетрафика с помощью мультисервисной системы массового обслуживания (СМО) с потоковыми заявками, которые соответствуют вызовам телефонии, и эластичными заявками, соответствующими передаче блоков данных М2М-устройств. Пусть на СМО, состоящую из  $C$  приборов и не имеющую мест для ожидания, поступают заявки двух типов: потоковые и эластичные (рис. 2). Эластичным заявкам доступно  $C_E \leq C$  приборов и они обслуживаются в соответствии с дисциплиной справедливого разделения процессора (Egalitarian Processor Sharing, EPS [16]), однако для обслуживания одной эластичной заявки в каждый момент времени требуется не менее  $b$  приборов. При этом пусть приборы для обслуживания эластичных заявок выделяются блоками по  $C \geq b$  приборов. Потоковым заявкам в каждый момент времени доступны все приборы системы, не вошедшие в блоки приборов, выделенные для обслуживания эластичных заявок.

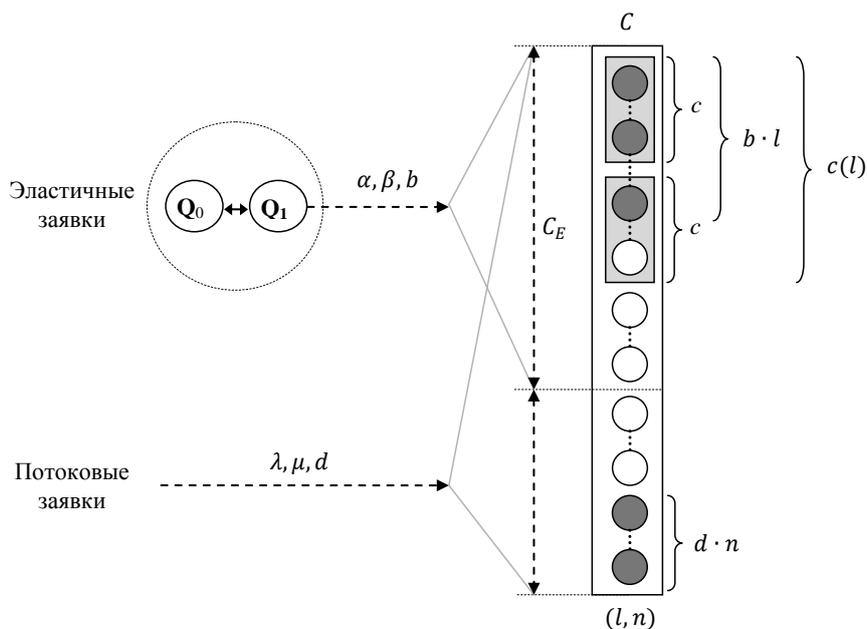


Рис. 2. СМО с потоковыми и эластичными заявками

Положим, что входящий поток эластичных заявок является МАР-поток. Поток эластичных заявок поступает на систему от источника, который может находиться в одном из  $K$ -состояний и характеризуется двумя квадратными матрицами  $Q_0$  и  $Q_1$  порядка  $K$ ,  $Q_1 \geq 0$ ,  $Q_0 + Q_1 = Q$ , где  $Q$  матрица интенсивностей переходов цепи Маркова описывающей состояния источника [17, 18]. Мы предполагаем, что матрица  $Q_1$  отлична от нулевой, а матрица  $Q$  неприводима. Обозначим  $q$  вектор-строку стационарных вероятностей состояний источника и  $1$  вектор-столбец из единиц. Тогда интенсивность поступающего потока эластичных заявок дается формулой  $\alpha = \mathbf{q}Q_11$ . Пусть длины эластичных заявок распределены по экспоненциальному закону с параметром  $\beta$ . Напомним, что в системе EPS с одним прибором остаточная

длина заявки – это количество работы по ее обслуживанию с единичной скоростью, измеряемое в единицах времени [16]. При этом заявка обслуживается с переменной скоростью до тех пор, пока ее остаточная длина не станет равной нулю.

Обозначим  $M = \lfloor c/b \rfloor = \max \{y \in N : y \leq \frac{c}{b}\}$  максимальное число эластичных заявок, которые могут быть одновременно обслужены одним блоком приборов. Поскольку для обслуживания эластичных заявок может быть выделено самое большое  $S = \lfloor C_E/c \rfloor = \max \{y \in N : y \leq \frac{C_E}{c}\}$  таких блоков, максимальное число эластичных заявок, которые могут быть одновременно обслужены СМО, равняется  $L = MS$ . Если в системе находится  $l$  эластичных заявок, то общее число обслуживающих их приборов равно  $c(l) = c \cdot \lceil l/M \rceil = c \cdot \min \{y \in N : y \geq l/M\}$ , причем ресурс этих приборов равномерно распределяется между всеми эластичными заявками, то есть каждая из них обслуживается  $\frac{c(l)}{l}$  приборами.

Пусть в системе обслуживаются  $l$  эластичных заявок. Тогда при поступлении в систему  $(l+1)$ -й эластичной заявки происходит следующее:

1. Если на момент поступления  $c(l+1) = c(l)$ , то заявка принимается на обслуживание без выделения дополнительных приборов. При этом ресурс приборов перераспределяется поровну между  $(l+1)$  заявками (каждая эластичная заявка обслуживается  $\frac{c(l+1)}{l+1} = \frac{c(l)}{l+1}$  приборами вместо  $\frac{c(l)}{l}$ ; скорость обслуживания падает).
2. Если на момент поступления заявки  $c(l+1) > c(l)$ ,  $c(l+1) \leq C_E$  и среди доступных эластичным заявкам приборов есть  $c$  свободных приборов, заявка принимается на обслуживание с выделением дополнительно блока из  $c$  приборов. При этом скорость обслуживания всех эластичных заявок возрастет, так как они дополнительно получают свободный ресурс нового блока.
3. В противном случае (выделение блока требуется, но свободных приборов не достаточно) заявка будет потеряна.

Если эластичная заявка была принята на обслуживание, она будет находиться в системе до тех пор, пока ее остаточная длина не станет равной нулю, после чего покинет систему. Пусть в системе находятся  $l$  эластичных заявок. Тогда в момент ухода любой эластичной заявки приборы перераспределяются между оставшимися заявками этого типа следующим образом:

1. Если  $c(l-1) = c(l)$  (оставшиеся заявки нельзя «утрамбовать» в меньшее число блоков), приборы не освобождаются, а перераспределяются поровну между оставшимися эластичными заявками, скорость обслуживания которых увеличивается.
2. Если  $c(l-1) < c(l)$ , то блок из  $c$  приборов высвобождается, а оставшиеся эластичные заявки занимают  $c(l-1)$  приборов, деля их ресурс поровну (скорость обслуживания падает).

Для обслуживания одной потоковой заявки требуется  $d$  приборов. Предполагается, что поступающие заявки этого типа образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$  и время занятия ими приборов распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Пусть в системе обслуживается  $l$  эластичных заявок и  $n$  потоковых заявок. Тогда для обслуживания потоковых заявок доступны  $C - c(l)$  приборов, которые могут обслужить максимум  $N(l) = \lfloor (C - c(l))/d \rfloor$  потоковых заявок. При поступлении в систему потоковая заявка будет принята на обслуживание, если на момент ее поступления свободны хотя бы  $d$  приборов. Заявка занимает  $d$  приборов на время своего обслуживания, после чего покидает систему ( $d$  приборов при этом высвобождаются). Если при поступлении потоковой заявки  $n+1 > N(l)$ , значит в системе меньше чем  $d$  свободных приборов и поступившая потоковая заявка будет потеряна. Добавим, что в данных обозначениях поступившая эластичная заявка будет потеряна, если в момент ее поступления  $n > N(l+1)$ .

#### 4. Стационарное распределение вероятностей состояний СМО и ее стационарные характеристики

Обозначим  $l(t)$  число обслуживаемых СМО эластичных заявок,  $n(t)$  — число потоковых заявок, и  $k(t)$  — состояние источника в момент времени  $t \geq 0$ . Тогда функционирование СМО описывает составной марковский процесс  $X(t) = (l(t), n(t), k(t))$ ,  $t \geq 0$ , с пространством состояний  $X = \{(l, n, k) | l \geq 0, n \geq 0, l \leq L, c(l) + nd \leq C, 1 \leq k \leq K\}$ .

Матрица интенсивностей переходов  $\mathbf{A}$  этого процесса является блочной трехдиагональной:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_0 & \Lambda_0 & & & & & \\ \mathbf{M}_1 & \mathbf{D}_1 & \Lambda_1 & & & & \\ & \mathbf{M}_2 & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \mathbf{D}_{L-1} & \Lambda_{L-1} & & \\ & & & \mathbf{M}_L & \mathbf{D}_L & & \end{bmatrix}. \quad (1)$$

В этой матрице блок, находящийся на пересечении  $i$ -й блочной строки и  $j$ -го блочного столбца, сам является блочной матрицей, имеющей блочный размер  $(N(i) + 1) \times (N(j) + 1)$  и составленной из квадратных матриц порядка  $K$ . Диагональные блоки матрицы  $\mathbf{A}$  имеют блочную трехдиагональную структуру:

$$\mathbf{D}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{l,0} & \lambda \mathbf{I} & & & & & \\ \mu \mathbf{I} & \mathbf{F}_{l,1} & \lambda \mathbf{I} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & N(l+1)\mu \mathbf{I} & \mathbf{F}_{l,N(l+1)} & \lambda \mathbf{I} & & \\ & & & (N(l+1)+1)\mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{l,N(l+1)+1} & \lambda \mathbf{I} & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & (N(l)-1)\mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{l,N(l)-1} & \lambda \mathbf{I} \\ & & & & & & N(l)\mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{l,N(l)} \end{bmatrix}, \quad 0 \leq l < L,$$

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{L,0} & \lambda \mathbf{I} & & & & & \\ \mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{L,1} & \lambda \mathbf{I} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & (N(L)-1)\mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{L,N(L)-1} & \lambda \mathbf{I} & & \\ & & & N(L)\mu \mathbf{I} & \mathbf{G}_{L,N(L)} & & \end{bmatrix},$$

где

$$\mathbf{F}_{lj} = \mathbf{Q}_0 - (\lambda + j\mu + c(l)\beta)\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_{lj} = \mathbf{Q} - (\lambda + j\mu + c(l)\beta)\mathbf{I}, \quad j \neq N(l),$$

$$\mathbf{F}_{lN(l)} = \mathbf{Q}_0 - (N(l)\mu + c(l)\beta)\mathbf{I}, \quad \mathbf{G}_{lN(l)} = \mathbf{Q} - (N(l)\mu + c(l)\beta)\mathbf{I},$$

а внедиагональные блоки матрицы  $\mathbf{A}$  являются блочными диагональными прямоугольными матрицами:

$$\mathbf{M}_l = \text{diag}(c(l)\beta\mathbf{I}, \dots, c(l)\beta\mathbf{I}), \quad \Lambda_l = \text{diag}(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_1). \quad (2)$$

Запишем стационарное распределение вероятностей процесса  $X(t)$  в векторном виде, согласованном с разбиением (1) матрицы интенсивностей переходов  $A$  на блоки:  $p = (p_0, p_1, \dots, p_L)$ , где  $p_l = (p_{l,0}, p_{l,1}, \dots, p_{l,N(L)})$ ,  $0 \leq l \leq L$ .

Учитывая специальный вид поддиагональных блоков  $M_l$  матрицы  $A$ , вектор  $p$  можно вычислить с помощью алгоритма, предложенного в [19]. Зная стационарное распределение вероятностей, легко вычислить вероятности блокировок потоковых  $B_{\Pi}$  и эластичных  $B_{\Sigma}$  заявок:

$$B_{\Pi} = \sum_{l=0}^L \mathbf{p}_{l,N(l)} \mathbf{1}, \quad B_{\Sigma} = \frac{1}{\alpha} \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{n=N(l+1)+1}^{N(l)} \mathbf{p}_{l,n} \mathbf{Q}_1 \mathbf{1}.$$

Длительности обслуживания эластичных заявок имеют функцию распределения фазового типа, которая характеризуется 1) стационарным распределением  $\tilde{p}$  цепи Маркова, вложенной по моментам поступления эластичных заявок, и 2) матрицей интенсивностей переходов  $\tilde{A}$  марковского процесса, обрывающегося в момент ухода рассматриваемой эластичной заявки из системы. Поэтому зная стационарное распределение  $\tilde{p}$  и матрицу  $\tilde{A}$ , нетрудно вычислить моменты длительностей обслуживания эластичных заявок. Зная стационарное распределение  $p$  процесса  $X(t)$ , стационарное распределение  $\tilde{p}$  цепи Маркова, вложенной по моментам времени, образующим марковский поток событий, можно найти по известным формулам [17], а матрица  $\tilde{A}$  получается из матрицы  $A$  вычеркиванием первого блочного столбца, первой блочной строки, и умножением в формуле (2) коэффициента  $c(l)$  на множитель  $(1 - \frac{1}{l})$ .

## 5. Заключение

Построенная в настоящей работе математическая модель позволяет исследовать распределение радиоресурсов в соте сети LTE, обслуживающей трафик телефонии и межмашинного взаимодействия, в предположении, что ресурсы для пропуска трафика межмашинного взаимодействия выделяются диапазонами фиксированного размера, а поступление запросов на его передачу описывается с помощью марковского входящего потока.

## Литература

1. *Vermesan O. et al.* Internet of Things Strategic Research Roadmap. — 2011. — Accessed 30 Oct. 2016. [http://www.internet-of-things-research.eu/pdf/IoT\\_Cluster\\_Strategic\\_Research\\_Agenda\\_2011.pdf](http://www.internet-of-things-research.eu/pdf/IoT_Cluster_Strategic_Research_Agenda_2011.pdf), accessed 30 Oct. 2016.
2. International Telecommunication Union. — 2005.
3. *Guibene W., Nolan K. E., Kelly M. Y.* Survey on Clean Slate Cellular-IoT Standard Proposals // 2015 IEEE International Conference on Computer and Information Technology. IEEE Computer Society. — 2015. — Pp. 1596–1599.
4. *Cheng M., Lin G., Wei H.* Overload Control for Machine-Type-Communications in LTE-advanced System // IEEE Communications Magazine. — 2012. — Vol. 50(6). — Pp. 38–45.
5. Cellular Architecture and Key Technologies for 5G Wireless Communication Networks / C.-X. Wang, F. Haider, X. Gao, Y. Y. Xiao-Hu You, D. Yuan, H. Aggoune, H. Haas, S. Fletcher, F. Hepsaydir // IEEE Communications Magazine. — 2014. — Vol. 52(2). — Pp. 122–130.
6. Influence of M2M Communication on the Physical Resource Utilization of LTE / C. Ide, B. Dusza, M. Putzke, C. Müller, C. Wietfeld // Proc. of the 11th Wireless Telecommunications Symposium (WTS 2012). London. — 2012. — Pp. 1–6.

7. *Lien S.-Y., Chen K.-C.* Massive Access Management for QoS Guarantees in 3GPP Machine-to-Machine Communications // IEEE Communications Magazine. — IEEE Communications Letters. — Vol. 15(3). — P. 2011.
8. Radio Resource Allocation in LTE-Advanced Cellular Networks with M2M Communications / K. Zheng, F. Hu, W. Wang, W. Xiang, M. Dohler // IEEE Communications Magazine. — 2012. — Vol. 50(7). — Pp. 184–192.
9. *Кучерявый А. Е., Футахи А., Кучерявый Е. А.* LTE и беспроводные сенсорные сети // Мобильные телекоммуникации. — 2012. — С. 38–41.
10. Analyzing the Overload of 3GPP LTE System by Diverse Classes of Connected-Mode M2M Devices / O. Dementev, O. Galinina, M. Gerasimenko, T. Tirronen, J. Torsner, S. Andreev, Y. Koucheryavy // Proc. of the IEEE World Forum on Internet of Things. — 2014. — Pp. 309–312.
11. *Бутурлин И. А., Гайдамака Ю. В., Самуилов А. К.* О задачах максимизации функции полезности для двух алгоритмов межуровневой оптимизации в сети OFDM // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. — 2012. — № 7. — С. 30–32.
12. *Beale M.* Future Challenges in Efficiently Supporting M2M in the LTE Standards // Proceedings of the 10th Wireless Communications and Networking Conference WCNCW 2012. — Paris: 2012. — Pp. 186–190.
13. *Shin S. Y., Triwicaksono D.* Radio Resource Control Scheme for Machine-to-Machine Communication in LTE Infrastructure // Proc. of the 3rd International Conference on ICT Convergence ICTC 2012. — Jeju Island, Korea: 2012. — Pp. 1–6.
14. *Бутурлин И. А., Гудкова И. А., Чукарич А. В.* Модель распределения радиоресурсов с фиксированным диапазоном для трафика межмашинного взаимодействия в сети LTE // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. — 2014. — № 8. — С. 14–18.
15. *Башарин Г. П., Штатнов С. В.* Мультисервисная модель обслуживания эластичного трафика с конечным числом источников // Т-Comm – Телекоммуникации и транспорт. — 2010. — № 7. — С. 4–7.
16. *Яшков С. Ф.* Математические вопросы теории систем обслуживания с разделением процессора // Итоги науки и техники. Серия «Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика». — 1990. — Т. 29. — С. 3–82.
17. *Basharin G. P. and Naumov V. A.* Simple Matrix Description of Peaked and Smooth Traffic and its Applications // Proc. of the 3 Int. Seminar on Teletraffic Theory “Fundamentals of Teletraffic Theory”. — Moscow: VINITI, 1984. — Pp. 38–44.
18. *Наумов В. А.* Марковские модели потоков требований // Сб. «Системы массового обслуживания и информатика». — Москва: Изд-во УДН, 1987. — С. 67–73.
19. *Naumov V. A., Basharin G. P.* Lösungsmethoden für lineare algebraische Gleichungssysteme stationärer charakteristiken // Handbuch der Bedienungstheorie, I. — Berlin: Akademie-Verlag, 1983. — Pp. 387–430.

UDC 621.39

### Multiservice Queuing System with Elastic and Streaming Flows and Markovian Arrival Process for Modelling LTE Cell with M2M Traffic

V. M. Vishnevsky\*, K. E. Samouylov<sup>†</sup>, V. A. Naumov<sup>†</sup>,  
N. V. Yarkina<sup>‡</sup>

\* V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>†</sup> RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia

<sup>‡</sup> Service Innovation Research Institute (PIKE), Helsinki, Finland

Internet of Things (IoT) is thought to become the *third wave* of the Internet and to bring important changes into both technological and business aspects of telecommunications. However,

for this to happen, an infrastructure should be developed in order to provide network access and management functions to millions, if not billions of IoT-enabled devices. LTE networks could play the key role in the IoT communications landscape, provided that their capabilities are enhanced to efficiently support IoT devices and provide massive machine-to-machine connections without hampering human-to-human communications. Our paper addresses resource allocation in an LTE cell with both human-to-human and machine-to-machine connections. The cell is modeled as a multiservice queuing system with streaming and elastic jobs flows. Resources for machine-to-machine connections are allocated in batches of fixed size; requests for them arrive according to a Markovian arrival process. We obtain the stationary probability distribution of the system and formulas for request blocking probabilities.

**Key words and phrases:** LTE, Internet of Things, multiservice queuing system, Markovian arrival process, MAP

## References

1. O. Vermesan, et al., Internet of things strategic research roadmap, accessed 30 Oct. 2016 (2011).  
URL [http://www.internet-of-things-research.eu/pdf/IoT\\_Cluster\\_Strategic\\_Research\\_Agenda\\_2011.pdf](http://www.internet-of-things-research.eu/pdf/IoT_Cluster_Strategic_Research_Agenda_2011.pdf)
2. International Telecommunication Union (November 2005).
3. W. Guibene, K. E. Nolan, M. Y. Kelly, Survey on Clean Slate Cellular-IoT Standard Proposals, in: 2015 IEEE International Conference on Computer and Information Technology. IEEE Computer Society, 2015, pp. 1596–1599.
4. M. Cheng, G. Lin, H. Wei, Overload Control for Machine-Type-Communications in LTE-advanced System, IEEE Communications Magazine 50(6) (2012) 38–45.
5. C.-X. Wang, F. Haider, X. Gao, Y. Y. Xiao-Hu You, D. Yuan, H. Aggoune, H. Haas, S. Fletcher, F. Hepsaydir, Cellular Architecture and Key Technologies for 5G Wireless Communication Networks, IEEE Communications Magazine 52(2) (2014) 122–130.
6. C. Ide, B. Dusza, M. Putzke, C. Müller, C. Wietfeld, Influence of M2M Communication on the Physical Resource Utilization of LTE, in: Proc. of the 11th Wireless Telecommunications Symposium (WTS 2012). London, 2012, pp. 1–6.
7. S.-Y. Lien, K.-C. Chen, Massive Access Management for QoS Guarantees in 3GPP Machine-to-Machine Communications, IEEE Communications Magazine 15(3) (IEEE Communications Letters) 2011.
8. K. Zheng, F. Hu, W. Wang, W. Xiang, M. Dohler, Radio Resource Allocation in LTE-Advanced Cellular Networks with M2M Communications, IEEE Communications Magazine 50(7) (2012) 184–192.
9. A. E. Koucheryavy, A. Futahi, E. A. Koucheryavy, LTE and Wireless Sensor Networks, Mobile Telecommunications (2012) 38–41 In Russian.
10. O. Dementev, O. Galinina, M. Gerasimenko, T. Tirronen, J. Torsner, S. Andreev, Y. Koucheryavy, Analyzing the Overload of 3GPP LTE System by Diverse Classes of Connected-Mode M2M Devices, in: Proc. of the IEEE World Forum on Internet of Things, 2014, pp. 309–312.
11. I. A. Buturlin, Y. V. Gaidamaka, A. K. Samouylov, Utility Function Maximization Problems for Two Cross-Layer Optimization Algorithms in OFDM Wireless Networks, T-Comm – Telecommunications and Transport (7) (2012) 30–32, in Russian.
12. M. Beale, Future Challenges in Efficiently Supporting M2M in the LTE Standards, in: Proceedings of the 10th Wireless Communications and Networking Conference WCNCW 2012, Paris, 2012, pp. 186–190.
13. S. Y. Shin, D. Triwicaksono, Radio Resource Control Scheme for Machine-to-Machine Communication in LTE Infrastructure, in: Proc. of the 3rd International Conference on ICT Convergence ICTC 2012, Jeju Island, Korea, 2012, pp. 1–6.
14. I. A. Buturlin, I. A. Gudkova, A. V. Chukarin, On Radio Resource Allocation Scheme Model with Fixed Capacities for Machine Type Communications in LTE Network, T-Comm – Telecommunications and Transport (8) (2014) 14–18, in Russian.

15. G. P. Basharin, S. V. Shtatnov, Multiservice Model for Elastic Traffic with Finite Number of Sources, T-Comm – Telecommunications and Transport (7) (2010) 4–7, in Russian.
16. S. F. Yashkov, Mathematical Problems of the Theory of Processor-Sharing Queues, Review of Science and Technology (Itogi nauki i techniki), Series “Probability theory. Mathematical statistics. Technical Cybernetics” 29 (1990) 3–82, in Russian.
17. V. A. Basharin, G. P. and Naumov, Simple Matrix Description of Peaked and Smooth Traffic and its Applications, in: Proc. of the 3 Int. Seminar on Teletraffic Theory “Fundamentals of Teletraffic Theory”, VINITI, Moscow, 1984, pp. 38–44.
18. V. A. Naumov, Markovian Models of Jobs Flows, UDN Publisher, Moscow, 1987, pp. 67–73, in Russian.
19. V. A. Naoumov, G. P. Basharin, Lösungsmethoden für lineare algebraische Gleichungssysteme stationärer charakteristiken, Akademie-Verlag, Berlin, 1983, pp. 387–430.

© Вишневский В. М., Самуйлов К. Е., Наумов В. А., Яркина Н. В., 2016

---

# Математическое моделирование

УДК 517+519.2:80

## Динамическая нелинейная модель распространения и изменения лингвистической информации в индоевропейском модельном языковом сообществе

А. А. Егоров\*, М. А. Егорова†

\* *Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН, Москва, Россия*

† *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В работе рассмотрена нелинейная динамическая математическая модель, описывающая распространение и изменение лингвистической информации в индоевропейском языковом сообществе. При построении математической модели распространения и изменения лингвистической информации в языковом сообществе в качестве априорной информации использовали данные независимых исследований, как из лингвистики, так и из других научных областей, например, из истории, генетики и археологии. В рамках этой модели было проведено численное исследование распространения лингвистической информации в некотором модельном индоевропейском языковом сообществе, в том числе на начальном этапе его формирования. Даны результаты предварительного теоретического анализа и компьютерного моделирования. Установлено, что данная математическая модель процесса распространения и изменения лингвистической информации демонстрирует как регулярное, так и типично хаотическое поведение. В качестве одной из количественных характеристик рассматриваемого нелинейного процесса распространения лингвистической информации предложено рассматривать число возникающих циклов в качестве числа возникших новых языков в данном языковом сообществе. Результаты компьютерного моделирования показывают, что из двух основных гипотез формирования праиндоевропейцев — Анатолийской и Курганной — последняя лучше соответствует полученным нами временным оценкам.

**Ключевые слова:** математическая модель, нелинейное уравнение, математическая лингвистика, индоевропейские языки, индоевропейская хронология, индоевропейское распространение, Анатолийская и Курганная гипотезы

## 1. Введение

В настоящей работе рассмотрена динамическая системная модель, описывающая распространение и изменение «лингвистической информации» в некоторых сообществах [1, 2]. В рамках этой модели было проведено численное исследование распространения лингвистической информации в некотором модельном индоевропейском (ИЕ) языковом сообществе, в том числе на начальном этапе его формирования.

Обычно для информации используют следующее определение. *Информация* — это (от лат. *informare* — сообщать, изображать, составлять понятие о чём-либо; *informatio* — разъяснение, изложение) сведения, содержащиеся в конкретном высказывании и представляющие собой объект передачи, хранения, переработки, воспроизведения. В более узком смысле под *лингвистической информацией* могут пониматься, например, семантика (определяет соотношение между словами и их значениями) и грамматика (правила, выражающие общие синтаксические свойства слов и групп слов, позволяющие производить и/или описывать правильные предложения языка) некоторого языка; в принципе это может быть и количество групп языков, или просто число языков в некоторой языковой семье.

*Бифуркация* (от латинского *bifurcus* — раздвоенный) — появление нового качества в поведении динамической системы при малом изменении её параметров [3, 4]. Если при перестройке объекта он не изменяется во времени, то вместо термина «*бифуркация*» можно использовать термин «*катастрофа*». При бифуркации происходит

перестройка характера движения исследуемой системы, например, физической, химической, биологической или социальной. Нередко требуется только ограниченный объём информации, причём качественного характера, которая и представляет основной интерес при изучении конкретных объектов и описывающих их систем уравнений. Бифуркации происходят в точках бифуркации (критические точки); при этих значениях параметров системы она меняет своё поведение, — происходит качественное изменение свойств системы. Если состояние системы можно описать некоторой потенциальной функцией, то в бифуркационном множестве происходит переход из одного локального минимума (устойчивое состояние системы) в другой или фазовый переход.

При построении математических моделей распространения и изменения лингвистической информации в языковых сообществах в качестве априорной информации использовали данные независимых исследований, как из лингвистики, так и из других научных областей, например, из истории, генетики и археологии [5–20].

В статье даны некоторые результаты предварительного теоретического анализа и компьютерного моделирования. Установлено, что данная математическая модель процесса распространения и изменения лингвистической информации демонстрирует как регулярное, так и типично хаотическое поведение.

## 2. Динамическая нелинейная модель распространения и изменения лингвистической информации в сообществе (древовидная модель)

Динамическая модель распространения и изменения «лингвистической информации» в сообществе может быть описана нелинейным уравнением [1, 2]:

$$I_{m+1} = [a_1 I_m (M - I_m) + a_2 (M - I_m)^2] \lambda, \quad (1)$$

где  $I$  — величина анализируемой лингвистической информации,  $m = 1, 2, \dots$  ( $m = 1$  соответствует первому «измерению», т. е.  $I_1$  — начальное значение данной информации, например, в некоторый начальный момент времени  $t_1$ );  $a_1$  — коэффициент, характеризующий распространение лингвистической информации при контактах «незнающих» со «знающими» данную информацию  $I_n$ ;  $a_2$  — коэффициент, характеризующий воздействие только на «незнающих»;  $M$  — максимальное значение данной лингвистической информации;  $\lambda$  — параметр задачи (в соответствии с теорией катастроф он может быть назван управляющим параметром). Нелинейное уравнение (1) позволяет исследовать процесс изменения распространяющейся лингвистической информации, как в зависимости от времени, так и от параметров входящих в данное уравнение. Данное уравнение и его варианты могут использоваться в частности при исследовании процесса обучения, например, детей взрослыми в некотором лингвистическом сообществе.

Преобразуем уравнение (1) к следующему виду:

$$y = \lambda_1 x(1 - x) + \lambda_2 x(1 - x)^2, \quad (2)$$

где сделана замена переменных:  $y = I_{m+1}/M$ ,  $x = I_m/M$ ; и  $\lambda_1 = a_1 M \lambda$ ,  $\lambda_2 = a_2 M \lambda$  — новые управляющие параметры системы;  $0 \leq x \leq 1$ .

Типичный график зависимости функции  $y(x)$  приведён на рис. 1. Видно, что максимум функции  $y_{\max} \approx 0,83$  наблюдается при  $x = x_{\max} \approx 0,44$ . При увеличении параметра  $\lambda_1 \in (0, 4)$  в системе наблюдаются следующие закономерности. При  $\lambda_1 < 1$   $y(x) \rightarrow 0$  (итерации  $I_n$  сходятся к  $I^* \rightarrow 0,3$  — устойчивая неподвижная точка, см. рис. 2).

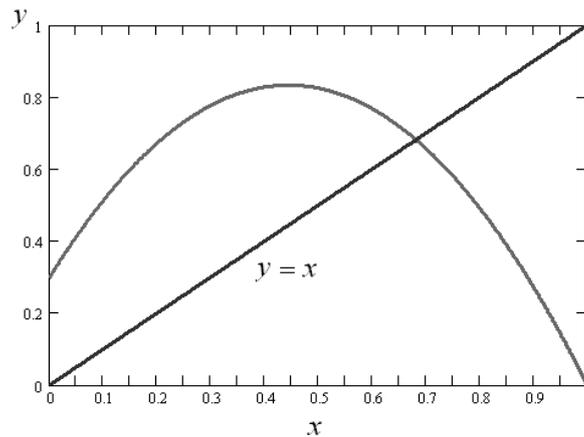


Рис. 1. График зависимости функции  $y = \lambda_1 x(1-x) + \lambda_2 x(1-x)^2$ ;  $\lambda_1 = 3$  и  $\lambda_2 = 0,3$

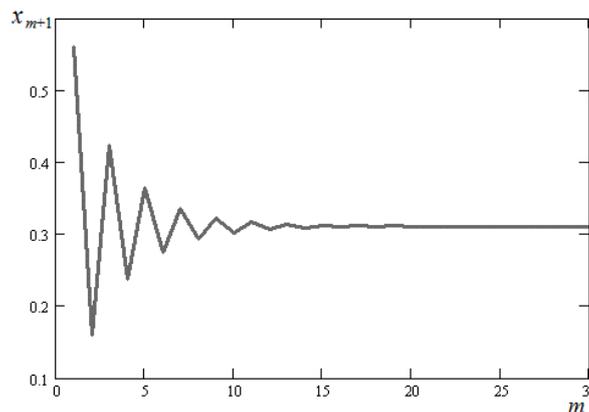
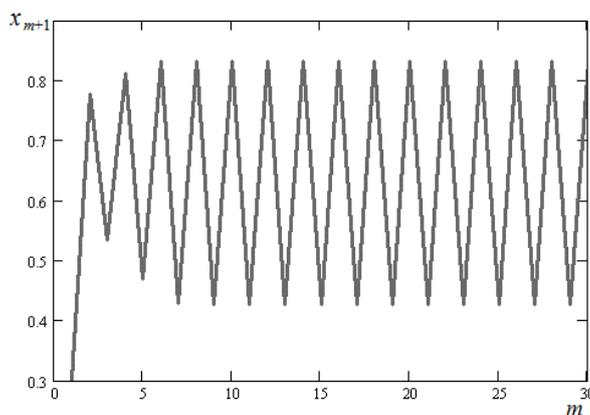


Рис. 2. График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1-x_m) + \lambda_2 x_m(1-x_m)^2$  от  $m$  при  $\lambda_1 = 0,21$ ,  $\lambda_2 = 0,56$  и  $p = 0$ . Наблюдается цикл  $S^1$

При дальнейшем росте управляющего параметра  $\lambda_1$  происходит бифуркация: точка  $I^* \rightarrow 0,3$  теряет устойчивость, а вновь появившаяся точка становится устойчивой (итерированные значения  $I_m \rightarrow \text{const}$ , т. е. динамический режим является стационарным или имеет период, равный единице — наблюдается цикл  $S^1$ ).

Дальнейшее увеличение параметра  $\lambda_1$  снова приводит к изменению системы: происходит бифуркация удвоения периода (неподвижная точка расщепляется и  $I_m$  осциллирует между двумя значениями, образующими устойчивый аттрактор с периодом 2). В этом случае отображение (2) имеет устойчивый цикл с периодом 2:  $S^2$  (см. рис. 3). При дальнейшем увеличении параметра  $\lambda_1$  возникают циклы вида  $S^{2^p}$ :  $S^1, S^2, S^4, S^8, S^{16}, S^{32}, S^{64} \dots$ , и т. д. (где  $p = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ ). В результате можно наблюдать ветвящийся процесс: исходная ветвь разделяется на две, новые две снова делятся на две и т. д. Поэтому, применительно к процессу распространения лингвистической информации эту модель можно ещё назвать моделью «дерева» по аналогии с родословным деревом (в англоязычной литературе подобные модели называют «tree-model»). При таком подходе в качестве одной из количественных характеристик рассматриваемого процесса распространения «лингвистической информации»

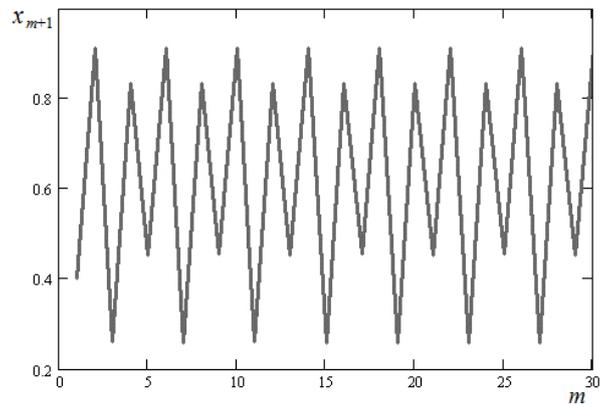
можно рассматривать число возникающих циклов  $S^{2^p}$  в качестве числа возникших новых языков (или диалектов) в данном языковом сообществе; так циклы  $S^1$ ,  $S^2$ ,  $S^4$ ,  $S^8$ ,  $S^{16}$ ,  $S^{32}$  дают соответственно: 1, 2, 4, 8, 16 и 32 языка. Тогда вполне естественно можно выбрать некоторый «внутренний» («встроенный») масштаб времени в данном процессе, а именно — воспользуемся известными в лингвистике данными: каждый цикл в динамике лингвистического сообщества соответствует на временной шкале величине 500 лет — время расхождения двух родственных языков (см, например, [10]). Таким образом, данная нелинейная модель, где есть ветвящиеся (древовидные) циклы типа  $S^{2^p}$ , позволяет нам использовать в качестве временного масштаба априорную лингвистическую информацию о времени расхождения языков. Например, между циклами  $S^2$  и  $S^4$  расстояние по времени составляет 500 лет, при этом каждый из двух языков предшественников в исходном цикле  $S^2$  разошёлся за 500 лет на 2 новых, родственных исходным, языка (две новые лингвистические популяции), и в итоге их стало 4; и т. д. Отметим, что на начальных этапах развития языкового сообщества это, возможно, могут быть и языковые семьи или языковые ареалы типа «сатем-кентум».



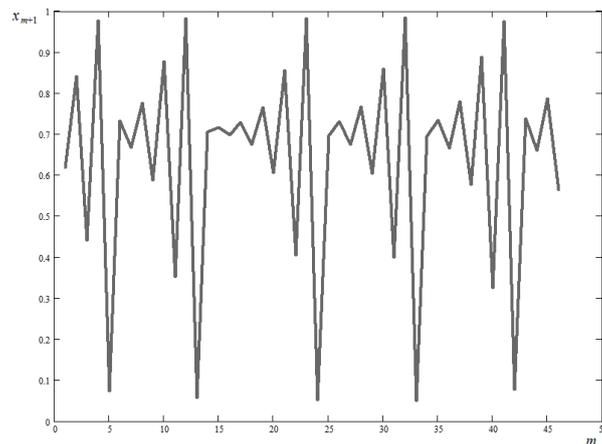
**Рис. 3. График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1 - x_m) + \lambda_2 x_m(1 - x_m)^2$  от  $m$  при  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = 0,3$  и  $p = 1$ . Наблюдается цикл  $S^2$**

Устойчивый цикл  $S^4$  показан на рис. 4. Можно также построить функцию  $y = f(f(x))$ , которая пересекается с прямой  $y = x$  в точках, принадлежащих циклу  $S^4$  (они и определяют данный цикл). Дальнейший рост управляющего параметра  $\lambda_1$  позволяет наблюдать переход системы в хаотический режим (см. рис. 5): непериодический, случайный процесс возникает как предел всё более сложных структур (циклов вида  $S^{2^p}$ ). Таким образом, хаос возникает как предел сверхсложной организации. Наконец, при некотором значении управляющего параметра  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_\infty$  отображение (2) даёт уже непериодическую последовательность  $y(x)$  типа цикла  $x_{m+1}$ , показанного на рис. 5.

Между порядком и хаосом наблюдается глубокая внутренняя связь. Подобные закономерности существуют в любых системах, где наблюдаются последовательности бифуркаций удвоения периода [1–5]. Анализ зависимостей, аналогичных полученным выше, при широком варьировании параметров позволяет установить области изменения параметров системы и соотношение между ними, при которых происходит как переход от стационарного к периодическому, а затем хаотическому поведению системы, так и последующий возможный переход — от хаотического к стационарному или периодическому поведению.



**Рис. 4.** График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1 - x_m) + \lambda_2 x_m(1 - x_m)^2$  от  $m$  при  $\lambda_1 = 3,2$ ,  $\lambda_2 = 0,4$  и  $p = 2$ . Наблюдается цикл  $S^4$



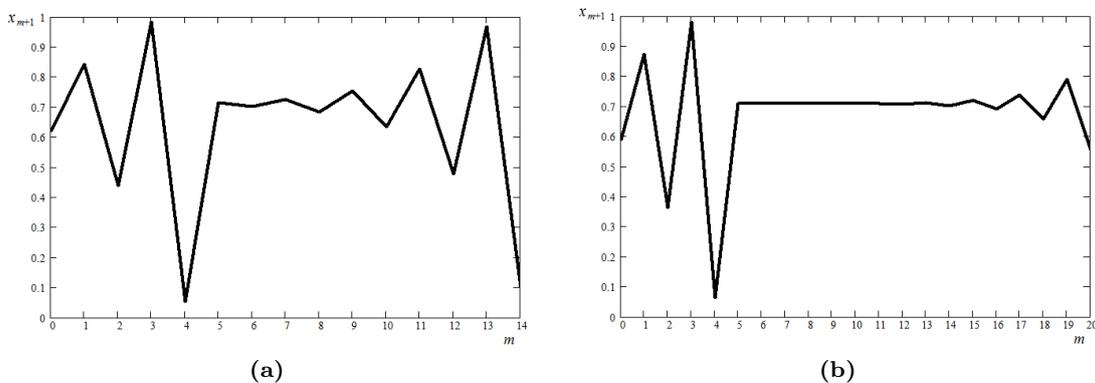
**Рис. 5.** График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1 - x_m) + \lambda_2 x_m(1 - x_m)^2$  от  $m$  при  $\lambda_1 = 3,2$ ,  $\lambda_2 = 0,6$  и  $1 \ll p < +\infty$ . В системе наблюдается хаос

Используем полученные выше данные при численном исследовании распространения и изменения лингвистической информации в некотором модельном индоевропейском (ИЕ) языковом сообществе, в том числе на начальном этапе его формирования. При этом будем полагать, что время начала разделения (т. е. по сути «исчезновения») гипотетического праиндоевропейского (ПИЕ) языка (в англоязычной литературе используется термин Proto-Indo-European language — PIE) произошло приблизительно не позднее 6500 (Курганная гипотеза) или не позднее 9500 (Анатолийская гипотеза) лет назад [5, 14].

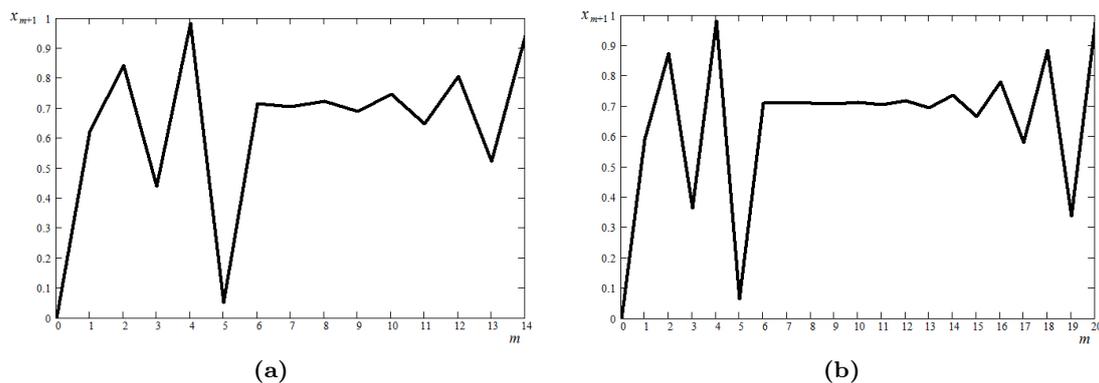
### 3. Результаты численных расчётов и их анализ. Выводы

Ниже на рис. 6, 7 приведены наиболее характерные из полученных нами результатов моделирования в рамках данной нелинейной модели. Видно, что на начальных этапах развития лингвистической системы в ней преобладает хаотическое состояние. При дальнейшем развитии лингвистического сообщества внутри областей хаоса

появляются окна периодического движения: узкие — на графиках слева и достаточно протяжённые — на графиках справа. Виден переход от хаотического «движения» динамической системы к периодическому (проявление определённых самоорганизующих свойств данной системы). Мы связываем предположительно именно этот переход с началом формирования собственно индоевропейских языков (когда Анатолийская ветвь уже отделилась), т. е. известных нам сейчас современных языков этой языковой семьи. Начальный же период, мы считаем, соответствует периоду совместного развития предков данных языков до их окончательного разделения (в пространстве и во времени). Как следует из графиков, приведённых слева, диапазон хаотического «движения» наблюдается от 0-го до 5–6-го «поколения» (итерации по  $m$ ), т. е. примерно от 6500 до 2500–3000 лет назад. У графиков, приведённых справа, диапазон хаотического «движения» также наблюдается от 0-го до 5–6-го поколения, но в данном случае он составляет примерно отрезок от 9500 до 6500–7000 лет назад.



**Рис. 6.** График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1 - x_m) + \lambda_2 x_m(1 - x_m)^2$  от  $m$ :  
 (а) — при параметрах:  $\lambda_1 = 3,2$  и  $\lambda_2 = 0,62$ , начальное значение  $x_0 = 10^{-4}$ ;  
 (б) — при параметрах:  $\lambda_1 = 3,2$  и  $\lambda_2 = 0,59$ , начальное значение  $x_0 = 10^{-4}$



**Рис. 7.** График зависимости функции  $x_{m+1} = \lambda_1 x_m(1 - x_m) + \lambda_2 x_m(1 - x_m)^2$  от  $m$ :  
 (а) — при параметрах:  $\lambda_1 = 3,2$  и  $\lambda_2 = 0,62$ , начальное значение  $x_0 = 1$ ;  
 (б) — при параметрах:  $\lambda_1 = 3,2$  и  $\lambda_2 = 0,59$ , начальное значение  $x_0 = 1$

Анализ приведённых на рис. 6, 7 зависимостей и сравнение полученных из них временных оценок с данными независимых исследований [5] позволяет сделать вывод, что графики слева больше соответствует Курганной гипотезе, а графики справа — Анатолийской. Здесь следует сделать одно важное замечание: количественное и качественное изменения рассматриваемой модели произошли при незначительном количественном изменении одного параметра, а именно:  $\lambda_2$  изменилось с 0,62 до 0,59, т. е. всего в 1,05 раза, или примерно на 5%. Как следует из рассмотрения данной математической модели, всего 5% могут стать решающими в истории развития исследуемого лингвистического сообщества.

Теперь приведём данные, следующие из другой оценки временных рамок возникновения и развития языков и их семей. Известно, что сейчас существует, по разным данным, примерно от 6000 до 8000 языков [9, 11], из которых собственно индоевропейских сейчас примерно 300–500 языков. По данным [11], живых индоевропейских языков сейчас примерно 445. В [12] справедливо отмечено о числе живых языков: «В последней версии международного лингвистического каталога “Этнолог” [11] приводится цифра в 7106 единиц, но абсолютной точности здесь быть не может, потому что не существует единого строгого критерия, который позволял бы определить, где кончаются диалекты, то есть региональные варианты, одного языка и начинаются, собственно говоря, разные языки».

Приведённые данные по числу языков позволяют получить следующие временные оценки, в основе которых лежит сделанное выше предположение: использование данной нелинейной модели, где есть циклы вида  $S^{2^p}$ , позволяет нам получить не только «встроенный» внутренний временной масштаб с шагом в 500 лет, но и определить временную «длину» данной лингвистической временной «линейки», вдоль которой развивается динамика исследуемой лингвистической системы. Действительно, для циклов вида  $S^{2^p}$ , где  $p = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ , имеем следующий ряд значений для числа языков  $L$ , соответствующего данному ряду последовательных их удвоений, начиная с одного возможного ИЕ праязыка, первоосновы всех современных ИЕ языков: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 и т. д. Исходя из этого несложно получить следующую простую формулу для оценки возможного числа языков в таком динамическом процессе:  $L = 2^p$ . Откуда получаем формулу для численной оценки количества соответствующих данному числу языков циклов  $p$ :  $p = \log_2 L$ . Например, для 6000 всех языков получаем:  $p = \log_2 6000 \approx 12,55$ , т. е. примерно 13 поколений (как и для 8000 языков:  $p = \log_2 8000 \approx 12,97$ ), что соответствует примерно времени  $13 \cdot 500$  лет = 6500 лет. Только для индоевропейских языков имеем:  $p = \log_2 500 \approx 8,97$ , т. е. примерно 9 поколений или 4500 лет. Учёт вероятных исчезнувших языков и всевозможных диалектов увеличит эти оценки, особенно в случае всех языков, что вполне естественно. С этой точки зрения можно рассматривать данные оценки как оценки времён, когда различные языки окончательно разошлись. Для уточнения модели можно использовать следующий факт: мы предполагали выше, что в начальный период (от 0-го до 5–6-го поколения) был возможен некоторый период совместного развития предков данных ИЕ языков до их окончательного разделения (в пространстве и во времени), как внутри своей индоевропейской семьи, так и, возможно, с другими языковыми семьями. Вполне вероятно, что в этот период завершилось окончательное разделение ИЕ-семьи языков с Уральской языковой семьёй, в частности с финно-угорскими языками.

Как видно из графиков, полученные результаты компьютерного моделирования хорошо соответствуют по времени двум основным гипотезам о формировании протоиндоевропейцев: Анатолийской и Курганной [5, 14]. Напомним кратко об этих двух гипотезах. *Анатолийская гипотеза* локализует индоевропейскую прародину в западной Анатолии (современная Турция). Данные, полученные Греем и Аткинсоном методами байесовского анализа, по их мнению, указывают на возраст праиндоевропейского языка в интервале от 8000 до 9500 лет и на анатолийское происхождение языка (см., например, [13]). *Курганная гипотеза* была предложена Марией Гимбутас в 1956 г., чтобы соединить данные археологических и лингвистических исследований

для определения местонахождения прародины народов носителей праиндоевропейского языка. Гипотеза является наиболее популярной в отношении происхождения ПИЕ. По ней протоиндоевропейские народы существовали в причерноморских степях и юго-восточной Европе примерно с V по III тысячелетие до н.э. (а возможно и ранее) [5, 6, 13, 14, 18]. Важнейшим этапом в развитии курганной культуры было одомашнивание лошади и использование повозок, что сделало носителей культуры мобильными и существенно расширило их влияние [6, 14]. Этот факт был положен нами в основу при построении наших теоретических моделей. В частности, при компьютерном моделировании соотношение коэффициентов  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  выбиралось исходя из соотношения средних скоростей движения (в км/час) всадников  $v_1$  и пешеходов  $v_2$  в индоевропейских сообществах:  $\lambda_1 : \lambda_2 \propto v_1 : v_2 \approx 15 : 3$ . В курганной гипотезе полагается, что причерноморские степи были прародиной протоиндоевропейцев и по всему этому региону говорили на поздних диалектах праиндоевропейского языка.

Итак, из сравнения полученных нами данных с известными данными о возможном возрасте праиндоевропейского языка (в Анатолийской и Курганной гипотезах) следует, что они хорошо соответствуют друг другу. При этом сравнение полученных нами данных по обеим гипотезам с данными независимых исследователей (см., например, [5]) позволяет сделать однозначный вывод о предпочтительности Курганной гипотезы. Действительно, как видно из рис. 6, 7 (слева), в случае реализации сценария развития языков по Курганной гипотезе период существования 1–2 языков составляет примерно 1000–1500 лет (с примерно 4500 до 3500 лет назад), что вполне соответствует, например, данным [5]. Если считать, что полученные нами данные соответствуют формированию групп ИЕ языков (например, Славянская, Италийская, Кельтская, Германская, Индо-Арийская и др., то сходство наших результатов с результатами [5] будет более широким. В случае же Анатолийской гипотезы (см. рис. 6, 7 (справа)) период существования 1–2 ИЕ языков (или групп ИЕ языков) составляет примерно 4000–4500 лет (с примерно 7500 до 2000 лет назад), что не соответствует результатам большинства последних исследований (см., например, [5]). Таким образом, как видно из проведённого анализа полученных данных, более предпочтительной в данной модели является Курганная гипотеза, поскольку именно она полнее и точнее соответствует данным независимых исследований.

Приведём ещё результаты анализа некоторых данных, полученных по данной древоподобной модели. Например, как видно на графиках слева на рис. 6 и 7, величина «лингвистической информации» в первой (ветвящейся) модели после перехода от хаотического «движения» динамической системы к периодическому (предположительно это время формирования собственно индоевропейских языков — этап их окончательного расхождения или *дивергенции* (divergence); начальный хаотический период соответствует некоторому периоду совместного развития, определённой *конвергенции* (convergence) предков данных ИЕ языков до их окончательного разделения) достигает первый раз максимума на 13–14-м поколениях. В этой области возникают циклы, где  $p$  может превышать значения 16, 32, 64.

Подчеркнём, что в дальнейшем планируется уточнение сделанных при исследовании предположений, а также выбранных параметров, в том числе с учётом новых лингвистических и генетических данных.

Теперь посмотрим, возможно ли что-то сказать о гипотетическом ПИЕ алфавите, а именно — о числе возможных «символов/знаков» (или «букв») алфавита праиндоевропейцев на основании полученных нами данных. Для этого используем данные численных расчётов возможного количества информации примерно на 5–7-й итерациях по  $m$  у графиков, приведённых слева, после хаотического «движения», т. е. примерно  $4000 \pm 500$  лет назад.

Для оценки используем хорошо известную в теории информации формулу для полной информации  $I_\Sigma$ , содержащейся в некотором сообщении [21]:

$$I_\Sigma = n \log_2 \mathfrak{S}, \quad (3)$$

где  $n$  — общее число символов в сообщении (непрерывный сигнал заменён дискретной последовательностью отсчётов);  $\mathfrak{S}$  — число различных символов алфавита.

Для одного из полученных в численных расчётах по первой модели значения  $I_{\Sigma} = 523$  бита (двоичные единицы), при некотором фиксированном заданном начальном значении информации в сообществе, получаем ряд значений для  $\mathfrak{S} = 2^{I_{\Sigma}/n}$  при вариации параметра<sup>1</sup>  $n$ :  $n = 80$ ,  $\mathfrak{S}_{80} = 93$  символа;  $n = 100$ ,  $\mathfrak{S}_{100} = 38$  символов;  $n = 120$ ,  $\mathfrak{S}_{120} = 21$  символов;  $n = 150$ ,  $\mathfrak{S}_{150} = 11$  символов;  $n = 200$ ,  $\mathfrak{S}_{200} = 6$  символов. Скорее всего, разумная оценка  $\mathfrak{S}_n$  должна быть ближе к диапазону:  $\mathfrak{S}_n = 11 \div 38$  символов. На следующей итерации значения  $I_{\Sigma}$  возрастают, и соответственно возрастают значения  $\mathfrak{S}_n$ .

Для сравнения приведём известные в научной литературе данные по числу знаков в алфавитах некоторых языков.

*Финикийское письмо* — является одной из первых алфавитных письменностей в мире. Появилась около 3500 лет назад. Финикийская письменность дала начало нескольким ветвям алфавитных письменностей, и на сегодняшний день практически все алфавитные письменности мира имеют корни именно в финикийском письме. Отличительные особенности: использовался консонантный принцип, то есть для записи слов использовались только согласные звуки, а значение гласных оставлялось на понимание читателя; текст записывался справа налево. Число знаков в алфавите: 22.

*Греческий алфавит*. Время создания алфавита: около VIII века до н.э. Число знаков в алфавите: 24 буквы. В доклассическую эпоху в некоторых диалектах греческого применялись ещё 6 букв. Отличительные особенности: тип письма — консонантно-вокалическое; направление письма — слева направо. Происхождение: из Финикийского алфавита. Греческий алфавит развился в следующие виды письменности: готское письмо, глаголица, кириллица, коптское письмо, армянское письмо, этрусский алфавит, латинский алфавит.

*Глаголица* — одна из первых славянских азбук. Языки: старославянский, церковнославянский, ранние славянские языки. Тип письма: консонантно-вокалическое письмо. Время создания алфавита: примерно IX век н.э. Направление письма: слева направо. Число знаков в алфавите: 41. Происхождение: греческий (финикийский).

*Кириллица* — кириллический (или кирилловский) алфавит; один из двух (наряду с глаголицей) древних алфавитов для старославянского языка. Тип письма: консонантно-вокалическое письмо. Языки: старославянский, церковнославянский, русский, сербский, болгарский, македонский, украинский, молдавский и многие другие. Время создания алфавита: примерно IX век; в современном виде с конца XVI века. Состав первоначальной кириллической азбуки неизвестен; «классическая» старославянская кириллица из 43 букв.

*Санскрит* (деванагари: *samskr̥tā vās*, «литературный язык») — древний литературный язык Индии со сложной синтетической грамматикой. Само слово «санскрит» означает «обработанный, совершенный». Возраст ранних памятников доходит до 3500 лет. Классификация: индоевропейская семья, индоиранская ветвь, индоарийская группа. Единой системы письменности для санскрита не существует. Это объясняется тем, что литературные произведения передавались в основном устно. С примерно XIX века используется письменность деванагари и др. Классический санскрит насчитывает около 36 фонем<sup>2</sup>. Если учитывать аллофоны<sup>3</sup> (а система письма их учитывает), то

<sup>1</sup>Для простоты под этим числом может пониматься некоторое число условных «символов», соответствующих числу знаков в некотором списке, например, в 100-словном списке Сводеша. «Символами» в доисторическую эпоху могли быть, например, как фонемы, так и целые предложения.

<sup>2</sup>Фонема (от др.-греч. *φώνημα* — «звук») — минимальная смысловозначительная единица в языке. Фонема не имеет самостоятельного лексического или грамматического значения, она служит для различения и отождествления значимых единиц языка, таких как морфемы и слова. Морфема — наименьшая единица языка, имеющая некоторый смысл.

<sup>3</sup>Аллофон (от греч. *ἄλλος* — «другой, и *φωνή* — «звук») — реализация фонемы, её вариант, обусловленный конкретным фонетическим окружением. В отличие от фонемы, аллофон является не абстрактным понятием, а конкретным речевым звуком.

общее количество звуков в языке увеличивается до 48. С учётом данных по древнему санскриту (примерно 3700 лет назад) из книги [22] можно оценить минимальное возможное число «знаков» в алфавите пра-санскрита величиной:  $\mathfrak{S} = 9$ .

Как видно из приведённых данных для этих языков, они в основном удовлетворяют заданному диапазону:  $\mathfrak{S}_n = 11 \div 38$  символов.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенная нами математическая нелинейная модель распространения и изменения лингвистической информации в модельном ИЕ сообществе достаточно адекватно описывает исследуемое явление. Вместе с тем проведённое исследование показало, что необходима дальнейшая тонкая настройка модели, в том числе с учётом априорной лингвистической и другой информации об исследуемых языковых сообществах.

Итак, в настоящей работе приведены результаты компьютерного моделирования, которые показывают, в частности, хорошее соответствие двум основным гипотезам о формировании пра-индоевропейцев: Анатолийской и Курганной. При этом совокупность данных, полученных при исследовании, говорит о предпочтительности Курганной гипотезы. Данный вывод хорошо согласуется с выводами большинства исследователей во всём мире: лингвистов, генетиков, историков и археологов.

#### 4. Заключение

В данной работе изложены теоретические принципы нового метода исследования лингвистических сообществ (и процессов распространения в них лингвистической информации) как динамических диссипативных систем. Этот подход может стать особенно перспективным в первую очередь для качественного анализа поведения подобных лингвистических систем. Результаты компьютерного моделирования показывают, что Курганная гипотеза формирования праиндоевропейцев лучше соответствует полученным временным оценкам.

#### Литература

1. *Егоров А. А.* Некоторые закономерности распространения информации в обществе // Сборник тезисов докладов Научно-технической конференции «Сети связи и сетевые технологии», 24–26 июня 1997, Суздаль. — М.: ЦНИИС, 1997. — С. 46–49.
2. *Егоров А. А., Егорова М. А.* О моделях распространения лингвистической информации в языковом сообществе // Тезисы докладов XXI-й Всероссийской конференции «Теоретические основы конструирования численных алгоритмов и решение задач математической физики». 5–11 сентября 2016 г., Новороссийск, Абрау-Дюрсо, Россия. — М.: ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2016. — С. 82–83.
3. Компьютеры и нелинейные явления: Информатика и современное естествознание. — 1988.
4. *Gilmore R.* Catastrophe Theory for Scientists and Engineers. — New York: Wiley, 1981.
5. Ancestry-Constrained Phylogenetic Analysis Supports the Indo-European Steppe Hypothesis / W. Chang, C. Cathcart, D. Hall, A. Garrett // *Language*. — 2015. — Vol. 91, No 1. — Pp. 194–244.
6. *David W. A.* The Horse, the Wheel, and Language: How Bronze-Age Riders from the Eurasian Steppes Shaped the Modern World. — Princeton: Princeton University Press, 2007.
7. *Kornai A.* Mathematical Linguistics. — London: Springer, 2008.
8. *Бурлак С. А., Старостин С. А.* Сравнительно-историческое языкознание. — М.: Издательский центр «Академия», 2005.
9. Атлас языков мира. Происхождение и развитие языков во всем мире. — 1998.
10. *Яхонтов С. Е.* Теоретические основы классификации языков мира. — М., 1980. — С. 148–157.

11. Ethnologue: Languages of the World. — [www.ethnologue.com](http://www.ethnologue.com).
12. Старостин Г. С. и др. К истокам языкового разнообразия. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2015.
13. Russell D. G., Quentin D. A. Language-Tree Divergence Times Support the Anatolian Theory of Indo-European Origin // *Nature*. — 2003. — Vol. 426. — Pp. 435–439.
14. Pereltsvaig A., Lewis M. W. The Indo-European Controversy: Facts and Fallacies in Historical Linguistics. — Cambridge: Cambridge University Press, 2015.
15. Развитие модели распространения информации в социуме / А. П. Михайлов, А. П. Петров, Н. А. Маревцева, И. В. Третьякова // *Математическое моделирование*. — 2014. — Т. 26, № 3. — С. 65–74.
16. Labov W. Transmission and Diffusion // *Language*. — 2007. — Vol. 83. — Pp. 344–387.
17. Heggarty P., Maguire W., McMahon A. Splits or waves? Trees or webs? How Divergence Measures and Network Analysis Can Unravel Language Histories // *Phil. Trans. R. Soc. B*. — 2010. — Vol. 365. — Pp. 3829–3843.
18. Massive Migration from the Steppe is a Source for Indo-European Languages in Europe / W. Haak, I. Lazaridis, N. Patterson et al. // *Nature*. — 2015. — Vol. 522. — Pp. 207–211.
19. Ancient Human Genomes Suggest Three Ancestral Populations for Present-Day Europeans / I. Lazaridis, N. Patterson, A. Mitnik et al. // *Nature*. — 2014. — Vol. 513. — Pp. 409–428.
20. Аркаим – Синташта: древнее наследие Южного Урала. Сборник научных трудов. — Челябинск: изд. Челябинского гос. ун-та, 2010.
21. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Ч. 1. — М.: Радио, 1966.
22. Borsboom W. Alphabet or Abracadabra? Reverse Engineering the Western Alphabet. — Victoria, BC, Canada: FriesenPress, 2015.

UDC 517+519.2:80

## Dynamic Non-Linear Model of Distribution and Changes of Linguistic Information in the Indo-European Model Language Community

A. A. Egorov\*, M. A. Egorova†

\* *General Physics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

† *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

The paper considers the nonlinear dynamic mathematical model describing the distribution and variation of linguistic information in the Indo-European linguistic community. When constructing a mathematical model of linguistic information propagation and changes in the linguistic community as a priori information data from independent studies both linguistics and other scientific fields, such as history, archeology and genetics were used. Within the framework of this model the spread of linguistic information in a model Indo-European language community, including at the initial stage of its formation was numerically studied. The preliminary results of theoretical analysis and computer simulation are given. It was found that the mathematical model of the distribution and modification of linguistic information shows both regular and typical chaotic behavior. As one of quantitative characteristics of considered nonlinear process of distribution of the linguistic information it is offered to consider number of arising cycles as number of the arisen modern languages, in the given language community. Results of computer modeling show, that from two main hypotheses of formation of the Proto-Indo-Europeans – Anatolian and Kurgan, the latter better matches temporary estimates obtained by us.

**Key words and phrases:** mathematical model, nonlinear equation, mathematical linguistics, Indo-European languages, Indo-European chronology, Indo-European dispersal, Anatolian and Kurgan hypotheses

## References

1. A. A. Egorov, Some Patterns of Dissemination of Information in Society, in: In Proc. of Conference “Communication Networks and Network technologies”, June, 24–26, 1997, Moscow, 1997, pp. 46–49, in Russian.
2. A. A. Egorov, M. A. Egorova, About Models of Dissemination of Linguistic Information in the Language Community, in: In Proc. of XXI-th All-Russian Conference “Theoretical Foundations and Designing of Numerical Algorithms of Solution of Mathematical Physics Problems”, September 5-11, 2016, Novorossiysk, Russia, IAM of RAS, Moscow, 2016, pp. 82–83, in Russian.
3. Computers and Nonlinear Phenomena: Information Technology and Modern Science, Science, Moscow, 1988, in Russian.
4. R. Gilmore, Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, Wiley, New York, 1981.
5. W. Chang, C. Cathcart, D. Hall, A. Garrett, Ancestry-Constrained Phylogenetic Analysis Supports the Indo-European Steppe Hypothesis, *Language* 91 (1) (2015) 194–244.
6. W. A. David, *The Horse, the Wheel, and Language: How Bronze-Age Riders from the Eurasian Steppes Shaped the Modern World*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
7. A. Kornai, *Mathematical Linguistics*, Springer, London, 2008.
8. S. A. Burlak, S. A. Starostin, *Comparative and Historical Linguistics*, Publishing center “Academy”, Moscow, 2005, in Russian.
9. *Atlas of the World’s Languages. The Origin and Development of Languages Worldwide*, Leake press, Moscow, 1998.
10. S. E. Yahontov, Assessment of the Degree of Closeness of Related Languages, Moscow, 1980, Ch. Theoretical Bases of Classification of World Languages, pp. 148–157, in Russian.
11. *Ethnologue: Languages of the World*.  
URL [www.ethnologue.com](http://www.ethnologue.com)
12. G. S. Starostin, et al., *To the Source of Linguistic Diversity*, Publishing House “Delo” RANHiGS, Moscow, 2015, in Russian.
13. D. G. Russell, D. A. Quentin, Language-Tree Divergence Times Support the Anatolian Theory of Indo-European Origin, *Nature* 426 (2003) 435–439.
14. A. Pereltsvaig, M. W. Lewis, *The Indo-European Controversy: Facts and Fallacies in Historical Linguistics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.
15. A. P. Mikhailov, A. P. Petrov, N. A. Marevtseva, I. V. Tretyakova, Development of a Model of Information Dissemination in Society, *Mathmod.* 26 (3) (2014) 65–74, in Russian.
16. W. Labov, Transmission and Diffusion, *Language* 83 (2007) 344–387.
17. P. Heggarty, W. Maguire, A. McMahon, Splits or Waves? Trees or Webs? How Divergence Measures and Network Analysis Can Unravel Language Histories, *Phil. Trans. R. Soc. B.* 365 (2010) 3829–3843.
18. W. Haak, I. Lazaridis, N. Patterson, et al., Massive Migration from the Steppe is a Source for Indo-European Languages in Europe, *Nature* 522 (2015) 207–211.
19. I. Lazaridis, N. Patterson, A. Mittnik, et al., Ancient Human Genomes Suggest Three Ancestral Populations for Present-Day Europeans, *Nature* 513 (2014) 409–428.
20. *Arkaim – Sintashta: the Ancient Heritage of the Southern Urals. Coll. of Scientific Works*, Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, 2010, in Russian.
21. I. S. Gonorovsky, *Radio Circuits and Signals. Part 1, Radio*, Moscow, 1966, in Russian.
22. W. Borsboom, *Alphabet or Abracadabra? Reverse Engineering the Western Alphabet*, FriesenPress, Victoria, BC, Canada, 2015.

---

УДК 519.68

## Об одном методе дифференцирования плоской дискретной кривой при обработке изображений

И. М. Гостев\*, Л. А. Севастьянов†

\* *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Москва, Россия*

† *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Решается задача получения точек с высокой кривизной (особых точек) контуров для идентификации формы объектов на изображениях. Проводится разбор существующих методов численного дифференцирования в данном аспекте. Рассматривается новый метод дифференцирования плоских дискретно заданных кривых, являющихся точками (пикселями) контуров объектов, на основе использования вариаций метода Arch Height. Показаны особенности такого метода дифференцирования при использовании различных формул вычисления производной. Проанализированы аспекты зависимости точности, получаемой производной от длины хорды. Показано, что при возрастании её длины точность дифференцирования ухудшается, а результат стремится к модулю кривизны кривой в данной точке. Приводится сравнение разработанного метода с другими известными методами. Проведён анализ области применимости и варибельности параметров дифференцирования. Исследованы аспекты точности вычисления производных для различных параметров дифференцирования. Рассмотрены примеры дифференцирования различных кривых, как заданных аналитически, так и функций-контуров, полученных из реальных изображений. Показано, что предложенный метод позволяет избавиться от неоднозначности положения точки контура с высокой кривизной, а, следовательно, повысить качество распознавания формы объектов. Изложены возможные области применения данного метода в различных областях науки и техники.

**Ключевые слова:** обработка изображений, распознавание образов, компьютерная геометрия, дифференцирование, особые точки, контурный анализ

### 1. Введение

Решение задачи по идентификации формы графических объектов часто разделяют на два шага [1]. На первом производится обработка изображения для выделения из него набора характерных признаков распознаваемых объектов, а на втором выполняется собственно сама классификация полученных объектов. В настоящее время широко распространено направление, при котором характерные признаки получают на основе производной, вычисляемой от функции контура идентифицируемого объекта [2]. Поскольку эта функция получена из координат изображения объекта, то вычисление такой производной, как правило, сопряжено с вычислительными трудностями, обусловленными различными факторами, такими как: присутствие шумов в дифференцируемой функции, существование локальных разрывов первого рода, зависимостью от разрешения изображения (количества пикселей на сантиметр), методов предварительной обработки и т.п. В настоящее время имеется большое количество практических методов вычисления первой производной для дискретно заданной кривой. Поскольку интересы авторов затрагивает распознавание объектов на изображении, то рассмотрение будет ограничено только плоскими кривыми. Наиболее распространёнными методами дифференцирования являются:

**А.** Методика вычисления производных на основе интерполяционных формул, основанная на замене функции некоторым рядом. Производные вычисляются здесь через раздельные разности. В зависимости от используемой формулы это методы Ньютона, Стирлинга, Эрланга, Бесселя, Гаусса и т. п. [3];

- В. Другая методика изложена в книге [4], где для вычисления производных используются некоторые формулы (похожие на разложение в ряд, как в предыдущем методе).
- С. Третья методика, впервые изложенная в [5], использует свойство свёртки, при котором дифференцирование функции заменяется свёрткой с производной функции Гаусса, по формуле  $D(f * g) = Df * g = f * Dg$ .
- Д. Четвёртая методика основана на регуляризации и наиболее полно изложена в книге Ланцоша [6] в 1961 году. Соответствующие методы называются «дифференцированием с использованием квадратур», так как автор аппроксимирует дифференцируемую в точке функцию квадратичной параболой.
- Е. Ещё одна методика, которую необходимо упомянуть, основана на методе Нумерова [7]. В ней используется метод декомпозиции, однако параметры функции подбираются так, что ошибка вычисления первой производной имеет третий порядок, а второй — четвёртый.

## 2. Метод дифференцирования

Анализ этих методов показывает, что каждый из них имеет свои преимущества и недостатки. В одних методах необходимо использовать разложение в некоторый ряд (А, В), в других применяется весьма дорогостоящая в вычислительном отношении свёртка (С) или трудоёмкая формула (Д).

Исследования авторов в области обработки изображений и распознавании формы графических объектов в последнее время привели к детальному анализу методик поиска особых точек (точек с высокой кривизной, являющимися информативными с точки зрения распознавания формы), основанных на методе Arch Height, впервые опубликованном в 1992 году [8], который в дальнейшем неоднократно рассматривался и модифицировался, например в [9].

Для изложения метода предположим, что имеется  $n \gg 1$  точек  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  параметризованной плоской кривой  $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $1 \leq t \leq n$ . Первоначально идея этого метода заключалась в вычислении расстояния  $d_i$ , между точкой кривой —  $P_i$  и перпендикуляром к хорде как показано на рис. 1. Это расстояние аппроксимирует значение модуля кривизны в этой точке.

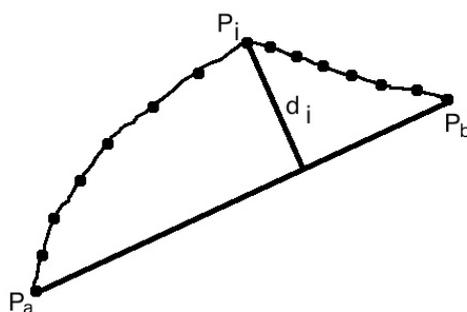


Рис. 1. Фрагмент кривой  $\Gamma$  с точками  $P_k$  и хордой  $(P_i, P_j)$

Расстояние вычислялось в евклидовой метрике по формуле:

$$d_i = \sqrt{\frac{((x_i - x_a)(y_b - y_a) - (y_i - y_a)(x_b - x_a))^2}{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}}, \quad (1)$$

где  $x_i, y_i, x_a, y_a, x_b, y_b$  — координаты точек  $P_i, P_a, P_b$  соответственно. При этом количество точек фрагментов кривой на отрезках  $(P_a, P_i)$  и  $(P_i, P_a)$  совпадает.

При проведении серии экспериментов над аналитически заданными кривыми с различной длиной хорды было определено, что расстояние между точкой  $P_i$  и хордой действительно пропорционально модулю кривизны кривой  $\Gamma$  в этой точке, как показано на рис. 2 и на рис. 3.

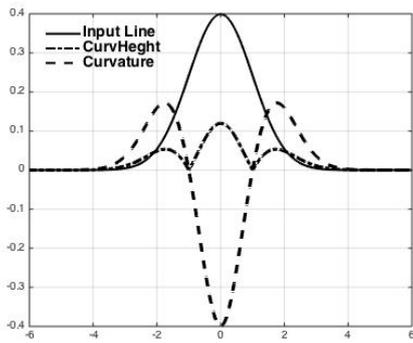


Рис. 2. Длина хорды 7 шагов

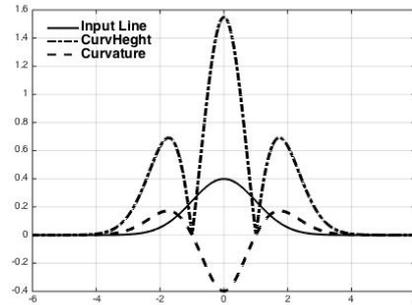


Рис. 3. Длина хорды 25 шагов

Здесь хорошо видно, что вычисленная в виде расстояния кривизна (красная линия) практически совпадает с теоретической (зелёная линия), за исключением знака, поскольку расстояние не может быть отрицательным. Кроме того, хорошо видно возрастание амплитуды расстояния с увеличением длины хорды. Однако при вычислении расстояния между точкой  $P_i$  и точкой  $M$ , расположенной на середине длины хорды, по формуле евклидова расстояния:

$$d_i = \sqrt{(x_k - x_M)^2 + (y_k - y_M)^2}, \quad (2)$$

где  $(x_M, y_M)$  — координаты середины отрезка, выяснилось, что при малых длинах хорды получаемое значение такого расстояния оказывается пропорционально значению первой производной, вычисленной в данной точке. На рисунках 4 и 5 в качестве дифференцируемых кривых используются аналитически построенные кривые — первой производной функции Гаусса (рис. 4) и функция  $f(x) = \exp(\cos(x))$  (рис. 5).

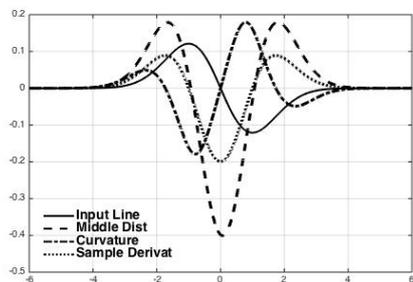


Рис. 4. Первая производная функции Гаусса

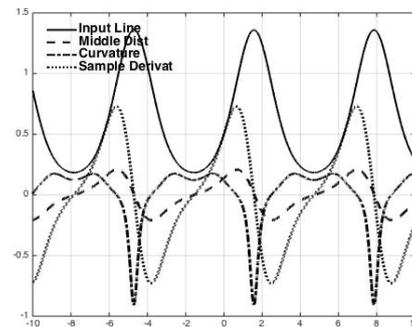


Рис. 5. Экспонента от косинуса

Из рис. 5 видно, что кривая расстояния, вычисленная по формуле (2)<sup>1</sup> хорошо аппроксимирует первую производную от заданной функции и совсем не коррелирует с теоретически вычисленной кривизной.

Проведённые далее эксперименты показали, что с увеличением длины хорды точность дифференцирования существенно снижается, а при длине хорды в 50-70 точек функция расстояния стремится к значению кривизны, но с обратным знаком, как показано на рис. 6 и 7.

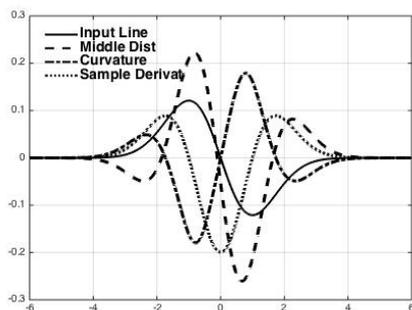


Рис. 6. Длина хорды равна 35

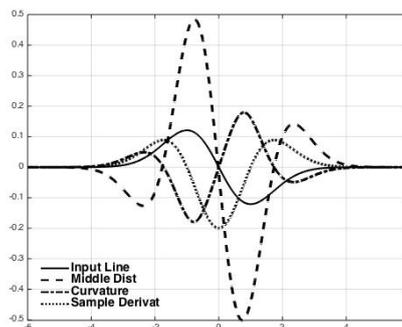


Рис. 7. Длина хорды равна 75

Однако на рис. 8 и 9 для функции Гаусса показано, что точность вычисления кривизны зависит от формы дифференцируемой кривой.

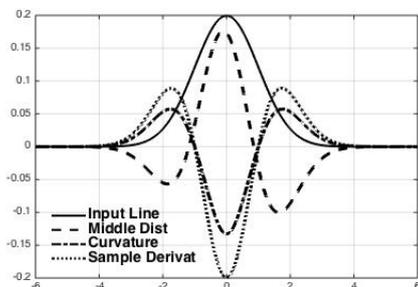


Рис. 8. Длина хорды равна 35

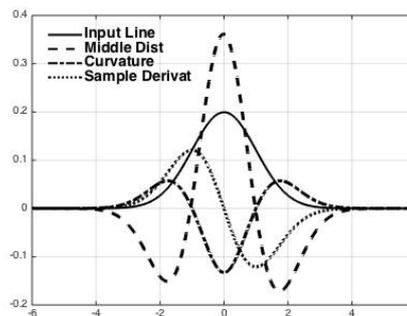


Рис. 9. Длина хорды равна 75

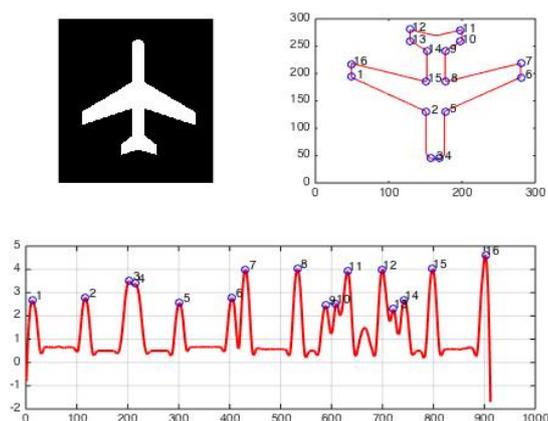
Из рис. 8 и 9 видно, что при дальнейшем увеличении длины хорды хорошо заметны искажения для функции расстояния в виде нарушения симметрии (которая теперь стремится к кривизне, но с обратным знаком), которые возрастают при дальнейшем увеличении длины хорды (справа).

### 3. Обсуждение и выводы

В качестве иллюстрации качества вычисления производной приведём рисунок, на котором показано тестовое изображение самолёта, его контур и функция производной,

<sup>1</sup>При вычислении расстояния было использовано условие, что если хорда расположена выше кривой, то она берётся с положительным знаком, а если ниже — то с отрицательным.

вычисленная по этому контуру. На рис. 10 показан результат обработки силуэта самолёта (слева сверху) с небольшим уровнем шума. Для получения контура объекта (справа сверху) была использована следующая последовательность функций Matlab из пакета Image Processing: загрузка изображения; фильтрация, для удаления шумов и метод Contour Following [10]. Функция производной контура, вычисленная по предложенной методике приведена на рис. 10 (внизу).



**Рис. 10.** Силуэт самолёта с наложенными шумами (слева сверху), его полученный контур (справа сверху) с нанесёнными точками высокой кривизны и функция производной контура (снизу), с соответствующими точками максимальной кривизны

Для определения области применимости данного метода дифференцирования были проведены исследования над изображениями с различным уровнем шумов. Результаты этих исследований свидетельствуют о небольших погрешностях дифференцирования при увеличении отношения «сигнал–шум» вплоть до 60 дБ. При больших уровнях шумов точность дифференцирования существенно снижалась.

На основе полученных результатов можно сделать выводы о работоспособности данного метода при использовании его для обработки изображений и идентификации графических объектов на изображениях, полученных в различных областях геодезии, медицины, астрономии, ядерной физики и др.

Кроме того, данный метод может быть рекомендован для применения в других областях науки не связанных с обработкой изображений, но тем не менее использующих обработку табулированных данных, например в экономике при изучении различных трендов.

## Литература

1. *Nixon M., Aguado A.* Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision. — 3 edition. — Elsevier, 2012. — 423 p.
2. *Nguyen T. P., Debled-Rennesson I.* A Discrete Geometry Approach for Dominant Point Detection // Pattern Recognition. — 2011. — Vol. 44, No 1. — Pp. 32–44.
3. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычисления. — М.: Физматлит, 1962. — Т. 1.
4. *Abramowitz M., Stegun I.* Handbook of Mathematical Functions. — Washington: U.S National Bureau of Standards, 1964.
5. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщённые функции. — Москва: Физматлит, 1959.

6. *Lanczos C.* Applied Analysis. — New Jersey: Prentice Hall Inc, 1956.
7. *Numerov B.* Note on the Numerical Integration of  $d^2x/dt^2 = f(x, t)$  // *Astronomische Nachrichten.* — 1927. — Vol. 230, No 19. — Pp. 359–364. — ISSN 1521-3994.
8. *Yijia L., Jiqing D., Hongmei W.* Contour Shape Description Based on an Arch Height Function // *Pattern Recognition.* — 1992. — Vol. 25, No 1. — Pp. 17 – 23. — ISSN 0031-3203.
9. *Marji M., Klette R., Sij P.* Corner Detection and Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance // *Combinatorial Image Analysis: 10th International Workshop, IWCIA 2004, Auckland, New Zealand, December 1-3, 2004. Proceedings / Ed. by R. Klette, J. Žunić.* — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005. — Pp. 512–521.
10. *Thakur R.* Contour Following in Binary Images. — <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23056-contour-following-in-binary-images>.

UDC 519.68

## About One Method of Differentiation of a Flat Discrete Planar Curve in Image Processing

I. M. Gostev\*, L. A. Sevastyanov†

\* *National Research University "Higher School of Economic", Moscow, Russia*

† *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

The problem of receiving points with high curvature (singular points) of contours for identification of the shape of objects on images is solved. Analysis of existing methods of numerical differentiation in the given aspect is held. The new method of differentiation of the flat discretely defined curves, which are dots (pixels) of circuits, based on variations of Arch Height method is considered. Features of such method of differentiation are shown using various formulas of calculation of a derivative. Dependency aspects of the accuracy of the derivative on the chord length are analyzed. It is shown, that with an increase in its length differentiation accuracy degrades, and the result tends to the module of curvature of a curve at the given point. Comparison of the developed method with other known methods is made. The analysis of area of applicability and variability of parameters of differentiation is made. The accuracy aspects of calculation of derivatives for various parameters of differentiation are investigated. Examples of differentiation of various curves, both set analytically, and the functions-contours received from real images are considered. It is shown, that the offered method allows to get rid of the ambiguity in position of points of a contour with high curvature and consequently to raise quality of recognition of the shape of objects. Possible scopes of the given method in various areas of science and technics are stated.

**Key words and phrases:** image processing, pattern recognition, computer geometry, differentiation, singular points, analysis of contour

## References

1. M. Nixon, A. Aguado, *Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision*, 3rd Edition, Elsevier, 2012.
2. T. P. Nguyen, I. Debled-Rennesson, A Discrete Geometry Approach for Dominant Point Detection, *Pattern Recognition* 44 (1) (2011) 32–44.
3. I. S. Beresin, N. P. Zhidkov, *Methods of Calculation*, Vol. 1, Fizmatlit, Moscow, 1962, in Russian.
4. M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, U.S National Bureau of Standards, Washington, 1964.
5. I. M. Gelfand, G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Fizmatlit, Moscow, 1959, in Russian.
6. C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice Hall Inc, New Jersey, 1956.
7. B. Numerov, Note on the Numerical Integration of  $d^2x/dt^2 = f(x, t)$ , *Astronomische Nachrichten* 230 (19) (1927) 359–364.

8. L. Yijia, D. Jiqing, W. Hongmei, Contour Shape Description Based on an Arch Height Function, *Pattern Recognition* 25 (1) (1992) 17–23.
9. M. Marji, R. Klette, P. Siy, *Corner Detection and Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005, pp. 512–521.
10. R. Thakur, Contour Following in Binary Images.  
URL <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23056-contour-following-in-binary-images>

© Гостев И. М., Севастьянов Л. А., 2016

---

UDC 519.632.4

## Algorithms for Solving the Boundary-Value Problems for Atomic Trimers in Collinear Configuration using the Kantorovich Method

A. A. Gusev<sup>\*</sup>, O. Chuluunbaatar<sup>\*†</sup>,  
S. I. Vinitsky<sup>\*‡</sup>, V. L. Derbov<sup>§</sup>

<sup>\*</sup> *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Russia*

<sup>†</sup> *Institute of Mathematics, National University of Mongolia, Ulan-Bator, Mongolia*

<sup>‡</sup> *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*

<sup>§</sup> *Saratov State University, Saratov, Russia*

The model of atomic trimers with molecular pair interactions for collinear configuration is formulated as a 2D boundary-value problem (BVP) in the Jacobi and polar coordinates. The latter is reduced to a 1D BVP for a system of second-order ordinary differential equations (ODEs) by means of the Kantorovich method using the expansion of the desired solutions over a set of angular basis functions, parametrically dependent on the (hyper)radial variable. The algorithms for solving the 1D parametric BVP by means of the finite element method (FEM) and calculating the asymptotes of the parametric angular functions and effective potentials of the system of ODEs at large values of the parameter are presented. The efficiency of the algorithms is confirmed by comparing the calculated asymptotic solutions and effective potentials with those of the parametric eigenvalue problem obtained by applying the FEM at large values of the parameter. The applicability of the algorithms is demonstrated by calculating the asymptotic expansions of the parametric BVP solution, effective potentials and sets of binding energies for the beryllium trimer in the collinear configuration.

**Key words and phrases:** boundary-value problems, the Kantorovich method systems of second-order ordinary differential equations, finite element method

### 1. Introduction

At the present time, the processes of resonance scattering of diatomic molecules by atoms via three-particle clustering and metastable states, as well as the processes of dissociation of the molecule induced by collisions with atoms are a subject of intense theoretical and experimental studies [1–3].

To analyse such processes they use triatomic model systems with the atoms bound by pair realistic molecular and van-der-Waals potentials, which possess bound and metastable states in the vicinity of the dissociation threshold of the diatomic molecule. The study of such models stimulates the development of new methods and symbolic-numerical algorithms for solving multidimensional boundary value problems with non-separable variables and the construction of asymptotic states of the scattering problem in a system of three atoms, based on the Kantorovich method and the finite element method (FEM), implemented in the problem-oriented software packages [4–9].

The aim of this paper is to formulate the 2D BVPs in the Jacobi and polar coordinates for the model of an atomic trimer in the collinear configuration and to develop the algorithms for calculating the asymptotic parametric angular functions and the effective potentials arising in the Kantorovich method and needed for constructing the asymptotic states of the triatomic scattering problem. The developed algorithms will be tested by the example of beryllium atoms trimer model.

The paper is organised as follows. In Section 2 we set the 2D BVP. In Section 3 the 2D BVP is reduced to the 1D BVP for a set of second-order ODEs using the Kantorovich

---

Received 16<sup>th</sup> September, 2016.

The authors thank Profs. V.P. Gerdt, F.M. Penkov and Drs. P.M. Krassovitskiy, L.L. Hai for collaboration. The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (grants No. 14-01-00420, 17-01-00298). The reported study was funded within the Agreement N 02.a03.21.0008 dated 24.04.2016 between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and RUDN University.

method. As an example, the eigenvalues and the hyperradial eigenfunction components are calculated by means of the Kantorovich method and FEM for the model of beryllium trimer in the collinear configuration. In Section 4 we present the algorithms for calculating the asymptotes of the parametric basis functions in polar coordinates at large values of the parameter (hyperradial variable) and the effective potentials of the system of ODEs. In Conclusion the results and perspectives are discussed.

## 2. Setting of the problem

Consider a 2D model of three identical particles with the mass  $M$  and the coordinates  $x_i \in \mathbf{R}^1$ ,  $i = 1, 2, 3$ , coupled via the pair potential  $\tilde{V}(|x_i - x_j|)$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Performing the change of variables at cyclic permutation  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$ :

$$x \equiv x_{(\alpha\beta)} = x_\alpha - x_\beta, \quad y \equiv y_{(\alpha\beta)\gamma} = \frac{x_\alpha + x_\beta - 2x_\gamma}{\sqrt{3}}, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3),$$

we arrive at the Schrödinger equation for the wave function in the center-of-mass system  $\{x_i \in \mathbf{R}^1 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{M}{\hbar^2}(\tilde{V}(x, y) - \tilde{E}) \right) \Psi(y, x) = 0. \quad (1)$$

In the case of a diatomic molecule with identical nuclei coupled via the pair potential  $\tilde{V}(|x_1 - x_2|)$  and moving in the external potential field  $\tilde{V}^b(|x_i - x_3|)$ ,  $i = 2, 1$  of the third atom having the infinite mass, the same equation (1) is valid for the variables

$$x = x_1 - x_2, \quad y = x_1 + x_2,$$

the origin of the coordinate frame being placed on the infinite-mass atom,  $x_3 = 0$ .

Here the potential function for a trimer with the pair potentials (below this case is referred to as Task 2),

$$\tilde{V}(x, y) = \tilde{V}(|x|) + \tilde{V}\left(\left|\frac{x - \sqrt{3}y}{2}\right|\right) + \tilde{V}\left(\left|\frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right|\right), \quad (2)$$

or the potential function for a dimer in the field of barrier potentials (below this case is referred to as Task 3)

$$\tilde{V}(x, y) = \tilde{V}(|x|) + \tilde{V}^b\left(\left|\frac{x - y}{2}\right|\right) + \tilde{V}^b\left(\left|\frac{x + y}{2}\right|\right), \quad (3)$$

is symmetric with respect to the straight line  $x = 0$  (i.e.,  $x_1 = x_2$ ), which allows one to consider the solutions of the problem in the half-plane  $x \geq 0$ . Using the Dirichlet or Neumann boundary condition at  $x = 0$  allows one to obtain the solutions, symmetric and antisymmetric with respect to the permutation of two particles. If the pair potential possesses a high maximum in the vicinity of the pair collision point, then the solution of the problem in the vicinity of  $x = 0$  is exponentially small and can be considered in the half-plane  $x \geq x_{\min}$ . In this case setting the Neumann or Dirichlet boundary condition at  $x_{\min}$  gives only a minor contribution to the solution. The equation, describing the molecular subsystem (dimer), has the form

$$\left( -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{M}{\hbar^2}(\tilde{V}(x) - \tilde{\varepsilon}) \right) \phi(x) = 0. \quad (4)$$

We assume that the dimer has the discrete spectrum, consisting of a finite number  $n_0 \geq 1$  of bound states with the eigenfunctions  $\phi_j(x)$ ,  $j = 1, n_0$  and eigenvalues  $\tilde{\varepsilon}_j = -|\tilde{\varepsilon}_j| < 0$ , and the continuous spectrum of eigenvalues  $\tilde{\varepsilon} > 0$  with the corresponding eigenfunctions  $\phi_{\tilde{\varepsilon}}(x)$ . As a rule, the solutions of the discrete and continuum spectra of the BVP for Eq. (4) can be found only numerically, except simplified models having exact solutions and used for computer modelling of bimolecular chemical reactions. In certain cases the eigenfunctions of the continuous spectrum are approximated by the eigenfunctions of pseudostates of discrete spectrum  $\tilde{\varepsilon}_j > 0$ ,  $j = 1 + n_0, \dots$  calculated in sufficiently large but finite interval [10].

The proposed algorithm is illustrated by the example of the molecular interaction approximated by the Morse potential of  $\text{Be}_2$  with the reduced mass  $M/2 = 4.506$  Da of the nuclei [10, 11]

$$V(x) = \frac{M}{\hbar^2} \tilde{V}(x), \quad \tilde{V}(x) = D\{\exp[-2(x - \hat{x}_{eq})\alpha] - 2\exp[-(x - \hat{x}_{eq})\alpha]\}. \quad (5)$$

Here  $\alpha = 2.96812 \text{ \AA}^{-1}$  is the potential well width,  $\hat{x}_{eq} = 2.47 \text{ \AA}$  is the average distance between the nuclei, and  $D = 1280 \text{ K}$  ( $1 \text{ K} = 0.184766 \text{ \AA}^{-2}$ ,  $1 \text{ \AA}^{-2} = 5.412262 \text{ K}$ ) is the potential well depth. This potential supports five bound states [12] having the energies  $\varepsilon_i = (M/\hbar^2)\tilde{\varepsilon}_i$ ,  $i = 1, \dots, n_0 = 5$  presented in Table 1. The parameter values are determined from the condition  $(\tilde{\varepsilon}_2 - \tilde{\varepsilon}_1)/(2\pi\hbar c) = 277.124 \text{ cm}^{-1}$ ,  $1\text{K}/(2\pi\hbar c) = 0.69503476 \text{ cm}^{-1}$ .

Table 1

**The discrete spectrum energies of dimer  $\text{Be}_2$  and the binding energy  $E^b = -(E - E^a)$  of gerade ( $g$ ) and ungerade ( $u$ ) states of trimer  $\text{Be}_3$  counted of  $E^a = \tilde{\varepsilon}_1 = -193.06 \text{ \AA}^{-2} = -1044 \text{ K}$  dimer energy  $\text{Be}_2$  calculated in grid  $\Omega_\rho = 4.1(20)7(10)10$  at  $j_{\max} = 10$**

$-\tilde{\varepsilon}_i$	$E_{i,g}^b$	$E_{i,u}^b$
$-\tilde{\varepsilon}_1 = 1044.879 \text{ 649K}$	$E_{1,g}^b = 196.02 \text{ \AA}^{-2} = 1060.86 \text{ K}$	$E_{1,u}^b = 107.52 \text{ \AA}^{-2} = 581.90 \text{ K}$
$-\tilde{\varepsilon}_2 = 646.157 \text{ 093K}$	$E_{2,g}^b = 142.37 \text{ \AA}^{-2} = 770.51 \text{ K}$	$E_{2,u}^b = 67.41 \text{ \AA}^{-2} = 364.84 \text{ K}$
$-\tilde{\varepsilon}_3 = 342.791 \text{ 979K}$	$E_{3,g}^b = 93.95 \text{ \AA}^{-2} = 508.50 \text{ K}$	$E_{3,u}^b = 34.60 \text{ \AA}^{-2} = 187.28 \text{ K}$
$-\tilde{\varepsilon}_4 = 134.784 \text{ 305K}$	$E_{4,g}^b = 52.77 \text{ \AA}^{-2} = 285.63 \text{ K}$	$E_{4,u}^b = 11.79 \text{ \AA}^{-2} = 63.83 \text{ K}$
$-\tilde{\varepsilon}_5 = 22.134 \text{ 073K}$	$E_{5,g}^b = 32.32 \text{ \AA}^{-2} = 174.95 \text{ K}$	$E_{5,u}^b = 0.8 \text{ \AA}^{-2} = 4.4 \text{ K}$
	$E_{6,g}^b = 22.31 \text{ \AA}^{-2} = 120.75 \text{ K}$	
	$E_{7,g}^b = 5.14 \text{ \AA}^{-2} = 27.87 \text{ K}$	

To solve the discrete spectrum problem we applied the FEM of the seventh order using the Hermitian interpolation polynomials with double nodes [9]. The grid  $\{x_0, \dots, x_i, \dots, x_n\}$  was used to calculate the values of both the function and its derivatives.

### 3. Reduction of the BVP using the Kantorovich method

Using the change of variables  $x = \rho \sin \varphi$ ,  $y = \rho \cos \varphi$ , we rewrite Eq. (1) in polar coordinates  $(\rho, \varphi)$ ,  $\Omega_{\varphi,\rho} = (\rho \in (0, \infty), \varphi \in (0, 2\pi))$

$$\left( -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \Lambda(\varphi, \rho) - E \right) \Psi(\varphi, \rho) = 0, \quad \Lambda(\varphi, \rho) = -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \rho^2 V(\varphi, \rho), \quad (6)$$

where for a trimer with pair potentials

$$V(\varphi, \rho) = V(\rho|\sin \varphi|) + V(\rho|\sin(\varphi - 2\pi/3)|) + V(\rho|\sin(\varphi - 4\pi/3)|), \quad (7)$$

and for a dimer with pair potential in the external field of barrier potentials:

$$V(\varphi, \rho) = V(\rho|\sin \varphi|) + V^b(\rho|\sin(\varphi - \pi/4)|) + V^b(\rho|\sin(\varphi + \pi/4)|). \quad (8)$$

The solution of Eq. (6) is sought in the form of the Kantorovich expansion

$$\Psi_{i_o}(\varphi, \rho) = \sum_{j=1}^{j_{\max}} \phi_j(\varphi; \rho) \chi_{ji_o}(\rho). \quad (9)$$

Here  $\chi_{ji_o}(\rho)$  are unknown functions and the orthogonal normalised angular basis functions  $\phi_j(\varphi; \rho) \in L_2(\Omega)$  in the interval  $\Omega = \varphi \in (0, 2\pi)$  are defined as eigenfunctions, corresponding to the eigenvalues of the Sturm-Liouville problem for the equation

$$(\Lambda(\varphi, \rho) - \varepsilon_j(\rho)) \phi_j(\varphi; \rho) = 0, \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \phi_i(\varphi; \rho) \phi_j(\varphi; \rho) = \delta_{ij}, \quad (10)$$

where  $\varepsilon_j(\rho)$ ,  $j = 1, \dots$  is the set of the real-valued eigenvalues forming a purely discrete spectrum at each value of the parameter  $\rho \in (0, +\infty)$ . For the problems under consideration the potential function  $V(\varphi, \rho)$  depending on the parameter  $\rho$  can be defined as follows.

*Task 1.* The case of one pair potential in the intervals  $\varphi \in (0, 2\varphi_\alpha)$  ( $\varphi_\alpha = \pi/3, \pi/4$  or  $\pi/2$ )  $V(\varphi, \rho) = V(\rho \sin \varphi)$ .

*Task 2.* The case of three pair potentials, Eq. (7), in the interval  $\varphi \in (0, 2\varphi_\alpha = \pi/3)$ .

*Task 3.* The case of one pair potential and two penetrable or almost impenetrable barrier potentials, Eq. (8), in the interval  $\varphi \in (0, \varphi_\alpha = \pi/2)$  or in the intervals  $\varphi \in (0, \varphi_\alpha = \pi/4 - \epsilon)$  and  $\varphi \in (\varphi_\alpha = \pi/4 - \epsilon, \pi/2)$ ,  $0 < \epsilon \ll \pi/4$ .

The solutions symmetric with respect to the permutation of two particles satisfy the Neumann boundary condition at  $\varphi = 0$  and  $\varphi = 2\varphi_\alpha$ . If the pair potential possesses a high peak in the vicinity of the pair collision point, then the solution of the problem (6) will be considered in the half-plane  $\Omega_{\varphi, \rho} = (\rho \in (\rho_{\min}, \infty), \varphi \in [\varphi_{\min}(\rho), 2\varphi_\alpha - \varphi_{\min}(\rho)])$  with the Neumann or Dirichlet boundary condition. Since the potential of the boundary-value problem (10) is symmetric with respect to  $\varphi = \varphi_\alpha$ , the *gerade*  $\phi_j(\varphi; \rho) = \phi_j(2\varphi_\alpha - \varphi; \rho)$  and *ungerade*  $\phi_j(\varphi; \rho) = -\phi_j(2\varphi_\alpha - \varphi; \rho)$  solutions, satisfying the Neumann or the Dirichlet boundary condition respectively, will be considered separately in the interval  $\varphi \in [\varphi_{\min}(\rho), \varphi_\alpha]$ . The parametric angular basis functions with successive numbers  $j = 1, \dots, n_0$  are referred to as cluster states with  $\varepsilon_j(\rho) < 0$  and those with  $j \geq n_0 + 1$  as pseudostates with  $\varepsilon_j(\rho) > 0$  corresponding to discrete and continuous spectrum of (4) at large values of the parameter  $\rho$ , respectively.

The system of coupled ODEs in the Kantorovich form has the form

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} + \frac{\varepsilon_i(\rho)}{\rho^2} - E \right] \chi_{ii_o}(\rho) + \sum_{j=1}^{j_{\max}} W_{ij}(\rho) \chi_{ji_o}(\rho) = 0, \quad (11)$$

$$W_{ij}(\rho) = H_{ji}(\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \rho Q_{ji}(\rho) + Q_{ji}(\rho) \frac{d}{d\rho}. \quad (12)$$

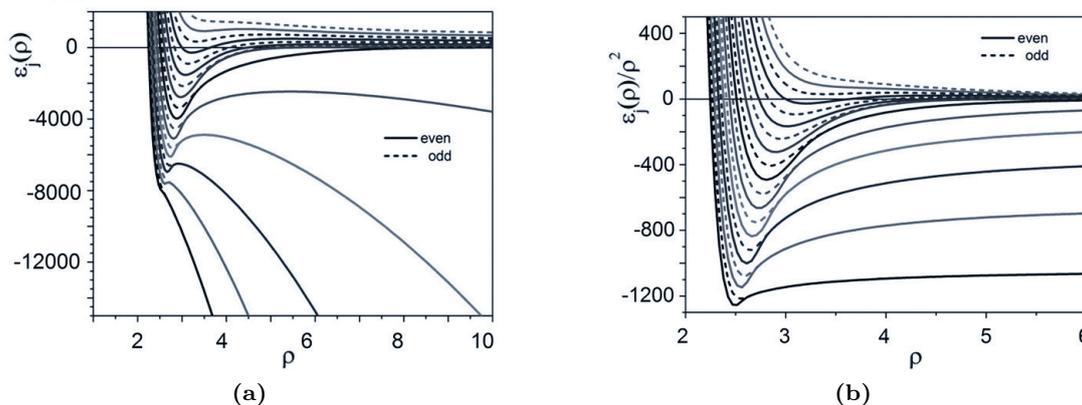
Here the potential curves (terms)  $\varepsilon_j(\rho)$  are eigenvalues of the BVP (10) and the effective potentials  $Q_{ij}(\rho) = -Q_{ji}(\rho)$ ,  $H_{ij}(\rho) = H_{ji}(\rho)$  are given by the integrals calculated using the above symmetry on reduced intervals  $\varphi \in [0, 2\varphi_\alpha]$ :

$$Q_{ij}(\rho) = - \int_0^{2\varphi_\alpha} d\varphi \phi_i(\varphi; \rho) \frac{d\phi_j(\varphi; \rho)}{d\rho}, H_{ij}(\rho) = \int_0^{2\varphi_\alpha} d\varphi \frac{d\phi_i(\varphi; \rho)}{d\rho} \frac{d\phi_j(\varphi; \rho)}{d\rho}. \quad (13)$$

For *Task 3* the effective potentials  $\hat{W}_{ij}(\rho) = W_{ij}(\rho) + V_{ij}^b(\rho)$  are sums of  $W_{ij}(\rho)$ , calculated using the potential curves and the parametric basis functions of *Task 1*, and the integrals of barrier potentials  $V_{ij}^b(\rho)$  multiplied by the basis functions

$$V_{ij}^b(\rho) = \int_0^{\varphi_\alpha} d\varphi \phi_i(\varphi; \rho) (V^b(\rho \sin(\varphi - \pi/4)) + V^b(\rho \sin(\varphi + \pi/4))) \phi_j(\varphi; \rho).$$

As an example, we calculated with a required accuracy the parametric basis functions of BVP (10) and the effective potentials (13) for the models of Be<sub>2</sub> dimer and Be<sub>3</sub> trimer in collinear configuration by means the FEM using the programme ODPEVP [4]. The results of calculation on the grid  $\Omega_\varphi[1.8/\rho, a] = \{1.8/\rho(24)3/\rho(10)4/\rho(5)5/\rho(10)a\}$  for  $a = \pi/2$  for Be<sub>2</sub> dimer and  $a = \pi/6$  for Be<sub>3</sub> trimer are shown in Figs. 1, 2, and 3.



**Figure 1.** The potential curves of Be<sub>2</sub> (in K,  $1\text{K}=0.18\text{\AA}^{-2}$ ), i.e., the energy eigenvalues depending upon the parameter  $\rho$  (in  $\text{\AA}$ ): (a)  $\varepsilon_j(\rho)$  and (b)  $\tilde{\varepsilon}_j = \varepsilon_j(\rho)/\rho^2$ . Here  $j = 1, \dots, 10$

In the FEM the eigenfunctions  $\phi(\varphi; \rho)$  of the problem (10) are approximated by a finite sum of local functions  $N_l^p(\varphi)$  with coefficients  $\phi^l(\varphi_{s,r}^p, \rho)$  specified in the nodes  $\varphi_{s,r}^p$  of the finite element grid [4]

$$\phi(\varphi; \rho) = \sum_{l=0}^L \phi^l(\varphi_{s,r}^p, \rho) N_l^p(\varphi). \quad (14)$$

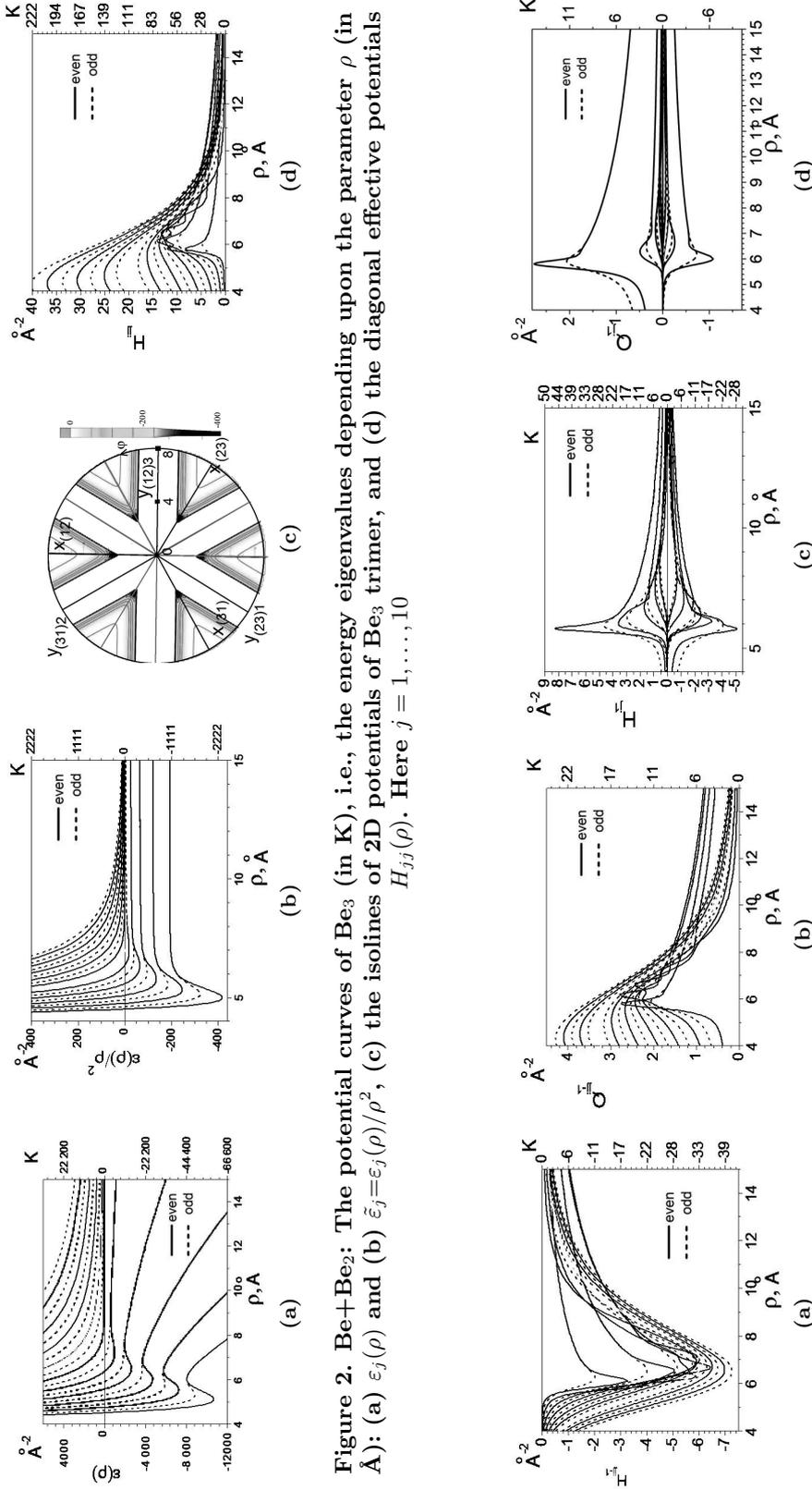


Figure 2. Be+Be<sub>2</sub>: The potential curves of Be<sub>3</sub> (in K), i.e., the energy eigenvalues depending upon the parameter  $\rho$  (in  $\text{\AA}$ ): (a)  $\epsilon_j(\rho)$  and (b)  $\tilde{\epsilon}_j = \epsilon_j(\rho)/\rho^2$ , (c) the isolines of 2D potentials of Be<sub>3</sub> trimer, and (d) the diagonal effective potentials  $H_{jj}(\rho)$ . Here  $j = 1, \dots, 10$

Figure 3. The effective potentials (13) (a)  $H_{jj-1}(\rho)$ , (b)  $Q_{jj-1}(\rho)$ , (c)  $H_{j1}(\rho)$ , (d)  $Q_{j1}(\rho)$ . Here  $j = 2, \dots, 10$

The functions  $\{N_l^p(\varphi)\}_{l=0}^L$ ,  $L = np$ , form a basis in the space of polynomials of the  $p$ -th order. After substituting the expansion (14) into the variational functional corresponding to BVP (10) and minimizing it [13, 14] we obtain the generalized eigenvalue problem

$$\mathbf{A}^p \phi^h = \epsilon^h \mathbf{B}^p \phi^h. \quad (15)$$

Here  $\mathbf{A}^p$  is the stiffness matrix;  $\mathbf{B}^p$  is the positive definite mass matrix;  $\phi^h$  is the vector approximating the solution on the finite-element grid; and  $\epsilon^h$  is the corresponding eigenvalue [4]. The required accuracy of the calculated eigenvalues, eigenfunctions and their derivatives with respect to parameter, and effective potentials is provided by the estimations given below.

Let  $\epsilon_j(\rho)$ ,  $\phi_j(\varphi; \rho)$  be the exact solution of (10) and  $\epsilon_j^h$ ,  $\phi_j^h$  be the numerical solution of (15). Then for a bounded positively defined operator  $\Lambda(\varphi; \rho)$  the following estimates are valid [13]

$$|\epsilon_j(\rho) - \epsilon_j^h| \leq c_1 h^{2p}, \quad \left\| \phi_j(\varphi; \rho) - \phi_j^h \right\|_0 \leq c_2 h^{p+1}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad (16)$$

where  $\|v(\varphi; \rho)\|_0^2 = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} v^2(\varphi; \rho) d\varphi$ ;  $h$  is the maximal grid step,  $p$  is the order of finite elements,  $j$  is the number of the corresponding eigensolution, and the constants  $c_1$  and  $c_2$  do not depend on the step  $h$ . It is necessary to mention that the second estimate of Eq. (16) is valid also for the solution  $\partial\phi_j(\varphi; \rho)/\partial\rho$  of the problem [4]

$$\begin{aligned} (\Lambda(\varphi, \rho) - \epsilon_j(\rho)) \frac{\partial\phi_j(\varphi; \rho)}{\partial\rho} &= - \left( \frac{\partial\Lambda(\varphi, \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial\epsilon_j(\rho)}{\partial\rho} \right) \phi_j(\varphi; \rho), \\ \int_0^{2\pi} d\varphi \phi_i(\varphi; \rho) \frac{\partial\phi_j(\varphi; \rho)}{\partial\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

This fact guarantees the same accuracy for eigenfunctions and their derivatives within the present method.

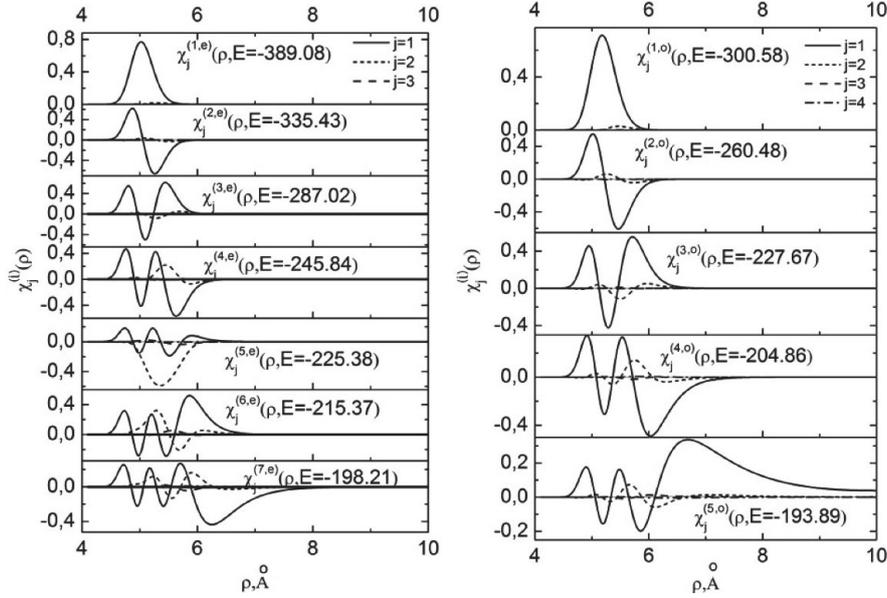
**Theorem 1.** *Let  $\Lambda(\varphi; \rho)$  be a bounded positively defined operator on the finite interval  $\varphi \in (\varphi_{\min}, \varphi_{\max})$ . Let  $\partial V(\varphi, \rho)/\partial\rho$  be also bounded for each value of the parameter  $\rho$ . Then for the exact solutions,  $\partial\epsilon_j(\rho)/\partial\rho$ ,  $\partial\phi_j(\varphi; \rho)/\partial\rho \in \mathcal{H}^2$ , from (17) and the potential matrix elements,  $Q_{ij}(\rho)$ ,  $H_{ij}(\rho)$ , from (13), and the corresponding numerical values,  $\partial\epsilon_j^h/\partial\rho$ ,  $\partial\phi_j^h/\partial\rho \in \mathcal{H}^1$ , and  $Q_{ij}^h$ ,  $H_{ij}^h$ , the following estimates are valid [4]*

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial\epsilon_j(\rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial\epsilon_j^h}{\partial\rho} \right| &\leq c_3 h^{2p}, \quad \left\| \frac{\partial\phi_j(\varphi; \rho)}{\partial\rho} - \frac{\partial\phi_j^h}{\partial\rho} \right\|_0 \leq c_4 h^{p+1}, \\ |Q_{ij}(\rho) - Q_{ij}^h| &\leq c_5 h^{2p}, \quad |H_{ij}(\rho) - H_{ij}^h| \leq c_6 h^{2p}, \end{aligned} \quad (18)$$

where  $h$  is the maximal grid step,  $p$  is the order of finite elements,  $i, j$  are the numbers of the corresponding solutions, and the constants  $c_3$ ,  $c_4$ ,  $c_5$  and  $c_6$  do not depend on the step  $h$ .

For this model the eigenvalues and the hyperradial components of 2D eigenfunctions of the BVP for the set of ODEs (11) with Neumann boundary conditions were calculated with the required accuracy by means the FEM using the program KANTBP [9]. The discrete energy spectrum of the dimer  $\text{Be}_2$  calculated of the grid  $\Omega_x(1.8, 10) =$

$\{1.8(24)3(10)4(5)5(10)10\}$  and the set of binding energies of the trimer  $\text{Be}_3$  calculated of the grid  $\Omega_\rho = 4.1(20)7(10)10$  with the eighth-order Lagrange elements ( $p = 8$ ) are shown in Table 1, and the components of the trimer eigenfunctions (9) are shown in Fig. 4.



**Figure 4.** Components  $\chi_j^{i,\sigma=g,u}(\rho, E) \equiv \chi_j^{(i)}(\rho)$  of gerade ( $g$ ) and ungerade ( $u$ ) bound states of the trimer  $\text{Be}_3$  with total energy  $E$  in  $\text{\AA}^{-2}$

#### 4. Algorithms for calculating the asymptotes of parametric angular basis functions and effective potentials

*Algorithm for calculating the cluster parametric angular basis functions and effective potentials of the lower part of the discrete spectrum*

Let us calculate the solution of the Sturm-Liouville problem (10) at large  $\rho$

$$(\Lambda(\varphi; \rho) - \varepsilon_j(\rho)) \phi_j(\varphi; \rho) \equiv \left( -\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 V(\rho \sin \varphi) - \varepsilon_j(\rho) \right) \phi_j(\varphi; \rho) = 0. \quad (19)$$

Using the new variable  $x'$  defined as  $\varphi = x'/\rho$ ,  $x' = \rho \arcsin(x/\rho)$  we get

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + V(\rho \sin(x'/\rho)) - \frac{\varepsilon_j(\rho)}{\rho^2} \right) \phi_j(x'; \rho) = 0. \quad (20)$$

In the argument of the potential we add and subtract  $x'$  and expand the potential in Taylor series in the vicinity of  $x'$ ,

$$V(\rho \sin(x'/\rho)) = V(x' + \Delta x') = V(x') + \sum_{k=1} \frac{d^k V(x')}{dx'^k} \frac{(\Delta x')^k}{k!}, \quad (21)$$

where the small correction  $\Delta x' = \rho \sin(x'/\rho) - x' \ll 1$  is presented in the form of Taylor series

$$\Delta x' = \sum_{k=1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{x'^{2k+1}}{\rho^{2k}}.$$

Then the Sturm-Liouville problem (19) is reduced to

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + V(x') + \sum_{k=1} \frac{V^{(k)}(x')}{\rho^{2k}} - \frac{\varepsilon_j(\rho)}{\rho^2} \right) \phi_j(x'; \rho) = 0, \quad (22)$$

$$\langle \phi_i(\rho) | \phi_j(\rho) \rangle \equiv \int_{x'_0}^{x'_{\max}} dx' (\phi_i(x'; \rho) \phi_j(x'; \rho)) = \delta_{ij}.$$

Here first terms  $V^{(k)}(x')$  of the asymptotic expansion of  $V(\rho \sin(x'/\rho))$  read as

$$V^{(1)}(x') = -\frac{x'^3}{6} \frac{dV(x')}{dx'},$$

$$V^{(2)}(x') = \frac{x'^5}{360} \left( 5x' \frac{d^2V(x')}{dx'^2} + 3 \frac{dV(x')}{dx'} \right), \quad (23)$$

$$V^{(3)}(x') = -\frac{x'^7}{45360} \left( 35x'^2 \frac{d^3V(x')}{dx'^3} + 63x' \frac{d^2V(x')}{dx'^2} + 9 \frac{dV(x')}{dx'} \right),$$

$$V^{(4)}(x') = \frac{x'^9}{5443200} \left( 175x'^3 \frac{d^4V(x')}{dx'^4} + 630x'^2 \frac{d^3V(x')}{dx'^3} + 369x' \frac{d^2V(x')}{dx'^2} + 15 \frac{dV(x')}{dx'} \right).$$

Note that  $k!V^{(k)}(x')$  are the derivatives of the potential of the BVP (22) with respect to the parameter  $\rho^{-2}$ . So, we apply the modified version of the program ODPEVP for calculating the parameter derivatives of the solution up to the given order to determine the asymptotic expansion of the cluster eigenfunctions and eigenvalues.

In the framework of FEM using similar expansions (14) we reduce the eigenvalue problem on the given finite-element grid  $\Omega_{x'}(x'_{\min}, x'_{\max})$  in the finite interval  $x' \in (x'_{\min}, x'_{\max})$  to a generalized eigenvalue algebraic problem with respect to the eigenvalues  $\lambda \in \{\lambda_j\}_{j=1}^{N_o}$  and the corresponding eigenvectors  $c(\rho) = \{(c_i(\rho))_j\}_{j=1}^{N_o}$  of the order  $L$ . In the considered example  $\Omega_{x'}(1.8, 10) = \{1.8(24)3(10)4(5)5(10)10\}$  with Lagrange elements of the eighth order NPOL=p=8 (the numbers of elements between the nodes given in parentheses), providing the accuracy  $O(h^{2p})$  for the eigenvalues and  $O(h^{p+1}) \approx 10^{-8}$  for the eigenfunctions,  $h$  being the maximal grid step.  $L$  equals the number of grid nodes, which in the considered example was  $L = 393$ .

$$A(\rho)c(\rho) - c(\rho)B\lambda(\rho) = 0, \quad (24)$$

$$(c(\rho))^T Bc(\rho) = 1. \quad (25)$$

Here the matrix  $A(\rho)$  is presented in the form of inverse power series

$$A(\rho) = A^{(0)} + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} A^{(k)}. \quad (26)$$

We choose as unperturbed the matrix operator  $A^{(0)}$  corresponding to the differential one,  $-\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + V(x')$ , and numerically solve the corresponding algebraic problem

$$A^{(0)}c^{(0)} - \lambda^{(0)}Bc^{(0)} = 0, \quad c^{(0)T}Bc^{(0)} = 1. \quad (27)$$

The solution  $\lambda(\rho)$ ,  $c(\rho)$  is sought in the form of inverse power series

$$\lambda(\rho) = \lambda_j^{(0)}(\rho) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} \lambda_j^{(k)}, \quad c(\rho) = c^{(0)} + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} c^{(k)}. \quad (28)$$

The substitution of Eq. (28) into Eq. (22) leads to the system of inhomogeneous algebraic equations for the corrections  $\lambda^{(k)}$  and  $c^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} (A^{(0)}c^{(k)} - \lambda^{(0)}Bc^{(k)}) + (A^{(k)}c^{(0)} - \lambda^{(k)}Bc^{(0)}) &= b_{(k)}, \\ b_{(k)} \equiv \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k!}{n!(k-n)!} (Bc^{(k-n)}\lambda^{(n)} - A^{(n)}c^{(k-n)}), \quad b_{(1)} &\equiv 0, \\ A^{(k)} \equiv \frac{\partial^k A^{(0)}}{\partial r^k}, \quad \lambda^{(k)} \equiv \frac{\partial^k \lambda^{(0)}}{\partial r^k}. \end{aligned} \quad (29)$$

Differentiating the normalization condition (25), we obtain additional conditions for the corrections  $c^{(k)}$ :

$$c^{(0)T}Bc^{(k)} \equiv F_N^{(k)} = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{k!}{n!(k-n)!} c^{(k-n)T}Bc^{(n)}.$$

Multiplying (29) by  $c^{(0)T}$  and taking the zero values of the first term and the normalization condition into account, we get the formula for the corrections  $\lambda^{(k)}$  of the eigenvalues:

$$\lambda^{(k)} = c^{(0)T}A^{(k)}c^{(0)} - c^{(0)T}b_{(k)}. \quad (30)$$

The vector  $c^{(k)}$  is calculated by solving the system of algebraic equations

$$\begin{aligned} Kc^{(k)} \equiv A^{(0)}c^{(k)} - \lambda^{(0)}Bc^{(k)} &= b^{(k)} \\ b^{(k)} \equiv -\sum_{n=1}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} (A^{(n)}c^{(k-n)} - \lambda^{(n)}Bc^{(k-n)}), \\ \sum_{n=0}^k \frac{k!}{n!(k-n)!} c^{(k-n)T}Bc^{(n)} &= 0, \end{aligned} \quad (31)$$

where the latter equation is a result of differentiation of the normalization condition.

Since  $\lambda^{(0)}$  is an eigenvalue of (27), the matrix  $K$  in Eq. (31) is degenerate. In this case the algorithm for solving Eq. (31) can be written in three steps as follows:

*Step k1.* Calculate the solutions  $v^{(k)}$  and  $w$  of the auxiliary inhomogeneous systems of algebraic equations

$$\bar{K}v^{(k)} = \bar{b}^{(k)}, \quad \bar{K}w = d \quad (32)$$

with the non-degenerate matrix  $\bar{K}$  and the right-hand sides  $\bar{b}^{(k)}$  and  $d$

$$\bar{K}_{ij} = \begin{cases} K_{ij}, & (i-s)(j-s) \neq 0, \\ \delta_{ij}, & (i-s)(j-s) = 0, \end{cases}$$

$$\bar{b}_j^{(k)} = \begin{cases} b_j^{(k)}, & j \neq s, \\ 0, & j = s, \end{cases} \quad d_j = \begin{cases} K_{js}, & j \neq s, \\ 0, & j = s, \end{cases}$$

where  $s$  is the number of vector  $c^{(0)}$  element having the maximal absolute value.

*Step k2.* Evaluate the coefficient  $\gamma^{(k)}$

$$\gamma^{(k)} = -\frac{\gamma_1^{(k)} - F_N^{(k)}}{(c_s^{(0)} - \gamma_2)}, \quad \gamma_1^{(k)} = v^{(k)T} c^{(0)}, \quad \gamma_2 = w^T c^{(0)}. \quad (33)$$

*Step k3.* Evaluate the vector  $c_j^{(k)}$

$$c_j^{(k)} = \begin{cases} v_j^{(k)} - \gamma^{(k)} w_j, & j \neq s, \\ \gamma^{(k)}, & j = s. \end{cases} \quad (34)$$

The execution of the above procedure yields the required asymptotic expansion for the eigenvalues

$$\frac{\varepsilon_j(\rho)}{\rho^2} = \varepsilon_j^{(0)}(\rho) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \rho^{-2k} \varepsilon_j^{(k)} = \lambda_j^{(0)}(\rho) + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} \lambda_j^{(k)} \quad (35)$$

and the corresponding expansion of the eigenfunctions in the nodes  $x'_i$  of the given grid

$$\phi_j(x'_i; \rho) = (c^{(0)})_{ij} + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} (c^{(k)})_{ij}.$$

Following Eq. (14) we present it in the form of a piecewise-polynomial function

$$\phi_j(x' \in [x'_{pk}, x'_{p(k+1)}]; \rho) = \sum_{p'=0}^p \phi_j(x'_{pk+p'}; \rho) \prod_{p''=0, p'' \neq p'}^p \frac{x' - x'_{p''}}{x'_{p'} - x'_{p''}}. \quad (36)$$

We calculate the discrete spectrum solutions  $\phi_j(\varphi; \rho)$  of the problem (19) on the grid  $\varphi_i = x'_i/\rho$ , related to the solutions  $\phi_j(x'_i; \rho)$  of the problem (20) as

$$\phi_j(\varphi_i = x'_i/\rho; \rho) = \sqrt{\rho} \phi_j(x'_i; \rho).$$

The corresponding piecewise-polynomial functions are

$$\begin{aligned} \phi_j(\varphi_i \in [\varphi_{pk}, \varphi_{p(k+1)}]; \rho) &= \phi_j(\varphi_i = x'_i/\rho \in [x'_{pk}/\rho, x'_{p(k+1)}/\rho]; \rho) = \\ &= \sum_{p'=0}^p \phi_j(\varphi_{pk+p'}; \rho) \prod_{\substack{p''=0 \\ p'' \neq p'}}^p \frac{\varphi - \varphi_{p''}}{\varphi_{p'} - \varphi_{p''}} = \sum_{p'=0}^p \phi_j(\varphi_{pk+p'}; \rho) \prod_{\substack{p''=0 \\ p'' \neq p'}}^p \frac{\varphi \rho - x'_{p''}}{x'_{p'} - x'_{p''}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\rho} \sum_{p'=0}^p \phi_j(x'_{pk+p'}; \rho) \prod_{\substack{p''=0 \\ p'' \neq p'}}^p \frac{\varphi \rho - x'_{p''}}{x'_{p'} - x'_{p''}} = \\
&= \sqrt{\rho} \sum_{p'=0}^p \left( (c^{(0)})_{ij} + \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{\rho^{-2k}}{k!} (c^{(k)})_{ij} \right) \prod_{\substack{p''=0 \\ p'' \neq p'}}^p \frac{\varphi \rho - x'_{p''}}{x'_{p'} - x'_{p''}}. \quad (37)
\end{aligned}$$

The nodes  $x'_{p'}$  in Eq. (37) are the same as in Eq. (36).

The calculation of the matrix elements is similar to the derivation of Newton-Cotes formulae [15]. In each of the subintervals of the nonuniform finite element mesh the calculated values of functions and their derivatives are approximated, in the considered case of  $\Omega_\varphi[1.8/\rho, 10/\rho] = \{1.8/\rho(24)3/\rho(10)4/\rho(5)5/\rho(10)10/\rho\}$  by a Lagrange polynomial of the order  $p = 8$ , which provides the same relative accuracy of  $O(h^{p+1})$ . The obtained approximations of functions are polynomials of  $\varphi$ , explicitly depending on  $\rho$ . By analytical differentiation of Eq. (37) with respect to the parameter we arrive at the explicit expansion of the derivative  $\frac{\partial \phi_j(\varphi; \rho)}{\partial \rho}$ . Integrating the products of functions  $\phi_j(\varphi; \rho)$  and/or their parametric derivatives in each subinterval of the length  $h_i = \varphi_{p(i+1)} - \varphi_{pi}$  of the nonuniform finite element mesh  $\Omega_\varphi$  and summing the obtained results, we get the required asymptotic expansion of matrix elements (13) for cluster states,  $i, j = 1, \dots, n_0$ :

$$Q_{ij}(\rho) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{Q_{ij}^{(2k-1)}}{\rho^{2k-1}}, \quad H_{ij}(\rho) = \sum_{k=1}^{k_{max}} \frac{H_{ij}^{(2k)}}{\rho^{2k}}. \quad (38)$$

For the beryllium trimer in collinear configuration, the coefficients  $\varepsilon_j^{(k)}$  of the expansion (35) and the coefficients  $H_{jj}^{(k)}$  of the expansion (38) at  $i = j$  are presented in Table 2, and the first coefficients of the expansions (38) are

$$\begin{aligned}
Q_{ij}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 0 & 10.3201 & -3.81790 & 1.83170 & -0.903311 \\ -10.3201 & 0 & 12.2419 & -5.54402 & 2.68986 \\ 3.81790 & -12.2419 & 0 & 11.5096 & -5.30745 \\ -1.83170 & 5.54402 & -11.5096 & 0 & 7.99437 \\ 0.903311 & -2.68986 & 5.30745 & -7.99437 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q_{ij}^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 & 19.6114 & -3.63427 & 1.58999 & -6.31271 \\ -19.6114 & 0 & 32.2355 & -12.5531 & 22.0625 \\ 3.63427 & -32.2355 & 0 & 52.0431 & -53.8134 \\ -1.58999 & 12.5531 & -52.0431 & 0 & 105.275 \\ 6.31271 & -22.0625 & 53.8134 & -105.275 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q_{ij}^{(5)} &= \begin{pmatrix} 0 & 68.2366 & -6.68774 & -14.8770 & 128.505 \\ -68.2366 & 0 & 91.6918 & 27.6600 & -356.227 \\ 6.68774 & -91.6918 & 0 & 68.9065 & 595.104 \\ 14.8770 & -27.6600 & -68.9065 & 0 & -523.035 \\ -128.505 & 356.227 & -595.104 & 523.035 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Table 2

Coefficients  $\varepsilon_j^{(k)}$  and  $H_{jj}^{(k)}$  of the expansions (35) and (38)

$j$	1	2	3	4	5
$\varepsilon_j^{(0)}$	-193.06601252	-119.39267226	-63.338854932	-24.904560537	-4.0897890782
$\varepsilon_j^{(1)}$	-127.73059638	-317.30568182	-408.25519644	-385.66879485	-223.26092504
$\varepsilon_j^{(2)}$	-215.85831875	-672.02680456	-1198.7991074	-1892.8857386	-3079.0060449
$\varepsilon_j^{(3)}$	-667.46086524	-2093.0917304	-3656.2842793	-5140.5360777	-3803.8470973
$\varepsilon_j^{(4)}$	-2590.0140097	-8317.9479477	-15062.850569	-23930.063302	-63419.196580
$\varepsilon_j^{(5)}$	-11287.527768	-37281.527942	-69636.528276	-107755.44601	164277.292590
$H_{jj}^{(2)}$	127.98059638	317.55568182	408.50519643	385.91879484	223.51081140
$H_{jj}^{(4)}$	414.47883932	1204.0042402	2009.0880648	3041.7739524	5091.1634806
$H_{jj}^{(6)}$	1912.4702415	5431.4025830	8482.5056376	10047.915436	-664.09784640
$H_{jj}^{(8)}$	9895.5812579	28061.019351	44415.159972	62195.582167	189759.82059
$H_{jj}^{(10)}$	54127.043138	154284.86093	246059.16425	311539.17441	152663.97768
$\varepsilon_j^{(1)} + H_{jj}^{(2)}$	0.2499999984	0.2499999944	0.2499999948	0.2499999953	0.2498863674

Table 3

Convergence of the expansion (35) to the numerical values (NUM) at  $\rho = 20$ 

$j$	1	2	3	4	5
$\varepsilon_j^{(0)}/\rho^2$	-193.06601252	-119.39267226	-63.338854932	-24.904560537	-4.0897890782
$+\varepsilon_j^{(1)}/\rho^4$	-193.38533901	-120.18593646	-64.359492923	-25.868732525	-4.6479413908
$+\varepsilon_j^{(2)}/\rho^6$	-193.38668813	-120.19013663	-64.366985417	-25.880563060	-4.6671851786
$+\varepsilon_j^{(3)}/\rho^8$	-193.38669856	-120.19016933	-64.367042547	-25.880643381	-4.6672446137
$+\varepsilon_j^{(4)}/\rho^{10}$	-193.38669866	-120.19016966	-64.367043135	-25.880644316	-4.6672470910
$+\varepsilon_j^{(5)}/\rho^{12}$	-193.38669866	-120.19016966	-64.367043142	-25.880644327	-4.6672470749
(NUM) $\varphi_\alpha = \pi/2$	-193.38669866	-120.19016966	-64.367043142	-25.880644327	-4.6672471622
(NUM) $\varphi_\alpha = \pi/6$	-193.38669866	-120.19016966	-64.367043142	-25.880644327	-4.6672471630

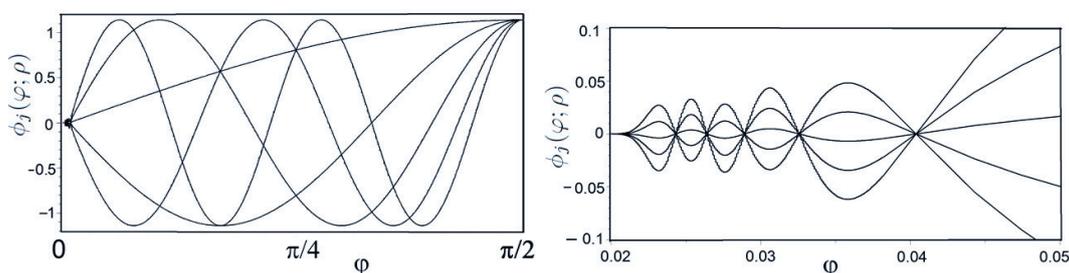
$$\begin{aligned}
 H_{ij}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 127.981 & -67.2820 & -85.3811 & 73.3913 & -44.4889 \\ -67.2820 & 317.556 & -161.487 & -40.5195 & 46.8714 \\ -85.3811 & -161.487 & 408.505 & -231.091 & 45.2520 \\ 73.3913 & -40.5195 & -231.091 & 385.919 & -215.798 \\ -44.4889 & 46.8714 & 45.2520 & -215.798 & 223.511 \end{pmatrix}, \\
 H_{ij}^{(4)} &= \begin{pmatrix} 414.479 & -142.333 & -526.641 & 464.604 & -624.169 \\ -142.333 & 1204.00 & -420.171 & -812.366 & 1119.09 \\ -526.641 & -420.171 & 2009.09 & -947.285 & -464.551 \\ 464.604 & -812.366 & -947.285 & 3041.77 & -2605.05 \\ -624.169 & 1119.09 & -464.551 & -2605.05 & 5091.16 \end{pmatrix}, \\
 H_{ij}^{(6)} &= \begin{pmatrix} 1912.47 & -670.689 & -2112.77 & 815.251 & 4153.61 \\ -670.689 & 5431.40 & -1689.40 & -3295.46 & -646.435 \\ -2112.77 & -1689.40 & 8482.51 & -2016.27 & -12077.1 \\ 815.251 & -3295.46 & -2016.27 & 10047.9 & 12431.9 \\ 4153.61 & -646.435 & -12077.1 & 12431.9 & -664.074 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

The convergence of the expansion (35) to the numerical values (NUM) is presented in Table 3. One can see that the first six terms of the asymptotic expansion provide the accuracy of 11 significant digits.

**Remark 1.** The effective potentials  $E_j^{(1)} + H_{jj}^{(0)} = (1/4)\rho^{-2}$  (presented, e.g., in the last line of Table 2) lead to the asymptotic cluster fundamental solutions of the ODEs (11), determined by the Bessel functions  $J_{1/2}(\sqrt{-E + \varepsilon_j}\rho)$ ,  $j=1, \dots, n_0$ , while for pseudostates the asymptotic fundamental solutions of the ODEs are  $J_m(\sqrt{E}\rho)$  with the integer  $m=(j-n_0)=1, 2, \dots$

*Algorithm for calculating the parametric angular functions of pseudostates and the effective potentials*

The eigenfunctions of pseudostates  $\varepsilon_j(\rho) \geq 0$ ,  $(j - n_0) = 1, 2, \dots$ , are localised beyond the potential well. Then the  $(n_0 - 1)$ -th node is located at the boundary of the potential well. Here and below we consider the case of  $\varphi_\alpha = \pi/2$  for the atomic dimer illustrated by Fig. 5.



**Figure 5.** Eigenfunctions  $\phi_j(\varphi; \rho)$  corresponding to the eigenvalues  $\varepsilon_j(\rho) \geq 0$  of the gerade ( $g$ ) pseudostates  $j = n + 1 = 6, \dots, 10$  at  $\rho = 100$

From this fact the estimate of the eigenvalues for pseudostates  $\varepsilon_j(\rho) \approx (j - n_0)^2$  follows, namely, the eigenvalues of the corresponding BVPs (22) in new variable  $x'$ ,  $\varepsilon_j = \varepsilon_j(\rho)/\rho^2$ ,

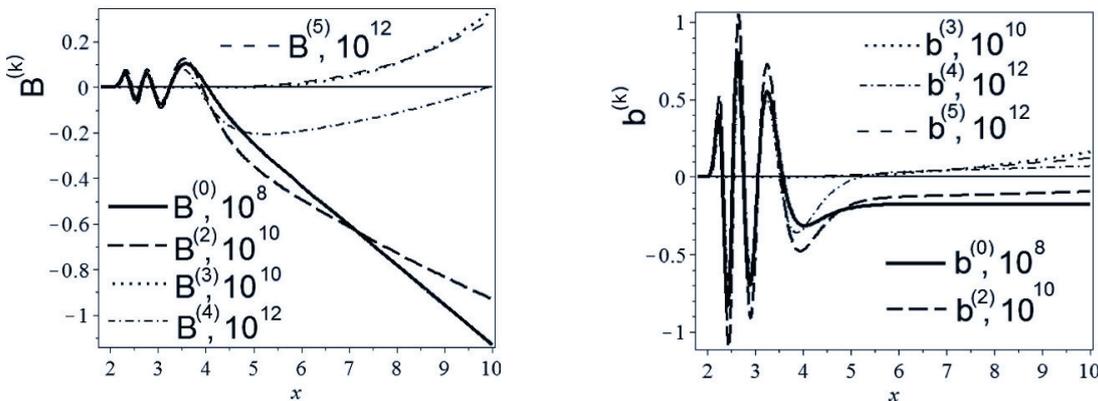
will be a small quantity (see Fig. 1b). So, the solution  $\varepsilon_n(\rho)$  ( $\varepsilon_n = \varepsilon_n(\rho)/\rho^2$ ) of the derived equation is sought in the form of a power series at  $n/\rho < 1$

$$\varepsilon_n(\rho) = n^2 + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\varepsilon_n^{(k)}}{\rho^k}. \quad (39)$$

Then the numerical values of the function  $B(\varphi_i; \rho) = B(x'_i)$  and its derivative  $B'(\varphi_i; \rho) = \rho B'(x'_i)$  on the specified grid  $\Omega_\varphi = \{\varphi_1 = \varphi_0, \dots, \varphi_i = x_i/\rho, \dots, \varphi_N = \varphi_\varepsilon\}$  in the polar system of coordinates are determined via the values of the function  $B(x_i)$  and its derivative  $B'(x_i)$  on the grid  $\Omega_{x'_i} \{x'_1 = x'_0, \dots, x'_i, \dots, x'_N = x'_\varepsilon\}$ , found with the same accuracy accepted in the FEM scheme chosen above in the form of the power series of the small parameter  $\varepsilon_n$ :

$$B_j(x_i) = B_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{B_i^{(k)}(\varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})}{\rho^k}, \quad B'_j(x_i) = b_i^{(0)} + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{b_i^{(k)}(\varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})}{\rho^k}, \quad (40)$$

using the Runge–Kutta method, in which the all terms contain the power  $k_{\max} + 1$  of  $1/\rho$  and the higher ones are neglected. The expansion coefficients  $B_i^{(k)} \equiv B_i^{(k)}(x'_i)$  and  $b_i^{(k)} \equiv b_i^{(k)}(x'_i)$ , calculated at the grid nodes  $x'_i$  for the BVP (22) with the potential  $V(x')$  defined in Eq. (5) are presented in Fig. 6.



**Figure 6.** Expansion coefficients  $B_i^{(k)}(\varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})$  and  $b_i^{(k)}(\varepsilon_n^{(1)}, \dots, \varepsilon_n^{(k)})$ ,  $k=0, 2, 3, 4, 5$ ,  $n = 1$  with  $\varepsilon_n^{(k)}$  given by Eq. (44) calculated at the nodes  $x'_i$  of the grid  $\Omega_{x'}$

One can see that in the vicinity of the potential well the corrections to the eigenfunctions are small, and at large  $x'$  they become essential. The coefficient  $b_i^{(0)}$ , the derivative of the wave function with  $\varepsilon_n = 0$ , exponentially tends to a constant for  $x > 5.5$ . From these observations the condition for choosing  $x_\varepsilon$  follows. However, to avoid analytical calculations of the exponential terms in the effective potentials (13) between the weakly bound cluster states and pseudostates, it is sufficient to choose  $x'_\varepsilon = 10$ .

The interval  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \pi/2$  is divided into two subintervals by the point  $\varphi_\varepsilon = x_\varepsilon/\rho$ :  $\varphi_0 < \varphi \leq \varphi_\varepsilon$  and  $\pi/2 > \varphi > \varphi_\varepsilon$ . In the calculations the point  $x_\varepsilon$  was chosen from the condition  $|V(x > x_\varepsilon)| < \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  is a preassigned number, and the left-hand boundary of the interval  $\varphi_0 = 0$ . In the case of a high barrier, at the pair collision point, when the eigenfunctions in its vicinity are close to zero, the left boundary of the interval changes,

$\varphi_0 = x_0/\rho > 0$ . The eigenfunctions  $\phi_j(\varphi; \rho)$  are calculated in the form

$$\phi_j(\varphi; \rho) = \begin{cases} A_j(\rho)B_j(\varphi; \rho), & \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_\varepsilon, \\ C_j(\rho)\sqrt{\frac{2}{\pi}} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (\sqrt{\varepsilon_j(\rho)}(\varphi - \pi/2)), & \varphi_\varepsilon < \varphi \leq \pi/2, \end{cases} \quad (41)$$

$$2 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} d\varphi (\phi_n(\varphi; \rho))^2 = 1.$$

Here  $A_j(\rho)$  and  $C_j(\rho)$  are the normalisation factors, and  $B(\varphi; \rho)$  is determined from the numerical solution  $B(x)$  in Cartesian coordinates using the transformation  $\varphi = x/\rho$ . From the continuity of the eigenfunctions and their derivatives,

$$\begin{aligned} \phi_n(\varphi_\varepsilon - 0; \rho) &= \phi_n(\varphi_\varepsilon + 0; \rho), \\ \frac{d\phi_n}{d\varphi}(\varphi_\varepsilon - 0; \rho) &= \frac{d\phi_n}{d\varphi}(\varphi_\varepsilon + 0; \rho), \end{aligned} \quad (42)$$

we get the equation for the eigenvalue  $\varepsilon_n(\rho)$ :

$$\begin{cases} \tan(\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}(\varphi_\varepsilon - \frac{\pi}{2})) & \text{even } n \\ -\cot(\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}(\varphi_\varepsilon - \frac{\pi}{2})) & \text{odd } n \end{cases} - \frac{\sqrt{\varepsilon_n(\rho)}}{R} = 0, \quad (43)$$

$$R = \frac{B'_n(\varphi_\varepsilon; \rho)}{B_n(\varphi_\varepsilon; \rho)} = \frac{\rho B'_n(x_\varepsilon)}{B_n(x_\varepsilon)}.$$

Substitute (40) into (43), and then substitute (39) into the resulting equation. Expanding both sides of the equation in inverse powers of  $\rho$ , we arrive at the system of linear equations, from which the expansion coefficients  $\varepsilon_n^{(k)}$ , and then the coefficients  $A_n(\rho)$  and  $C_n(\rho)$  are determined.

Since the values of the function  $B_n(\varphi; \rho)$  and its derivative  $B'_n(\varphi; \rho)$  on the grid  $\Omega_\varphi$  are known, for the calculation of the first integral we use the quadrature formula of the Newton-Cotes type. The second integral is calculated analytically using the expansion (39). We have the analytical expression in the interval  $\varphi_\varepsilon(\rho) < \varphi \leq \pi/2$ , and the explicit dependence of its values upon the parameter  $\rho$  on the grid  $\Omega_\varphi$ . For the considered potential (5) we get the asymptotes of the  $g$  and  $u$  potential curves at  $n = j - n_0$  for  $n/\rho < 1$ :

$$\varepsilon_n(\rho) = n^2 + \sum_{k=1}^{k_{\max}} \frac{\varepsilon_n^{(k)}}{\rho^k}; \text{ for } g\text{-parity at odd } n, \text{ or } u\text{-parity at even } n. \quad (44)$$

The first terms of these expansions are expressed as

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(1)} &= 4.4862257n^2, & \varepsilon_n^{(2)} &= 15.094666n^2, \\ \varepsilon_n^{(3)} &= -88.164324n^2 + 0.2988408n^4, & \varepsilon_n^{(4)} &= -770.50344n^2 + 3.3516683n^4, \\ \varepsilon_n^{(5)} &= -13803.854n^2 + 162.14850n^4 - 0.2922734n^6, \\ \varepsilon_n^{(6)} &= -68926.763n^2 + 1584.0782n^4 - 4.4329308n^6. \end{aligned}$$

The calculated eigenvalues in comparison with the numerical solution obtained by means of the program ODPEVP [4] are presented in Table 4.

**Table 4**

**Convergence of the expansion (44) at  $\rho=50$  and the numerical results (NUM)**

gerade ( $g$ -parity)				
$n$	1	3	5	7
$n^2$	1.000000	9.000000	25.000000	49.000000
$+\varepsilon_n^{(1)}/\rho$	1.089724	9.80752	27.24311	53.39650
$+\varepsilon_n^{(2)}/\rho^2$	1.095762	9.86186	27.39405	53.69235
$+\varepsilon_n^{(3)}/\rho^3$	1.095059	9.85570	27.37792	53.66353
$+\varepsilon_n^{(4)}/\rho^4$	1.094936	9.85464	27.37517	53.65878
$+\varepsilon_n^{(5)}/\rho^5$	1.094893	9.85428	27.37437	53.65775
$+\varepsilon_n^{(6)}/\rho^6$	1.094888	9.85425	27.37432	53.65774
(NUM)	1.094887	9.85424	27.37431	53.65776
ungerade ( $u$ -parity)				
$n$	2	4	6	8
$n^2$	4.000000	16.000000	36.000000	64.000000
$+\varepsilon_n^{(1)}/\rho$	4.358898	17.43559	39.230082	69.7423
$+\varepsilon_n^{(2)}/\rho^2$	4.383049	17.53219	39.447445	70.1287
$+\varepsilon_n^{(3)}/\rho^3$	4.380266	17.52152	39.425152	70.0934
$+\varepsilon_n^{(4)}/\rho^4$	4.379781	17.51968	39.421409	70.0877
$+\varepsilon_n^{(5)}/\rho^5$	4.379613	17.51911	39.420448	70.0868
$+\varepsilon_n^{(6)}/\rho^6$	4.379597	17.51906	39.420407	70.0868
(NUM)	4.379592	17.51905	39.420408	70.0869

The described algorithm is implemented in the Maple-Fortran environment. The asymptotic expansions, obtained using it at  $\rho = 50$ , coincide with the numerical solution given by the finite element method to 5–6 significant digits for the eigenvalues and to 4–5 significant digits for the eigenfunctions. The asymptotes of the effective potentials (13) between the states  $n_1 = i - n_0$  and  $n_2 = j - n_0$  of the same ( $g$  or  $u$ ) parity at  $n_0 = 5$ ,  $i, j = n_0 + 1, \dots$  for  $n/\rho < 1$  have the form:

$$Q_{n_1 n_2}(\rho) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{Q_{n_1 n_2}^{(k+2)}}{\rho^{k+2}}, \quad H_{n_1 n_2}(\rho) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{H_{n_1 n_2}^{(k+4)}}{\rho^{k+4}}. \quad (45)$$

First terms of these expansions read as

$$Q_{n_1 n_2}^{(2)} = 2.2431128 \frac{n_1 n_2}{(n_1^2 - n_2^2)}, \quad Q_{n_1 n_2}^{(3)} = 5.0315554 \frac{n_1 n_2}{(n_1^2 - n_2^2)},$$

$$Q_{n_1 n_2}^{(4)} = 188.67822 \frac{n_1 n_2}{(n_1^2 - n_2^2)} + 0.22413 \frac{n_1 n_2 (n_1^2 - n_2^2)}{(n_1^2 - n_2^2)^2},$$

$$H_{n_1 n_2}^{(4)} = 10.06311 \frac{n_1 n_2 (n_1^2 + n_2^2)}{(n_1^2 - n_2^2)^2}, \quad H_{n_1 n_2}^{(5)} = 45.14538 \frac{n_1 n_2 (n_1^2 + n_2^2)}{(n_1^2 - n_2^2)^2} + 69.93509 n_1 n_2,$$

$$H_{n_1 n_2}^{(6)} = -1642.273 \frac{n_1 n_2 (n_1^2 + n_2^2)}{(n_1^2 - n_2^2)^2} + 8.044 \frac{n_1^3 n_2^3}{(n_1^2 - n_2^2)^2} + 476.762 n_1 n_2$$

$$H_{n_1 n_1}^{(4)} = 0.6289444 + 2.0691442 n_1^2, \quad H_{n_1 n_1}^{(5)} = 2.8215867 + 79.217746 n_1^2,$$

$$H_{n_1 n_1}^{(6)} = -102.642068 + 138.328874 n_1^2 + 0.826991 n_1^4.$$

Using Eq. (35) and Eq. (41), we get the asymptotic expansions for  $Q_{in}(\rho)$  and  $H_{in}(\rho)$  between the cluster states  $i=1, \dots, n_0$  and pseudostates  $n-n_0=1, 2, \dots$ , for  $n/\rho < 1$

$$Q_{in}(\rho) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{Q_{in}^{(k+5/2)}}{\rho^{k+5/2}}, \quad H_{in}(\rho) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \frac{H_{in}^{(k+7/2)}}{\rho^{k+7/2}}, \quad (46)$$

The first terms of these expansions read as

$$\begin{aligned} Q_{1n}^{(5/2)} &= -0.428911n, & Q_{1n}^{(7/2)} &= -1.443145n, & Q_{1n}^{(9/2)} &= -25.01600n + 0.183791n^3, \\ Q_{2n}^{(5/2)} &= 1.273900n, & Q_{2n}^{(7/2)} &= +4.286254n, & Q_{2n}^{(9/2)} &= 75.66328n - 0.546657n^3, \\ Q_{3n}^{(5/2)} &= -2.497511n, & Q_{3n}^{(7/2)} &= -8.403301n, & Q_{3n}^{(9/2)} &= -152.3919n + 1.075421n^3, \\ Q_{4n}^{(5/2)} &= 3.668834n, & Q_{4n}^{(7/2)} &= +12.34441n, & Q_{4n}^{(9/2)} &= 231.9007n - 1.599005n^3, \\ Q_{5n}^{(5/2)} &= -4.098659n, & Q_{5n}^{(7/2)} &= -13.79066n, & Q_{5n}^{(9/2)} &= -247.9253n + 2.018873n^3, \\ H_{1n}^{(7/2)} &= 22.53006n, & H_{1n}^{(9/2)} &= +77.24936n, & H_{1n}^{(11/2)} &= 1551.8678n - 9.835892n^3, \\ H_{2n}^{(7/2)} &= -26.57543n, & H_{2n}^{(9/2)} &= -93.70381n, & H_{2n}^{(11/2)} &= -2203.032n + 11.89657n^3, \\ H_{3n}^{(7/2)} &= -12.19890n, & H_{3n}^{(9/2)} &= -32.64199n, & H_{3n}^{(11/2)} &= 262.11512n + 4.400493n^3, \\ H_{4n}^{(7/2)} &= 85.06821n, & H_{4n}^{(9/2)} &= +273.8820n, & H_{4n}^{(11/2)} &= 4387.8346n - 35.91925n^3, \\ H_{5n}^{(7/2)} &= -120.4823n, & H_{5n}^{(9/2)} &= -391.5948n, & H_{5n}^{(11/2)} &= -8001.428n + 54.83111n^3. \end{aligned}$$

## 5. Conclusion

The model for beryllium trimer in collinear configuration is formulated as a 2D boundary-value problem for the Schrödinger equation in polar coordinates. This problem is reduced using the Kantorovich expansions to the boundary-value problem for a set of second-order ordinary differential equations. The symbolic-numeric algorithms are proposed and implemented in Maple to evaluate the asymptotic expansions (35), (38), (45) and (46) of the parametric BVP eigensolutions and the effective potentials  $W_{ij}(\rho)$  in inverse powers of  $\rho$ . It can be used for calculation of the asymptotes of the fundamental solutions of the system of second-order ODEs at large values of  $\rho$  [10] and construction of asymptotic states of three atomic scattering problem. The proposed approach can be applied to the further analysis of quantum transparency effect [10, 11], quantum diffusion [16–18] and the resonance scattering in triatomic systems using modern theoretical and experimental results [19–21] and algorithms and programs [4–9].

## References

1. V. Efimov, Few-Body Physics: Giant Trimers True to Scale, *Nature Phys.* 5 (2009) 533–534.
2. M. Zaccanti, B. Deissler, C. D’Errico, M. Fattori, Jona-Lasinio, S. M. Muller, G. Roati, M. Inguscio, M. G., Observation of an Efimov Spectrum in an Atomic System, *Nature Phys.* 5 (2009) 586–591.

3. J. Voigtsberger, et al., Imaging the Structure of the Trimer Systems  ${}^4\text{He}_3$  and  ${}^3\text{He}^4\text{He}_2$ , *Nature Commun.* 5 (2014) 5765.
4. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitsky, A. G. Abrashkevich, ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem, *Computer Physics Communications* 180 (2009) 1358–1375.
5. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitsky, A. G. Abrashkevich, POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation, *Comput. Phys. Commun.* 185 (2014) 2636–2654.
6. A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitsky, A. G. Abrashkevich, Description of a Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Coupled Parametric Self-Adjoined Elliptic Differential Equations, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (2) (2014) 336–341.
7. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, A. G. Abrashkevich, A. Amaya-Tapia, M. S. Kaschiev, S. Y. Larsen, S. I. Vinitsky, KANTBP: A Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach, *Comput. Phys. Commun.* 177 (2007) 649–675.
8. O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitsky, A. G. Abrashkevich, KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach, *Comput. Phys. Commun.* 179 (2008) 685–693.
9. A. A. Gusev, L. L. Hai, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitsky, Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order.  
URL <http://www.info.jinr.ru/programs/jinr/lib/kantbp4m>
10. S. I. Vinitsky, A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, L. Hai, V. Derbov, P. Krassovitskiy, A. Gózdź, Symbolic Numerical Algorithm for Solving Quantum Tunneling Problem of a Diatomic Molecule Through Repulsive Barriers, *Lect. Notes Comp. Sci.* 8660 (2014) 472–490.
11. P. M. Krassovitskiy, F. M. Pen'kov, Contribution of resonance tunneling of molecule to physical observables, *J. Phys. B* 47 (2014) 225210.
12. J. Wang, G. Wang, J. Zhao, Density Functional Study of Beryllium Clusters with Gradient Correction, *J. Phys. Cond. Matt.* 13 (2001) L753–L758.
13. G. Strang, G. J. Fix, *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New York, 1973.
14. K. J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Englewood Cliffs, Prentice Hall, New York, 1982.
15. I. S. Berezin, N. P. Zhidkov, *Computing Methods*, Vol. 1, Pergamon Press, Oxford, 1965.
16. A. A. Gusev, L. L. Hai, Algorithm for Solving the Two-Dimensional Boundary Value Problem for Model of Quantum Tunneling of a Diatomic Molecule Through Repulsive Barriers, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (1) (2015) 15–36.
17. E. Pijper, A. Fasolino, Quantum Surface Diffusion of Vibrationally Excited Molecular Dimers, *J. Chem. Phys.* 126 (2007) 014708.
18. A. A. Gusev, A. Gózdź, V. L. Derbov, S. I. Vinitsky, O. Chuluunbaatar, P. M. Krassovitskiy, Models of Resonant Tunneling of Composite Systems Through Repulsive Barriers, *JINR News* (1) (2014) 22–26.
19. A. V. Mitin, Ab Initio Calculations of Weakly Bonded  $\text{He}_2$  and  $\text{Be}_2$  Molecules by MRCI Method with Pseudo-Natural Molecular Orbitals, *Int. J. Quantum Chem.* 111 (2011) 2560–2567.
20. J. M. Merritt, V. E. Bondybey, M. C. Heaven, Beryllium dimer—caught in the act of bonding, *Science* 324 (2009) 1548–1551.

21. K. Patkowski, V. Špirko, K. Szalewicz, On the Elusive Twelfth Vibrational State of Beryllium Dimer, *Science* 326 (2009) 1382–1384.

УДК 519.632.4

### Алгоритмы решения краевых задач для атомных тримеров в коллинеарной конфигурации методом Канторовича

А. А. Гусев\*, О. Чулуунбаатар\*<sup>†</sup>, С. И. Веницкий\*<sup>‡</sup>,  
В. Л. Дербов<sup>§</sup>

\* *Объединённый институт ядерных исследований, г. Дубна, Россия*

<sup>†</sup> *Институт математики, Монгольский государственный университет, Улан-Батор, Монголия*

<sup>‡</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>§</sup> *Саратовский государственный университет, г. Саратов, Россия*

Модель атомных тримеров с парными молекулярными взаимодействиями в коллинеарной конфигурации формулируется в виде двумерной краевой задачи в якобиевских полярных координатах. Последняя сводится методом Канторовича к одномерной краевой задаче для системы ОДУ второго порядка, используя разложение искомого решения по угловым базисным функциям, зависящим от гиперрадиуса, как от параметра. Представлены алгоритмы решения параметрической краевой задачи методом конечных элементов и вычисления асимптотических разложений параметрических угловых базисных функций и эффективных потенциалов системы ОДУ при больших значениях параметра. Эффективность алгоритмов подтверждается сравнением асимптотических решений параметрической задачи на собственные значения и эффективных потенциалов с их численными значениями, полученными методом конечных элементов при больших значениях параметра. Применимость алгоритмов демонстрируются на примере расчетов асимптотических разложений решений параметрической краевой задачи и эффективных потенциалов, и собственных значений энергии связи тримера бериллия в коллинеарной конфигурации.

**Ключевые слова:** краевые задачи, метод Канторовича, системы ОДУ второго порядка, метод конечных элементов

### Литература

1. *Efimov V.* Few-Body Physics: Giant Trimers True to Scale // *Nature Phys.* — 2009. — Vol. 5. — Pp. 533–534.
2. Observation of an Efimov Spectrum in an Atomic System / M. Zaccanti, B. Deissler, C. D’Errico, M. Fattori, Jona-Lasinio, S. M. Muller, G. Roati, M. Inguscio, M. G. // *Nature Phys.* — 2009. — Vol. 5. — Pp. 586–591.
3. *Voigtsberger J. et al.* Imaging the Structure of the Trimer Systems  $^4\text{He}_3$  and  $^3\text{He}^4\text{He}_2$  // *Nature Commun.* — 2014. — Vol. 5. — P. 5765.
4. ODPEVP: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined Sturm–Liouville Problem / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Computer Physics Communications.* — 2009. — Vol. 180. — Pp. 1358–1375.
5. POTHEA: A Program for Computing Eigenvalues and Eigenfunctions and Their First Derivatives with Respect to the Parameter of the Parametric Self-Adjoined 2D Elliptic Partial Differential Equation / A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Comput. Phys. Commun.* — 2014. — Vol. 185. — Pp. 2636–2654.
6. Описание программы вычисления собственных значений и собственных функций и их первых производных по параметру для параметрической самосопряжённой системы эллиптических дифференциальных уравнений / А. А. Гусев, О. Чулуунбаатар, С. И. Веницкий, А. Г. Абрашкевич // *Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика».* — 2014. — № 2. — С. 336–341.

7. KANTBP: A Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach / O. Chuluunbaatar, A. Gusev, A. G. Abrashkevich, A. Amaya-Tapia, M. Kaschiev, S. Larsen, S. Vinitzky // *Comput. Phys. Commun.* — 2007. — Vol. 177. — Pp. 649–675.
8. KANTBP 2.0: New Version of a Program for Computing Energy Levels, Reaction Matrix and Radial Wave Functions in the Coupled-Channel Hyperspherical Adiabatic Approach / O. Chuluunbaatar, A. A. Gusev, S. I. Vinitzky, A. G. Abrashkevich // *Comput. Phys. Commun.* — 2008. — Vol. 179. — Pp. 685–693.
9. *Gusev A. A., Hai L. L., Chuluunbaatar O., Vinitzky S. I.* Program KANTBP 4M for Solving Boundary-Value Problems for Systems of Ordinary Differential Equations of the Second Order. — <http://wwwinfo.jinr.ru/programs/jinrlib/kantbp4m>.
10. Symbolic Numerical Algorithm for Solving Quantum Tunneling Problem of a Diatomic Molecule Through Repulsive Barriers / S. I. Vinitzky, A. A. Gusev, O. Chuluunbaatar, L. L. Hai, V. L. Derbov, P. M. Krassovitskiy, A. Gózdź // *Lect. Notes Comp. Sci.* — 2014. — Vol. 8660. — Pp. 472–490.
11. *Krassovitskiy P., Pen'kov F.* Contribution of Resonance Tunneling of Molecule to Physical Observables // *J. Phys. B.* — 2014. — Vol. 47. — P. 225210.
12. *Wang J., Wang G., Zhao J.* Density Functional Study of Beryllium Clusters with Gradient Correction // *J. Phys. Cond. Matt.* — 2001. — Vol. 13. — Pp. L753–L758.
13. *Стрэнг Г., Фикс Г.* Теория метода конечных элементов. — Москва: Мир, 1977.
14. *Бате К., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. — Москва: Стройиздат, 1982.
15. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. — М.: Физматлит, 1962. — Т. 1.
16. *Гусев А. А., Хай Л. Л.* Алгоритм решения двумерной краевой задачи для модели квантового туннелирования двухатомной молекулы через отталкивающие барьеры // *Вестник РУДН, серия «Математика. Информатика. Физика».* — 2015. — № 1. — С. 15–36.
17. *Pijper E., Fasolino A.* Quantum Surface Diffusion of Vibrationally Excited Molecular Dimers // *J. Chem. Phys.* — 2007. — Vol. 126. — P. 014708.
18. Модели резонансного туннелирования составных систем через отталкивающие барьеры / А. А. Гусев, А. Гоздз, В. Л. Дербов, С. И. Виноцкий, О. Чулуунбаатар, П. М. Красовицкий // *Новости ОИЯИ.* — 2014. — № 1. — С. 22–26.
19. *Mitin A. V.* Ab Initio Calculations of Weakly Bonded He<sub>2</sub> and Be<sub>2</sub> Molecules by MRCI Method with Pseudo-Natural Molecular Orbitals // *Int. J. Quantum Chem.* — 2011. — Vol. 111. — Pp. 2560–2567.
20. *Merritt J. M., Bondybey V. E., Heaven M. C.* Beryllium Dimer-Caught in the Act of Bonding // *Science.* — 2009. — Vol. 324. — Pp. 1548–1551.
21. *Patkowski K., Špirko V., Szalewicz K.* On the Elusive Twelfth Vibrational State of Beryllium Dimer // *Science.* — 2009. — Vol. 326. — Pp. 1382–1384.

---

УДК 537.8:514.762.37

## Геометрический подход к лагранжеву и гамильтонову формализмам электродинамики

Д. С. Кулябов<sup>\*†</sup>

<sup>\*</sup> *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

<sup>†</sup> *Объединённый институт ядерных исследований, Дубна, Московская область, Россия*

При решении полевых задач, в частности задач электродинамики, используются лагранжевы и гамильтоновы формализмы. Полевой гамильтонов формализм имеет то преимущество перед лагранжевым, что имманентно содержит калибровочное условие, в то время как в лагранжевом формализме калибровочное условие вводится специально из некоторых внешних соображений. Однако использование гамильтонового формализма в полевых задачах затруднено из-за нерегулярности полевых лагранжианов. Необходимо использовать такой вариант лагранжевого и гамильтонового формализмов, который позволил бы работать с полевыми моделями, в частности решать задачи электродинамики.

В качестве математического аппарата предлагается использовать современную дифференциальную геометрию и алгебраическую топологию, в частности теорию расслоенных пространств. Этот аппарат приводит к большей ясности в понимании математических структур, ассоциированных с физическими и техническими моделями. Использование теории расслоенных пространств позволяет углубить и расширить как лагранжевы, так и гамильтоновы формализмы, выявить широкий спектр вариантов данных формализмов, выбрать вариант формализма, наиболее адекватный изучаемой проблеме. Фактически, только использование формализма расслоенных пространств позволяет адекватно решать полевые задачи, в частности задачи электродинамики.

**Ключевые слова:** расслоенные пространства, связность, лагранжевы формализм, гамильтонов формализм, теория Янга–Миллса

### 1. Введение

Лагранжевы и гамильтоновы формализмы востребованы в механике и теории поля. Однако для работы с ними обычно используют классический математический аппарат, который не позволяет в полной мере использовать возможности данных формализмов. Более того, данный аппарат зачастую используется механически, что не позволяет осознать сильные и слабые стороны используемых формализмов, а также применить их к нестандартной ситуации. Например, вызывает затруднение применение гамильтонового подхода к полевым задачам. Автор предлагает пользоваться более современным математическим аппаратом, а именно теорией расслоений [1, 2]. Этот аппарат помогает глубже понять лагранжевы и гамильтоновы подходы [3], позволяет использовать их в новых областях. Например, более эффективно применять гамильтонов формализм в задачах теории поля [4, 5]. Данная работа рассматривается авторами как краткий конспект методов теории расслоенных пространств. В качестве иллюстрации к этим методам используется электродинамика.

### 2. Лагранжевы формализм

Будем рассматривать расслоение:

$$\pi : Y \rightarrow X \tag{1}$$

с координатами  $(x^\lambda, y^i)$ .

---

Статья поступила в редакцию 10 октября 2016 г.

Работа частично поддержана грантами РФФИ № 14-01-00628, 15-07-08795, 16-07-00556. Также публикация выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.а03.21.0008).

Тогда лагранжева плотность (лагранжиан первого порядка) будет определяться как

$$L = \mathcal{L}(x^\lambda, y^i, y_\lambda^i)\omega, \quad (2)$$

где  $\omega := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ .

При этом лагранжева плотность рассматривается как горизонтальная плотность на расслоении струй первого порядка:

$$L : J^1Y \rightarrow \wedge^n T^*X, \quad (3)$$

а многообразии струй  $J^1Y$  играет роль конфигурационного пространства.

Для лагранжиана  $L$  можно записать дифференциальный оператор второго порядка (оператор Эйлера–Лагранжа):

$$\mathcal{E}_L : J^2Y \xrightarrow{Y} \wedge^{n+1} T^*Y. \quad (4)$$

Также определим оператор Эйлера–Лагранжа первого порядка:

$$\mathcal{E}'_L = [\partial_i - (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + y_{\mu\lambda}^i) \partial_i^\lambda] \mathcal{L} dy^i \wedge \omega. \quad (5)$$

Он представляет собой дифференциальный оператор первого порядка на расслоении струй  $J^1Y \rightarrow X$ :

$$\mathcal{E}'_L : J^2Y \xrightarrow{J^1Y} \wedge^{n+1} T^*Y. \quad (6)$$

Можно выделить три типа уравнений, получаемых в лагранжевом формализме (уравнения Эйлера–Лагранжа):

- алгебраические уравнения Эйлера–Лагранжа. Эти уравнения записываются для сечения повторного расслоения струй:

$$J^1 J^1Y \rightarrow J^1Y; \quad (7)$$

- уравнения Эйлера–Лагранжа первого порядка. Уравнения записываются для сечения расслоения струй:

$$J^1Y \rightarrow X; \quad (8)$$

- уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка. Уравнения записываются для сечения расслоения:

$$Y \rightarrow X. \quad (9)$$

Зададим на расслоении  $J^1Y \rightarrow X$  лагранжеву связность  $\bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^i = \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^i(x^\nu, y^j, y_\nu^j)$ :

$$\bar{\Gamma} = dx^\lambda \otimes (\partial_\lambda + y_\lambda^i \partial_i + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^i \partial_i^\mu). \quad (10)$$

Лагранжева связность принимает значения в ядре оператора Эйлера–Лагранжа первого порядка (5):

$$\mathcal{E}'_L \circ \bar{\Gamma} = 0. \quad (11)$$

Тогда алгебраические уравнения Эйлера–Лагранжа будут иметь вид:

$$\partial_i \mathcal{L} - \left( \partial_\lambda + y_\lambda^j \partial_j + \bar{\Gamma}_{\mu\lambda}^j \partial_j^\mu \right) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (12)$$

Это уравнения на компоненты лагранжевой связности.

Пусть  $\bar{s}$  есть интегральное сечение расслоения связности (10) ( $J^1Y \rightarrow X$ ). Оно принимает значение в ядре оператора (5)  $\ker \mathcal{E}'_L$ :

$$\mathcal{E}'_L \circ J^1\bar{s} = 0. \quad (13)$$

Тогда получим дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа первого порядка:

$$\partial_i \mathcal{L} - \left( \partial_\lambda + \bar{s}_\lambda^j \partial_j + \partial_\lambda \bar{s}_\mu^j \partial_j^\mu \right) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0, \quad (14)$$

где  $\bar{s}_\lambda^i := \partial_\lambda \bar{s}^i$ . Уравнения (14) записаны для  $\bar{s} = \bar{s}(x^\nu, y^j)$ .

Рассмотрим вместо  $\bar{s}$  сечение  $s$  расслоения  $Y \rightarrow X$ . Пусть его второе струйное продолжение  $J^2s$  принимает значения в ядре оператора (4)  $\ker \mathcal{E}_L$ :

$$\mathcal{E}_L \circ J^2s = 0. \quad (15)$$

Тогда дифференциальные уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка будут иметь вид:

$$\partial_i \mathcal{L} - \left( \partial_\lambda + \partial_\lambda s^j \partial_j + \partial_\lambda \partial_\mu s^j \partial_j^\mu \right) \partial_i^\lambda \mathcal{L} = 0. \quad (16)$$

Уравнения (16) записаны для  $s = s(x^\nu)$ . Уравнения (14) и (16) эквивалентны.

### 3. Гамильтонов формализм

Можно выделить несколько вариантов гамильтонова формализма:

- стандартный симплектический гамильтонов формализм (при применении к полевым задачам стандартный формализм переходит в формализм Дирака для систем со связями);
- гамильтонов формализм де Дондера;
- многоимпульсный гамильтонов формализм (данный формализм является полисимплектическим вариантом стандартного гамильтонова формализма).

Для теории поля наиболее удобным представляется использование многоимпульсного гамильтонова формализма.

Для перехода к гамильтоновому формализму используют не лагранжиан, а его лепажев эквивалент. В формализме де Дондера и многоимпульсном формализме используют форму Пуанкаре–Картана:

$$\Xi_L = \pi_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \pi_i^\lambda y_\lambda^i \omega + \mathcal{L} \omega, \quad (17)$$

где  $\pi_i^\lambda := \partial_i^\lambda \mathcal{L}$ ,  $\omega_\lambda := \partial_\lambda \lrcorner \omega$ .

Для расслоения  $Y \rightarrow X$  введём расслоение Лежандра с атласом координат  $(x^\lambda, y^i, p_i^\lambda)$ :

$$\Pi = \wedge^n T^*X \otimes_Y TX \otimes_Y V^*Y. \quad (18)$$

Лагранжиан  $L$  задаёт послойный морфизм:

$$\hat{L} = J^1 \xrightarrow{Y} \Pi, \quad p_i^\lambda \circ \hat{L} = \pi_i^\lambda. \quad (19)$$

Многообразие Лежандра  $\Pi$  является фазовым пространством многоимпульсного гамильтонова формализма.

На расслоении Лежандра  $\Pi \rightarrow Y$  вводится обобщённая форма Лиувилля:

$$\theta = -p_i^\lambda dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \quad (20)$$

Ей соответствует полисимплектическая форма:

$$\Omega = dp_i^\lambda \wedge dy^i \wedge \omega \otimes \partial_\lambda. \quad (21)$$

В случае многообразия  $X = \mathbb{R}$  эти формы переходят в стандартную форму Лиувилля и стандартную симплектическую форму.

Многоимпульсный гамильтониан может быть представлен как внешняя форма:

$$dH = \gamma \lrcorner \Omega, \quad (22)$$

где  $\gamma$  — гамильтонова связность, то есть такая связность, для которой внешняя форма  $\gamma \lrcorner \Omega$  — точная.

Многоимпульсный гамильтониан может быть представлен в форме

$$H = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - p_i^\lambda \Gamma_\lambda^i \omega - \tilde{\mathcal{H}}_\Gamma \omega = p_i^\lambda dy^i \wedge \omega_\lambda - \mathcal{H} \omega, \quad (23)$$

где  $\Gamma$  — связность на расслоении  $Y \rightarrow X$ .

Тогда можно записать систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda r^i(x) &= \partial_\lambda^i \mathcal{H}, \\ \partial_\lambda r_i^\lambda(x) &= -\partial_i \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $r$  — сечение расслоения  $\Pi \rightarrow X$ .

#### 4. Калибровочный подход

Калибровочный подход используется для описания физических полей в рамках геометрической теории поля. Физические поля рассматриваются как сечениями расслоения  $Y \rightarrow X$ . На этом расслоении вводят связности и ковариантные производные  $\nabla$ . На расслоении струй строят лагранжиан (3).

Будем рассматривать главное расслоение со структурной группой внутренних симметрий  $G$ :

$$\pi_P : P \rightarrow X. \quad (25)$$

Калибровочные потенциалы соответствуют группе внутренних симметрий  $G$ . Будем отождествлять их со связностями на главном расслоении  $P$ . Калибровочные потенциалы представляются глобальными сечениями  $A$  расслоения связностей  $C = J^1 P/G \rightarrow X$ :

$$A_\mu^m := (k_\mu^m \circ A)(x). \quad (26)$$

На  $C$  задаются координаты  $C = C(x^\mu, k_\mu^m)$ .

Многообразие струй  $J^1 C$  главного расслоения связностей  $C$  называется конфигурационным пространством калибровочных потенциалов с координатами  $(x^\mu, k_\mu^m, k_{\mu\lambda}^m)$ . Для  $J^1 C$  существует расщепление:

$$J^1 C = C_+ \oplus_C C_-. \quad (27)$$

Здесь

$$C_- = C \times \overset{2}{\wedge} T^* X \otimes_X V^G P, \quad (28)$$

где  $V^G P := VP/G$ .

Расслоение  $C_+ \rightarrow C$  есть аффинное расслоение, моделируемое над векторным расслоением:

$$\bar{C}_+ = \sqrt[2]{T^*X} \otimes V^G P. \quad (29)$$

Координаты на этом расщеплении имеют следующий вид:

$$k_{\mu\lambda}^m = \frac{1}{2}(k_{\mu\lambda}^m + k_{\lambda\mu}^m + c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l) + \frac{1}{2}(k_{\mu\lambda}^m - k_{\lambda\mu}^m - c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l), \quad (30)$$

где  $c_{mn}^k$  суть структурные константы алгебры Ли  $g_r$  группы  $G$  относительно базиса  $\{I_m\}$ .

Запишем каноническую сюръекцию  $\mathcal{S} = pr_1 : J^1 C \rightarrow C_+$ :

$$\mathcal{S}_{\lambda\mu}^m = k_{\mu\lambda}^m + k_{\lambda\mu}^m + c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l. \quad (31)$$

Запишем каноническую сюръекцию  $\mathcal{F} = pr_2 : J^1 C \rightarrow C_-$ :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\lambda\mu}^m dx^\lambda \wedge dx^\mu \otimes I_m, \quad \mathcal{F}_{\lambda\mu}^m = k_{\mu\lambda}^m - k_{\lambda\mu}^m - c_{nl}^m k_\lambda^n k_\mu^l. \quad (32)$$

Введём величину  $F := \mathcal{F} \circ J^1 A$ . Тогда для неё получим:

$$F_{\lambda\mu}^m = \partial_\lambda A_\mu^m - \partial_\mu A_\lambda^m - c_{nl}^m A_\lambda^n A_\mu^l. \quad (33)$$

На конфигурационном пространстве  $J^1 C$  задаётся лагранжиан Янга–Миллса. Для простоты рассмотрим свободный лагранжиан Янга–Миллса (при отсутствии источников):

$$L_{YM} = \frac{1}{4\varepsilon^2} G_{mn} g^{\lambda\mu} g^{\beta\nu} \mathcal{F}_{\lambda\beta}^m \mathcal{F}_{\mu\nu}^n \sqrt{|g|} \omega, \quad (34)$$

где  $G_{mn}$  — невырожденная  $G$ -инвариантная метрика на алгебре Ли  $g_r$ ,  $\varepsilon$  — константа взаимодействия,  $g_{\lambda\mu}$  и  $g^{\lambda\mu}$  — метрика в касательном ( $TX$ ) и кокасательном ( $T^*X$ ) расслоениях над  $X$ ,  $g := \det\{g_{\lambda\mu}\}$ .

## 5. Электромагнитное поле

Опишем структуру калибровочного подхода для электромагнитного поля. Будем рассматривать электромагнитное поле на многообразии  $X^4$ . Группой внутренних симметрий  $G$  является группа  $U(1)$ .

Главное расслоение:

$$\pi_P : P \rightarrow X^4. \quad (35)$$

Сопряжённое расслоение изоморфно тривиальному расслоению:

$$V^G P = X^4 \times \mathbb{R}. \quad (36)$$

Расслоение связностей изоморфно аффинному кокасательному расслоению:

$$C \cong T^* X^4. \quad (37)$$

Из (33) запишем напряжённость электромагнитного поля:

$$F_{\mu\lambda} = \mathcal{F}_{\mu\lambda} \circ J^1 A = \partial_\lambda A_\mu - \partial_\mu A_\lambda. \quad (38)$$

Для пространства Минковского ( $X^4 = M^4$ ) с метрикой  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  из (34) получим лагранжиан свободного электромагнитного поля:

$$L = -\frac{1}{16\pi c} \eta^{\lambda\mu} \eta^{\beta\nu} \mathcal{F}_{\lambda\beta} \mathcal{F}_{\mu\nu} \omega. \quad (39)$$

Фазовым пространством будет являться расслоение Лежандра с координатами  $(X^\lambda, k_\mu, p^{\mu\lambda})$ :

$$\Pi = \left( \overset{4}{\wedge} T^* X \otimes TX \otimes TX \right) \times_X C. \quad (40)$$

Ассоциированный с лагранжианом лежандров морфизм запишется следующим образом:

$$p^{(\mu\lambda)} \circ \hat{L} = 0; \quad (41)$$

$$p^{[\mu\lambda]} \circ \hat{L} = -\frac{1}{4\pi c} \eta^{\lambda\alpha} \eta^{\mu\beta} \mathcal{F}_{\alpha\beta}. \quad (42)$$

Многоимпульсный гамильтониан принимает вид:

$$H = p^{\mu\lambda} dk_\mu \wedge \omega_\lambda - p^{\mu\lambda} S_{\mu\lambda} \omega - \tilde{H} \omega, \quad (43)$$

$$S_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} (\partial_\mu A_\lambda - \partial_\lambda A_\mu), \quad (44)$$

$$\tilde{H} = -\pi \eta_{\mu\alpha} \eta_{\lambda\beta} p^{[\mu\lambda]} p^{\alpha\beta}. \quad (45)$$

Этому гамильтониану соответствуют следующие уравнения Гамильтона:

$$\partial_\lambda r^{\mu\lambda} = 0, \quad (46)$$

$$\partial_\lambda r_\mu + \partial_\mu r^\lambda = \partial_\lambda A_\mu + \partial_\mu A_\lambda. \quad (47)$$

## 6. Заключение

Автором сделана выжимка материалов по геометрическому подходу к лагранжу и гамильтонову формализмам на основе расслоенных пространств. Применение данного подхода продемонстрировано на примере электромагнитного поля в представлении поля Янга–Миллса.

## Литература

1. *Saunders D. J.* The Geometry of Jet Bundles. — Cambridge University Press, 1989.
2. *Vargas J. G.* Differential Geometry for Physicists and Mathematicians. — World Scientific Publishing Company, 2014.
3. *Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G.* Advanced Classical Field Theory. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 2009.
4. *Sardanashvily G.* Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory. — Singapore: World Scientific Publishing Company, 1995.
5. *Giachetta G., Mangiarotti L., Sardanashvily G.* Covariant Hamilton Equations for Field Theory // Journal of Physics A: Mathematical and General. — 1999. — Vol. 32, No 38. — Pp. 6629–6642.

UDC 537.8:514.762.37

## A Geometric Approach to the Lagrangian and Hamiltonian Formalism of Electrodynamics

**D. S. Kulyabov**<sup>\*†</sup><sup>\*</sup> *RUDN University (Peoples' Friendship University of Russia), Moscow, Russia*<sup>†</sup> *Joint Institute for Nuclear Research, Dubna, Moscow region, Russia*

In solving field problems, in particular problems of electrodynamics, we commonly use the Lagrangian and Hamiltonian formalisms. Hamiltonian formalism of field theory has the advantage over the Lagrangian, which inherently contains a gauge condition. While the gauge condition is introduced ad hoc from some external reasons in the Lagrangian formalism. However, the use of the Hamiltonian formalism in the field theory is difficult due to the non-regularity of the field Lagrangian. We must use such variant of the Lagrangian and the Hamiltonian formalism, which would allow us to work with the field models, in particular, to solve the problem of electrodynamics.

We suggest using the modern differential geometry and the algebraic topology, in particular the theory of fiber bundles, as a mathematical apparatus. This apparatus leads to greater clarity in the understanding of mathematical structures, associated with physical and technical models. Using the fiber bundles theory allows us to deepen and expand both the Lagrangian and the Hamiltonian formalism. We can detect a wide range of these formalisms. We can select the most appropriate formalism. Actually just using the fiber bundles formalism we can adequately solve the problems of the field theory, in particular the problems of electrodynamics.

**Key words and phrases:** fiber bundles, connectivity, Lagrangian formalism, Hamiltonian formalism, Yang-Mills theory

### References

1. D. J. Saunders, *The Geometry of Jet Bundles*, Cambridge University Press, 1989. doi:10.1017/CBO9780511526411.
2. J. G. Vargas, *Differential Geometry for Physicists and Mathematicians*, World Scientific Publishing Company, 2014.
3. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, *Advanced Classical field theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2009.
4. G. Sardanashvily, *Generalized Hamiltonian Formalism for Field Theory*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 1995.
5. G. Giachetta, L. Mangiarotti, G. Sardanashvily, Covariant Hamilton Equations for Field Theory, *Journal of Physics A: Mathematical and General* 32 (38) (1999) 6629–6642. doi:10.1088/0305-4470/32/38/302.

---

# Физика

UDC 530.122:531.266.3

## Spherically Symmetric Solution of the Weyl–Dirac Theory of Gravitation and its Consequences

O. V. Babourova, B. N. Frolov, P. E. Kudlaev, E. V. Romanova

*Moscow Pedagogical State University, Moscow, Russia*

The Poincaré and Poincaré–Weyl gauge theories of gravitation with Lagrangians quadratic on curvature and torsion in post-Riemannian spaces with the Dirac scalar field is discussed in a historical aspect. The various hypotheses concerning the models of a dark matter with the help of a scalar field are considered. The new conformal Weyl–Dirac theory of gravitation is proposed, which is a gravitational theory in Cartan–Weyl spacetime with the Dirac scalar field representing the dark matter model. A static spherically symmetric solution of the field equations in vacuum for a central compact mass is obtained as the metrics conformal to the Yilmaz–Rosen metrics. On the base of this solution one considers a radial movement of an interplanetary spacecraft starting from the Earth. Using the Newton approximation one obtains that the asymptotic line-of-sight velocity in this case depends on the parameters of the solution, and therefore one can obtain, on basis of the observable data, the values of these parameters and then the value of a rest mass of the Dirac scalar field.

**Key words and phrases:** Dark matter, Dirac scalar field, Weyl–Dirac theory of gravitation, Cartan–Weyl spacetime, Yilmaz–Rosen metrics, spacecraft Earth flyby

### 1. Introduction

In [1] a gauge principle has been applied to Poincaré group that has resulted in construction a gauge theory of gravitation in a post-Riemannian space with curvature and torsion — a Riemann–Cartan space. In [1] a curvature scalar (generalized on a Riemann–Cartan space) was used as a Lagrangian of the theory. Such generalized theory of gravitation has been named the Einstein–Cartan theory of gravitation. The similar gauge theory of gravitation was proposed in [2–5] where it was offered to use as a Lagrangian along with a curvature scalar also quantities quadratic on curvature and torsion. Later in [6] the most general Lagrangian of a such kind in a Riemann–Cartan space was constructed containing ten arbitrary connection constants. A gauge theory of gravitation with quadratic Lagrangians has received the name the Poincaré gauge theory of gravitation, see Refs. in [7–9].

Then in [10, 11] it was advanced a conformally invariant generalization of the Poincaré gauge theory of gravitation was proposed which uses the method offered by Dirac in his well-known work [12]. The given method is based on using in a Lagrangian of the theory an additional scalar field which in [10] was named as a Dirac scalar field.

In [13, 14] the gauge theory of gravitation was constructed, proceeding from the requirement of the gauge invariance of the theory concerning the Poincaré–Weyl group, supplementing the Poincaré group by a group of spacetime stretching and compression (dilatations). It was shown that from this requirement spacetime obtains a geometrical structure of Cartan–Weyl space. Besides, in this theory a requirement appears of necessary existence of the additional scalar field having so fundamental geometrical status, as well as the metrics. The further development of the theory has shown, that the given scalar field coincides by the properties with the scalar field entered by Dirac in [12].

Further on the basis of the given result the theory of gravitation in a Cartan–Weyl space has been constructed [15–18], which generalizes the Einstein–Cartan and the Poincaré gauge theories of gravitation in presence of nonmetricity of the Weyl’s type and uses the

Dirac scalar field for supporting conformance of the theory. This generalized theory of gravitation is pertinent to be named *the Weyl–Dirac theory of gravitation*.

According to Gliner [19], the cosmological constant in the Einstein equation determines a vacuum energy density (dark energy). In the Weyl–Dirac conformal theory of gravitation, an effective cosmological constant appears, which value is determined by the Dirac scalar field. Application of the Weyl–Dirac theory to the early universe cosmology has allowed to find the solution of a well-known cosmological constant problem [18, 20–22], which represents the important problem of modern physics [23, 24].

Matos with co-authors [25] within the framework of a Riemann geometry in GR advanced a cosmological SFDM model, in which the dark matter was modelled with the help of a scalar field using a special kind of a potential. The full solution of a cosmological scenario was obtained. To the hypothesis that the scalar field can carry out the same problems, which are assigned to a dark matter, Capozziello with coauthors have joined [26]. In [26] the Yukawa interaction between the scalar field and substance is used.

In the monography [18] within the framework of the Weyl–Dirac theory of gravitation, the hypothesis has been stated that the Dirac scalar field in Cartan–Weyl space not only determines a size of the effective cosmological constant (dark energy density), but also plays a role of the basic component of a dark matter. Then the spherically symmetric solution of the Weyl–Dirac theory for the central mass in vacuum [18, 27, 28] was found.

Thus, the hypothesis about a possible modeling of dark matter by a scalar field is fruitful idea, which now is developed by some modern researchers. In the present work a new method of deriving the spherically symmetric solution of the conformal Weyl–Dirac theory of gravitation is elaborated, and also possible influence of dark matter on movement of space vehicles within the limits of Solar system is found out.

## 2. Lagrangian Density and Field Equations in Weyl–Dirac Theory

Let us consider [18] a connected 4D oriented differentiable manifold  $\mathcal{M}$  equipped with a metric  $\hat{g}$  of the index 3, a linear connection  $\Gamma^a_b$  and a volume 4-form  $\eta$ . Then a Cartan–Weyl space  $CW_4$  is defined as such manifold equipped with a curvature 2-form  $\mathcal{R}^a_b$ , a torsion 2-form  $\mathcal{T}^a$  and a nonmetricity 1-form  $\mathcal{Q}_{ab}$  obeying the Weyl condition

$$\mathcal{Q}_{ab} = \frac{1}{4}g_{ab}\mathcal{Q}. \quad (1)$$

Here  $\mathcal{Q}_{ab} = -\mathcal{D}g_{ab}$ , and  $\mathcal{D} = d + \Gamma \wedge \dots$  is the exterior covariant differential.

In [13, 14] the Poincaré–Weyl gauge theory of gravitation (PWTG) has been developed. The gauge field introduced by the subgroup of dilatations is named the dilatation field, its vector-potential is the Weyl 1-form, and quanta of this field can have nonzero rest mass. An additional scalar field  $\beta(x)$  is introduced in PWTG as an essential geometrical addendum to the metric tensor, the tangent space metrics being the form,

$$g_{ab} = \beta^{-2}g_{ab}^M, \quad (2)$$

where  $g_{ab}^M$  are the constant components of the Minkowski metric tensor.

The properties of the field  $\beta(x)$  coincide with those of the scalar field introduced by Dirac [12]. Some terms of the Dirac scalar field Lagrangian have structure of the Higgs Lagrangian and can cause an appearance of nonzero rest masses of particles [11].

On the basis of PWTG, the conformal theory of gravitation in Cartan–Weyl spacetime with Dirac scalar has been developed [15–18] with the Lagrangian density 4-form (in

exterior form formalism) [20, 21],

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{\text{mat}} + \beta^4 \Lambda^{ab} \wedge \left( \mathcal{Q}_{ab} - \frac{1}{4} g_{ab} \mathcal{Q} \right), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_G = 2f_0 \left[ \frac{1}{2} \beta^2 \mathcal{R}^a{}_b \wedge \eta_a{}^b - \beta^4 \Lambda \eta + \frac{1}{4} \lambda \mathcal{R}^a{}_a \wedge * \mathcal{R}^b{}_b + \rho_1 \beta^2 \mathcal{T}^a \wedge * \mathcal{T}_a + \right. \\ \left. + \rho_2 \beta^2 (\mathcal{T}^a \wedge \theta_b) \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_a) + \rho_3 \beta^2 (\mathcal{T}^a \wedge \theta_a) \wedge * (\mathcal{T}^b \wedge \theta_b) + \right. \\ \left. + \xi \beta^2 \mathcal{Q} \wedge * \mathcal{Q} + \zeta \beta^2 \mathcal{Q} \wedge \theta^a \wedge * \mathcal{T}_a + l_1 d\beta \wedge * d\beta + \right. \\ \left. + l_2 \beta d\beta \wedge \theta^a \wedge * \mathcal{T}_a + l_3 \beta d\beta \wedge * \mathcal{Q} \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

here  $\mathcal{L}_G$  is the gravitational field Lagrange density,  $\mathcal{L}_{\text{mat}}$  is the matter Lagrange density. The first term in  $\mathcal{L}_G$  is the Gilbert–Einstein Lagrangian density generalized to the Cartan–Weyl space ( $\eta_a{}^b = *(\theta_a \wedge \theta^b)$ ,  $f_0 = c^4/16\pi G$ ), the second term is a generalized cosmological term describing vacuum energy ( $\Lambda$  is the Einstein cosmological constant).

We use the exterior form variational formalism on the base of the Lemma on the commutation rule between variation and Hodge star dualization [29]. The independent variables are the nonholonomic connection 1-form  $\Gamma^a{}_b$ , the basis 1-form  $\theta^a$ , the Dirac scalar field  $\beta(x)$ , and the Lagrange multipliers  $\Lambda^{ab}$ .  $\Lambda$ -equation yields the Weyl's condition (1). The variational field equations of the theory ( $\Gamma$ -equation,  $\theta$ -equation and  $\beta$ -equation) can be found in [18, 21].

These variational field equations have been solved for the very early stage of evolution of universe for the scale factor  $a(t)$  and the field  $\beta(t)$ , when the matter density is very small [18, 20–22]. This solution realizes exponential diminution of the field  $\beta$ , and thus sharp exponential decrease of physical vacuum energy (dark energy) by many orders. Thus this result can explain the exponential decrease in time at very early Universe of the dark energy being described by the effective cosmological constant. This can give way to solving one of the fundamental problems of the modern theoretical physics — the problem of the cosmological constant (see [23, 24]) — as a consequence of fields dynamics at the early Universe.

### 3. Spherically Symmetric Solution of the Weyl–Dirac Theory

Now a static spherically symmetric solution of the field equations in vacuum (in case of  $\Lambda = 0$ ,  $\lambda = 0$ ) is obtained for a central compact mass  $m$  [18, 27, 28].

In the spherically symmetric case the torsion 2-form is,  $\mathcal{T}^a = (1/3)\mathcal{T} \wedge \theta^a$ ,  $\mathcal{T} = *(\theta_a \wedge * \mathcal{T}^a)$ , where  $\mathcal{T}$  is a torsion trace 1-form.

As a consequence of the  $\Gamma$ -equation, one can conclude that the torsion 1-form  $\mathcal{T}$  and the nonmetricity 1-form  $\mathcal{Q}$  can be realized as  $\mathcal{T} = sdU$ ,  $\mathcal{Q} = qdU$ ,  $U = \log \beta$ , where  $s$  and  $q$  are arbitrary constants.

We shall find a static spherically symmetric solution with a metrics of the form,

$$ds^2 = e^{-2U(r)} \left[ e^{-\mu(r)} dt^2 - e^{\mu(r)} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)) \right]. \quad (5)$$

After calculation the  $\Gamma$ -,  $\theta$ - and  $\beta$ -equations with the help of this metrics, one can conclude that these equations are reduced to the following equations,

$$\mu'' + \frac{2}{r} \mu' = 0, \quad U' = \pm \frac{k}{2} \mu', \quad k = \sqrt{k^2} > 0, \quad (6)$$

with  $q = -8$ ,  $s = -6$ , and  $k^{-2} = l_1$  under some conditions on the coupling constants of the Lagrangian density 4-form (4).

The equations (6) have solutions,

$$\mu = \frac{r_0}{r}, \quad \beta(r) = \beta_0 e^{\pm \frac{kr_0}{2r}}, \quad (7)$$

which lead to the metrics,

$$ds^2 = e^{\mp \frac{kr_0}{r}} ds_{\text{YR}}^2, \quad (8)$$

$$ds_{\text{YR}}^2 = e^{-\frac{r_0}{r}} dt^2 - e^{\frac{r_0}{r}} (dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)). \quad (9)$$

With the help of the conformal transformation

$$\check{g}_{\alpha\beta} = e^{\mp \frac{kr_0}{r}} g_{\alpha\beta}, \quad (10)$$

the metrics (8) can be transformed to the metrics (9), the Cartan–Weyl space being transformed to the Riemann–Cartan space.

If one puts  $r_0 = r_g = 2Gm/c^2$ , the metrics (9) is known as the Yilmaz–Rosen (YR) metrics [30–32]. In this case this metrics in the post-Newtonian approximation at large distances gives the same results as the Schwarzschild metrics. The metrics (9) belongs to the Majumdar–Papapetrou class of metrics [33, 34].

The metrics (8) will be named the generalized Yilmaz–Rosen metrics. In the simplest case the constant  $k$  can be chosen as  $k = 1/\sqrt{l_1}$ , where  $l_1$  is the coupling constant in the Lagrangian density (4).

#### 4. Possible Influence of Dark Matter on the Interplanetary Spacecraft Motion

Let's consider a radial motion of a test body under the influence of the metrics (8). The  $t$ -component of the geodesic equation has the first integral,

$$e^{-(1\pm k)\frac{r_g}{r}} \frac{cdt}{ds} = E_0 = \text{const}. \quad (11)$$

Let us divide (8) by  $ds^2$  and put  $d\theta = 0$ ,  $d\phi = 0$ . Then after some transformations we shall obtain for radial movement the following functional dependence between the velocity  $v$  of a test body and the radial coordinate  $r$ ,

$$\frac{v^2}{c^2} = e^{-\frac{2r_g}{r}} \left( 1 - \frac{1}{E_0^2} e^{-(1\pm k)\frac{r_g}{r}} \right). \quad (12)$$

This equation yields the identity,

$$\frac{v_{\text{inf}}^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{E_0^2}, \quad (13)$$

where  $v_{\text{inf}}$  is an asymptotical value of the test body velocity at infinity.

Let's apply the equalities (12) and (13) to the motion of interplanetary spacecraft starting from the Earth (ignoring its rotation). If we use the Newton approximation in

this case, then we obtain the approximate equality,

$$\frac{v_{\text{inf}}^2 - v_{\text{inf}/0}^2}{c^2} \approx \mp k \left( \frac{r_g}{R} \right)_{\text{Earth}}, \quad (14)$$

where  $v_{\text{inf}/0}$  is the value of the test body velocity at infinity calculated under the condition  $k = 0$ .

The data on Galileo, Cassini and other Earth flyby of the interplanetary spacecrafts show the increase  $\Delta v_{\text{inf}}$  in the asymptotic line-of-sight velocity  $v_{\text{inf}}$ , of the order of  $1\text{--}10 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$  [35]. Therefore the value of (14) is not zero. From this fact one can make two conclusions. First, we need to choose the second sign in the solutions (7), (9). Second, the formula (14) allows to estimate the values of  $k$  and  $l_1$ , and thus the value of the Dirac field rest mass. In [11] one can see, how a scalar field, which is a model of dark matter, can obtain a rest mass by the Higgs machinery.

## 5. Conclusions

As a consequence of the Poincaré–Weyl gauge theory of gravitation, the Dirac scalar field, which has an equally fundamental status as the metrics, should exist in Nature, and spacetime has a geometrical structure of the Cartan–Weyl space. We have named such gravitational theory as the Weyl–Dirac theory of gravitation. In this theory we derive a static spherically symmetric solution of the field equations in vacuum for a central mass. With this solution we consider a radial motion of an interplanetary spacecraft starting from the Earth. Using the Newton approximation we obtain that the asymptotic line-of-sight velocity  $v_{\text{inf}}$  in this case depends on the parameter  $k$  of the solution. Using the observable data, one can obtain the value of this parameter and then the value of the Dirac field rest mass.

The results were obtained within the framework of performance of the State Task No 3.1968.2014/K of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation.

## References

1. T. W. B. Kibble, Lorentz Invariance and the Gravitational Field, *Journal of Mathematical Physics* 2 (1961) 212–221.
2. B. N. Frolov, Principle of Local Invariance and Noether Theorem, *Vestnik Moskovskogo Universiteta* 6 (1963) 48–58, (in Russian).
3. B. N. Frolov, Principle of Local Invariance and Noether Theorem, in: *Proceedings, Modern Problems of Gravitation, 2nd Soviet grav. conf.*, Publ. House Tbilisi Univ, Tbilisi, 1967, pp. 270–278, (in Russian).
4. B. N. Frolov, Tetrad Palatini Formalism and Quadratic Lagrangians in the Gravitational Field Theory, *Acta Physica Polonica B* 9 (1978) 823–829.
5. B. N. Frolov, On Foundations of Poincaré-gauged Theory of Gravity, *Gravitation and Cosmology* 6 (2004) 116–120.
6. K. Hayashi, Gauge Theories of Massive and Massless Tensor Fields, *Progress of Theoretical Physics* 39 (1968) 494–515.
7. F. W. Hehl, J. L. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne’eman, Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilaton Invariance, *Physics Reports* 258 (1995) 1–171.
8. B. N. Frolov, *Poincaré Gauge Theory of Gravitation*, MPGU, Moscow, 2003, (in Russian).
9. M. Blagojević, F. W. Hehl, *Gauge Theory of Gravitation*, WSPC, Imperial College Press, London, 2013.

10. B. N. Frolov, *Gravitatsiya i elektromagnetizm*, Universitetskoe, Minsk, 1992, Ch. Generalized-conformal Poincaré-gauged Quadratic Theory of Gravity, pp. 174–178, (in Russian).
11. B. N. Frolov, *Gravity, Particles and Spacetime*, World Scientific, Singapore, 1996, Ch. Generalized Conformal Invariance and Gauge Theory of Gravity, pp. 113–144, (in Russian).
12. P. A. M. Dirac, Long Range Forces and Broken Symmetries, *Proceedings of the Royal Society A* 333 (1973) 403–418.
13. O. V. Babourova, B. N. Frolov, V. C. Zhukovsky, Gauge Field Theory for Poincaré–Weyl Group, *Physical Review D* 74 (2006) 064012–1–125.
14. O. V. Babourova, B. N. Frolov, V. C. Zhukovsky, Theory of Gravitation on the Basis of the Poincaré–Weyl Gauge Group, *Gravitation and Cosmology* 15(1) (2009) 13–15.
15. O. V. Babourova, B. N. Frolov, Dark Energy, Dirac’s Scalar Field and the Cosmological Constant Problem, *ArXiv: 1112.4449 [gr-qc]* (2011).
16. O. V. Babourova, B. N. Frolov, R. S. Kostkin, Dirac’s Scalar Field as Dark Energy with the Frameworks of Conformal Theory of Gravitation in Weyl–Cartan Space, *ArXiv: 1006.4761[gr-qc]* (2010).
17. O. V. Babourova, R. S. Kostkin, B. N. Frolov, The Problem of a Cosmological Constant within the Conformal Gravitation Theory in the Weyl–Cartan Space, *Russian Physics Journal* 54(1) (2011) 121–123.
18. O. V. Babourova, B. N. Frolov, *Mathematical Foundations of the Modern Theory of Gravitation*, MPGU, Moscow, 2012, (in Russian).
19. E. B. Gliner, Inflationary Universe and the Vacuumlike State of Physical Medium Space, *Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)* 45(2) (2002) 213–220.
20. O. V. Babourova, K. N. Lipkin, B. N. Frolov, Theory of Gravity With the Dirac Scalar Field and the Problem of Cosmological Constant, *Russian Physics Journal* 55(7) (2012) 855–857.
21. O. V. Babourova, B. N. Frolov, K. N. Lipkin, Theory of Gravity With a Dirac Scalar Field in the Exterior Form Formalism and Cosmological Constant Problem, *Gravitation and Cosmology* 18(4) (2012) 225–231.
22. O. V. Babourova, B. N. Frolov, Dark Energy as a Cosmological Consequence of Existence of the Dirac Scalar Field in Nature, *Physical Research International (ID 952181)* (2015) 1–6.
23. S. Weinberg, The Cosmological Constant Problem, *Reviews of Modern Physics* 61(1) (1989) 1–23.
24. M. Li, X.-D. Li, S. Wang, Y. Wang, Dark Energy, *Communications in Theoretical Physics* 56 (2011) 525–560.
25. T. Matos, L. A. Urena-Lopez, On the Nature of Dark Matter, *International Journal of Modern Physics D* 13 (2004) 2287–2292.
26. D. F. Mota, V. Salzano, S. Capozziello, Unifying Static Analysis of Gravitational Structures With a Scale-Dependent Scalar Field Gravity as an Alternative to Dark Matter, *Physical Review D* 83 (2011) 084038.
27. O. V. Babourova, B. N. Frolov, E. V. Febres, Spherically Symmetric Solution of Gravitation Theory With a Dirac Scalar Field in the Cartan–Weyl Space, *Russian Physics Journal* 57(9) (2015) 1297–1299.
28. O. V. Babourova, B. N. Frolov, P. E. Kudlaev, E. V. Romanova, Spherically Symmetric Solution in Cartan–Weyl Space with Dirac Scalar Field, in: *Proceedings of the Twelfth Asia-Pacific International Conference on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology dedicated to the Centenary of Einstein’s General Relativity*, Moscow, 28 Jun–5 July 2015, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2016, pp. 191–195.
29. O. V. Babourova, B. N. Frolov, E. A. Klimova, Plane Torsion Waves in Quadratic Gravitational Theories in Riemann–Cartan Space, *Classical and Quantum Gravity* 16 (1999) 1149–1162.

30. H. Yilmaz, New Approach to General Relativity, *Physical Review* 111 (1958) 1417–1420.
31. N. Rosen, A Bi-Metric Theory of Gravitation, *Annals of Physics (New York)* 84 (1974) 455–473.
32. Y. Itin, A Class of Quasi-Linear Equations in Coframe Gravity, *General Relativity and Gravitation* 31 (1999) 1891–1911.
33. S. D. Majumdar, A Class of Exact Solutions of Einstein’s Field Equations, *Physical Review* 72(5) (1947) 390–398.
34. A. Papapetrou, Solution of the Equations of the Gravitational Field for an Arbitrary Charge-Distribution, *Proceedings of Royal Irish Academy A* 51 (1947) 191–204.
35. L. Iorio, Gravitational Anomalies in the Solar System?, *International Journal of Modern Physics D* 24(6) (2015) 1530015 (37 p.).

УДК 530.122:531.266.3

### Сферически-симметричное решение теории гравитации Вейля–Дирака и её следствия

О. В. Бабурова, Б. Н. Фролов, П. Э. Кудлаев, Е. В. Романова

*Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия*

В историческом аспекте обсуждаются Пуанкаре- и Пуанкаре-Вейль-калибровочные теории гравитации в постримановых пространствах со скалярным полем Дирака с лагранжианами, квадратичными по кривизне и кручению. Рассматриваются различные гипотезы о возможном построении моделей тёмной материи с помощью скалярного поля. Развивается новая конформная теория гравитации Вейля–Дирака, представляющая собой теорию гравитации в пространстве-времени Картана–Вейля со скалярным полем Дирака, которое рассматривается как модель тёмной материи. Найдено статическое сферически-симметричное решение уравнений поля в вакууме для центральной компактной массы в виде метрики, конформной метрике Илмаза–Розена. На основе этого решения рассмотрено радиальное движение космического аппарата, стартующего с Земли. В ньютоновом приближении показано, что асимптотическое значение скорости аппарата на значительном удалении от Земли зависит от параметра решения. Тем самым возникает возможность при сравнении с наблюдательными данными определить значение этого параметра, что позволит оценить величину массы покоя кванта скалярного поля Дирака.

**Ключевые слова:** тёмная материя, скалярное поле Дирака, теория гравитации Вейля–Дирака, пространство-время Картана–Вейля, метрика Илмаза–Розена, облёт Земли космическим аппаратом

### Литература

1. *Kibble T. W. B.* Lorentz Invariance and the Gravitational Field // *Journal of Mathematical Physics*. — 1961. — Vol. 2. — Pp. 212–221.
2. *Фролов Б. Н.* Принцип локальной инвариантности и теорема Нетер // *Вестник Московского университета, серия физики, астрономии*. — 1963. — Т. 6. — С. 48–58.
3. *Фролов Б. Н.* Принцип локальной инвариантности и теорема Нетер // *Современные проблемы гравитации / Труды 2-й Советской гравитационной конференции*. — Тбилиси: Издательство Тбилисского университета, 1967. — С. 270–278.
4. *Frolov B. N.* Tetrad Palatini Formalism and Quadratic Lagrangians in the Gravitational Field Theory // *Acta Physica Polonica B*. — 1978. — Vol. 9. — Pp. 823–829.
5. *Frolov B. N.* On Foundations of Poincaré-gauged Theory of Gravity // *Gravitation and Cosmology*. — 2004. — Vol. 6. — Pp. 116–120.
6. *Hayashi K.* Gauge Theories of Massive and Massless Tensor Fields // *Progress of Theoretical Physics*. — 1968. — Vol. 39. — Pp. 494–515.

7. Metric-Affine Gauge Theory of Gravity: Field Equations, Noether Identities, World Spinors, and Breaking of Dilaton Invariance / F. W. Hehl, J. L. McCrea, E. W. Mielke, Y. Ne'eman // *Physics Reports*. — 1995. — Vol. 258. — Pp. 1–171.
8. *Фролов Б. Н.* Пуанкаре калибровочная теория гравитации. — Москва: МПГУ, 2003.
9. *Blagojević M., Hehl F. W.* Gauge Theory of Gravitation. — London: WSPC, Imperial College Press, 2013.
10. *Фролов Б. Н.* Гравитация и электромагнетизм. — Минск.: Университетское, 1992. — С. 174–178.
11. *Frolov B. N.* Gravity, Particles and Spacetime / Ed. by P. Pronin, G. Sardanashvily. — Singapore: World Scientific, 1996. — Pp. 113–144.
12. *Dirac P. A. M.* Long Range Forces and Broken Symmetries // *Proceedings of the Royal Society A*. — 1973. — Vol. 333. — Pp. 403–418.
13. *Babourova O. V., Frolov B. N., Zhukovsky V. C.* Gauge Field Theory for Poincaré–Weyl Group // *Physical Review D*. — 2006. — Vol. 74. — Pp. 064012–1–125.
14. *Babourova O. V., Frolov B. N., Zhukovsky V. C.* Theory of Gravitation on the Basis of the Poincaré–Weyl Gauge Group // *Gravitation and Cosmology*. — 2009. — Vol. 15(1). — Pp. 13–15.
15. *Babourova O. V., Frolov B. N.* Dark Energy, Dirac's Scalar Field and the Cosmological Constant Problem. — ArXive: 1112.4449 [gr-qc]. — 2011.
16. *Babourova O. V., Frolov B. N., Kostkin R. S.* Dirac's Scalar Field as Dark Energy with the Frameworks of Conformal Theory of Gravitation in Weyl–Cartan Space. — ArXive: 1006.4761[gr-qc]. — 2010.
17. *Babourova O. V., Kostkin R. S., Frolov B. N.* The Problem of a Cosmological Constant within the Conformal Gravitation Theory in the Weyl–Cartan Space // *Russian Physics Journal*. — 2011. — Vol. 54(1). — Pp. 121–123.
18. *Бабурова О. В., Фролов Б. Н.* Математические основы современной теории гравитации. — Москва: МПГУ, 2012.
19. *Gliner E. B.* Inflationary Universe and the Vacuumlike State of Physical Medium Space // *Physics-Uspekhi (Advances in Physical Sciences)*. — 2002. — Vol. 45(2). — Pp. 213–220.
20. *Babourova O. V., Lipkin K. N., Frolov B. N.* Theory of Gravity With the Dirac Scalar Field and the Problem of Cosmological Constant // *Russian Physics Journal*. — 2012. — Vol. 55(7). — Pp. 855–857.
21. *Babourova O. V., Frolov B. N., Lipkin K. N.* Theory of Gravity With a Dirac Scalar Field in the Exterior Form Formalism and Cosmological Constant Problem // *Gravitation and Cosmology*. — 2012. — Vol. 18(4). — Pp. 225–231.
22. *Babourova O. V., Frolov B. N.* Dark Energy as a Cosmological Consequence of Existence of the Dirac Scalar Field in Nature // *Physical Research International*. — 2015. — Vol. (ID 952181). — Pp. 1–6.
23. *Weinberg S.* The Cosmological Constant Problem // *Reviews of Modern Physics*. — 1989. — Vol. 61(1). — Pp. 1–23.
24. Dark Energy / M. Li, X.-D. Li, S. Wang, Y. Wang // *Communications in Theoretical Physics*. — 2011. — Vol. 56. — Pp. 525–560.
25. *Matos T., Urena-Lopez L. A.* On the Nature of Dark Matter // *International Journal of Modern Physics D*. — 2004. — Vol. 13. — Pp. 2287–2292.
26. *Mota D. F., Salzano V., Capozziello S.* Unifying Static Analysis of Gravitational Structures With a Scale-Dependent Scalar Field Gravity as an Alternative to Dark Matter // *Physical Review D*. — 2011. — Vol. 83. — P. 084038.
27. *Babourova O. V., Frolov B. N., Febres E. V.* Spherically Symmetric Solution of Gravitation Theory With a Dirac Scalar Field in the Cartan–Weyl Space // *Russian Physics Journal*. — 2015. — Vol. 57(9). — Pp. 1297–1299.
28. Spherically Symmetric Solution in Cartan–Weyl Space with Dirac Scalar Field / O. V. Babourova, B. N. Frolov, P. E. Kudlaev, E. V. Romanova // *Proceedings of*

- the Twelfth Asia-Pacific International Conference on Gravitation, Astrophysics, and Cosmology dedicated to the Centenary of Einstein's General Relativity, Moscow, 28 Jun–5 July 2015. — Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2016. — Pp. 191–195.
29. Babourova O. V., Frolov B. N., Klimova E. A. Plane Torsion Waves in Quadratic Gravitational Theories in Riemann–Cartan Space // *Classical and Quantum Gravity*. — 1999. — Vol. 16. — Pp. 1149–1162.
  30. Yilmaz H. New Approach to General Relativity // *Physical Review*. — 1958. — Vol. 111. — Pp. 1417–1420.
  31. Rosen N. A Bi-Metric Theory of Gravitation // *Annals of Physics (New York)*. — 1974. — Vol. 84. — Pp. 455–473.
  32. Itin Y. A Class of Quasi-Linear Equations in Coframe Gravity // *General Relativity and Gravitation*. — 1999. — Vol. 31. — Pp. 1891–1911.
  33. Majumdar S. D. A Class of Exact Solutions of Einstein's Field Equations // *Physical Review*. — 1947. — Vol. 72(5). — Pp. 390–398.
  34. Papapetrou A. Solution of the Equations of the Gravitational Field for an Arbitrary Charge-Distribution // *Proceedings of Royal Irish Academy A*. — 1947. — Vol. 51. — Pp. 191–204.
  35. Iorio L. Gravitational Anomalies in the Solar System? // *International Journal of Modern Physics D*. — 2015. — Vol. 24(6). — P. 1530015 (37 p.).

© Babourova O. V., Frolov B. N., Kudlaev P. E., Romanova E. V., 2016

## СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

**Бабурова Ольга Валерьевна** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Московского педагогического государственного университета (МПГУ) (e-mail: baburova@orc.ru, тел.: +7 (499) 2467172)

**Бобрикова Екатерина Васильевна** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: ebobrikova@gmail.com, тел.: +7 (495) 9550999)

**Виницкий Сергей Ильич** — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научного отдела теории атомного ядра лаборатории теоретической физики Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна; профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: vinitzky@theor.jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-348)

**Вишневский Владимир Миронович** — профессор, доктор технических наук, профессор, зав. лабораторией 69 Института проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН (e-mail: vishn@inbox.ru, тел.: +7 (495) 6992904)

**Гайдамака Юлия Васильевна** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: ygaidamaka@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550999)

**Гостев Иван Михайлович** (Россия) — профессор кафедры управления информационными системами и цифровой инфраструктурой НИУ ВШЭ, доктор технических наук, (e-mail: igostev@hse.ru, тел.: +7(495) 7729590 доб. 55181)

**Гусев Александр Александрович** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: goseff@jinr.ru, тел.: +7 (49621) 63-536)

**Дербов Владимир Леонардович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической физики физического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (e-mail: derbov@sgu.ru, тел.: +7 (8452) 51-17-57)

**Егоров Александр Алексеевич** — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института общей физики им. А.М. Прохорова Российской академии наук (e-mail: alexandr\_egorov@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550813)

**Егорова Майя Александровна** — кандидат политических наук, доцент кафедры иностранных языков факультета гуманитарных и социальных наук РУДН (e-mail: egorova\_ma@pfur.ru, тел.: +7 (495) 9550813)

**Кудлаев Павел Эдуардович** — аспирант Московского педагогического государственного университета (МПГУ) (e-mail: pavelkudlaev@mail.ru, тел.: +7 (499) 2467172)

**Кулябов Дмитрий Сергеевич** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН; старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: ds@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495) 9520250)

**Медведева Екатерина Георгиевна** — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: kathynote@mail.ru, тел.: +7 (495) 9550999)

**Наумов Валерий Арсеньевич** — доцент, кандидат физико-математических наук, научный руководитель, Исследовательского института инноваций, Хельсинки, Финляндия (e-mail: valeriy.naumov@pfu.fi)

**Романова Екатерина Владимировна** — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник Московского педагогического государственного университета (МПГУ) (e-mail: solntce\_07@mail.ru, тел.: +7 (499) 2467172)

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — профессор, доктор технических наук, зав. кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: ksam@sci.pfu.edu.ru, тел.: +7 (495) 9522823)

**Севастьянов Леонид Антонович** (Россия) — профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, доктор физико-математических наук,

(e-mail: [sevast@sci.pfu.edu.ru](mailto:sevast@sci.pfu.edu.ru), тел.: +7 (495)9522572)

**Фролов Борис Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор Московского педагогического государственного университета (МПГУ)

(e-mail: [frolovbn@orc.ru](mailto:frolovbn@orc.ru), тел.: +7 (499) 2467172)

**Чулуунбаатар Очбадрах** (Chuluunbaatar Ochbadrah, Монголия) — доктор физико-математических наук, начальник сектора научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: [chuka@jinr.ru](mailto:chuka@jinr.ru), тел.: +7 (49621) 62529)

**Щербаков Евгений Александрович** — доцент, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории функций Кубанского государственного университета (e-mail: [echt@math.kubsu.ru](mailto:echt@math.kubsu.ru), тел.: +7 (861)2199581 (доб. 281))

**Щербаков Михаил Евгеньевич** — бизнес-аналитик компании GlowByte Consulting (e-mail: [latiner@mail.ru](mailto:latiner@mail.ru), тел.: +7 (495) 2583234)

**Яркина Наталья Владимировна** — кандидат физико-математических наук, м.н.с. УНИП РУДН (e-mail: [nat.yarkina@mail.ru](mailto:nat.yarkina@mail.ru), тел.: +7 (495) 9522823)

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе  $\text{\LaTeX}$  (используется версия  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , для набора формул используется макропакет  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ ). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, представляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS,  $\text{\TeX}$ ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе  $\text{\BibTeX}$  и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.)); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям: оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»:  
Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, комн. 313;  
e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика.**

**Информатика. Физика»**

Количество  
комплектов:

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

**ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА**

ПВ	место	литер

на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика. Информатика. Физика»**

Стои- мость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

Научный журнал  
**ВЕСТНИК**  
Российского университета дружбы народов

Серия  
**МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА**  
2016, № 4

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Российский университет дружбы народов»  
(ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198)

**Редактор** *К. В. Зенкин*  
**Компьютерная вёрстка:** *А. В. Королькова*

**Адрес редакции:**  
Российский университет дружбы народов  
ул. Орджоникидзе, 3, г. Москва, Россия, 115419  
тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@pfur.ru

**Адрес редакционной коллегии**  
**серии «Математика. Информатика. Физика»:**  
ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419  
тел. +7(495) 952-02-50, email: mathitphysjournalrudn@pfur.ru  
сайт: <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

---

Подписано в печать 9.12.2016. Выход в свет 9.12.2016. Формат 70×100/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».  
Усл. печ. л. 11,68 Тираж 500 экз. Заказ № 1462

Цена свободная

Типография ИПК РУДН  
ул. Орджоникидзе, 3, ГСП-1, г. Москва, Россия, 115419, тел. 952-04-41

Scientific journal  
**BULLETIN**  
of Peoples' Friendship University of Russia

Series  
**MATHEMATICS. INFORMATION SCIENCES. PHYSICS**  
2016, № 4

Editor *K. V. Zenkin*  
Computer design: *A. V. Korolkova*

**Address of editorial board:**  
Peoples' Friendship University of Russia  
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419  
Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: [ipk@pfur.ru](mailto:ipk@pfur.ru)

**Address of editorial board**  
**series "Mathematics. Information Sciences. Physics":**  
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419  
Tel. +7 (495) 952-02-50, email: [mathitphysjournalrudn@pfur.ru](mailto:mathitphysjournalrudn@pfur.ru)  
site: <http://vestnik-miph.sci.pfu.edu.ru>

---

Printing run 500 copies

Open price

**Address of PFUR publishing house**  
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419  
Tel. +7 (495) 952-04-41