

Редакционный совет журнала
«Вестник Российского университета дружбы народов»:

В. М. Филиппов — председатель
Д. П. Билибин — заместитель председателя

Члены редакционного совета:

Т. М. Балыхина, Н. У. Венсковский, Н. П. Гусаков,
В. В. Давыдов, В. Н. Денисенко, А. П. Ефремов,
А. Я. Капустин, Н. С. Кирабаев, Е. Б. Ланеев,
В. Г. Плющиков, Н. К. Пономарев, Н. А. Черных,
В. А. Фролов, В. А. Цзык, В. Н. Шаронов, В. В. Якушев

Т. О. Сергеева — ответственный секретарь

Редакционная коллегия серии:

Ю. П. Рыбаков — главный редактор
Л. А. Севастьянов — заместитель главного редактора
Д. С. Кулябов — ответственный секретарь

А. В. Арутюнов, Г. П. Башарин, В. В. Давыдов,
В. И. Ильгисонис, Н. А. Ковальчуков, В. А. Комоцкий,
Н. Н. Лобанов, В. И. Михеев, Р. Г. Мухарлямов,
Н. Э. Николаев, К. Е. Самуйлов, А. Л. Скубачевский,
В. Д. Степанов, М. Ф. Сухинин, Ю. С. Хохлов

ISSN 0869-8732

Адрес редакции:
117923, ГСП-1, Москва, ул. Орджоникидзе, 3

©Российский университет дружбы народов, Издательство, 2007

Вестник Российского университета дружбы народов

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в 1993 году

Серия

Математика. Информатика. Физика
2007, № 3–4

Российский университет дружбы народов

СОДЕРЖАНИЕ

Слово признательности Учителю 5

МАТЕМАТИКА

Горшков Е. А. Построение уравнений динамики управляемой системы 20

Мухарлямов Р. Г. Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями 25

Мухаметзянов И. А. О построении систем с квазиинвариантными программными связями 35

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА

Самуйлов К. Е., Першаков Н. В., Гудкова И. А. Построение и анализ моделей системы с групповым обслуживанием заявок . . . 45

Самуйлов К. Е., Лузгачев М. В., Плаксина О. Н. Разработка вероятностной модели для анализа показателей качества протокола инициирования сеансов связи 53

Наумов В. А., Абаев П. О. Приближенный анализ вероятностно-временных характеристик многофазной системы массового обслуживания 64

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Севастьянов Л. А., Ловецкий К. П., Кокотчикова М. Г. Дискретное преобразование значений функций на сетке в коэффициенты полиномов Цернике 70

Гусев А. А., Зорин А. В., Ловецкий К. П., Третьяков Н. П. Численное исследование дискретного спектра оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курышкина . . 76

Третьяков В. С., Третьяков Н. П. Партеногенетическое воспроизводство в сравнении с половым. Математическое моделирование 85

Зрелов П. В. Определение структурных изменений в динамике фондового рынка 93

ФИЗИКА

Богданов Ю. П. Электромагнитная структура состояния $1f_{7/2}$ ядер в реакциях $e^- + A \rightarrow e^- + A$	101
Дубовик В. М., Дубовик Е. Н. Электромеханическая модель ато- ма водорода как представление стохастического квантового поля процесса взаимодействия электрона с протоном	107
Рылов Ю. А. Динамический метод исследования в приложении к Шредингеровской частице	122
Саха Б. С., Рихвицкий В. В. Бианки-I космологическая модель с вязкой жидкостью и нелинейным спинорным полем: качественный анализ	130
Кассандров В. В. Алгебраическая твисторная динамика тождественных сингулярностей в комплексном расширении пространства-времени	135
Гусева Н. В., Лобанов Н. Н., Падалко А. Г. Исследование влия- ния баротермической обработки на структуру поликристаллическо- го жаропрочного никелевого сплава	149
Саакян А. А., Сулейман С. Ш., Никогосян С., Юнусова С. А. Диэлектрические свойства натуральных цеолитов	155
Каримов Ф. Х. Тектономагнитные эффекты в сейсмических райо- нах Таджикистана	162

Bulletin
of Peoples’
Friendship
University
of Russia

SCIENTIFIC JOURNAL

Founded on 1993

Series

Mathematics. Information Scinces. Physics.
2007, No 3–4

Peoples’ Friendship University of Russia

CONTENTS

Gratitude Words to Our Teacher	5
--	---

MATHEMATICS

Gorshkov E. A. Construction of the Equations of Dynamics of Operated System	20
Mukharlyamov R. G. Modeling of Dynamics of the Elementary Economic Objects as Systems with Program Constraints	25
Mukhametzyanov I. A. On Construction of the Systems with Quasi-Invariant Program Constraints	35

MATHEMATICAL THEORY OF TELETRAFFIC

Samouylov K. E., Pershakov N. V., Gudkova I. A. Batch Service Queue Model Design and Analysis	45
Samouylov K. E., Luzgachev M. V., Plaksina O. N. Modelling SIP Connections with Open Multiclass Queueing Networks	53
Naumov V. A., Abaev P. O. Approximate Performance Analysis of Queues in Series	64

MATHEMATICAL MODELLING

Sevastianov L. A., Lovetsky K. P., Kokotchikova M. G. Discrete Transformation of Mesh Functions Values to Fourier Polynomials Coefficients	70
Gusev A. A., Zorin A. V., Lovetsky K. P., Tretyakov N. P. Numerical Investigation of the Discrete Spectrum of Hamiltonian Operators of the Hydrogen-Like Atoms in Kuryshkin’s Quantum Mechanics	76
Tretyakov V. S., Tretyakov N. P. Parthenogenetic Versus Sexual Reproduction: Mathematical Modelling of Population Dynamics	85
Zrellov P. V. Revealing of Structural Changes in the Stock Market Dynamics	93

PHYSICS

Bogdanov Yu. P. Electromagnetic Structure of State $1f_{7/2}$ for Nuclei in reactions $e^- + A \rightarrow e^- + A$	101
Dubovik V. M., Dubovik E. N. The Hydrogen Electromechanical Model as a Presentation of the Stochastic Quantum-Field Process of Electron-Proton Interaction	107
Rylov Yu. A. Dynamical Methods of Investigations in Application to the Schrödinger Particle	122
Saha B. S., Rikhvitsky V. V. Bianchi-I Cosmological Model with Viscous Fluid and Nonlinear Spinor Field: a Qualitative Analysis	130
Kassandrov V. V. Algebraic Twistor Dynamics of Identical Singularities in a Complex Extension of the Space-Time	135
Guseva N. V., Lobanov N. N., Padalko A. G. Research of Influence of Barothermal Treatment on the Structure of the Polycrystalline Heat Resisting Nickel Alloy	149
Sahakyan A. A., Soulayman S. Sh., Nikogosyan S., Yunusova S. A. Dielectric Properties of Natural Syrian and Armenian Zeolites	155
Karimov F. H. Tectonomagnetic Effects in the Tajikistan's Seismic Regions	162

Слово признательности Учителю

9 апреля 2007 года на 81 году жизни скончался известный учёный, организатор исследований по математическому моделированию и вычислительной математике в Объединённом Институте Ядерных Исследований, доктор физико-математических наук, заслуженный деятель науки Российской Федерации, лауреат российских и зарубежных премий, кавалер российских и зарубежных орденов и медалей, профессор Евгений Петрович Жидков.

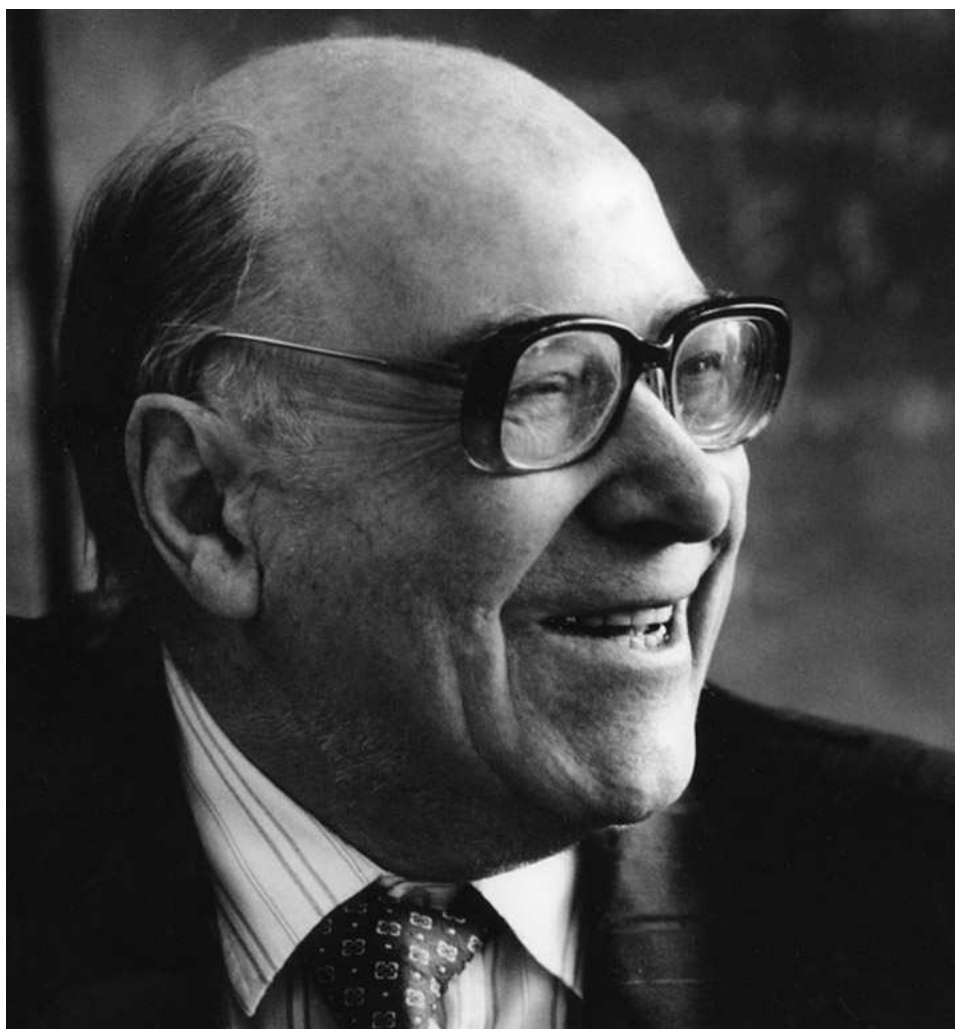


Рис. 1. Евгений Петрович Жидков

Родился Евгений Петрович в городе Самара. Высшее образование получил в Куйбышевском авиационном институте и затем в Куйбышевском государственном педагогическом институте. Существенное влияние на формирование научных интересов Е. П. Жидкова оказал его старший брат — Николай Петрович, будущий соавтор широко известного учебника по численным методам. В 1948 г. Е. П. Жидков поступил в аспирантуру мехмата МГУ к И. Г. Петровскому, где, работая над диссертацией, посещал семинары выдающихся учёных-математиков И. Г. Петровского, С. Л. Соболева, А. Н. Колмогорова, А. Н. Тихонова.

После успешной защиты диссертации в 1952 г. и двухлетней работы в одном из московских НИИ Е. П. Жидков начинал свою педагогическую деятельность в качестве доцента МИФИ, где в течение многих лет читал ряд курсов по различным разделам математики.

В 1959 г. Е. П. Жидков получает приглашение на работу в создаваемый в г. Дубна центр ядерных исследований — Объединённый институт ядерных исследований (ОИЯИ) — и вскоре возглавляет математический отдел Лаборатории вычислительной техники и автоматизации (ЛВТА), фактически став вместе с другими выдающимися математиками у истоков формирования вычислительной базы для постановки и расчёта параметров физического эксперимента и обработки его результатов для широкого круга исследований, проводимых в ОИЯИ. Во многом благодаря деятельности Е. П. Жидкова ЛВТА ОИЯИ превратилась в признанный как у нас в стране, так и во всем мире, центр развития вычислительных методов, математического моделирования, математического обеспечения ЭВМ. Созданная Е. П. Жидковым научная школа стала настоящей кузницей научных кадров как для нашей страны, так и для зарубежных научных центров и вузов. Е. П. Жидковым подготовлено около пятидесяти кандидатов и несколько докторов наук.

В специализированном учёном совете ЛВТА по защите докторских диссертаций, который Е. П. Жидков возглавлял, став преемником члена-корреспондента АН СССР М. Г. Мещерякова, защищали диссертации многие ныне известные российские и зарубежные учёные. Научным контактам и обмену опытом между различными научными коллективами, включая зарубежные, способствуют регулярные научные конференции, которые проводились при активном участии и руководстве оргкомитетом Е. П. Жидковым.

Основу научных интересов Е. П. Жидкова всегда составляли задачи, которые ставила теория и практика научных исследований, проводившихся в ОИЯИ. Одной из наиболее актуальных для применения на практике была задача расчёта поля, создаваемого магнитной системой ускорителя. К этой проблеме Е. П. Жидков привлекал своих учеников — сотрудников математического отдела ЛВТА. В результате многолетней работы коллектива, возглавляемого Е. П. Жидковым, была создана методология решения подобных задач, в частности опирающаяся на методы граничных интегральных уравнений, декомпозиции, методы нелинейного анализа и др., позволяющая в настоящее время провести расчёт поля магнитов практически любой сложности. Также выполнен комплекс теоретических и вычислительных работ по разработке и развитию непрерывного аналога метода Ньютона (докторская диссертация Е. П. Жидкова). Этот метод был применён к решению ряда практических нелинейных задач, сводящихся к задачам поиска экстремума. В настоящее время его сотрудниками интенсивно разрабатывается теория численного функционального интегрирования, которая начиналась под его руководством. В ряде последних работ был обобщён метод Рундсона экстраполяции решений дифференциальных уравнений по различным физическим параметрам. Всего по проблемам численного анализа и математическому моделированию прикладных задач Е. П. Жидковым опубликовано более 400 статей в отечественных и зарубежных изданиях. Большую работу Е. П. Жидков проводил как член редколлегии «Журнала вычислительной математики и математической физики» и журнала «Математическое моделирование».

Работая в ЛВТА ОИЯИ, Е. П. Жидков не оставлял и педагогическую деятельность. С 1960 по 1999 г. он — профессор МИФИ, с 1962 по 2001 г. — профессор физического факультета МГУ, в течение многих лет читал курс вычислительной математики для студентов отделения ядерной физики. С 1975 по 2001 г. Е. П. Жидков — член специализированного совета по защите докторских диссертаций физического факультета МГУ. Много сделано им на посту председателя Совета физико-математической школы при ОИЯИ для подготовки талантливой молодёжи и её ориентации на решение фундаментальных и практически значимых проблем. В течение многих лет у Е. П. Жидкова и его коллектива сложились научные контакты в Российском университете дружбы народов, ряд сотрудников которого прошёл научную школу Е. П. Жидкова и защитил диссертации под его руководством. Е. П. Жидков был профессором РУДН и научным руководителем

Научно-исследовательской лаборатории вычислительной физики и математического моделирования.

Заслуги Е. П. Жидкова перед отечественной наукой и образованием отмечены Орденом Трудового Красного Знамени, медалями СССР, а также зарубежными наградами — Польским орденом Заслуги, медалью АН Монголии, медалью Братиславского Университета. Е. П. Жидков имеет звание Заслуженного деятеля науки РФ и почётного работника высшего образования РФ.

Евгений Петрович был прекрасным семьянином. Он нежно относился к своей жене — Веронике Петровне, любил своих детей — Ирину и Петю, и всю душу вкладывал в своего любимого внука — Андрея (сына Ирины).

Ниже приведены воспоминания друзей, коллег, сотрудников и учеников Евгения Петровича Жидкова, отражающие различные периоды его плодотворной и многосторонней научно-педагогической деятельности. Также публикуется совместная научная статья Е. П. Жидкова и его ученика Е. Е. Перепёлкина, оставшаяся незавершённой при жизни Евгения Петровича.

Научная и преподавательская деятельность Е. П. Жидкова в МИФИ

А. В. Крянев

После окончания аспирантуры МГУ под руководством ректора МГУ академика И. Г. Петровского и успешной защиты в 1952 году кандидатской диссертации на тему «Дифференциальные уравнения параболического типа с малым параметром», Евгений Петрович Жидков с 1954 по 1960 год работал на кафедре высшей математики МИФИ, сначала в должности старшего преподавателя, а затем доцента. В 1959 году ему было присвоено учёное звание доцента по кафедре высшей математики. Параллельно он работал старшим научным сотрудником и руководителем научной группы в специальном конструкторском бюро СКБ-245 под руководством В. В. Александрова.

За время работы на кафедре высшей математики МИФИ Е. П. Жидков читал лекции и проводил семинарские занятия по курсам: математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, уравнения математической физики. Его лекции и семинарские занятия отличались высоким педагогическим мастерством, пользовались большой популярностью среди студентов, а его педагогическая деятельность за период работы на кафедре высшей математики МИФИ неоднократно отмечалась в приказах руководства МИФИ в виде благодарностей и вручением почётных грамот.

В 1993 году Е. П. Жидков возобновил педагогическую деятельность в МИФИ в качестве профессора по совместительству выпускающей кафедры прикладной математики. В течение ряда лет по 1998 год он читал несколько уникальных курсов по прикладной математике — континуальное интегрирование, итерационные методы решения нелинейных задач математической физики.

Кроме чтения курсов за время работы на кафедре Прикладной математики МИФИ, Е. П. Жидков руководил учебно-исследовательскими и дипломными работами студентов, а после окончания МИФИ многие из его студентов поступали в аспирантуру МИФИ и ОИЯИ под его руководством и в дальнейшем успешно защищали диссертационные работы по многим направлениям математического моделирования в различных прикладных областях.

Светлая память о Евгении Петровиче

И. В. Амирханов, Н. Д. Дикусар, Н. Р. Саркар

Евгений Петрович в течение 50 лет руководил семинаром по вычислительной и прикладной математике в ОИЯИ, вначале ВЦ, затем ЛВТА и ЛИТ, где активно поддерживал высокий уровень научных исследований. Он отличался высоким уровнем требовательности к математической строгости и обоснованности результатов, доведённых до числа и практической значимости этих результатов. Большинство физических процессов моделируется нелинейными уравнениями, для которых существование решения не всегда очевидно. Поэтому одним из любимых вопросов Евгения Петровича на семинарах был — «А вы доказали существование решения исследуемой Вами задачи? Если нет, то зайдите ко мне, обсудим эту проблему...».

Евгений Петрович своевременно и остро реагировал на новые направления исследований. В конце 50-х годов большое внимание со стороны физиков и математиков (Я. П. Терлецкий, Л. Г. Заставенко, R. J. Finkelstein, G. N. Ryder и другие) уделялось нелинейным уравнениям, имеющим так называемые частицеподобные решения. В работе [1] им было математически строго доказано существование частицеподобного решения краевой задачи для нелинейного уравнения, которое встречается в полевой теории элементарных частиц, а в работе [2] дан обзор литературы, посвящённый вопросам существования решений нелинейных краевых задач.

Евгений Петрович всегда активно сотрудничал с учёными других лабораторий ОИЯИ и других институтов. Совместно с физиками ЛВЭ им выполнен ряд исследований, связанных с изучением влияния различных нелинейных резонансов на устойчивость движения частиц в кольцевых ускорителях, которые проходят огромные расстояния за большое число циклов. В этом случае исследование устойчивости движения частиц численными методами (решение задачи Коши) неэффективно. Поэтому исследования проводились методом Крылова–Боголюбова с использованием системы REDUCE. Некоторые результаты исследований в этом направлении изложены в работе [3]. Совместно с сотрудниками НИИЯФ МГУ были проведены исследования динамики заряженных частиц в неоднородном магнитном (электрическом) поле, совершающих финитное движение. В результате были найдены условия возникновения нерегулярного движения (хаоса). Путём численного моделирования были обнаружены особенности в угловом и энергетическом спектрах частиц в радиационных поясах Земли и предсказаны новые явления. Некоторые результаты опубликованы в работах [4, 5].

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц, которой большое внимание уделял Евгений Петрович, была задача построения модели описания спектра кваркониев (задача двух тел). В частности, потенциальная модель кваркония приводит к решению спектральной задачи для квазипотенциального уравнения (дифференциальное уравнение бесконечного порядка). Одной из важных особенностей таких уравнений является наличие малого параметра при старших производных, т.е. эти дифференциальные уравнения являются сингулярно возмущёнными. Были разработаны и успешно применены методы решения для такого рода краевых задач А.Н. Тихоновым, А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузовым, М.И. Вишиком, Л.А. Люстерником, С.А. Ломовым и многими другими. Ряд интересных результатов в этой области, опубликованных в работах [6–8] были получены Е. П. Жидковым и его учениками.

В обычной жизни Евгений Петрович запомнился всем как доброжелательный и общительный человек. Он высоко ценил хорошую шутку, и сам мог её рассказать. Он был блестящим педагогом. Всем хорошо известен его преподавательский талант. Его превосходные лекции по математике с большой охотой посещали студенты МГУ, РУДН, УНЦ и университета «Дубна».

Евгений Петрович очень любил шахматы. Большинство шахматных турниров в Дубне не проходили без его участия, где он всегда занимал призовые места (чаще всего первое место).

У него была традиция: во время обеденного перерыва приглашать всех в свой кабинет на «чаепитие», где обсуждались не только научные проблемы. Евгений Петрович был большим любителем водных путешествий и любил сухое красное вино, которое рекомендовал всем для поддержания тонуса. Светлая память о Евгении Петровиче надолго останется в наших сердцах.

Литература

1. Жидков Е. П., Шириков В. П. // Препринт ОИЯИ.— P1319. — Дубна, 1963. — ЖВМ и МФ.— 4, 1964.— С. 804. ЖВМ и МФ.— 4, 1964.— С. 804.
2. Амирханов И. В., Жидков Е. П. Некоторые вопросы существования и качественного поведения частицеподобных решений // Совместный научный сборник ОИЯИ. — Вып. 3. — 1979-82.
3. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Жидкова И. Е. Усредненные уравнения бетатронных колебаний в окрестности резонансов в циклических ускорителях // Математическое моделирование. — Т. 2, № 3. — 1990.
4. Моделирование высокоэнергичных заряженных частиц в поле магнитного диполя при наложении однородного магнитного поля / И. В. Амирханов, Ю. Г. Дзюба, Е. П. Жидков и др // Математическое моделирование. — Т. 7, № 6. — 1995.
5. О некоторых особенностях движения высокоэнергичных протонов радиационных поясов Земли / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, А. Н. Ильина, В. Д. Ильин // Космические исследования. — Т. XXVI, вып. 2. — 1988.
6. Васильев С. А. Исследование краевых задач на собственные функции и собственные значения для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера // Автореферат кандидатской диссертации. — М., 2003.
7. Исследование краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Н. Р. Саркар, И. Сархадов // Сообщение ОИЯИ P11-2004-147. — Дубна, 2004.
8. Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Д. З. Музафаров и др // Препринт ОИЯИ.— P11-2006-107. — Дубна, 2006. — 18 с.

Функциональные интегралы

Ю. Ю. Лобанов

Одним из направлений научной деятельности Е. П. Жидкова являлось развитие теории и создание новых численных методов для функциональных (континуальных) интегралов. Под его руководством и при непосредственном участии для интегралов Лебега в полных сепарабельных метрических пространствах был получен ряд новых приближённых формул. В частности, для интегралов по мерам типа гауссовых были построены аппроксимации, обладающие свойствами точности на классе функциональных многочленов заданной степени. Для вычисления винеровских интегралов получены приближённые формулы со специальным весовым функционалом. Для кратных функциональных интегралов построены формулы заданной суммарной степени точности на произведении пространств, а также другие приближённые формулы.

Исследовано применение разработанных численных методов в задачах квантовой механики, квантовой теории поля, ядерной физики, для нахождения топологического заряда, топологической восприимчивости, расчёта характеристик открытых квантовых систем для описания неравновесных процессов, сопровождающихся диссипацией энергии, в задачах исследования систем со многими степенями свободы.

Полученные результаты были опубликованы в ведущих журналах и в виде монографии, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, по данной тематике под руководством Е. П. Жидкова были защищены две кандидатские диссертации. Работа поддерживалась грантами РФФИ, в её рамках было установлено сотрудничество с Институтом математики Белорусской Академии Наук.

Литература

1. Егоров А. Д., Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Введение в теорию и приложения функционального интегрирования. — М.: Физматлит, 2006.
2. Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Метод приближенного континуального интегрирования и некоторые его приложения // Матем. моделирование. — Т. 11, № 5. — 1999. — С. 37–83.
3. Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Приближенное вычисление интегралов Винера в некоторых задачах ядерной физики // Вестник РУДН. Серия Физика. — Т. 12. — 2004. — С. 3–16.
4. Жидков Е. П., Лобанов Ю. Ю. Приближенное вычисление винеровских интегралов в задачах исследования открытых квантовых систем // Труды Института Математики НАНБ. — Т. 11. — 2002. — С. 68–78.
5. Computation of conditional Wiener integrals by the composite approximation formulas with weight / Y. Y. Lobanov, R. R. Shahbagian, O. V. Sidorova, E. P. Zhidkov // J. Comput. Appl. Math. — Vol. 29. — 1990. — Pp. 51–60.

О работе с Е. П. Жидковым

О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева

Определёнными этапами в научной деятельности Е. П. Жидкова и руководимых им коллективов в Объединённом институте ядерных исследований (ОИЯИ) являлись обзоры в журнале «Физика элементарных частиц и атомного ядра» и научные премии ОИЯИ. Так, в 1979 году цикл работ «Разработка численных методов решения нелинейных уравнений и их приложения в физике элементарных частиц и теории ядра» авторов: Е. П. Жидкова, И. В. Пузынина, Е. Х. Христова, Нгуен Монга, Б. Н. Хоромского, Р. М. Ямалеева был отмечен премией ОИЯИ.

В 1989 году цикл работ по научно-технической прикладной тематике «Методы численного моделирования, комплексы программ и расчёты на ЭВМ магнитных систем электрофизических установок» авторов: Е. П. Жидкова, Э. А. Айряна, П. Г. Акишина, З. В. Борисовской, С. Б. Ворожцова, Б. Н. Хоромского, И. А. Шелаева, И. П. Юдина, О. И. Юлдашева также был отмечен премией ОИЯИ. Этот цикл включал в себя 44 публикации, посвящённые разработке вычислительных алгоритмов на основе объёмных интегральных уравнений, граничных интегральных уравнений (ГИУ), дифференциальных уравнений, комбинированных систем уравнений, содержащих дифференциальные и граничные интегральные уравнения, созданию комплексов программ и расчётам электрофизических установок. С помощью разработанных авторами оригинальных методик, алгоритмов и комплексов программ были проведены расчёты первых в ОИЯИ сверхпроводящих магнитов для синхротрона СПИН, ускорителя НУКЛОТРОН, магнитных систем дейтронно-циклотронного комплекса, линейного индукционного ускорителя (ОИЯИ), а также спектрометра NA-4 в Европейском Центре Ядерных Исследований (CERN) и ряда других магнитных систем. Впоследствии разработка эффективных методов решения нелинейных эллиптических задач, в том числе, во всем пространстве, а также их применение для расчётов магнитных систем конкретных физических установок продолжалась не только в работах, возглавляемых Е. П. Жидковым, но и в работах ряда его учеников.

В настоящее время, время интернета, можно более точно определить уровень, степень новаторства и оригинальности работ, выполненных под руководством

Е. П. Жидкова. Приведём некоторые примеры. Так, ряд работ, опубликованных Е. П. Жидковым с соавторами, был посвящён разработке эффективных алгоритмов для решения в общем случае нелинейных краевых задач с уравнением Лапласа и стационарными уравнениями Максвелла на основе ГИУ, а также их применению к расчётам магнитных систем, в частности, с учётом блочно-теплицевой структуры возникающей матрицы системы уравнений. Здесь можно указать, например, публикации [1–4] и некоторые другие. Вероятно, независимо от этих разработок, примерно в то же самое время ГИУ для векторного потенциала использовались в работах [5–7] и были положены в основу коммерческого пакета программ AMPERES (1991 г., Integrated Engineering Software Inc., Canada). Серия работ под руководством Е. П. Жидкова была посвящена разработке эффективных алгоритмов решения комбинированных систем уравнений, включающих нелинейные дифференциальные эллиптические уравнения внутри ограниченной области и ГИУ, а также их применениям к расчётам магнитных систем экспериментальной физики (например, публикации [8–10] и некоторые другие). В частности, в работе [8] было предложено рассматривать ГИУ как специальные граничные условия, наряду с классическими граничными условиями Дирихле, Неймана и Ньютона, а также было обосновано два метода включения ГИУ для векторного потенциала в конечно-разностную сеточную схему решения дифференциальной нелинейной задачи магнитостатики относительно векторного потенциала. Видимо, независимо от проводимых в ОИЯИ работ, один из указанных в работе [8] методов был реализован в виде специальной программы для включения ГИУ относительно векторного потенциала в схему метода конечных элементов при решении дифференциальной нелинейной задачи магнитостатики для векторного потенциала [11]. Впоследствии эта программа использовалась для расчётов магнитного поля главного дипольного магнита Большого Адронного Коллайдера (LHC) в CERN [12]. И в настоящее время интерес к решению комбинированных систем уравнений не ослабевает [13], но, скорее всего, недостаточно известны результаты работы [10], в которой предложен наиболее универсальный и экономичный подход к решению таких систем.

Особое внимание Е. П. Жидков уделял разработке специальных алгоритмов для решения трёхмерных нелинейных задач магнитостатики, требующих значительных вычислительных затрат на параллельных и параллельно-векторных ЭВМ. Так, с появлением в ОИЯИ в 1987 году матричного процессора ЕС-2706, был разработан специальный комплекс программ для решения таких задач с использованием этого процессора [14]. В 1992 году в ОИЯИ появились супермикрокомпьютеры семейства CONVEX. При решении эллиптических краевых задач на подобных специальных ЭВМ часто используются цветные упорядочения неизвестных [15, 16]. А в работе [17] было предложено цветное упорядочение неизвестных при дискретизации трёхмерных эллиптических краевых задач с помощью 8-ми узловых лагранжевых гексаэдральных элементов и последующем решении линейной системы алгебраических уравнений. Такой подход позволил в 2–3 раза сократить время решения нелинейной системы алгебраических уравнений, возникающей при расчёте спектрометрического магнита СП-40, по сравнению с вариантом программы, использующей стандартную векторизацию, предусмотренную компьютером.

В процессе работы с Е. П. Жидковым иногда возникали ситуации, когда для аккуратного решения конкретной задачи, например, расчёта сложной нестандартной магнитной системы, требовалась разработка новых методов. Так, в процессе расчёта магнитной системы для проекта эксперимента с поляризованной мишенью на ускорителе ИТЭФ (г. Москва) [18] был разработан итерационный процесс доопределения поверхности ферромагнетика с целью получения высокооднородного магнитного поля в заданной области [19], а также новый проекционный метод вычисления функции на липшицевой границе трёхмерного тела по заданному градиенту [20]. При разработке нестандартной компьютерной модели для анализирующего дипольного магнита спектрометра PANDA [21] необходимо было оценивать точность получаемых приближенных решений, поэтому, благодаря Е. П. Жидкову, появилась работа [22].

Часть работ Е. П. Жидкова внесена в электронную библиотеку публикаций ОИЯИ — <http://www1.jinr.ru> и, как указано в базе данных — <http://slac.stanford.edu/spires/hepname/>, в электронных библиотеках институтов КЕК (Япония) и CERN (г. Женева).

Литература

1. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н., Юлдашев О. И. Решение двумерного уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений // ОИЯИ.— P11-81-398. — Дубна, 1981.
2. Жидков Е. П., Хоромский Б. Н., Юлдашев О. И. Решение краевых задач для уравнения Лапласа методом граничных интегральных уравнений // ОИЯИ.— P11-82-659. — Дубна, 1982.
3. Расчет стационарного магнитного поля многосекционной системы линейного индукционного ускорителя / Е. П. Жидков, И. М. Матора, В. А. Саввин и др // ЖТФ. — Т. 57, вып. 3. — 1987. — С. 483–492.
4. О формировании однородного магнитного поля на инжекторном участке ЛИУ-30 / Е. П. Жидков, В. В. Журавлев, В. С. Кладницкий и др // ОИЯИ.— P9-88-508. — Дубна, 1988. — http://ccdb4fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?8811447.
5. Lean M. H. Electromagnetic Field Solution with the Boundary Element Method: Ph. d. dissertation / University of Manitoba. — 1981.
6. Klimpke B. W. A Two-dimensional Multi-media Boundary Element Method: Sc. dissertation / University of Manitoba. — M., 1983.
7. Yildir Y. B. A Boundary Element Method for the Solution of Laplace's Equation in Three-Dimensional space: Ph. d. dissertation / University of Manitoba. — 1985.
8. Алгоритм учета условий на бесконечности в двумерных задачах магнитостатики / Э. А. Айрян, Е. П. Жидков, Б. Н. Хоромский, О. И. Юлдашев // ОИЯИ.— P11-87-49. — Дубна, 1987.
9. Численное моделирование пространственного распределения краевого поля синхротронного дипольного магнита / Е. П. Жидков, Г. Е. Мазуркевич, Б. Н. Хоромский, И. П. Юдин // ОИЯИ.— P11-88-15. — Дубна, 1988.
10. Жидков Е. П., Федоров А. В., Юлдашев О. И. Об одном подходе к решению задачи магнитостатики в комбинированной постановке // Математическое моделирование. — Т. 2, № 9. — 1990. — С. 10–20.
11. Kurz S., Fetzer J., Rucker W. M. Coupled BEM-FEM Methods for 3D field calculations with iron saturation // Proc. of the First Inter. ROXIE users meeting and workshop. — CERN, 1999. — open-2000-151, 09/Aug/2000. Open-2000-151, 09/Aug/2000.
12. Kurz S., Russenschuck S., Siegel N. Accurate Calculation of Fringe Fields in the LHC Main Dipole // LHC Project Report 357. — CERN, 1999.
13. Klimpke B. W. A Hybrid Magnetic Field Solver Using a Combined Finite Element/Boundary Element Field Solver // U. K. Magnetic Society Conf. "Advanced Electromagnetic Modelling & CAD for Industrial Application". — Stafford, U. K.: Alston Research and Technology Center, 2003.
14. Акишин П. Г., Жидков Е. П., Кравцов В. Д. Параллельный алгоритм для решения трехмерных интегральных уравнений магнитостатики // Математическое моделирование. — Т. 1, № 7. — 1989. — С. 100–107.
15. Ортега Д. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. — М.: Мир, 1991.
16. Simulation of Contaminant Transport in a Heterogeneous Porous Medium / B. N. Chetverushkin, N. G. Churbanova, A. A. Soukhinov, M. A. Trapeznikova // Международная конференция «Тихонов и современная математика», Тезисы докладов секции Математическое моделирование. — М.: МГУ, 2006. — С. 48.
17. Жидков Е. П., Юлдашева М. Б., Юлдашев О. И. Векторные алгоритмы для решения трехмерных нелинейных задач магнитостатики // Математическое моделирование. — Т. 6, № 9. — 1994. — С. 99–116.

18. Алексеев И. Г., Рыльцов В. В. Исследование поляризованных параметров в бинарных реакциях рождения странных частиц $\pi\rho \rightarrow K\Lambda(\Sigma)$ на ускорителе ИТЭФ (Предложение эксперимента) // ГНЦ РФ ИТЭФ. — 1997. — С. 41–97.
19. Численное решение задачи формирования однородного магнитного поля за счет изменения занимаемого ферромагнетиком объема для некоторых магнитных систем экспериментальной физики / Е. П. Жидков, В. В. Рыльцов, О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева // Вестник РУДН. Серия Физика. — № 12. — 2004. — С. 17–25.
20. Жидков Е. П., Юлдашев О. И., Юлдашева М. Б. Адаптивный алгоритм вычисления функции на липшицевой границе трехмерного тела по заданному градиенту и его применение в магнитостатике // ЖВМ и МФ. — Т. 42, № 12. — 2002. — С. 1854–1869.
21. Ritman J., Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B. An Algorithm for Construction of Dipole Magnets Computer Models with Quality Control and its Application for the PANDA Forward Spectrometer // JINR. — E11-2005-49. — Dubna, 2005. — 19 p.
22. Жидков Е. П., Юлдашев О. И., Юлдашева М. Б. О контроле точности вычислений при моделировании пространственных магнитных полей // Вестник РУДН. Серия Прикладная и компьютерная математика. — Т. 4, № 1. — 2005. — С. 93–101.

Памяти моего учителя

С. А. Васильев

Евгений Петрович в течение длительного времени читал курс лекций по численным методам на ядерном отделении физического факультета Московского Государственного Университета им. М. В. Ломоносова. Моё знакомство с Евгением Петровичем состоялось осенью 1992 году, когда я, будучи студентом четвёртого курса кафедры физики элементарных частиц, с огромным интересом посещал эти лекции. Евгений Петрович был замечательный педагог. Он мог сложный для понимания материал изложить в простой и доступной форме. Но за этой простотой стояли годы труда — отточенные формулировки, методика изложения доказательств, примеры — все свидетельствовало о том, что Евгений Петрович старался не пересказывать содержание учебников по численным методам, а показать студентам всю красоту и изящество предмета. При этом, надо заметить, Евгений Петрович во время лекций всегда находил время для шутки или поучительной истории из жизни учёных.

С юности мои основные научные симпатии были на стороне математики и физики элементарных частиц. Поэтому под влиянием Евгения Петровича я выбрал путь своей дальнейшей специализации на кафедре физики элементарных частиц в филиале физического факультета МГУ в городе Дубна, где я обучался с начала 1993 года и мог одновременно заниматься любимыми направлениями под руководством Евгения Петровича.

В. Г. Кадышевским, Р. М. Мир-Касимовым, М. Д. Матеевым и др. в рамках квазипотенциального подхода, развитого А. А. Логуновым и А. Н. Тавхелидзе, был получен релятивистский аналог уравнения Шрёдингера, представляющий собой линейное дифференциальное уравнение бесконечного порядка, с помощью которого имеется возможность изучения релятивистских эффектов в задачах, относящихся к описанию связанных состояний двух релятивистских частиц. В силу того, что в этом уравнении содержатся малые параметры при старших производных, это позволяет отнести его к классу сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений бесконечного порядка. В связи с этим возникла необходимость постановки и исследования краевых задач для поиска собственных функций и собственных значений для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера.

Евгений Петрович обратил внимание, что в большинстве работ других авторов, посвящённых этой проблеме, исследования проводилось лишь для ограниченного числа потенциалов. Поэтому весьма актуальным представлялась разработка методов решения краевых задач на отрезке и на полупрямой для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера с произвольным потенциалом аналитического вида; поиск собственных функций и собственных значений с применением асимптотических методов, а также построение разностных схем для получения численных решений этих задач и их реализации в виде удобного в обращении пакета программ.

На основе методов теории сингулярных возмущений дифференциальных уравнений были построены асимптотические приближения решений краевых задач с потенциалом аналитического вида на отрезке и на полупрямой, а также приведена оценка погрешности этих асимптотических приближений [1–3].

Также был предложен метод усечения для релятивистского аналога уравнения Шрёдингера и сведение его к сингулярно возмущённому линейному дифференциальному уравнению высокого, но конечного порядка $2m$. Были построены оценки поведения собственных функций и собственных значений при возрастании порядка $2m$ усечённого уравнения [4].

Параллельно с исследованиями в области асимптотических методов были разработаны разностные схемы для поиска численных решений краевых задач для релятивистского аналога уравнения Шрёдингера на основе метода спущающихся сеток для достижения равномерной по малому параметру сходимости. Было показано, что эти разностные схемы для исследуемых краевых задач сходятся равномерно относительно малого параметра [5].

Было написано программное обеспечение, которое позволило при задании конкретного вида потенциала численно находить собственные функции и собственные значения исследуемых краевых задач.

На основе всего этого были получены асимптотические и численные решения краевых задач для релятивистского аналога уравнения Шрёдингера с осцилляторным, кулоновским, центробежным и др. квантовомеханическими потенциалами. Была показана сходимость решений краевых задач к соответствующим решениям вырожденных задач для уравнения Шрёдингера при устремлении малого параметра к нулю. Также численно был найден спектр и волновые функции связанных состояний кварка и антикварка в рамках модели кваркониев на основе использования корнеллского потенциала квантовой хромодинамики [6, 7].

Под руководством Евгения Петровича Жидкова и Илькизара Валиевича Амирханова в ноябре 2003 года я защитил кандидатскую диссертацию по теме: «Исследование краевых задач на собственные функции и собственные значения для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера» [5].

Я очень благодарен Евгению Петровичу за то безграничное терпение, которое он проявил по отношению ко мне во время нашей работы над диссертацией.

Во время наших встреч он всегда интересовался моими бытовыми проблемами, спрашивал не только о моём состоянии здоровья, но и моих близких. В сложное для экономики России время он постоянно добивался выделения грантов РФФИ для проведения исследований, так как отлично понимал, что на студенческую или аспирантскую стипендию жить очень тяжело. Он всегда шутил в такие моменты, говоря: «Когда человек голоден, то у него, в силу инстинкта самосохранения, мозг начинает работать интенсивнее, но вот только целью его работы будет отнюдь не решение научных проблем».

Литература

1. Behaviour of Solutions of Singular Perturbed Infinite Degree Differential Equation / I. V. Amirkhanov, S. A. Vasilyev, E. P. Zhidkov, I. E. Zhidkova // Book of abstracts "Computational Modelling and Computing in Physics". — Dubna, 1996. — Investigation of Behaviour of Solutions of Singular Perturbed Infinite Degree Differential Equation $\varepsilon \rightarrow 0$ // Book of abstracts "Computational Modelling and Computing in Physics". — Dubna, 1996. Investigation of Behaviour of Solutions of Singular

- Perturbed Infinite Degree Differential Equation $\varepsilon \rightarrow 0$ // Book of abstracts "Computational Modelling and Computing in Physics". — Dubna, 1996.
2. Исследование связанных состояний элементарных частиц на основе релятивистского аналога уравнения Шрёдингера / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Сб. тезисов докладов «XXXV Всероссийской научной конференции по проблемам физики, химии, математики, информатики и методики преподавания». — М., 1999.
 3. Асимптотика решений краевой задачи на собственные функции и собственные значения сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера для произвольного потенциала при неограниченном возрастании порядка уравнения / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Сб. тезисов докладов «XXXVII Всероссийской научной конференции по проблемам физики, химии, математики, информатики и методики преподавания». — М., 2001.
 4. Построение асимптотического приближения краевой задачи для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера при произвольном потенциале / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Сб. тезисов докладов «XXXVIII Всероссийской научной конференции по проблемам физики, химии, математики, информатики и методики преподавания». — М., 2002.
 5. Васильев С. А. Исследование краевых задач на собственные функции и собственные значения для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера: Автореферат кандидатской диссертации. — М., 2003.
 6. Асимптотическое приближение решений и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Диф. ур. — Т. 37, № 1. — 2001. — С. 83–90. — (Препринт ОИЯИ, P11-2000-13, Дубна, 2000).
 7. Построение асимптотического приближения собственных функций и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущённого релятивистского аналога уравнения Шрёдингера при произвольном потенциале / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Математическое моделирование. — Т. 15, № 9. — 2003. — С. 3–16.

Научно-педагогическая деятельность Е. П. Жидкова в РУДН

Л. А. Севастьянов, В. Б. Губин, Е. Б. Ланеев, В. А. Сорокин,
А. В. Зорин, Н. П. Третьяков, В. Н. Шаронов

Евгений Петрович Жидков долгие годы работал в Российском университете дружбы народов. Он воспитал большое число магистров, кандидатов и докторов наук. Е. П. Жидков с середины 80-х годов прошлого века оказывал существенное научно-педагогическое влияние на формирование прикладной математики на физико-математическом факультете РУДН. Евгений Петрович совместно с доцентом кафедры теоретической физики, выпускником РУДН В. В. Курышкиным провёл большую подготовительную работу по внедрению на факультете методов вычислительной физики и математического моделирования для решения сложных прикладных задач.

Научно-исследовательская лаборатория вычислительной физики и математического моделирования была создана приказом ректора Российского университета дружбы народов в 1987 году. Заведующим лабораторией был назначен старший научный сотрудник Л. А. Севастьянов. Научным руководителем НИЛВФиММ был назначен лауреат Сталинской премии СССР, заслуженный деятель науки СССР, профессор Я. П. Терлецкий. После смерти Я. П. Терлецкого научным руководителем лаборатории был назначен кавалер ордена Трудового Красного Знамени, заслуженный деятель науки РФ, профессор Е. П. Жидков.

Коллектив Лаборатории организовал две международные конференции по вычислительной физике и математическому моделированию в 1988 г. и в 1989 г. в г. Волгограде, председателем которых был академик А. А. Самарский и впоследствии активно участвовал в их проведении в Дубне, Москве, за рубежом. Ежегодно с 1987 г. Лаборатория поддерживает работу секции математического моделирования и вычислительной физики в Международных конференциях по математике, информатике, физике и химии под председательством ректора Российского университета дружбы народов.

Коллектив Лаборатории все время её существования ведёт активную научно-исследовательскую работу, сотрудниками лаборатории опубликовано более 100 научных работ. По результатам научной деятельности сотрудниками лаборатории: А. В. Микуличем, Е. Б. Ланевым, В. А. Сорокиным, В. Н. Шароновым, В. К. Шияном, О. И. Артёмовым, Г. В. Беляковым, Х. М. Резануром, А. А. Алексеевым, Ю. В. Пискаревым, С. А. Васильевым, М. В. Фоменко, М. Н. Муратовым, Е. А. Тевелевой, Е. В. Бобриковой были защищены диссертации кандидата физико-математических наук.

Л. А. Севастьяновым, В. Б. Губиным, Е. Б. Ланевым были защищены диссертации на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности 05.13.18 — математическое моделирование, численные методы и комплексы программ в Диссертационном совете ЛИТ ОИЯИ, председателем которого был Е. П. Жидков.

С 1999 г. по 2004 г. Е. П. Жидков работал профессором Учебно-научного института физико-химических и информационных технологий, созданного при РУДН для внедрения в образовательный процесс технологических и управленческих специализаций на базе естественно-научных направлений (УНИФХИТ). В это время он несколько раз прочёл курс численных методов для магистров УНИФХИТ. Вместе с собой он привёл в РУДН своих учеников, которые также проводили аудиторные занятия и также руководили выпускниками магистратуры. Все их ученики после успешно закончили магистратуру Университета, а многие из них поступили в аспирантуру.

С 2004 г. по 2006 г. Евгений Петрович работал профессором на кафедре систем телекоммуникаций РУДН, в это время он продолжал осуществлять научное руководство аспирантами. Профессор Е. П. Жидков оказал большое влияние на формирование и развитие в РУДН научно-педагогической школы по математическому моделированию, что частично подтверждается приведённым ниже списком научных публикаций сотрудников РУДН совместно с Е. П. Жидковым. Самим Е. П. Жидковым опубликовано более 400 научных работ.

Литература

1. Жидков Е. П., Севастьянов Л. А. Свойства интегральных операторов математической модели экранируемого напыления // Математическое моделирование. — Т. 10, № 9. — 1998. — С. 35–40.
2. Жидков Е. П., Севастьянов Л. А. Макропараметры эффективного распределения и функции источника в математической модели экранируемого напыления // Математическое моделирование. — Т. 10, № 10. — 1998. — С. 39–46.
3. Sevastianov L. A., Zhidkov E. P. Analysis of Problems in the Mathematical Model for Shadowed Sputtering // Thes. of the I-st International Conference «Modern trends in Computational Physics». — Dubna: JINR Publ, 1998. — P. 152.
4. Calculation of Parameters of the Intraocular Correcting Lens / P. A. Gonchar, V. N. Goubin, L. A. Sevastianov, E. P. Zhidkov // Thes. of the I-st International Conference «Modern trends in Computational physics». — Dubna: JINR Publ., 1998. — P. 73.
5. Sevastianov L. A., Zhidkov E. P., Zorin A. V. Source Function Macroparameters Reconstruction by Collocation Method // In book of abstracts of 6th International Workshop «Beam dynamics & Optimization». — Saratov: Saratov State University Publ., 1999. — P. 33.

6. Жидков Е. П., Зорин А. В., Севастьянов Л. А. Устойчивое восстановление эффективной функции экранируемого напыления регуляризованным методом наименьших квадратов // В трудах ВДО-99. — Саратов: Изд. СГУ, 2000. — С. 61–63.
7. Жидков Е. П., Зорин А. В. Описание спектра водородоподобного атома в квантовой механике с последовательно вероятностной интерпретацией. — P11-2000-316. — Дубна: Изд-во ОИЯИ, 2000. — 18 с.
8. Жидков Е. П., Севастьянов Л. А. Регуляризованные методы решения одномерных обратных задач рассеяния с неинтегрируемым потенциалом по неполному набору данных рассеяния и дополнительных априорных данных о решении (потенциале) // В сб. тезисов докладов VIII Белорусской Математической Конференции. — Минск: Изд. Инст. Матем. НАН Беларуси, 2000. — С. 60.
9. Sevastianov L. A., Zhidkov E. P. Analysis of Problems in Mathematical Model for Shadowed Sputtering // Comp. Phys. Comm. — Т. 130, № 1–2. — 2000. — С. 47–53.
10. Груба В. Д., Жидков Е. П., Севастьянов Л. А. Уравнение Боголюбова и проблемы физики конденсированного состояния // Физика ЭЧАЯ. — Т. 31, вып. 7а. — 2000. — С. 162–168.
11. Матричное представление в квантовой механике неотрицательной КФР на примере водородоподобного атома. — P11-2002-253 / Е. П. Жидков, А. В. Зорин, К. П. Ловецкий, Н. П. Третьяков. — Дубна: Изд-во ОИЯИ, 2002. — 28 с.
12. Zhidkov E. P., Zorin A. V. Quantum Theory with Statistical Interpretation: The Hydrogen-Like Atom Problem // Journ. Comp. Meth. Sci. Engin. — Vol. 2, No 1–2. — 2002. — Pp. 293–307.
13. Laneev E. B., Zhidkov E. P. Stable Method of Potential Field Continuation // Journal of Comput. Methods in Sci. and Engineering. — Vol. 2, No 1–2. — 2002. — Pp. 181–188.
14. Laneev E. B., Zhidkov E. P., Mouratov M. N. On Stable Solution for a Mixed Boundary-Value Problem for Laplace Equation with Inexact Data on an Approximately Defined Boundary // V Intern. Congress on Math. Modelling. Book of abstracts. — Vol. 1. — Dubna: JINR, 2002. — P. 183.
15. Laneev E. B., Bobrikova E. V., Zhidkov E. P. Stable Potential Field Continuation From Non-Planar Surface // Abstracts of International Conference CMAM-1. — Minsk, Belarus: 2003. — P. 14.

Память о большом учёном

Ю. П. Рыбаков

Евгений Петрович Жидков был удивительно светлым человеком, общение с которым всегда приносило только положительные эмоции. Мне довелось несколько раз выступать на научном семинаре Евгения Петровича в ЛИТ ОИЯИ (Дубна) с различными сообщениями, касавшимися некоторых физических задач, и, в частности, по проблеме устойчивости солитоноподобных решений нелинейных уравнений поля.

Евгений Петрович всегда тонко чувствовал суть проблемы и требовал от докладчика максимальной математической строгости при изложении материала. Будучи очень доброжелательным и отзывчивым человеком, Евгений Петрович находил нужные слова, чтобы ободрить автора, вселить в него уверенность. Все его замечания были чрезвычайно уместными и в конце концов способствовали существенному улучшению представляемой работы.

В моём случае я был вдвойне благодарен Евгению Петровичу, поскольку он любезно согласился выступить оппонентом по моей диссертации. В моей памяти навсегда останутся его мягкий голос и отеческие слова поддержки.

Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом

Е. П. Жидков, **Е. Е. Перепёлкин**

Работа посвящена изучению свойств решений нелинейной краевой задачи для «области с углом». Данная постановка берет своё начало от задачи магнитостатики в случае, когда граница области ферромагнетика не является гладкой функцией. Уравнение, входящее в постановку имеет вид:

$$\operatorname{div} [\mu (|\nabla u|) \nabla u] = 0. \quad (1)$$

Целью работы было изучение свойств гладкости решений в окрестности угловой точки. При помощи нелинейного преобразования Лежандра задача была сведена к рассмотрению линейной краевой задачи для уравнения:

$$w_{tt} + \frac{2 - \bar{a}(t)}{t} w_t + \frac{\bar{a}(t)}{t^2} w_{\varphi' \varphi'} = 0, \quad (2)$$

где $\bar{a}(t) = a(1/r')$, $a(r') = 1 + r' \frac{d}{dr'} \ln(\mu(r'))$.

Были найдены решения уравнения (1), обладающие свойством

$$|\nabla u(r, \varphi)| \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0.$$

Им соответствуют решения уравнения (2), удовлетворяющие условию:

$$|\nabla w(t, \varphi')| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0.$$

Частные решения уравнения (2) могут быть получены методом разделения переменных

$$w(t, \varphi') = \sum_{\lambda} T_{\lambda}(t) \Phi_{\lambda}(\varphi'),$$

где $T_{\lambda}(t)$ и $\Phi_{\lambda}(\varphi')$ удовлетворяют уравнениям:

$$T_{\lambda}'' + \frac{2 - \bar{a}(t)}{t} T_{\lambda}' - \frac{\lambda^2}{t^2} \bar{a}(t) T_{\lambda} = 0, \quad \Phi_{\lambda}'' + \lambda^2 \Phi_{\lambda} = 0 \quad (3)$$

соответственно. Далее справедливы следующие представления:

$$\begin{aligned} T_{\lambda}(t) &= C_{\lambda}^{(1)} T_{\lambda}^{(1)}(t) + C_{\lambda}^{(2)} T_{\lambda}^{(2)}(t), \\ \Phi_{\lambda}(\varphi) &= C_{\lambda}^{(3)} \sin \lambda \varphi + C_{\lambda}^{(4)} \cos \lambda \varphi, \\ T_{\lambda}^{(1)}(t) &= t^{\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k, \quad T_{\lambda}^{(2)}(t) = t^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k. \end{aligned}$$

Если $2|\lambda| = n$, $n \in \mathbb{N}$, то $T_{\lambda}^{(2)}(t)$ представимо в виде

$$T_{\lambda}^{(2)}(t) = A T_{\lambda}^{(1)}(t) \ln t + t^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} b_k t^k.$$

Некоторые частные решения исходного уравнения (1) могут быть получены в явном виде, а также исследованы их свойства. Так, например, в самом простейшем частном случае при $\lambda = 0$ (уравнения (3)), решение исходного уравнения (1) принимает вид

$$u(r, \varphi) = C\varphi. \quad (4)$$

Из (4) видно, что в угловой точке (начало координат) решение (4) не определено, а значение $|\nabla u| = \frac{C}{r}$ неограниченно растёт при приближении к началу координат.

Решения, соответствующие другим значениям λ , могут быть использованы при решении краевых задач в областях с углами вида:

$$y\Omega_1\Omega_2\Gamma_-\Gamma\Gamma_+\Gamma_- \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} [\mu (|\nabla u|) \nabla u (p)] = 0, \quad p \in \Omega, \\ u|_{\Gamma_1} = 0, \\ u|_{\Gamma_2} = \Psi, \end{array} \right. \tag{5}$$

где область Ω изображена на рис. 2. Была сделана оценка роста величины $|\nabla u|$

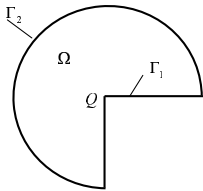


Рис. 2. Область Ω

для задачи (5). Выяснилось, что величина $|\nabla u| \sim r^{-1/3}$ при $r \rightarrow 0$. Как известно, аналогичная краевая задача для уравнения Лапласа (в общем случае $u|_{\Gamma_2} = \Psi$, где Ψ «достаточно» гладкая функция) имеет тот же порядок роста $|\nabla u| \sim r^{-1/3}$ при $r \rightarrow 0$. Такой результат следовало ожидать, т.к. при $|\nabla u| \rightarrow \infty$ уравнение (1) формально переходит в уравнение Лапласа.

Для задачи (5) была построена разностная схема, дающая уменьшение относительной погрешности на порядок.

МАТЕМАТИКА

УДК 531.36, 590.86

Построение уравнений динамики управляемой системы

Е. А. Горшков

*Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Предлагается метод построения математической модели динамики управляемой механической системы. Строится алгоритм модификации уравнений динамики, которая позволяет решить задачу стабилизации связей и обеспечить требуемую точность численного решения соответствующей системы дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих наложенные на систему связи, её кинематику и динамику. Предлагаемый метод может быть использован для исследования динамики систем различной физической природы.

Введение

Современные системы управления имеют достаточно сложную структуру, содержащую элементы различной физической природы. Исследование динамики таких систем в первую очередь требует построения общей математической модели, описывающей динамику всей системы. Кинематические и динамические аналогии позволяют использовать для моделирования кинематики и динамики управляемых систем методы классической механики [1]. Основываясь на известных принципах, уравнения динамики управляемых систем можно представить в форме уравнений Лагранжа [2, 3].

Динамика сосредоточенных систем описывается системой дифференциально-алгебраических уравнений, составленных непосредственно из уравнений динамики и уравнений связей, наложенных на обобщённые координаты и скорости [4]. Поскольку число уравнений связей, как правило, оказывается меньше числа переменных, определяющих состояние системы, то построение уравнений динамики сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей коэффициентов и последующему построению дифференциальных уравнений, решения которых обладали бы заданными свойствами. Неоднозначность решения этой задачи позволяет учитывать возможные дополнительные условия, определяющие свойства исследуемой системы.

1. Моделирование динамики системы

Уравнения динамики механической системы могут быть построены, если известны её кинетическая энергия $T = T^*(q^i, \dot{q}^j, t)$, потенциальная энергия $P = P^*(q^i, t)$, диссипативная функция $D = D^*(q^i, \dot{q}^j, t)$, обобщённые непотенциальные внешние силы $Q_s = Q_s(q^i, \dot{q}^j, t)$, и управляющие силы $U_s = U_s(q^i, \dot{q}^j, t)$, где $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $i, j, s = 1, \dots, n$.

Управляющие силы U_s , действующие на систему, призваны обеспечить выполнение уравнений связей

$$f^\mu(q^i, t) = 0, \quad \dot{f}^\mu \equiv f_i^\mu \dot{q}^i + f_t^\mu = 0, \quad \dot{f}^\rho(q^i, \dot{q}^j, t) = 0, \quad (1)$$

$$f_i^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}, \quad f_t^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial t}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad \rho = m + 1, \dots, r.$$

В (1) и в дальнейшем по одинаковым индексам предполагается суммирование.

Рассмотрим механическую систему, кинематическое состояние которой определяется координатами q^i , $q^{n+\mu}$ и скоростями $\dot{q}^j$, $\dot{q}^{n+\kappa}$, где $(\kappa = 1, \dots, r)$. В данном случае $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ — избыточные координаты, которые вводятся с целью обеспечения устойчивости связей. Определим динамические показатели системы: кинетическую энергию, потенциальную энергию и диссипативную функцию соответственно как функции переменных q^i , $\dot{q}^j$, $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$, t :

$$T = T(q^i, q^{n+\mu}, \dot{q}^j, \dot{q}^{n+\kappa}, t),$$

$$P = P(q^i, q^{n+\mu}, t),$$

$$D = D(q^i, q^{n+\mu}, \dot{q}^j, \dot{q}^{n+\kappa}, t).$$

Представим связи, наложенные на систему, уравнениями

$$q^{n+\mu} - f^\mu(q^i, t) = 0, \quad \dot{q}^{n+\kappa} - \dot{f}^\kappa(q^i, \dot{q}^j, t) = 0. \quad (2)$$

Предполагается, что функции T , P , D по крайней мере дважды дифференцируемы по всем переменным, и при $q^{n+\mu} = 0$, $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$ расширенная система совпадает с исходной заданной системой и выполняются уравнения (1).

Будем предполагать, что отклонения от уравнений связей (1), которые изменяются переменными $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ достаточно малы, то есть: существует положительное число $\varepsilon_0 \neq 0$, такое, что для любого положительного $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ выполняется $|q^{n+\mu}| \leq \varepsilon$, $|\dot{q}^{n+\kappa}| \leq \varepsilon$. Будем предполагать, что функции T , P , D можно представить разложением в ряд по степеням $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ и соответствующие ряды не содержат членов первой степени относительно $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$

$$T = T^*(q^i, \dot{q}^j, t) + \frac{1}{2} a_{\beta\gamma}(q^i, \dot{q}^j, t) \dot{q}^{n+\kappa} \dot{q}^{n+\gamma} + \dots, \quad (3)$$

$$P = P^*(q^i, t) + \frac{1}{2} b_{\beta\gamma}(q^i, t) q^{n+\mu} q^{n+\nu} + \dots, \quad (4)$$

$$D = D^*(q^i, \dot{q}^j, t) + \frac{1}{2} c_{\beta\gamma}(q^i, \dot{q}^j, t) \dot{q}^{n+\kappa} \dot{q}^{n+\gamma} + \dots, \quad (5)$$

$$\kappa, \gamma = 1, \dots, r; \quad \mu, \nu = 1, \dots, m.$$

Из (2) следует система линейных алгебраических уравнений относительно δq^i , $\delta q^{n+\kappa}$

$$f_i^\kappa \delta q^i = \delta q^{n+\kappa}, \quad (6)$$

где

$$f_i^\mu = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i}, \quad f_i^\rho = \frac{\partial \dot{f}^\rho}{\partial \dot{q}^i}.$$

Согласно принципу Даламбера–Лагранжа с учётом решения системы уравнений (6) и условиями идеальности связей (2) можно построить уравнения динамики расширенной системы. Они состоят из двух частей. Первая группа уравнений соответствует уравнениям динамики управляемой системы

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = - \frac{\partial P}{\partial q^i} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^i} + Q_i + f_i^\kappa \lambda_\kappa, \quad (7)$$

вторая группа представляет собой систему уравнений возмущений связей

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} - \frac{\partial T}{\partial q^{n+\mu}} = - \frac{\partial P}{\partial q^{n+\mu}} - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}}. \quad (8)$$

Последнее слагаемое правой части уравнения (7) $f_i^\kappa \lambda_\kappa$ представляет собой управляющие силы U_s .

2. Исследование устойчивости системы

Решение системы уравнений (7)–(8) сводится к определению множителей λ_κ из (7) и выражениями избыточных переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ из (2), (8) через обобщённые координаты q^i и скорости $\dot{q}^j$.

Для получения выражений для λ_κ представим уравнения (7)–(8) в виде, разрешённом относительно старших производных $\ddot{q}^i$, $\ddot{q}^{n+\kappa}$

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{d\dot{q}^i}{dt} = m^i(q^k, \dot{q}^s, t) + f^{i\kappa}(q^k, \dot{q}^s, t) \lambda_\kappa(q^k, \dot{q}^s, q^{n+\mu}, \dot{q}^{n+\kappa}, t), \quad (9)$$

$$\frac{dq^{n+\mu}}{dt} = \dot{q}^{n+\mu}, \quad \frac{d\dot{q}^{n+\kappa}}{dt} = k_\gamma^\kappa(q^k, \dot{q}^s, t) \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa(q^k, \dot{q}^s, t) q^{n+\gamma}. \quad (10)$$

Продифференцируем второе уравнение (2) по времени t

$$\frac{d\dot{q}^{n+\kappa}}{dt} - \frac{\partial f^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^i}{dt} - \frac{df^\kappa}{dt} = 0. \quad (11)$$

В последнем уравнении необходимо заменить $\frac{d\dot{q}^{n+\kappa}}{dt}$ и $\frac{d\dot{q}^i}{dt}$ правыми частями уравнений (9)–(10)

$$k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma} - \frac{\partial f^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} (m^i + f^{i\theta} \lambda_\theta) - \frac{\partial f^\kappa}{\partial t} = 0. \quad (12)$$

В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно множителей λ_κ

$$\alpha^{\kappa\theta} \lambda_\theta = \alpha^\kappa, \quad (13)$$

$$\alpha^{\kappa\theta} = \frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} f^{i\theta}, \quad \alpha^\kappa = k_\gamma^\kappa \dot{q}^{n+\gamma} + b_\gamma^\kappa q^{n+\gamma} - \frac{\partial f^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} m^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial t}.$$

Система (13) имеет решение

$$\lambda_\theta = \alpha_{\theta\kappa} \alpha^\kappa, \quad (14)$$

где $\alpha_{\theta\kappa}$ — матрица, обратная $\alpha^{\kappa\theta}$: $\alpha_{\theta\kappa} = \left(\frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} f^{i\theta} \right)^{-1}$, а α^κ определяется суммой слагаемых $\alpha^\kappa = \alpha^{\kappa(0)} + \alpha^{\kappa(1)} + \dots$, распределённых по степеням переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$: $\alpha^{\kappa(0)} = - \frac{\partial f^\kappa}{\partial q^i} \dot{q}^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial \dot{q}^i} m^i - \frac{\partial f^\kappa}{\partial t}$. При множителях λ_κ , определённых таким образом, уравнения связей (1) исходной системы оказываются справедливыми для решений $q^i = q^i(t)$ дифференциальных уравнений динамики управляемой системы при $q^{n+\mu} = 0$, $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \frac{d\dot{q}^i}{dt} = m^i + f^{i\kappa} \alpha_{\theta\kappa} \alpha^\kappa. \quad (15)$$

Отклонения решений системы (15) от уравнений связей (1) описываются уравнениями возмущений связей

$$\frac{dq^{n+\mu}}{dt} = \dot{q}^{n+\mu}, \quad \frac{d\dot{q}^{n+\kappa}}{dt} = k_{\gamma}^{\kappa} \dot{q}^{n+\gamma} + b_{\gamma}^{\kappa} q^{n+\gamma}. \quad (16)$$

Необходимым условием стабилизации связей (1) является асимптотическая устойчивость соответствующего интегрального многообразия системы (15). Пусть уравнения (16) являются линейными относительно переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$. В силу равенств (2) устойчивость интегрального многообразия в новых переменных (с учётом избыточных) можно рассматривать как устойчивость по части переменных [5] уравнений (15)–(16). Если в пространстве переменных q^i , $\dot{q}^j$ определить расстояние до интегрального многообразия (1) величиной

$$\|z\|, \quad z = (z^1, \dots, z^{m+r}), \quad z^{\mu} = q^{n+\mu}, \quad z^{m+\kappa} = \dot{q}^{n+\kappa},$$

то об устойчивости многообразия (1) можно судить по свойствам устойчивости тривиального решения $q^{n+\mu} = 0$, $\dot{q}^{n+\kappa} = 0$ системы (16).

Если в выражениях (3)–(5) коэффициенты $a_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$, $c_{\beta\gamma}$ — постоянные, то система (16) состоит из линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае судить об устойчивости её тривиального решения можно по корням характеристического уравнения $\det(\mu^2 \delta_{\kappa}^{\eta} - \mu b_{\kappa}^{\eta} - k_{\kappa}^{\eta}) = 0$. Если все корни имеют отрицательные действительные части, то интегральное многообразие устойчиво асимптотически.

Для исследования устойчивости тривиального решения в общем случае можно воспользоваться методом функций Ляпунова [6]. Если функция $V = V(q^s, \dot{q}^k, q^{n+\mu}, \dot{q}^{n+\kappa}, t)$ является положительно определённой по переменным $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$, а её производная, вычисленная в соответствии с уравнениями (15), (16),

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} m^j + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} f^{j\theta} \alpha_{\theta\kappa} \alpha^{\kappa} + \frac{\partial V}{\partial q^{n+\mu}} \dot{q}^{n+\mu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} k_{\gamma}^{\kappa} \dot{q}^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} b_{\gamma}^{\kappa} q^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

отрицательно определённая функция, и функции V , $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$ допускают бесконечно малый высший предел [6], то интегральное многообразие (1) системы (15) устойчиво асимптотически. Учитывая тождество $m^j + f^{j\theta} \alpha_{\theta\kappa} \alpha^{\kappa(0)} \equiv 0$, последнее равенство принимает вид

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial q^i} \dot{q}^i + \sum_s \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^j} f^{j\theta} \alpha_{\theta\kappa} \alpha^{\kappa(s)} + \frac{\partial V}{\partial q^{n+\mu}} \dot{q}^{n+\mu} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} k_{\gamma}^{\kappa} \dot{q}^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial \dot{q}^{n+\kappa}} b_{\gamma}^{\kappa} q^{n+\gamma} + \frac{\partial V}{\partial t},$$

$$s \geq 1.$$

В качестве функции Ляпунова можно также использовать положительно определённую квадратичную форму относительно переменных $q^{n+\mu}$, $\dot{q}^{n+\kappa}$

$$2V = s_{\mu\nu} q^{n+\mu} q^{\nu} + 2p_{\mu\kappa} q^{n+\mu} \dot{q}^{n+\kappa} + l_{\kappa\eta} \dot{q}^{n+\kappa} \dot{q}^{\eta}. \quad (17)$$

Коэффициенты $s_{\mu\nu}$, $p_{\mu\kappa}$, $l_{\kappa\eta}$ предполагаются непрерывными, дифференцируемыми, ограниченными функциями переменных q^i , $\dot{q}^j$, t .

Производная функции V (17) приводится к виду

$$\dot{V} = s'_{\mu\nu} q^{n+\mu} q^{\nu} + p'_{\mu\kappa} q^{n+\mu} \dot{q}^{n+\kappa} + l'_{\kappa\eta} \dot{q}^{n+\kappa} \dot{q}^{\eta},$$

где $s'_{\mu\nu}$, $p'_{\mu\kappa}$, $l'_{\kappa\eta}$ определяются через $a_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$, $c_{\beta\gamma}$, k_{γ}^{κ} , b_{γ}^{κ} уравнений (3), (4), (5), (16).

Тогда для исследования устойчивости тривиального решения можно использовать критерий Сильвестра, в соответствии с которым можно судить о знакоопределённости V и $\dot{V}$.

Заключение

Учёт возможных отклонений от уравнений связей управляемых систем на этапе составления уравнений позволяет решить задачу стабилизации связей. Для этого уравнения возмущений связей должны быть построены в соответствии с требованием асимптотической устойчивости по отношению к уравнениям связей.

Приведённые модели решения реализованы автором в системе символьных вычислений *Maple* и могут быть использованы для решения задач управления программным движением.

Литература

1. *Layton R. A. Principles of Analytical System Dynamics.* — N.Y.: Springer, 1998. — 158 p.
2. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифф. уравнения. — Т. 39, № 3. — 2003. — С. 343–353.
3. *Мухарлямов Р. Г.* О численном решении дифференциально-алгебраических уравнений // Вестник РУДН. Сер. Прикладн. матем. и информ. — № 1. — 1999. — С. 33–37.
4. *Горшков Е. А.* О построении уравнений движения систем с программными связями // Вестник РУДН. Сер. Прикладн. матем. и информ. — 2004.
5. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
6. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифф. уравнения. — Т. 5, № 4. — 1969. — С. 688–699.

UDC 531.36, 590.86

Construction of the Equations of Dynamics of Operated System

E. A. Gorshkov

*Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The method of construction of mathematical model of dynamics of operated mechanical system is offered. The algorithm of updating of the equations of dynamics which allows to solve a problem of stabilization of communications is under construction and to provide demanded accuracy of the numerical decision of corresponding system of the differential-algebraic equations describing imposed on communication system, its kinematics and dynamics. The offered method can be used for research of dynamics of systems of the various physical nature.

УДК 531.36, 590.86

Моделирование динамики простейших экономических объектов как систем с программными связями

Р. Г. Мухарлямов

*Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Динамические аналогии в простейших экономических объектах и в движении точки переменной массы позволяют использовать современные методы аналитической механики для решения задачи управления производственным предприятием. Целью управления полагается достижение и стабилизация заданных соотношений между объёмами и мощностями подразделений за счёт вновь поступающих основных фондов. Для решения задачи используется метод управления динамикой системы с программными связями.

Введение

Методы моделирования динамики систем с программными связями позволяют обеспечить стабилизацию связей при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений, описывающих движение механической системы и связи, наложенные на неё. Вследствие динамических аналогий, существующих между системами различной физической природы, область применения методов моделирования механических систем существенно расширяется. Анализ динамики простейшего экономического объекта выявляет аналогию с динамикой точки переменной массы и позволяет использовать методы динамики механических систем для моделирования процессов в экономических системах.

Для учёта, контроля, анализа и оптимизации финансово-хозяйственной деятельности предприятия к настоящему времени разработано большое число корпоративных экономических информационных систем. Подробная классификация таких систем приводится в [1]. Существенное значение в этой классификации придаётся системам, позволяющим решать не только проблемы планирования и финансирования, но также учитывать производственные функции, такие, как производственные мощности и их ресурсы.

Современная экономика предъявляет жёсткие требования к управлению объектом или системой. Управление предполагает достижение поставленной цели с учётом возможностей объекта и влияния внешней среды. Для моделирования решения задачи управления необходимо построение уравнений динамики, отражающих свойства объекта, возмущения, вызванные влиянием среды, и формулировка цели управления. Современные компьютерные технологии позволяют создавать аналитическую информацию об эффективности производства и других отраслей экономики, создавать системы классификации технико-экономической информации, создавать эффективные математические модели развития объектов и систем. Так, в [2] предлагается математическая модель финансирования сферы высшего образования, представленная системой обыкновенных дифференциальных уравнений относительно финансовых ресурсов и числа квалифицированных специалистов, выпускаемых группой вузов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №06-01-00664)

Автор выражает благодарность Действительному члену Академии наук Республики Татарстан Сиразетдинову Т. К. за ценные замечания, высказанные при редактировании работы.

Вопросы представления процессов в экономике динамическими моделями впервые были поставлены в работах [3, 4]. В качестве элемента экономики принимается простой экономический объект, которому ставится в соответствие материальная точка.

Под материальной точкой переменной массы принято понимать [5] множество частиц, которые в рассматриваемый момент времени находятся в области, ограниченной некоторой контрольной поверхностью, совершающей поступательное движение. Совокупность геометрических точек, соответствующих областям с изменяющимся составом частиц, совершающим поступательные движения, составляет механическую систему с переменными массами.

Простой экономический объект имеет свою структуру, определяемую его функциональным назначением. Так, простой производственный объект имеет два входа и один выход. Входами являются потоки основных и оборотных фондов, а выходом поток готовой продукции. Агрегированием простых экономических объектов строится аналог твёрдого тела. В [6] проводится аналогия между процессами в простейших экономических объектах и движением точки переменной массы, исследуются динамические модели различных экономических систем. В [7, 8] излагаются методы математического моделирования сложных динамических процессов и информационных технологий с учётом их особенностей, обобщение их к единой позиции с привлечением материалов, известных в области экономического моделирования.

1. Динамика простейшего производственного объекта

Рассмотрим производственный объект, выпускающий однотипную продукцию. Максимальный объем продукции, которую может выпускать объект в единицу времени при отсутствии ограничений составляет его мощность $y = y(t)$. Пусть функция $q = q(t)$ определяет состояние основных производственных фондов в момент времени t . Тогда отношение $\frac{q(t)}{y(t)} = m(t)$ является мгновенной фондоёмкостью основных фондов объекта по выпуску данного вида продукции. Дифференцирование выражения $q(t) = m(t)y(t)$ по времени t приводит к уравнению развития мощности

$$\frac{d}{dt}(m(t)y(t)) = u_0(t).$$

Величина $u_0(t)$ представляет собой истинный прирост основных фондов в единицу времени. Он учитывает вновь поступившие и используемые с момента t основные фонды $u = u(t)$, и фонды w , выбывающие из потребления за счёт износа и старения оборудования. Выбывающие фонды w в общем случае зависят от объёма Y выпускаемой продукции к моменту времени t , мощности y объекта и от времени t : $w = w(Y, y, t)$. Часто выбытие основных фондов принимается пропорциональным мощности $w = \beta y$. Величина β называется коэффициентом выбытия или коэффициентом старения основных фондов. Тогда с учётом равенства $u_0 = u - \beta y$ уравнение развития можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(my) + \beta y = u. \quad (1)$$

Объём продукции $x = x(t)$, выпускаемой объектом в единицу времени, не превосходит мощности $y = y(t)$: $0 \leq x(t) \leq y(t)$ и определяется потоком оборотных фондов $v = v(t)$: $x(t) = k(t)v(t)$, где $k(t)$ является коэффициентом эффективности оборотных фондов.

Пусть объект производит продукцию полной своей мощностью, т. е. объём выпускаемой продукции в единицу времени равняется мощности $x(t) = y(t)$. Тогда мощность объекта представляется в виде равенства

$$y(t) = \frac{dY}{dt},$$

где $Y = Y(t)$ обозначает общий объем продукции, произведённой объектом к моменту времени t , а уравнение развития (1) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + \beta \frac{dY}{dt} = u.$$

В случае, когда w линейно зависит от переменных Y и $\frac{dY}{dt}$, уравнение развития (1) записывается в виде

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + \beta \frac{dY}{dt} + kY = u. \quad (2)$$

В общем случае поток вновь поступающих в производство основных фондов u может зависеть от мощности объекта $y(t) = \frac{dY}{dt}$ и общего объёма продукции Y . Тогда уравнение мощности представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно объёма выпускаемой продукции Y

$$\frac{d}{dt} \left(m \frac{dY}{dt} \right) + w \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right) = u \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right). \quad (3)$$

Если известны величина m и заданы функции $w \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right)$, $u \left(Y, \frac{dY}{dt}, t \right)$, то закон изменения объёма выпускаемой продукции во времени будет определяться решением дифференциального уравнения (3) при начальных значениях

$$Y(t_0) = Y_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Из выражения (3) следует, что, управляя потоком вновь поступающих в производство основных фондов u , можно добиться требуемых законов изменения во времени объёма выпускаемой продукции $Y = Y(t)$ и мощности производственного объекта $y = y(t)$. В этом смысле поток основных фондов u можно рассматривать как функцию управления.

Уравнением (3) описывается динамика объектов и систем, содержащих элементы различной физической природы. В [9] приводится обоснование общих понятий динамики, и устанавливаются динамические аналогии между элементами различной физической природы. Показывается, что динамические аналогии позволяют использовать для анализа динамики и синтеза управления аналитические методы, наиболее полно развитые в классической механике.

Такой подход оказывается эффективным и для исследования динамики экономических объектов, описываемых уравнениями (2) или (3). Тем более что структура этих уравнений совпадает с уравнением динамики точки переменной массы.

2. Уравнение движения точки переменной массы

Под материальной точкой переменной массы [5, 10] принято понимать множество частиц, которые в рассматриваемый момент времени t будут находиться в области, ограниченной некоторой контрольной поверхностью. При этом считают, что эта область совершает поступательное движение, определяемое движением некоторой геометрической точки. Совокупность геометрических точек, соответствующих областям с изменяющимся составом частиц, совершающим поступательные движения, составляет механическую систему с переменными массами.

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки переменной массы. Обозначим через m_0 массу материальной точки в момент времени t , m_1 — массу тех частиц, которые присоединились к материальной точке за время Δt и m_2 — массу частиц, которые от неё отделились за то же время. Тогда масса материальной точки на отрезке времени от t до $t + \Delta t$ определяется суммой

$$m = m_0 + m_1 - m_2.$$

Будем считать, что m_1 и m_2 не зависят от скорости точки. Пусть u_1 и u_2 определяют значения скоростей центров инерции частиц, присоединяющихся к точке и отделяющихся от неё. Движение свободной материальной точки описывается уравнением Мещерского

$$\frac{d(mv)}{dt} = F + R, \quad v = \frac{dx}{dt}, \quad (4)$$

где v есть скорость материальной точки, F — внешние силы, действующие на точку,

$$R = -u_1 \frac{dm_1}{dt} - u_2 \frac{dm_2}{dt}$$

представляет собой реактивную силу, вызванную изменением массы точки и относительными скоростями присоединяющихся и отделяющихся частиц.

3. Управление производственным предприятием

Общая структура уравнения (3) динамики простейшего экономического объекта и уравнения (4) динамики точки переменной массы позволяет использовать методы моделирования динамики механических систем для решения задачи исследования динамики экономических систем.

Рассмотрим задачу управления производственным предприятием, состоящим из n подразделений или выпускающим n видов продукции. Каждое подразделение рассматривается как простой производственный объект. Будем считать, что предприятие допускает управление за счёт поступающих в производство основных фондов $u_1, \dots, u_k$, распределённых по подразделениям с коэффициентами b_{is} , $i = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, k$. В качестве поступающих основных фондов могут быть материалы, оборудование, финансы, рабочая сила и другие показатели. Представим уравнение мощности предприятия системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}(q_i) + w_i\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) = f_i\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) + \sum_{s=1}^k b_{is}\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right)u_j. \quad (5)$$

В равенстве (5) приняты следующие обозначения: q_i — состояние основных производственных фондов i -го подразделения в момент времени t , используемых всеми подразделениями,

x_i — объем продукции i -го подразделения,

$\frac{dx_i}{dt}$ — мощность i -го подразделения,

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор с компонентами $x_1, \dots, x_n$,

$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}\right)$ — вектор с компонентами $\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt}$,

$q_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} \frac{dx_j}{dt}$, m_{ij} — мгновенная фондоёмкость i -го подразделения, используемая для j -го подразделения,

$f_i = f_i(x, \dot{x}, t)$ — факторы, влияющие на изменение основных производственных фондов в момент времени t .

Предположим, что мгновенные фондёмкости подразделений в общем случае могут зависеть от переменных x, t : $m_{ij} = m_{ij}(x, t)$. Введём обозначения

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt},$$

$$a_i(x, \dot{x}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{m}_{ij} \dot{x}_{ij} + w_i(x, \dot{x}, t) - f_i(x, \dot{x}, t),$$

$$\dot{m}_{ij} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial m_{il}}{\partial x_l} \dot{x}_l + \frac{\partial m_{ij}}{\partial t}$$

и перепишем систему (5) в виде

$$\sum_{j=1}^k m_{ij} \ddot{x}_j + a_i = \sum_{s=1}^k b_{is} u_s. \quad (6)$$

Система (6) представляет собой математическую модель управляемой системы с функциями управления $u_1, \dots, u_k$. Примем за цель управления достижение и стабилизация заданных соотношений между объёмами x_i и мощностями $\dot{x}_i$ подразделений

$$g_\mu(x, t) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (7)$$

$$g_\rho(x, \dot{x}, t) = 0, \quad \rho = m+1, \dots, r, \quad r \leq k. \quad (8)$$

Если рассматривать систему дифференциальных уравнений (6) как уравнения динамики управляемой механической системы, то равенства (7), (8) соответственно являются уравнениями голономных и неголономных связей, наложенных на неё. Функции управления $u_1, \dots, u_k$ должны быть подобраны так, чтобы равенства (7), (8) выполнялись при всех значениях $t > t_0$, если они выполняются в начальный момент

$$g_\mu(x^0, t_0) = 0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial x_i} \dot{x}_i^0 + \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial t} = 0, \quad (9)$$

$$g_\rho(x^0, \dot{x}^0, t_0) = 0, \quad (10)$$

$$x^0 = x(t_0), \quad \dot{x}^0 = \dot{x}(t_0). \quad (11)$$

Если условия (9), (10) не выполняются:

$$g_\mu(x^0, t_0) = y_\mu^0, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial x_i} \dot{x}_i^0 + \frac{\partial g_\mu(x^0, t_0)}{\partial t} = \dot{y}_\mu^0, \quad (12)$$

$$g_\rho(x^0, \dot{x}^0, t_0) = \dot{y}_\rho^0, \quad (13)$$

то на решении $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$ системы (6), соответствующем определённым функциям управления $u_1, \dots, u_k$ и начальным условиям (11), будут выполняться равенства

$$g_\mu(x, t) = y_\mu(t), \quad y_\mu(t_0) = y_\mu^0,$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu(x, t)}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\mu(x, t)}{\partial t} = \dot{y}_\mu(t), \quad \dot{y}_\mu(t_0) = \dot{y}_\mu^0, \quad (14)$$

$$g_\rho(x, \dot{x}, t) = \dot{y}_\rho(t), \quad \dot{y}_\rho(t_0) = \dot{y}_\rho^0. \quad (15)$$

Продифференцируем равенства (14), (15) по времени

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\mu}{\partial x_i} \ddot{x}_i + 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i + \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial t^2} = \ddot{y}_\mu(t), \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \ddot{x}_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\rho}{\partial t} = \ddot{y}_\rho(t). \quad (17)$$

Заменив $\ddot{x}_i$ в равенствах (16), (17) их выражениями из (6), получим систему из r уравнений относительно k управлений u_s

$$\sum_{s=1}^k h_{\kappa s} u_s = \ddot{y}_\kappa - p_\kappa, \quad \kappa = 1, \dots, r, \quad (18)$$

$$h_{\kappa s} = \sum_{i=1}^n g_{\kappa i} c_{is}, \quad c_{is} = \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(-1)} b_{js},$$

$$p_\kappa = \tilde{g}_\kappa - \sum_{i=1}^n g_{\kappa i} m_i, \quad m_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}^{(-1)} a_j, \quad g_{\kappa i} = \frac{\partial g_\kappa}{\partial x_i},$$

$$\tilde{g}_\mu = 2 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial x_j} \dot{x}_i \dot{x}_j + 2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial x_i \partial t} \dot{x}_i + \frac{\partial^2 g_\mu}{\partial t^2}, \quad \tilde{g}_\rho = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_\rho}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial g_\rho}{\partial t},$$

$m_{ij}^{(-1)}$ — элемент матрицы, обратной к матрице (m_{ij}) .

4. Стабилизация целевых соотношений

Определим управляющие функции u_s так, чтобы выполнялись равенства

$$\sum_{s=1}^k h_{\kappa s} u_s = h_\kappa, \quad h_\kappa = \sum_{\lambda=1}^r k_{\kappa \lambda} \dot{y}_\lambda + \sum_{\nu=1}^k l_{\kappa \nu} y_\nu - p_\kappa. \quad (19)$$

Стабилизация заданных соотношений (7), (8) между объёмами x_i и мощностями $\dot{x}_i$ подразделений достигается соответствующим выбором коэффициентов $k_{\kappa \lambda}$, $l_{\kappa \nu}$ при $\dot{y}_\lambda$, y_ν в правой части равенства (18), которые являются произвольными функциями переменных x_i , $\dot{x}_j$, t . Из (18), (19) следует, что переменные y_μ , $\dot{y}_\kappa$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_\mu}{dt} = \dot{y}_\mu, \quad \frac{d\dot{y}_\kappa}{dt} = \sum_{\lambda=1}^r k_{\kappa \lambda} \dot{y}_\lambda + \sum_{\nu=1}^k l_{\kappa \nu} y_\nu \quad (20)$$

с начальными условиями (12), (13). Система (20) допускает тривиальное решение $y_\kappa = 0$, $\dot{y}_\kappa = 0$, соответствующее уравнениям связей (7), (8). Коэффициенты $k_{\kappa \lambda}$, $l_{\kappa \nu}$ системы являются произвольными и их можно выбрать так, чтобы решение $y_\kappa = 0$, $\dot{y}_\kappa = 0$ было устойчиво или асимптотически устойчиво. Для определения условий устойчивости тривиального решения системы (20) построим функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы

$$2V = \sum_{\mu, \nu=1}^m a_{\mu \nu}^{(00)} y_\mu y_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu \kappa}^{(01)} y_\mu \dot{y}_\kappa + \sum_{\kappa, \lambda=1}^r a_{\kappa \lambda}^{(11)} \dot{y}_\kappa \dot{y}_\lambda. \quad (21)$$

Будем считать, что коэффициенты функции V зависят только от переменных x_i , t и квадратичная форма (21) является определённо-положительной при всех значениях переменных $x_i : 0 \leq x_i \leq X$ и $t \geq t_0$. Вычислим производную функции V в силу уравнений системы (20)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{\mu, \nu=1}^m b_{\mu\nu}^{(00)} y_\mu y_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^m \sum_{\kappa=1}^r b_{\mu\kappa}^{(01)} y_\mu \dot{y}_\kappa + \sum_{\kappa, \lambda=1}^r b_{\kappa\lambda}^{(11)} \dot{y}_\kappa \dot{y}_\lambda, \\ b_{\mu\nu}^{(00)} &= \dot{a}_{\mu\nu}^{(00)} + \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu\kappa}^{(00)} l_{\kappa\nu}, \quad \dot{a}_{\mu\nu}^{(00)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(00)}}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial a_{\mu\nu}^{(00)}}{\partial t}, \\ 2b_{\mu\kappa}^{(01)} &= \dot{a}_{\mu\kappa}^{(01)} + a_{\mu\kappa}^{(00)} + \sum_{\kappa=1}^r a_{\mu\lambda}^{(01)} k_{\lambda\kappa} + \sum_{\nu=1}^m a_{\kappa\lambda}^{(11)} l_{\lambda\nu}, \quad a_{\mu\kappa}^{(00)} = 0, \quad \kappa > m, \\ b_{\kappa\lambda}^{(11)} &= \dot{a}_{\kappa\lambda}^{(11)} + 2a_{\kappa\lambda}^{(01)} + \sum_{\theta=1}^r a_{\kappa\theta}^{(11)} k_{\theta\lambda}, \quad a_{\kappa\lambda}^{(01)} = 0, \quad \kappa > m. \end{aligned} \quad (22)$$

Если функция (22) является определённо-отрицательной при всех значениях переменных $x_i : 0 \leq x_i \leq X$, $\dot{x}_i \leq X_1$ и $t \geq t_0$, и допускает бесконечно малый высший предел по отношению к переменным y_μ , $\dot{y}_\kappa$, то тривиальное решение системы (20) устойчиво асимптотически, что обеспечивает стабилизацию соотношений (7), (8).

5. Определение управляющих воздействий

Решение системы (19) зависит от соотношения величин r и k [11]. Если $r = k$, то матрица $(h_{s\nu})$ квадратная и

$$u_s = \sum_{\nu=1}^r h_{s\nu}^{(-1)} h_\nu,$$

где $h_{s\nu}^{(-1)}$ — элемент матрицы, обратной к матрице $(h_{s\nu})$. В случае $r < k$ решение системы (19) определяется суммой двух слагаемых

$$u_s = cu_s^\tau + u_s^\nu,$$

$u_s^\tau = \det(d_{pq})$, $d_{1q} = \delta_{sq}$; $\delta_{sq} = 0$, $s \neq q$, $\delta_{ss} = 1$, $d_{\kappa+1,q} = h_{\kappa q}$, $p, q = 1, \dots, k$, $d_{r+2,q}, \dots, d_{kq}$ — произвольные функции переменных x_i , $\dot{x}_i$, t ,

$$u_s^\nu = \sum_{\alpha=1}^r \lambda_\alpha h_{\alpha s}, \quad \lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^r w_{\alpha\beta}^{-1} h_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, r,$$

$w_{\alpha\beta}^{-1}$ — элемент матрицы, обратной к матрице $(w_{\kappa\alpha})$, $w_{\kappa\alpha} = \sum_{s=1}^k h_{\kappa s} h_{\alpha s}$.

6. Управление предприятием, состоящим из двух подразделений

Рассмотрим в качестве примера задачу управления производственным предприятием, состоящим из двух подразделений, которые рассматриваются как простой производственный объект. Будем считать, что предприятие допускает управление за счёт поступающих в производство основных фондов u_1 , u_2 , распределённых по подразделениям с коэффициентами b_{11} , b_{12} и b_{21} , b_{22} соответственно. Мгновенные фондоёмкости подразделений для простоты будем считать постоянными:

$m_{11} = m_1 = \text{const}$, $m_{22} = m_2 = \text{const}$, $m_{12} = m_{21} = 0$. Функции, оценивающие вы-
бытие основных фондов подразделений будем считать линейными относительно
мощностей и объёмов выпускаемой продукции

$$w_i = \beta_{i1}\dot{x}_1 + \beta_{i2}\dot{x}_2, \quad i = 1, 2.$$

Факторы f_i , влияющие на изменение основных производственных фондов в
момент времени t , предполагаются пропорциональными общему объёму продук-
ции подразделений x_1, x_2 с коэффициентами c_{11}, c_{12} и c_{21}, c_{22} соответственно

$$f = -cx, \quad f = (f_1, f_2), \quad c = (c_{ij}).$$

Система (6) при сделанных предположениях записывается в виде

$$m_i\ddot{x}_i + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij}\dot{x}_j + \sum_{j=1}^2 c_{ij}x_j = \sum_{j=1}^2 b_{1j}u_j. \quad (23)$$

Примем за цель управления достижение и поддержание заданного объёма про-
дукции

$$\alpha(t)x_1 + (1 - \alpha(t))x_2 = v(t), \quad 0 \leq \alpha(t) \leq 1. \quad (24)$$

Положим

$$y = \alpha(t)x_1 + (1 - \alpha(t))x_2 - v(t), \quad (25)$$

$$\ddot{y} = -k_1\dot{y} - k_0y. \quad (26)$$

Стабилизация связей (24) обеспечивается, если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Из (23)–(26)
следует уравнение для определения u_1, u_2

$$b_1u_1 + b_2u_2 = b, \quad (27)$$

$$b_1 = \frac{\alpha}{m_1}b_{11} + \frac{1-\alpha}{m_2}b_{21}, \quad b_2 = \frac{\alpha}{m_1}b_{12} + \frac{1-\alpha}{m_2}b_{22},$$

$$\begin{aligned} b = & (\beta_1 - 2\dot{\alpha} - k_1\alpha)\dot{x}_1 + (\beta_2 + 2\dot{\alpha} - k_1(1-\alpha))\dot{x}_1 + \\ & + (c_1 - \ddot{\alpha} - k_1\dot{\alpha} - k_0\alpha)x_1 + (c_2 + \ddot{\alpha} + k_1\dot{\alpha} - k_0(1-\alpha))x_2 + \\ & + \ddot{v} + k_1\dot{v} + k_0v, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\alpha}{m_1}c_{11} + \frac{1-\alpha}{m_2}c_{21}, & c_2 &= \frac{\alpha}{m_1}c_{12} + \frac{1-\alpha}{m_2}c_{22}, \\ \beta_1 &= \frac{\alpha}{m_1}\beta_{11} + \frac{1-\alpha}{m_2}\beta_{21}, & \beta_2 &= \frac{\alpha}{m_1}\beta_{12} + \frac{1-\alpha}{m_2}\beta_{22}. \end{aligned}$$

Уравнение (27) имеет решение

$$u_1 = -cb_2 + \frac{b_1b}{b_1^2 + b_2^2}, \quad u_2 = cb_1 + \frac{b_2b}{b_1^2 + b_2^2}, \quad (29)$$

где $c = c(\dot{x}_1, \dot{x}_2, x_1, x_2, t)$ — произвольная функция. Так как уравнение (26) имеет
асимптотически устойчивое тривиальное решение $y = 0$, то управления (29) обес-
печивают заданный объём выпуска продукции (24) и сохранение его на заданном
уровне.

Если в правой части системы (23) содержится одно управление $u_1 = u_2 = u$,
 $b_{12} = b_{21} = 0$, то уравнение (27) принимает вид

$$(m_2\alpha b_{11} + m_1(1-\alpha)b_{22})u = m_1m_2b$$

и при определённых коэффициентах k_1, k_2 имеет единственное решение

$$u = \frac{m_1m_2b}{(m_2\alpha b_{11} + m_1(1-\alpha)b_{22})}.$$

Заключение

Использование методов решения задачи управления динамикой системы с программными связями позволяет решать задачу управления мощностью предприятия, обеспечивающего стабилизацию заданных соотношений между мощностями подразделений и выпуском продукции. В случае, когда число управляющих воздействий превышает размерность целевого многообразия, определяются выражения управляющих воздействий, позволяющие рационально использовать основные фонды.

Литература

1. *Абрамов Н. В., Мотовилов Н. В.* Взаимодействие концепций и модульный состав корпоративных экономических информационных систем // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. Специальный выпуск «Актуальные проблемы экономики и права». — 2005. — С. 74–80.
2. *Левченко Л. В., Максимов В. В.* Проблема оптимизации стратегии финансирования российской высшей школы // Изв. Самарского научного центра Российской академии наук. Специальный выпуск «Актуальные проблемы экономики и права». — 2005. — С. 190–194.
3. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическая модель прогнозирования и оптимальное управление экономическим объектом // Изв. ВУЗов, Авиационная техника. — № 4. — 1972. — С. 3–8.
4. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическая модель многоцелевых экономических объектов // Изв. ВУЗов, Авиационная техника. — № 1. — 1973. — С. 12–17.
5. *Новоселов В. С.* Аналитическая механика с систем с переменными массами. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. — 240 с.
6. *Сиразетдинов Т. К.* Динамическое моделирование экономических объектов. — Казань: Изд-во «Фэн» Академии Наук РТ, 1996. — 223 с.
7. *Сиразетдинов Т. К., Родионов В. В., Сиразетдинов Р. Т.* Динамические модели экономического региона. — Казань: Изд-во «Фэн» Академии Наук РТ, 2005. — 320 с.
8. Проблемы инновационной экономики и информационных технологий / под ред. Т. К. Сиразетдинова. — М., Казань, 2005. — 412 с.
9. *Layton R. A.* Differential-Algebraic Equations of Dynamical Systems. — N.Y.: Springer, 2001. — P. 159.
10. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы. — М.-Л.: Гостехиздат, 1952. — 280 с.
11. *Мухарлямов Р. Г.* О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифф. уравнения. — Т. 39, № 3. — 2003. — С. 343–353.

UDC 531.36, 590.86

Modeling of Dynamics of the Elementary Economic Objects as Systems with Program Constraints

R. G. Mukharlyamov

*Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Dynamic analogies in the elementary economic objects and in movement of a point of variable masse allow using modern methods of analytical mechanics for the decision of a problem of control of the enterprise. The purpose of control achievement and stabilization of the set parities between volumes and capacities of divisions due to again acting fixed capital is necessary. For the decision of a problem the method of control of dynamics of system with program constraints is used.

УДК 531.31:62-56

О построении систем с квазиинвариантными программными связями

И. А. Мухаметзянов

*Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Предлагается процедура построения множества дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих стабилизацию программного многообразия управляемой системы при произвольных значениях случайных параметров, входящих в выражения возмущающих функций заданного класса.

1. Постановка задачи

Пусть дана система дифференциальных уравнений движения объекта управления в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \varphi_1(x, u, t) + R(x, t)\delta, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x, u, \delta, t),\end{aligned}\tag{1}$$

где x_1 , φ_1 , δ — s -мерные, x_2 , φ_2 — $(n - s)$ -мерные, u — r -мерный, $x(x_1, x_2)$ — n -мерный векторы; R — $(s \times s)$ -мерная матрица.

Предполагается, что $\det \|R\| \neq 0$ в некоторой ограниченной области G .

Требуется построить множество дифференциальных уравнений регуляторов, определяющих изменения вектора управления u , обеспечивающих интегральность и асимптотическую устойчивость «в большом» $(n - k)$ -мерного программного многообразия

$$\omega(x, t) = 0\tag{2}$$

системы (1), подверженной действию возмущений $\delta(c, t)$, при любых случайных значениях конечномерного ограниченного постоянного вектора c .

Заметим, что функция $\omega(x, t)$ в (2) является k -мерной непрерывной и непрерывно дифференцируемой в G вектор-функцией.

В общем случае каждая компонента вектора δ может зависеть от соответствующего количества компонент вектора c . Следовательно, максимальная размерность вектора c может достигать величины $\sum_{i=1}^s n_i$, где n_i — количество постоянных

$c_1^i, \dots, c_n^i$, входящих во все компоненты δ_i ($i = 1, 2, \dots, s$) вектора δ .

Таким образом, предполагается аппроксимация любой реализации возмущений δ конкретным выбором постоянных параметров c_ν^i ($\nu = 1, \dots, n_i$; $i = 1, \dots, s$).

Идея метода борьбы с возмущениями δ заключается в том, чтобы сделать заданное невозмущённое состояние (2) системы (1), замкнутой дифференциальными уравнениями регулятора, асимптотически устойчивым «в большом» не только к случайным начальным отклонениям от многообразия (2), но также и к случайному изменению вектора c для любых реализаций из некоторой заданной ограниченной области, не выводящей систему (1) из области G .

В случае, когда в качестве невозмущённого состояния принимается одно из частных решений системы (1), инвариантность и квазиинвариантность сводятся

к определениям, принятым в работах В. С. Кулебакина [1], Б. Н. Петрова [2], тесно связанным с теорией $K(D)$ -изображения [3].

В этом случае многообразие (2) невозмущённого состояния системы имеет нулевую меру и, следовательно, не охватывает в полной мере поставленную здесь задачу.

Следует отметить, что литература, посвящённая решению проблемы инвариантности, восходит к работам Г. В. Щипанова [4], Н. Н. Лузина [5], В. С. Кулебакина [1, 6]. Проблемам возникновения, развитию и обсуждению состояния теории инвариантности были посвящены три Всесоюзных совещания учёных-специалистов, труды которых изданы АН СССР в 1959 г. [7], в 1964 г. [8] и в 1970 г. [9]. В дальнейшем развитию этой проблемы были посвящены работы В. В. Величенко [10], О. Н. Фоменко [11] и других.

2. Решение задачи в упрощённой постановке

Рассмотрим случай, когда вектор возмущений $\delta(t, c_1, c_2, \dots, c_s)$ в системе (1) является общим решением уравнения

$$\dot{\delta} = f_0(\delta, t)$$

с постоянными интегрирования $c_1, c_2, \dots, c_s$.

Например, когда система (1) возмущается $(2s_1 + 1)$ -мерным вектором $\delta(\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{2s_1})$ с элементами

$$\begin{aligned} \delta_0 &= c_0, & \delta_i &= c_i \sin p_i t, & \delta_j &= c_j \cos p_j t, \\ i &= 1, 2, \dots, s_1; & j &= s_1 + 1, \dots, 2s_1 \end{aligned} \quad (3)$$

компоненты вектор-функции $f_0(\delta, t)$ можно задавать в виде

$$f_{00} = 0, \quad f_{0i} = \delta_i p_i \operatorname{ctg} p_i t, \quad f_{0j} = -\delta_j p_j \operatorname{tg} p_j t,$$

где $p_i > 0$ — заданные постоянные, c_0, c_i, c_j — случайные постоянные. Заметим, что возмущения (3), в частности, могут задаваться $s = 2s_1 + 1$ членами ряда Фурье при разложении семейства произвольных периодических функций с любым заданным периодом.

Условие $\det \|R\| \neq 0$ в области G позволяет выражать вектор δ с помощью первого уравнения (1) в виде

$$\delta = R^{-1}[\dot{x}_1 - \varphi_1(x, t)]. \quad (4)$$

Дифференцируя (1) по t и подставляя в них (4) и $\dot{\delta} = f_0(\delta, t)$, где δ заменяется правой частью (4), получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \dot{x}_1 - \varphi_1 + \frac{dR}{dt} R^{-1}(\dot{x}_1 - \varphi_1), \\ \ddot{x}_2 &= \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial \delta} f_0 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти уравнения можно представить в виде

$$\ddot{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \dot{u} + \tilde{f}(\dot{x}, x, u, t),$$

где $\varphi = \|\varphi_2^1\|$; $\tilde{f}$ — n -мерная вектор-функция, составленная из элементов правых частей (5), не содержащих вектора $\dot{u}$.

Дифференцируя (2) в силу этих уравнений два раза по t и приравнявая правую часть некоторой вектор-функции Φ , получим

$$\Omega \dot{u} = Q, \quad (6)$$

где

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \quad Q = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \tilde{f} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial x} \dot{x} - \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial t} + \Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t),$$

$\Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t)$ — произвольная вектор-функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0, 0, \dot{x}, x, u, t) \equiv 0$ и обладающая способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\omega = 0, \dot{\omega} = 0$ уравнения [12]

$$\ddot{\omega} = \Phi(\dot{\omega}, \omega, \dot{x}, x, u, t). \quad (7)$$

Предположим, что $\det \|\Omega \Omega^T\| \neq 0$ в области G . В этом случае общее решение системы (6), состоящей из k конечных уравнений относительно r компонентов вектора $\dot{u}$, при $r \geq k$ имеет вид [13]

$$\dot{u} = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q + [E - \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega] \tilde{u}, \quad (8)$$

где E — единичная $(r \times r)$ -матрица, $\tilde{u}$ — произвольная r -мерная вектор-функция.

Полученное уравнение (8) является искомым множеством дифференциальных уравнений регуляторов объекта управления (1).

Необходимо отметить, что от подходящего выбора произвольной вектор-функции Φ в правой части (7) зависит качество переходного процесса в системе (1), (8). В связи с этим приведём один из возможных способов выбора функции Φ , позволяющего наделить систему необходимым качеством переходного процесса. С этой целью, умножая (7) на некоторую симметрическую определённо-положительную $(k \times k)$ -матрицу $A(x, t)$, получим

$$A \ddot{\omega} = A \Phi. \quad (9)$$

Введём замену [14]

$$y = \dot{\omega} - f(\omega, t), \quad f(0, t) \equiv 0, \quad (10)$$

где $f(\omega, t)$ — произвольная k -мерная вектор-функция с ограниченными и дифференцируемыми в области G элементами, допускающая бесконечно малый высший предел по модулю.

Умножая уравнение (9) скалярно на y , получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^T A y) = y^T A \Phi. \quad (11)$$

Если вектор $A \Phi$ в правой части этого уравнения выбрать в виде [14]

$$A \Phi = -Dy - F\omega - A \left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^T y + A \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \omega} \right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} \right] - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y, \quad (12)$$

то (11) принимает выражение

$$\frac{1}{2} \frac{dV}{dt} = -y^T D y + \left(f^T F + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega, \quad (13)$$

где D, F — некоторые произвольно выбираемые симметрические определённо-положительные матрицы, $V = y^T A y + \omega^T F \omega$ — определённо-положительная функция Ляпунова, допускающая бесконечно малый высший предел. Следовательно, при достижении определённой отрицательности функции $(f^T F + \omega^T \dot{F}/2)\omega$

соответствующим выбором матрицы F и функции f правая часть (13) будет определённо-отрицательной по y , ω и при этом программное многообразие (2) будет асимптотически устойчивым «в большом» в области G . В частности, при $f = -\omega$ вектор (12) имеет вид

$$A\Phi = -Dy - F\omega - A\dot{\omega} - \frac{1}{2} \frac{dA}{dt} y.$$

Здесь dA/dt предполагается ограниченной в G . Теперь из (12) получим

$$\Phi = -A^{-1}(Dy + F\omega) - \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T y + \left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^T f + \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} A^{-1} \frac{dA}{dt} y. \quad (14)$$

Для оценки качества переходного процесса, интегрируя обе части (13), получим

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T Dy - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] dt = \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0). \quad (15)$$

Это равенство является интегральным критерием качества переходного процесса. Имея свободу выбора матриц D , F , A и функции f , подынтегральному выражению и функции V можно придать нужную структуру с необходимыми весовыми элементами.

При задании конкретного числового значения V_0 уравнение

$$\frac{1}{2} (y_0^T A y_0 + \omega_0^T F \omega_0) = V_0 \quad (16)$$

в $2k$ -мерном пространстве $\dot{\omega}_0$, ω_0 описывает эллипсоид, поверхность которого является геометрическим местом точек, обладающих следующим свойством. Для начавшихся из них движений имеет место интегральный критерий качества переходного процесса (15), а для всех начальных значений $\dot{\omega}_0$, ω_0 внутри эллипсоида (16) справедлива оценка качества переходного процесса

$$\int_{t_0}^{\infty} \left[y^T Dy - \left(f^T + \omega^T \frac{\dot{F}}{2} \right) \omega \right] dt < \frac{1}{2} V_0, \quad V_0 = V(t_0),$$

где V_0 — значение $V(t)$ на поверхности (16).

3. Алгоритм решения задачи в общей постановке

Допустим, что удалось построить дифференциальные операторы

$$P_i[\delta_i(t, c_1, c_2, \dots, c_{n_i})] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (17)$$

Подставляя в (17) найденное из первого уравнения (1) выражение δ вида (4), получим векторную форму (17)

$$P[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0. \quad (18)$$

Система (18) состоит из s дифференциальных уравнений, каждое из которых имеет порядок $(1 + n_i)$. Таким образом, вместо (1) получается расширенная система

$$P[R^{-1}\dot{x}_1 - R^{-1}\varphi_1(x, u, t)] = 0, \quad (19)$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x, u, \delta, t). \quad (20)$$

Для того чтобы эта система была эквивалентна системе (1) необходимо найти соответствующие начальные условия. Для этого нужно продифференцировать уравнения первой группы системы (1) $(n_i - 1)$ раз и подставить в них x_{i0} , u_{r0} , δ_{i0} , т. е. снова получить случайные начальные условия для системы (19), (20).

Заметим, что построением системы (19), (20) вместо (1) достигается явная независимость системы уравнений движения от возмущений $\delta(c, t)$, но при этом сохраняется их влияние на начальные условия.

Теперь решение поставленной задачи может быть получено путём построения дифференциальных уравнений регулятора, обеспечивающего интегральность многообразия (2) для системы (19), (20) и асимптотическую устойчивость «в большом» этого многообразия при начальных отклонениях от этого многообразия, зависящих от случайных постоянных компонентов вектора c .

Предположим, что система (19) в области G разрешима относительно старших производных переменных x . Тогда систему (19), (20) можно привести к виду

$$\begin{aligned} x_\mu^{(N)} &= \tilde{\varphi}_\mu^{(N)}(x, u, t) + F_\mu(x_\mu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \dots, \dot{u}, u, t), \\ \mu &= 1, \dots, l_1, \\ x_\nu^{(m_\nu)} &= \varphi_\nu^{(m_\nu)}(x, u, t) + F_\nu(x_\mu^{(N-1)}, x_\nu^{(m_\nu-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-1)}, \dots, \dot{u}, u, t), \\ \nu &= l_1 + 1, \dots, s, \\ \dot{x}_2 &= \varphi_2(x, u, \delta, t), \end{aligned} \quad (21)$$

где δ имеет выражение (4); N — наибольшее из чисел n_i ; l_1 — количество уравнений системы (19), имеющих порядок N ; $m_\nu < N$; x_μ — компоненты вектора x , входящие в (19) с наибольшим порядком N дифференцирования по t ; x_ν — компоненты вектора x , входящие в (19) с порядком дифференцирования по t меньше N .

После дифференцирования (2) в силу системы (21) по t N раз получим

$$\omega^{(N)} = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \psi}{\partial u} u^{(N-1)} + F(x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t), \quad (22)$$

где F — часть $\omega^{(N)}$, не содержащая $u^{(N-1)}$; $\tilde{x}$ — вектор с компонентами x_μ ($\mu = 1, 2, \dots, l_1$); ψ — вектор с компонентами $\tilde{\varphi}_\mu$ ($\mu = 1, 2, \dots, l_1$).

Приравниваем правую часть (22) произвольной k -мерной вектор-функции $\Phi(\omega^{(N-1)}, \dots, \dot{\omega}, \omega, x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t)$, удовлетворяющей условию

$$\Phi(0, \dots, 0, 0, x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t) \equiv 0$$

и обладающей способностью обеспечивать асимптотическую устойчивость «в большом» тривиального решения $\omega = 0$, $\dot{\omega} = 0, \dots$, $\omega^{(N-1)} = 0$ уравнения

$$\omega^{(N)} = \Phi.$$

Тогда для определения r компонентов вектора $u^{(N-1)}$ получим k конечных уравнений вида

$$\Omega u^{(N-1)} = Q(x^{(N-1)}, \dots, \dot{x}, x, u^{(N-2)}, \dots, \dot{u}, u, t), \quad (23)$$

где

$$\Omega = \frac{\partial \omega}{\partial \tilde{x}} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad Q = \Phi - F.$$

Если в области G $\det |\Omega \Omega^T| \neq 0$, то общее решение системы (23) может быть представлено в виде [13]

$$u^{(N-1)} = \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} Q + [E - \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \Omega] \tilde{u}, \quad (24)$$

где $\tilde{u}$ — произвольная r -мерная вектор-функция, E — единичная $(r \times r)$ -матрица.

Уравнение (24) и есть множество искомым дифференциальных уравнений регуляторов, обеспечивающих асимптотическую устойчивость «в большом» и интегральность многообразия (2) при действии на исходную систему возмущений $\delta(c, t)$. Заметим, что при $r = k$ уравнение (24) становится единственным, так как при этом $[E - \Omega^T(\Omega\Omega^T)^{-1}\Omega] = 0$.

Следует отметить, что некоторые элементы вектора ω в (2) могут быть заданы независимыми от переменных x_μ или одновременно и от x_μ , и от x_ν . При этом такие элементы вектора ω необходимо дифференцировать по t в первом случае m_ν раз, а во втором — один раз. В этих случаях в систему конечных уравнений (23) войдут элементы вектора u со старшими производными разных порядков. Системе (23) в таких случаях следует решать относительно старших производных всех элементов вектора u . При этом система дифференциальных уравнений регуляторов будет состоять из уравнений разных порядков относительно производных вектора u .

В заключении приведём способ получения дифференциального оператора (17), предложенный в работе [11].

Пусть элемент δ_i вектора δ задан в виде

$$\delta_i = \tilde{\Phi}_i(t, c_1, \dots, c_m) \quad (25)$$

и определены его производные по t

$$\tilde{\Phi}_i^{(k)}(t, c_1, \dots, c_m) = \delta_i^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1. \quad (26)$$

Если удастся разрешить системы (25), (26) относительно одного из постоянных c_μ

$$\tilde{\psi}_\mu(t, \delta_i, \dot{\delta}_i, \dots, \delta_i^{(m-1)}) = c_\mu,$$

то производная по t функции $\tilde{\psi}_\mu$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial \delta_i} \dot{\delta}_i + \sum_{\lambda=1}^{m-1} \frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial \delta_i^{(\lambda)}} \delta_i^{(\lambda+1)} + \frac{\partial \tilde{\psi}_\mu}{\partial t} = 0$$

будет представлять собой оператор (17) порядка m . В [11] приведены операторы (17) некоторых наиболее характерных типов возмущений.

Если возмущение линейно зависит от постоянных c_k

$$\delta_i = \sum_{k=1}^m c_k \alpha_k(t),$$

то оператор (17) ищется в виде линейного однородного уравнения m -го порядка

$$\delta_i^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} b_k(t) \delta_i^{(k)} = 0. \quad (27)$$

В этом случае функции $\alpha_k(t)$ являются фундаментальными решениями уравнения (27). Следовательно, коэффициенты $b_k(t)$ этого уравнения определяются из системы конечных уравнений

$$\sum_{k=0}^{m-1} \alpha_j^{(k)} b_k = -\alpha_j^{(m)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

4. Построение уравнений регулятора системы квазиинвариантной стабилизации программной ориентации преследующего тела

В качестве примера рассмотрим твёрдое тело, жёстко связанное с подвижной системой координат $sxyz$. Дифференциальное уравнение для главного вектора управляющих сил $\tilde{u}_2$ построим так, чтобы центр масс c двигался по кривой погони за преследуемой точкой o при её движении по произвольному закону $r_0(t)$ относительно инерциальной системы координат $o_1x_1y_1z_1$. При этом вектор управляющих моментов $\tilde{u}_1$ относительно центра масс тела должен быть таким, чтобы одна ось тела, например cz , асимптотически стремилась занять направление co . Следовательно, программная ориентация тела в этом случае может быть задана выражениями

$$\omega_1^i = k_i \cdot e = 0, \quad \omega_2^i = k_i \cdot v = 0, \quad i = 1, 2, \quad (28)$$

где k_1, k_2 — орты осей sx и sy ; e — орт вектора co ; v — вектор абсолютной скорости центра масс тела; $(\cdot)$ — знак скалярного произведения.

Известно, что движение центра масс в инерциальной системе координат $o_1x_1y_1z_1$ и вращательное движение тела вокруг центра масс в осях подвижной системы координат $sxyz$ описываются дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned} I\dot{\omega}_0 &= I\omega_0 \times \omega_0 + M_* + \tilde{u}_1 + \tilde{R}_1\delta, \\ m\dot{v} &= f_0 + \tilde{u}_2 + \tilde{R}_2\delta, \end{aligned} \quad (29)$$

где I — тензор инерции тела в точке c ; $\omega_0(p, q, r)$ — мгновенная угловая скорость тела; p, q, r — проекции ω_0 на оси sx, sy, sz ; m — масса тела; M_* — главный момент заданных сил относительно центра масс c ; f_0 — главный вектор заданных сил; δ — вектор возмущений; $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ — заданные (3×3) -матрицы, причём элементы $\tilde{R}_1$ предполагаются постоянными.

Систему (29) представим в виде

$$\dot{\omega}_0 = I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) + u_1 + R_1\delta, \quad \dot{v} = f_0/m + u_2 + R_2\delta, \quad (30)$$

где $u_1 = I^{-1}\tilde{u}_1$, $u_2 = \tilde{u}_2/m$, $R_1 = I^{-1}\tilde{R}_1$, $R_2 = \tilde{R}_2/m$.

Предположим, что $\det \|R_1\| \neq 0$.

Вектор возмущений зададим в виде

$$\delta = c_1 + c_2 \sin(pt + c_3), \quad (31)$$

$c_i(c_{i1}, c_{i2}, c_{i3})$ — случайные трёхмерные постоянные векторы, $\tilde{p}(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$ — заданный постоянный вектор.

Поставим задачу: построить множество дифференциальных уравнений регулятора, определяющего изменения векторов управления u_1, u_2 так, чтобы обеспечивалась интегральность и асимптотическая устойчивость «в большом» программного многообразия (28) системы (30) при любых случайных значениях постоянных c_i , входящих в выражение (31) возмущающего вектора δ . Заметим, что (31) является общим решением системы дифференциальных уравнений

$$\delta_i^{(3)} + \tilde{p}^2 \dot{\delta}_i = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

которая может быть представлена в следующей векторной форме:

$$\delta^{(3)} + \tilde{p} \dot{\delta} = 0, \quad (32)$$

где $\tilde{p}$ — диагональная матрица (3×3) с элементами $\tilde{p}_i^2$.

Из первого уравнения системы (30) имеем

$$\delta = R_1^{-1}\dot{\omega}_0 - R_1^{-1}I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - R_1^{-1}u_1. \quad (33)$$

Умножая (32) на R_1 и подставляя в него значения $\dot{\delta}$ и $\delta^{(3)}$, полученные дифференцированием (33) по t , имеем

$$\omega_0^{(4)} = \frac{d^3}{dt^3} [I^{-1}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*)] + u_1^{(3)} - \tilde{p} \frac{d}{dt} [\dot{\omega}_0 - I^{-2}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - u_1]. \quad (34)$$

Присоединим к этому уравнению второе уравнение (30), подставляя в него выражение (33)

$$\dot{v} = f_0/m + u_2 + R_2 R_1^{-1} [\dot{\omega}_0 - I^{-2}(I\omega_0 \times \omega_0 + M_*) - u_1]. \quad (35)$$

Дифференцируя (28) по t , получим

$$\frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} = \frac{d^5 k_i}{dt^5} \cdot e + k_i \cdot \frac{d^5 e}{dt^5}, \quad \frac{d\omega_2^i}{dt} = \frac{dk_i}{dt} \cdot v + k_i \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (36)$$

Для производных векторов k_i имеет место формула Пуассона $\dot{k}_i = \omega_0 \times k_i$. Следовательно, имеем

$$k_i^{(\nu)} = \omega_0^{(\nu-1)} \times k_i + \omega_0 \times k_i^{(\nu-1)}, \quad \nu = 2, 3, 4, 5.$$

Подставим эти выражения в (36). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} &= \omega_0^{(4)} \cdot (k_i \times e) + \omega_0 \cdot (k_i^{(4)} \times e) + k_i \cdot e^{(5)}, \\ \frac{d\omega_2^i}{dt} &= (\omega_0 \times k_i) \cdot v + k_i \cdot \dot{v}. \end{aligned} \quad (37)$$

Подставляя в (37) выражения (34), (35), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^5 \omega_1^i}{dt^5} &= (k_i \times e) \cdot u_1^{(3)} + F_1^i(\ddot{u}_1, \dot{u}_1, u_1, \omega_0^{(3)}, \ddot{\omega}_0, \dot{\omega}_0, \omega_0, t), \\ \frac{d\omega_2^i}{dt} &= k_1 \cdot u_2 + F_2^i(u_1, \dot{\omega}_0, \omega_0, f, m, I, M_*, R_2), \end{aligned} \quad (38)$$

где F_1^i — члены, не содержащие $u_1^{(3)}$; F_2^i — члены, не содержащие u_2 .

Приравниваем правые части уравнений (38), соответственно, двумерным вектор-функциям

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= -a_1 \omega_1^{(4)} - a_2 \omega_1^{(3)} - a_3 \ddot{\omega}_1 - a_4 \dot{\omega}_1 - a_5 \omega_1, \\ \Phi_2 &= -a_6 \omega_2, \end{aligned}$$

где a_i ($i = 1, \dots, 5, 6$) — произвольные (2×2) постоянные матрицы такие, что вещественные части корней характеристических уравнений, соответствующих системе

$$\begin{aligned} \omega_1^{(5)} + a_1 \omega_1^{(4)} + a_2 \omega_1^{(3)} + a_3 \ddot{\omega}_1 + a_4 \dot{\omega}_1 + a_5 \omega_1 &= 0, \\ \dot{\omega}_2 + a_6 \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

являются отрицательными. Здесь ω_1 и ω_2 двумерные векторы с элементами ω_1^i, ω_2^i .

После этого получим

$$\Omega_1 u_1^{(3)} = Q_1, \quad \Omega_2 u_2 = Q_2, \quad Q_i = \Phi_i - F_i, \quad i = 1, 2, \quad (39)$$

где Ω_1 и Ω_2 — (2×3) -матрицы, элементы которых, соответственно, равны элементам векторов $(k_i \times e)$ и k_i .

Следовательно, они имеют вид

$$\Omega_1 = \begin{vmatrix} 0 & -(e \cdot k_3) & (e \cdot k_2) \\ (e \cdot k_3) & 0 & -(e \cdot k_1) \end{vmatrix}, \quad \Omega_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

При $\det \|\Omega_i \Omega_i^T\| \neq 0$ общее решение уравнений (39) может быть представлено в виде [13]

$$\begin{aligned} u_1^{(3)} &= \Omega_1^T (\Omega_1 \Omega_1^T)^{-1} Q_1 + [E - \Omega_1^T (\Omega_1 \Omega_1^T)^{-1} \Omega_1] u_1^0, \\ u_2 &= \Omega_2^T (\Omega_2 \Omega_2^T)^{-1} Q_2 + [E - \Omega_2^T (\Omega_2 \Omega_2^T)^{-1} \Omega_2] u_2^0, \end{aligned} \quad (40)$$

где E — единичная (3×3) -матрица; u_1^0, u_2^0 — произвольные трёхмерные вектор-функции.

Таким образом, построено множество уравнений (40) регуляторов, присоединяемых к уравнениям объекта управления (29), которые обеспечивают интегральность и асимптотическую устойчивость «в большом» программного многообразия (28).

Литература

1. Кулебакин В. С. О применимости принципа абсолютной инвариантности в физических реальных системах // Докл. АН СССР. — Т. 68, № 5. — 1948.
2. Петров Б. Н. О реализуемости условий инвариантности // Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды совещания, состоявшегося в г.Киеве 16-20 октября 1958 г. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959. — С. 59–80.
3. Уланов Г. М., Птичкин В. А. Статистическая оптимизация и теория К(D)-изображений // Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды II-го Всесоюзного совещания. — М.: Наука, 1964. — С. 109–114.
4. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. — № 1. — 1939. — С. 49–66.
5. Лузин Н. Н. К изучению матричной теории дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. — № 5. — 1940. — С. 3–66.
6. Кулебакин В. С. Общие основы автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. — № 6. — 1940.
7. Теория инвариантности и ее применение в автоматических устройствах. Труды совещания, состоявшегося в г. Киеве 16–20 октября 1958 г. — Киев: Изд-во АН УССР, 1959. — 384 с.
8. Теория инвариантности в системах автоматического управления. Труды II-го Всесоюзного совещания, состоявшегося в г. Киеве 29 мая–1 июня 1962 г. — М.: Наука, 1964. — 504 с.
9. Теория инвариантности автоматических систем. Труды III-го Всесоюзного совещания по теории инвариантности и ее применению в системах автоматического управления, состоявшегося в г. Киеве 31 мая–5 июня 1966 г. — М.: Наука, 1970. — 420 с.
10. Величенко В. В. О структуре, управляемости и синтезе инвариантных систем // Докл. АН СССР. — Т. 200, № 5. — 1971. — С. 1044–1047.
11. Фоменко О. Н. Квазиинвариантные оптимальные системы автоматического управления // Автоматика и телемеханика. — № 2. — 1970. — С. 145–148.
12. Мухаметзянов И. А. Построение множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по заданной программе // Труды Университета дружбы народов. Теоретическая механика. — М.: Изд-во УДН, 1963. — С. 52–55.
13. Мухаметзянов И. А. Построение уравнений программных движений // Автоматика и телемеханика. — № 10. — 1972. — С. 16–23.
14. Мухаметзянов И. А. Построение систем с асимптотически устойчивыми программными связями // ПММ. — Т. 65, № 5. — 2001. — С. 822–830.

UDC 531.31:62-56

On Construction of the Systems with Quasi-Invariant Program Constraints

I. A. Mukhametzyanov

*Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The procedure of construction of the systems with the quasi-invariant program constraints is proposed.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЕЛЕТРАФИКА

УДК 519.6:621.39

Построение и анализ моделей системы с групповым обслуживанием заявок

К. Е. Самуйлов, Н. В. Першаков, И. А. Гудкова

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Статья посвящена исследованию системы с групповым обслуживанием со случайной длиной поступающей заявки и таймером, ограничивающим время формирования группы. Для простейшей модели типа $M|M^{[K]}|1|\infty$ излагается метод расчёта квантилей функции распределения времени ожидания начала обслуживания. В статье также представлены результаты имитационного моделирования для системы с таймером и примеры численного анализа.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: система массового обслуживания, групповое обслуживание, таймер формирования группы заявок, время ожидания начала обслуживания.

Введение

Системы массового обслуживания (СМО) с групповым обслуживанием заявок находят применение в таких сферах жизнедеятельности человека, как промышленность, транспорт и связь. Начало исследованиям данного класса СМО в середине 1950-х гг. положили работы зарубежных учёных Н. Бейли и Ф. Даунтона [1, 2]. Бейли впервые рассмотрел систему с пуассоновским входящим потоком и переменным, ограниченным сверху размером группы заявок. Методом производящих функций он получил выражения для среднего значения и дисперсии числа заявок в очереди для цепи Маркова, вложенной по моментам, непосредственно предшествующим моментам окончания обслуживания групп заявок. В качестве дисциплины обслуживания им было рассмотрено распределение χ^2 (хи-квадрат) с чётным числом степеней свободы. Даунтон, в продолжение исследований Бейли, нашёл связь производящей функции с преобразованием Лапласа–Стилтьеса функции распределения (ФР) времени ожидания начала обслуживания, получил выражения для среднего значения и дисперсии, а также дал некоторые предварительные замечания к методу вычисления квантилей.

В настоящее время существует достаточное число работ (см. например, список источников в [3]), посвящённых исследованию СМО с групповым обслуживанием и предназначенных для решения различных прикладных задач. С целью унификации результатов этих исследований и их применения к анализу показателей качества современных протоколов передачи данных мы модифицируем и расширяем классификацию Башарина–Кендалла [4] для систем с групповым обслуживанием заявок. Анализ простейшей СМО с групповым обслуживанием проведён с использованием матрично-аналитического метода, а для численного анализа системы с таймером применён метод имитационного моделирования.

1. Система массового обслуживания с ограничением на время формирования группы заявок

Рассмотрим СМО типа $GI_{l_\lambda}|GI^{[X,T]}|1|\langle R, L \rangle$, состоящую из одного обслуживающего прибора и накопителя ограниченной ёмкости. На систему поступает рекуррентный стационарный поток заявок с интенсивностью λ , а длина l_λ поступающей заявки является дискретной случайной величиной (СВ) с распределением $\gamma_m = P\{l_\lambda = m\}$, $m = \overline{1, M}$. Обслуживание заявок производится группами, причём ёмкость накопителя рассчитана на R групп, и предполагается, что обслуживаемые прибором заявки сохраняют за собой место в накопителе и одновременно покидают систему в момент окончания обслуживания. Время формирования каждой группы заявок ограничено таймером $0 \leq T \leq \infty$, и, поэтому, длина X группы является дискретной СВ, максимальное значение которой равно L . Обслуживание группы начинается либо в момент освобождения прибора, если группа сформирована, либо в момент завершения формирования группы, если прибор не занят обслуживанием, а время обслуживания группы заявок распределено по произвольному закону с ФР $B(x)$. На рис. 1 изображена диаграмма, поясняющая процедуру формирования группы, которая считается сформированной либо в момент истечения таймера, либо в момент поступления заявки, длина которой превышает доступное ей место в группе, причём при условии занятости прибора, заявки могут поступать в группу и после истечения таймера.

Заметим, что в частных случаях рассматриваемая СМО была изучена в ряде работ отечественных и зарубежных авторов. Например, в [5] получены вероятностно-временные характеристики (ВВХ) СМО $M_1|G^{[K,0]}|1|\langle \infty, K \rangle \triangleq M|G^{[K,0]}|1|\infty$. В [3] проведено исследование СМО $M_1|G^{[K,\infty]}|1|\langle \infty, K \rangle \triangleq M|G^{[K]}|1|\infty$, кодированной как $M|G^{[K]}|1|FS$ (англ. FS – Fixed Size), в случае, когда размер группы заявок является фиксированным.

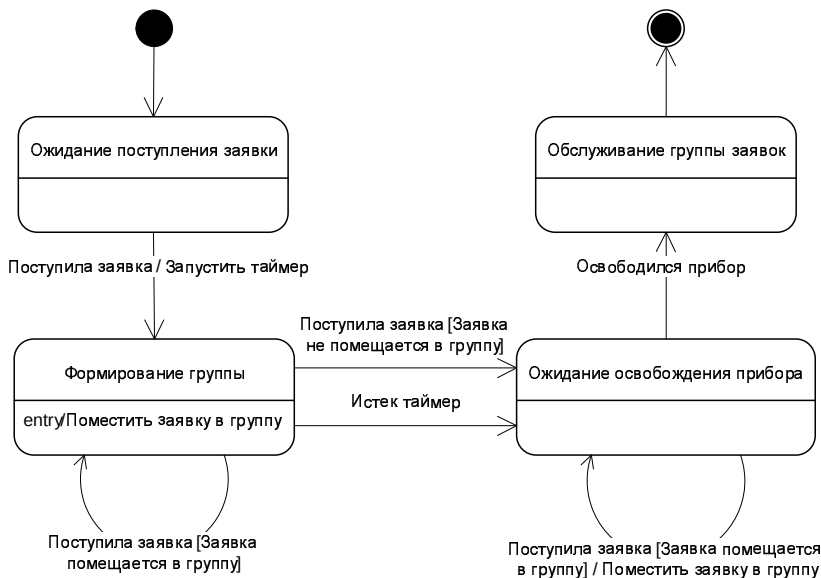


Рис. 1. Диаграмма состояний группы заявок

В следующем разделе статьи для анализа простейшей системы типа $M|M^{[K]}|1|\infty$ применён матрично-аналитический метод [6], а в последнем разделе для численного анализа ВВХ СМО $M_{l_\lambda}|D^{[X,T]}|1|\langle R, L \rangle$ — метод имитационного моделирования [7].

2. Простейшая система с групповым обслуживанием заявок

Рассмотрим СМО типа $M|M^{[K]}|1|\infty$, в которой обслуживание группы заявок распределено экспоненциально с параметром μ . Введём марковский процесс (МП) $X(t)$ как число заявок в очереди в момент времени $t \geq 0$, диаграмма переходов состояний которого имеет вид, показанный на рис. 2. Целью анализа является стационарное распределение $p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) = j\}$, $j \geq 0$ и квантилей w^θ ФР $W(x)$ времени ожидания начала обслуживания.

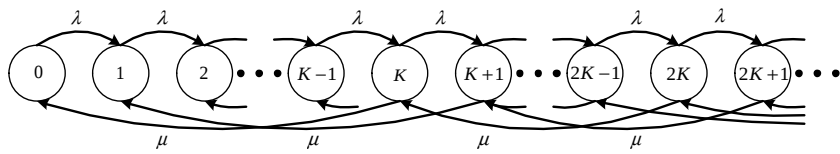


Рис. 2. Диаграмма переходов состояний СМО $M|M^{[K]}|1|\infty$

Предложение 1. Если $K > 1$ и $\rho < K$, то распределение $\{p_j\}$ МП $X(t)$ вычисляется по формулам

$$p_j = \begin{cases} p_{K-1} \frac{\sum_{i=0}^j R^i}{\rho + 1 - R^K}, & j = \overline{0, K-2}, \\ \left[\frac{\frac{\rho}{1-R} + \sum_{i=0}^{K-2} \sum_{k=0}^i R^k}{\rho + 1 - R^K} + 1 \right]^{-1}, & j = K-1, \\ p_{K-1} \frac{1}{\rho + 1 - R^K}, & j = K, \\ p_K R^{j-K}, & j > K, \end{cases} \tag{1}$$

где R – корень уравнения

$$r^{K+1} - (\rho + 1)r + \rho = 0, \quad |r| < 1. \tag{2}$$

Доказательство. Для доказательства воспользуемся матрично-аналитическим методом [6], который применим для неприводимых МП с инфинитезимальными матрицами вида

$$A = \begin{bmatrix} G_0 & G_{-1} & G_{-2} & G_{-3} & \cdots & G_{-n} \\ G_1 & F_0 & F_{-1} & F_{-2} & \cdots & F_{-n+1} & F_{-n} & 0 \\ G_2 & F_1 & F_0 & F_{-1} & \cdots & F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \\ G_3 & F_2 & F_1 & F_0 & \cdots & F_{-n+3} & F_{-n+2} & F_{-n+1} & F_{-n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где G_i и F_i , $i \geq -n$ – прямоугольные матрицы. Нетрудно убедиться, что матрица интенсивностей МП $X(t)$ может быть приведена к виду (3) в случае $n = 1$ путём разбиения её на перечисленные ниже блоки:

$$[G_0]_{ij} = \begin{cases} -\lambda, & i = \overline{1, K}, \quad j = i, \\ \lambda, & i = \overline{1, K-1}, \quad j = i + 1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_i &= (0^{i-1}, \mu, 0^{K-i}), \quad i = \overline{1, K}; \\
\mathbf{G}_i &= \mathbf{0}, \quad i > K, \quad \dim \mathbf{G}_i = K, \quad \forall i; \\
\mathbf{G}_{-1}^T &= (0^{K-1}, \lambda), \quad \dim \mathbf{G}_{-1}^T = K; \\
\mathbf{F}_0 &= -(\lambda + \mu); \\
\mathbf{F}_K &= \mu; \\
\mathbf{F}_i &= 0, \quad i = \{1, \dots, K-1, K+1, \dots\}; \\
\mathbf{F}_{-1} &= \lambda.
\end{aligned}$$

Вероятности p_j , $j > K$ можно выразить через вероятность p_K , если МП $X(t)$ положительно-возвратный, а матрицы, соответствующие ведущим главным минорам матрицы, которая получается вычёркиванием первой строки и первого столбца блоков матрицы $\mathbf{A}$, не являются единичными. Оба условия выполнены, и, следуя [6], получаем

$$p_j = p_K R^{j-K}, \quad j > K, \quad (4)$$

$$R = \lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\Phi}_{i,1},$$

$$\hat{\Phi}_{i,1} = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, & i = \overline{1, K}, \\ \frac{\lambda}{\lambda + \mu (1 - \hat{\Phi}_{i-1,1}^K)}, & i > K. \end{cases} \quad (5)$$

Переходя к пределу в (5), получим уравнение $\mu r^{K+1} - (\lambda + \mu)r + \lambda = 0$ или $(r^K + r^{K-1} + \dots + r^2 + r - \frac{\lambda}{\mu})(r - 1) = 0$, одним из корней которого и является исследуемая величина R . Уравнение $r^K + r^{K-1} + \dots + r^2 + r - \frac{\lambda}{\mu} = 0$, согласно правилу знаков Декарта, имеет ровно один действительный положительный корень. Если $R \geq 1$, то не выполнено условие нормировки для распределения стационарных вероятностей p_j , и поэтому искомое значение $R \in (0; 1)$ будет единственным действительным положительным корнем уравнения (2). Заметим, что значение $R \in (\frac{\rho}{1+\rho}; \frac{(1+K)\rho}{(1+\rho)K})$ может быть найдено одним из итерационных методов.

Вероятности p_j , $j \leq K$ находятся из системы уравнений равновесия

$$\begin{cases} (p_0, \dots, p_{K-1}) \mathbf{G}_0 + \sum_{j=K}^{2K-1} p_j \mathbf{G}_{j-K+1} = \mathbf{0}, \\ (p_0, \dots, p_{K-1}) \mathbf{G}_{-1} - (\lambda + \mu)p_K + \mu p_{2K} = 0, \end{cases}$$

и условия нормировки, что совместно с уравнением (4) доказывает сформулированное предположение. $\square$

Для расчёта квантилей w^θ необходимо найти ФР $W(x)$. Эта функция определена ниже в предложении 2, которое мы приводим без доказательства.

Предложение 2. Пусть $a_j = K(b_j + 1) - j - 1$ — число свободных мест для заявок в формирующейся группе, $b_j = \lceil \frac{j}{K} \rceil$ — число сформированных групп в системе при условии, что в момент поступления заявки в системе находилось j

заявок. Если $K > 1$ и $\rho < K$, то ФР $W(x)$ времени ожидания начала обслуживания вычисляется по формулам

$$W(x) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left[p_j \int_{0+}^x \frac{\lambda^{a_j} t^{a_j-1}}{(a_j-1)!} e^{-\lambda t} dt \int_{0+}^x \frac{\mu^{b_j} t^{b_j-1}}{(b_j-1)!} e^{-\mu t} dt \right], & a_j > 0, b_j > 0, x > 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left[p_j \int_{0+}^x \frac{\mu^{b_j} t^{b_j-1}}{(b_j-1)!} e^{-\mu t} dt \right], & a_j = 0, b_j > 0, x > 0, \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left[p_j \int_{0+}^x \frac{\lambda^{a_j} t^{a_j-1}}{(a_j-1)!} e^{-\lambda t} dt \right], & a_j > 0, b_j = 0, x > 0, \\ 1, & a_j = 0, b_j = 0, x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \tag{6}$$

Вычисление квантилей w^θ ФР $W(x)$ с использованием формул (6) проводится только численно. Для достижения заданной точности ε необходимо найти значения x_1 и x_2 , $0 < W(x_1) < w^\theta < W(x_2) < 1$, такие что $|W(x_2) - W(x_1)| < \varepsilon$. Пример результатов вычислений ФР $W(x)$ по формуле (6) показан на рис. 3 для случая $K = 5$, $\mu^{-1} = 1,25$ и $\rho \in (0; K)$. Из графика видно, что для малых и предельных значений ρ ФР $W(x)$ ведёт себя как распределение с «тяжёлым хвостом», а в сечениях ФР $W(x)$ горизонтальными плоскостями получаем зависимости квантилей w^θ от значений величины нагрузки ρ .

На рис. 4 для наглядности представлена зависимость среднего времени ожидания начала обслуживания, вычисленная с использованием результатов работы [8]. Поведение графика достаточно очевидное, поскольку, чем меньше нагрузка, тем реже поступают заявки и требуется больше времени на формирование группы, и, следовательно, больше значение среднего времени ожидания. При увеличении нагрузки время ожидания убывает до некоторого минимального значения, а затем начинает возрастать, т. к. группы заявок накапливаются в очереди.

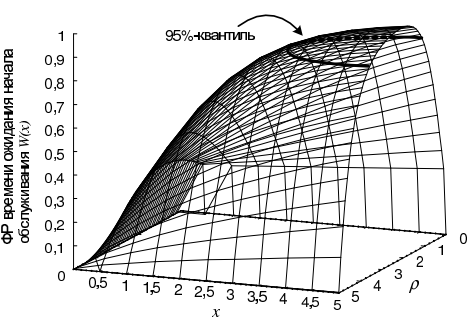


Рис. 3. ФР времени ожидания начала обслуживания и её 95% квантиль

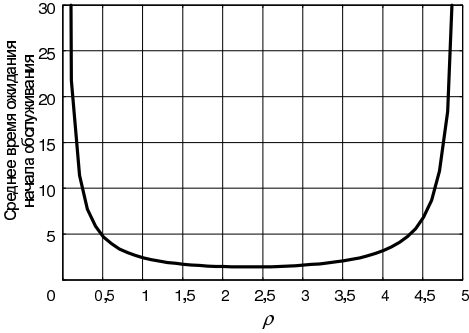


Рис. 4. Среднее время ожидания начала обслуживания

3. Численный анализ модели с таймером

Рассмотрим СМО типа $M_{l_\lambda} | D^{[X,T]} | 1 | \langle R, L \rangle$, для численного анализа ВВХ которой была разработана имитационная модель [7], а для вычисления квантили $w^{0,95}$ использовался метод, предложенный в [9]. Модель была разработана для анализа показателей качества обслуживания протокола управления потоковой передачей (англ. SCTP — Stream Control Transmission Protocol) [10]. Процесс передачи

по протоколу состоит в следующем: поступающие сообщения инкапсулируются в порции данных (заявки), которые объединяются в пакеты (группы заявок). Пакеты передаются по каналу с пропускной способностью 2 Мбит/с, а длины порций данных заданы распределением, указанным в табл. 1, где единицей измерения длины заявки является один байт. Значение таймера T было выбрано

Таблица 1

Распределение длин порций данных (байт)

l_λ	60	36	32
γ_m	0,23	0,41	0,36

равным 12 мс, что соответствует реальным параметрам оборудования компании Cisco Systems, поддерживающего протокол SCTP, а максимальная длина пакета $L = 1468$ байт, исходя из ограничений на максимальную длину кадра Ethernet.

Как видно из рис. 5, график среднего времени пребывания заявки в системе (задержки передачи сообщения в канал) имеет три экстремальные точки, определяющих четыре промежутка монотонности. Для их объяснения воспользуемся зависимостью среднего времени ожидания начала обслуживания (задержки в очереди на передачу) от нагрузки. При сравнительно низкой нагрузке (на рисунке эта область значений обозначена римской цифрой I) интенсивность поступления заявок мала, время формирования группы определяет таймер и, следовательно, величина задержки близка к значению таймера. С ростом нагрузки время задержки быстро убывает до того момента, когда среднее число заявок в группе, находящейся на обслуживании, становится более одной. При последующем увеличении интенсивности поступления заявок (область II) время формирования группы по-прежнему превышает среднее время обслуживания заявки, которое ещё не достигло максимального значения. Этим обуславливается дальнейшее убывание величины задержки, что в сравнении с предыдущим интервалом происходит медленнее, поскольку число заявок в группе увеличивается, приводя к росту времени их обслуживания. После того как группа достигает максимальной длины $L = 1468$ (область III), чем больше становится нагрузка, тем меньше на формирование группы влияет таймер, но, как и на только что рассмотренном интервале, время формирования группы превышает время обслуживания, что приводит к дальнейшему более быстрому уменьшению задержки. И, наконец, когда среднее время обслуживания превысит среднее время формирования группы (область IV), заявки начинают накапливаться в накопителе, способствуя увеличению среднего времени ожидания начала обслуживания.

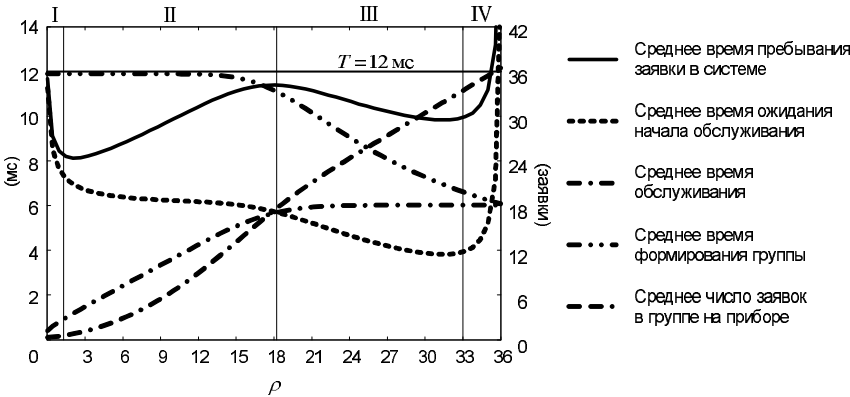


Рис. 5. Средние значения вероятностных характеристик СМО $M_{l_\lambda} | D^{[X,12]} | 1 | (\infty, 1468)$

Заключение

Современные прикладные задачи, и в частности, задачи, связанные с анализом показателей качества функционирования протоколов сетей связи, требуют уточнения имеющихся и разработки новых методов исследований. Так, оказывается, что процесс передачи данных по протоколу SCTP — новому решению, предназначенному для обеспечения работы приложений с высокими требованиями к показателям качества обслуживания — может быть описан в виде СМО с ограничением на время формирования группы заявок.

В статье представлена часть результатов исследований системы с групповым обслуживанием с учётом случайной длины заявки и таймера, ограничивающего время формирования группы. Для простейшей модели получен метод расчёта квантилей ФР времени ожидания начала обслуживания и приведены результаты имитационного моделирования для системы с таймером.

В заключении авторы выражают искреннюю признательность профессору кафедры систем телекоммуникаций РУДН Наумову В. А. за помощь и ценные советы в процессе исследований.

Литература

1. *Bailey N.* On Queueing Processes with Bulk Service // *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.* — Vol. 16, No 1. — 1954. — Pp. 80–87.
2. *Downton F.* Waiting Times in Bulk Service Queues // *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B.* — Vol. 17, No 2. — 1955. — Pp. 256–261.
3. *Tadj L.* Explicit Solution of a Quorum Queueing System // *Stochastic Analysis and Applications.* — Vol. 21. — 2003. — Pp. 703–717.
4. *Баширин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А.* Массовое обслуживание в телефонии. — М.: Наука, 1968.
5. *Саати Т. Л.* Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. — М.: Советское Радио, 1971.
6. *Naoumov V. A.* Matrix-Analytic Solution for a Class of Markov Processes with Toeplitz-like Generator Matrices — *Advances in Matrix-Analytic Methods for Stochastic Models* // *Notable Publications.* — New Jersey, 1998.
7. *Гудкова И. А., Першаков Н. В., Самуйлов К. Е.* Имитационная модель для анализа показателей качества функционирования протокола SCTP // Труды 62-ой Научной сессии, посвященной Дню радио. — Москва: РНТОРЭС, 2007. — С. 231–233.
8. *Самуйлов К. Е., Чукарин А. В., Першаков Н. В.* Разработка модели функционирования протокола управления потоковой передачей // Вестник РУДН, серия «Прикладная и компьютерная математика». — Т. 4, № 1. — 2005. — С. 40–47.
9. *Jain R., Chlamtac I.* The P2 Algorithm for Dynamic Calculation of Quantiles and Histograms without Storing Observations // *Communications of the ACM.* — Vol. 28. — 1985. — Pp. 1076–1085.
10. *Гайдамака Ю. В., Першаков Н. В., Чукарин А. В.* Модель протокола SCTP и ее применение к анализу характеристик сигнального трафика в сетях сотовой подвижной связи // *Электросвязь.* — № 8. — 2007.

UDC 519.6:621.39

Batch Service Queue Model Design and Analysis

K. E. Samouylov, N. V. Pershakov, I. A. Gudkova

*Telecommunications Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

In this paper we introduce an extended Basharin–Kendall queuing notation with queuing system $GI_{l_\lambda}|GI^{[X,T]}|1|\langle R, L \rangle$ in which jobs are served in batches, each job having a random length and the batch construction time limited to a maximum. The simplest fixed-size batch queue model $M|M^{[K]}|1|\infty$ is studied. Expressions are obtained for the distribution function of the waiting time and a brief discussion is included of its quantiles computation. We also develop a simulation model and present an example of its application to estimate quality of service in telecommunication networks.

УДК 621.39

Разработка вероятностной модели для анализа показателей качества протокола инициирования сеансов связи

К. Е. Самуйлов, М. В. Лузгачев, О. Н. Плаксина

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

В статье представлены результаты исследования показателей качества протокола инициирования сеансов связи. На основе принципов функционирования протокола разработана его математическая модель и предложены методы анализа с учётом вероятности ошибочной передачи сообщений, в том числе аналитический метод расчёта времени установления соединения и вероятности потери вызова.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: протокол инициирования сеансов связи, среднее время установления соединения, вероятность потери вызова, сеть массового обслуживания.

1. Построение математической модели установления соединения

Протокол инициирования сеансов связи (Session Initiation Protocol, SIP) предназначен для инициации, модификации и завершения сеансов связи в IP-сетях. Одним из главных преимуществ протокола является возможность реализации на его базе широкого спектра услуг для мультисервисных сетей [1–3].

Спецификация протокола SIP предусматривает возможность использования различных транспортных технологий — TCP, SCTP, UDP, причём выбор протокола транспортного уровня влияет на механизмы обеспечения надёжной доставки сигнальных сообщений. Отметим, что на практике, во избежание дополнительных накладных расходов при установлении и разъединении соединения, чаще используется протокол с негарантированной доставкой UDP.

На рис. 1 показана диаграмма процедуры обмена сообщениями по протоколу SIP в процессе установления соединения между узлами А и В. Из диаграммы видно, что случайная величина (СВ) Δ_{SIP} времени установления соединения между узлами А и В определяется по формуле

$$\Delta_{\text{SIP}} = \Delta_{\text{INVITE}} + \Delta_{100 \text{ Trying}} + \Delta_{183 \text{ Session Progress}} + \Delta_{200 \text{ OK}} + \Delta_{\text{ACK}} + 4\Delta_{\text{IP}} + \Delta, \quad (1)$$

где Δ_{IP} — задержка передачи сообщения по IP-сети, Δ — время реакции вызываемого абонента, а остальные составляющие СВ Δ_{SIP} равны задержкам передачи соответствующих сообщений с учётом их времени ожидания в очереди на передачу в узле А или В. Отметим, что значение величины Δ зависит только от поведения вызываемого абонента (время от звонка до снятия трубки), в связи с чем принято не учитывать эту величину при расчёте времени установления соединения, т. е. далее полагаем $\Delta = 0$.

Для анализа характеристик СВ Δ_{SIP} предлагается модель в виде сети массового обслуживания (СеМО) [4, 5], изображённая на рис. 2, где цифрами показана последовательность перехода заявок (сообщений) в соответствии с диаграммой на рис. 1. Узлы 1 и 2 СеМО моделируют передачу сообщений в узлах А и В с учётом их сериализации (постановки бит сообщений в канал) и времени ожидания в очереди, а Узел 3 моделирует задержку Δ_{IP} передачи сообщений по IP-сети.

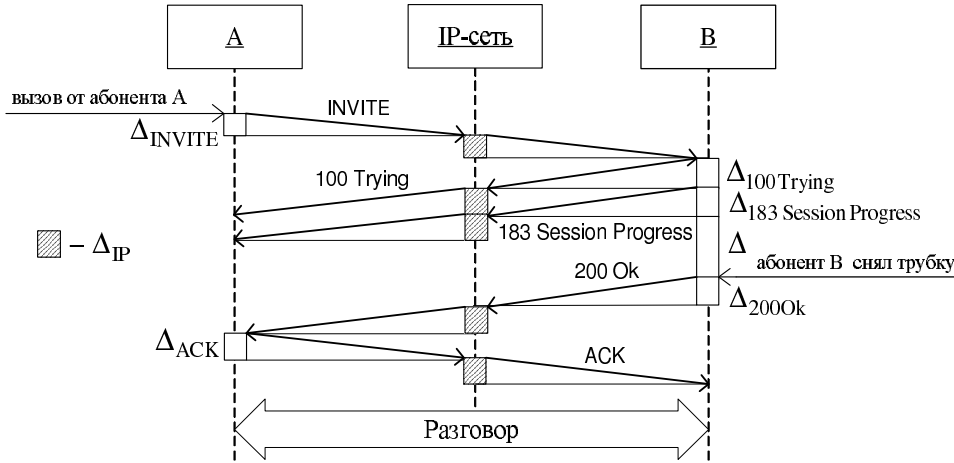


Рис. 1. Диаграмма установления соединения

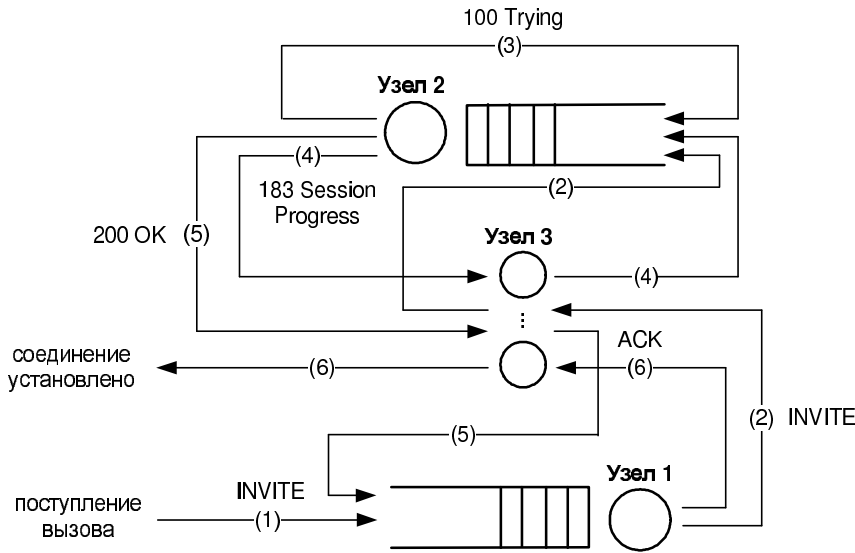


Рис. 2. Модель установления соединения

Обозначим через g вероятность ошибочной передачи IP-пакета. Если пакет содержит сообщение **INVITE**, **200 OK** или **ACK**, то по протоколу на передающей стороне по истечении таймера должна быть реализована процедура повторной передачи. Для сообщений **100 Trying** и **183 Session Progress** протоколом предусмотрен специальный механизм надёжной передачи [2] и, поэтому, предполагаем, что эти сообщения передаются без ошибок.

На рис. 3 изображены диаграммы передачи сообщений, учитывающие их многократную ретрансляцию вследствие ошибочных передач. Слева на рисунке показана диаграмма для случая ошибочной передачи сообщений **INVITE** и **200 OK**, а справа — для случая ошибочной передачи сообщения **ACK**, которая по протоколу влечёт за собой ретрансляцию сообщения **200 OK** и, затем, ретрансляцию сообщения **ACK**.

Поясним механизм ретрансляции сообщений **INVITE**. В момент начала передачи сообщения включается таймер со значением $64 \cdot T_1$, и, если по истечении времени T_1 не будет получен ответ **100 Trying**, то сообщение передаётся повторно. Ретрансляции могут производиться до истечения таймера, при этом время между повторными передачами каждый раз удваивается. Если все возможные передачи

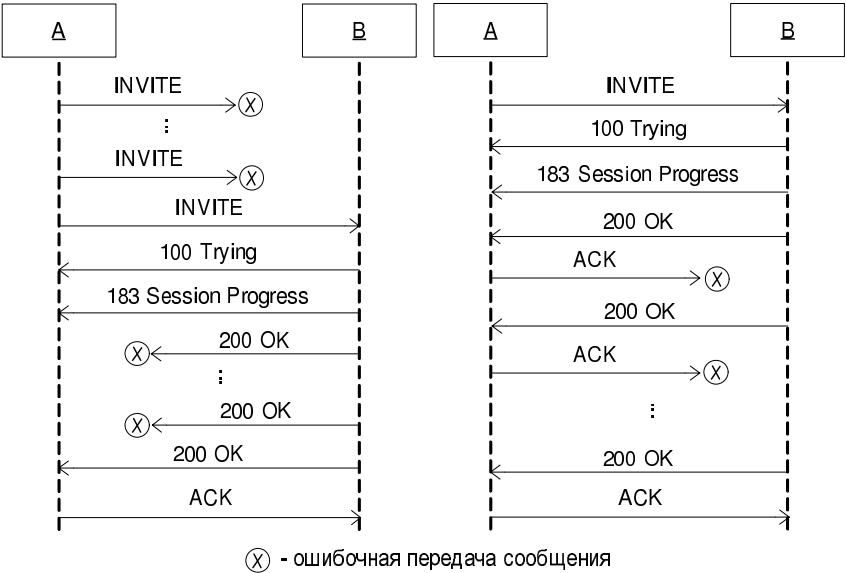


Рис. 3. Диаграммы установления соединения с учётом ретрансляции сообщений, переданных с ошибками

были произведены с ошибками, то происходит отказ в установлении соединения и вызов считается потерянным. Для примера, на рис. 4 показан фрагмент диаграммы процедуры обмена сообщениями для случая трёхкратной ошибочной передачи сообщения INVITE.

Ретрансляция сообщения 200 ОК осуществляется аналогично за исключением того, что время перед ретрансляциями удваивается, пока не достигнет значения T_2 , а затем устанавливается равным T_2 .

Обозначим m^* и n^* максимальное число возможных передач сообщений INVITE и 200 ОК соответственно. Согласно [1] рекомендованное значение $T_1 = 0,5$ с, а $T_2 = 4$ с, и, в таком случае, ретрансляции сообщений INVITE будут происходить через временные интервалы 0,5 с, 1 с, 2 с, 4 с, 8 с, 16 с, а передачи сообщения 200 ОК — через интервалы 0,5 с, 1 с, 2 с, 4 с, 4 с, и т.д., при этом значения $m^* = 7$ и $n^* = 11$.

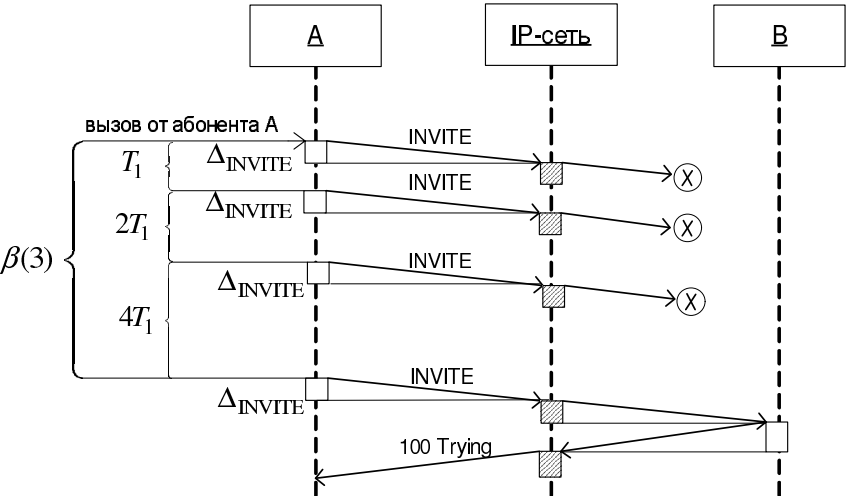


Рис. 4. Пример диаграммы процедуры ретрансляции сообщения INVITE

Обозначим $\beta(m)$ время, затраченное на m последовательных ретрансляций сообщения INVITE до момента начала его успешной передачи. Пример определения $\beta(3)$ показан на диаграмме рис. 4, и, нетрудно убедиться, что величина $\beta(m)$ задаётся формулой

$$\beta(m) = \sum_{i=1}^m 2^{i-1} T_1, \quad 0 \leq m < m^*. \quad (2)$$

Аналогично определяется величина $\gamma(n)$ как время, затраченное на n ретрансляций сообщения 200 OK, а формула, связывающая значение величины $\gamma(n)$ со значениями таймеров T_1 и T_2 , имеет вид

$$\gamma(n) = \sum_{i=1}^n \min(2^{i-1} T_1, T_2), \quad 0 \leq n < n^*. \quad (3)$$

С учётом введённых обозначений и (1), СВ $\Delta_{\text{SIP}}(m, n)$, учитывающая ретрансляции сообщений INVITE и 200 OK, определяется по формуле

$$\Delta_{\text{SIP}}(m, n) = \Delta_{\text{SIP}} + \beta(m) + \gamma(n). \quad (4)$$

На рис. 5 показан фрагмент модели СеМО с учётом ретрансляции сообщения INVITE (или 200 OK), которая реализуется по следующему сценарию:

- (1) на Узел 1 (Узел 2) поступает сообщение INVITE (200 OK);
- (2) с вероятностью $1 - g$ сообщение передано без ошибок и направляется в Узел 3;
- (3) с вероятностью g сообщение передано с ошибкой и направляется в Узел 4, моделирующий описанную выше процедуру ожидания ретрансляции;
- (4) процедура повторяется $k \leq m^*$ ($k \leq n^*$) раз, причём, если на последней попытке сообщение передано с ошибкой, установление соединения прекращается и вызов считается потерянным.

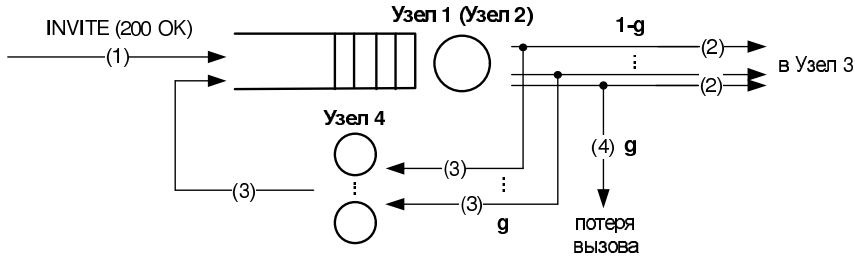


Рис. 5. Фрагмент СеМО для случая ошибочной передачи сообщений INVITE и 200 OK

На рис. 6 изображён фрагмент СеМО с учётом ошибочных передач сообщения АСК, причём сообщение 200 OK считаем переданным правильно. Процедура ретрансляции производится по следующему сценарию:

- (1) на Узел 2 поступает сообщение 183 Session Progress и, в момент поступления, преобразуется в сообщение 200 OK;
- (2) сообщение 200 OK через Узел 3 маршрутизируется в Узел 1 и, в момент поступления в этот узел, преобразуется в сообщение АСК;
- (3) с вероятностью $1 - g$ сообщение АСК передано без ошибок и соединение считается установленным;
- (4) с вероятностью g сообщение АСК передано с ошибкой, маршрутизируется в Узел 4, и, в момент поступления в этот узел, преобразуется в сообщение 200 OK;
- (5) после процедуры ожидания ретрансляции в Узле 4 сообщение 200 OK маршрутизируется в Узел 2 для повторной передачи;
- (6) процедура повторяется $k \leq n^*$ раз, на последней попытке установление соединения прекращается, и вызов считается потерянным.

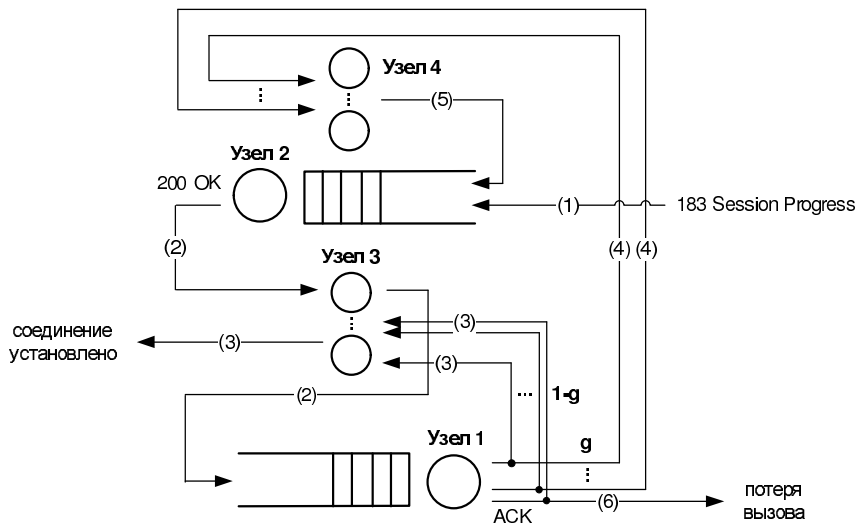


Рис. 6. Фрагмент СеМО для случая ошибочной передачи сообщения ACK

Теперь ясно, что модель установления соединения по протоколу SIP может быть представлена в виде СеМО с неоднородными заявками (ВСМР-сеть, [6, 7]), состоящей из узлов $\mathcal{M} = \{1, 2, 3, 4\}$, и в которой циркулируют заявки $\mathcal{R} = \{1, \dots, R\}$, $R = m^* + 2n^* + 2$, классов. Следует пояснить, что каждой из возможных ретрансляций сообщений поставлен в соответствие отдельный класс заявки, как показано в табл. 1. Например, для возможных трансляций сообщений INVITE зарезервированы заявки с номерами классов от 1 до m^* , которым присвоен единый идентификатор r_1 .

Таблица 1

Класс заявки	Сообщение
$r_1 \in \{1, \dots, m^*\}$	INVITE
$r_2 \in \{m^* + 1, \dots, m^* + n^*\}$	ACK
$r_3 = m^* + n^* + 1$	100 Trying
$r_4 = m^* + n^* + 2$	183 Session Progress
$r_5 \in \{m^* + n^* + 3, \dots, m^* + 2n^* + 2\}$	200 OK

Будем называть (i, r) -заявкой заявку класса r , находящуюся в узле i и обозначим $\mathcal{L}' = \{(i, r) : i \in \mathcal{M}, r \in \mathcal{R}\}$ — множество всех допустимых типов заявок. Маршрутизацию заявок в сети описывает полустохастическая матрица $\Theta' = (\theta_{ir,js}), i, j \in \mathcal{M}, r, s \in \mathcal{R}$.

Для описания выхода заявок из сети введём дополнительные узлы с номерами 5 и 6, соответствующие успешному установлению соединения и потере вызова, и пусть при переходе в эти узлы заявка меняет класс на $r_0 = 0$. Тогда $\mathcal{L}'' = \{(i, 0) : i \in \{5, 6\}\}$ — дополнительное множество заявок. Переходы между множеством $\mathcal{L} = \mathcal{L}' \cup \mathcal{L}''$ заявок описывает расширенная стохастическая матрица Θ , ненулевые элементы которой показаны в табл. 2.

Таблица 2

$\theta_{ir,js}$	Значения индексов $(i, r), (j, s)$
g	$(1, r), (4, r), \quad r = \overline{1, m^* - 1}$
	$(1, r), (4, r + n^* + 2), \quad r = \overline{m^* + 1, m^* + n^* - 1}$
	$(2, r), (4, r), \quad r = \overline{m^* + n^* + 3, m^* + 2n^* + 1}$
	$(1, m^*), (6, 0); (1, m^* + n^*), (6, 0); (2, m^* + n^* + 2), (6, 0)$
$1 - g$	$(1, r), (3, r), \quad r = \overline{1, m^* + n^*}$
	$(2, r), (3, r), \quad r = \overline{m^* + n^* + 3, m^* + 2n^* + 2}$
1	$(2, m^* + n^* + 1), (2, m^* + n^* + 2)$
	$(2, m^* + n^* + 2), (3, m^* + n^* + 2)$
	$(3, m^* + n^* + 2), (2, m^* + n^* + 3)$
	$(3, r), (2, m^* + n^* + 1), \quad r = \overline{1, m^*}$
	$(3, r), (1, r - n^* - 2), \quad r = \overline{m^* + n^* + 3, m^* + 2n^* + 2}$
	$(4, r), (1, r + 1), \quad r = \overline{1, m^* - 1}$
	$(4, r), (2, r + 1), \quad r = \overline{m^* + n^* + 3, m^* + 2n^* + 1}$
	$(3, r), (5, 0), \quad r = \overline{m^* + 1, m^* + n^*}$

2. Метод расчёта вероятностно-временных характеристик процесса установления соединения

Рассмотрим блуждание некоторой заявки по узлам сети, и пусть $\xi_n = (i_n, r_n)$ — состояние, в котором заявка находится на шаге n , $n \geq 0$. Тогда процесс блуждания описывает однородная цепь Маркова (ЦМ) $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$, вложенная по моментам поступления заявок в узлы сети, с пространством состояний $\mathcal{L}$ и матрицей переходных вероятностей Θ , причём состояния из множества $\mathcal{L}''$ являются поглощающими, а начальное распределение $\pi_{i,r}(0) = P\{\xi_0 = (i, r)\}$ имеет вид $\pi_{1,1}(0) = 1$, $\pi_{i,r}(0) = 0$, $(i, r) \in \mathcal{L} \setminus \{(1, 1)\}$.

Для расчёта вероятности P успешного установления соединения определим траектории ЦМ $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$ вида $\omega_j^{(i,0)} = ((1, 1), (i_1^j, r_1^j), \dots, (i, 0))$, заканчивающиеся в одном из поглощающих состояний $(i, 0) \in \mathcal{L}''$, и пусть $\Omega^{(i,0)} = \bigcup_j \{\omega_j^{(i,0)}\}$ — множество таких траекторий. Тогда вероятность успешного установления соединения определяется по формуле

$$P = \sum_j P(\omega_j^{(5,0)}). \quad (5)$$

Рассмотрим состояние $(4, \cdot)$ и определим случайную величину $\eta \in \{0, \dots, m^* + n^* - 2\}$, равную суммарному числу попаданий заявки в это состояние во время её блуждания до момента поглощения в состоянии $(i, 0) \in \mathcal{L}''$. Пусть $f_k^{(i,0)} = P\{\eta = k | \Omega^{(i,0)}\}$ — вероятность k попаданий в состояние $(4, \cdot)$, т. е. вероятность k ретрансляций соответствующих сообщений. В качестве примера вычислим вероятности $f_0^{(5,0)}$ и $f_1^{(5,0)}$:

$$f_0^{(5,0)} = \theta_{1,1,1,3} \theta_{1,3,2,15} \theta_{2,15,2,16} \theta_{2,16,3,16} \theta_{3,16,2,17} \theta_{2,17,3,17} \theta_{3,17,1,8} \theta_{1,8,3,8} \theta_{3,8,5,0} = (1-g)^3;$$

$$\begin{aligned}
f_1^{(5,0)} = & \\
= & \theta_{1,1,4,1} \theta_{4,1,1,2} \theta_{1,2,3,2} \theta_{3,2,2,15} \theta_{2,15,2,16} \theta_{2,16,3,16} \theta_{3,16,2,17} \theta_{2,17,3,17} \theta_{3,17,1,8} \theta_{1,8,3,8} \theta_{3,8,5,0} + \\
& + \theta_{1,1,3,1} \theta_{3,1,2,15} \theta_{2,15,2,16} \theta_{2,16,3,16} \theta_{3,16,2,17} \theta_{2,17,4,17} \theta_{4,17,2,18} \theta_{2,18,3,18} \theta_{3,18,1,9} \theta_{1,9,3,9} \theta_{3,9,5,0} + \\
& + \theta_{1,1,3,1} \theta_{3,1,2,15} \theta_{2,15,2,16} \theta_{2,16,3,16} \theta_{3,16,2,17} \theta_{2,17,3,17} \theta_{3,17,1,8} \theta_{1,8,4,17} \theta_{4,17,2,18} \theta_{2,18,3,18} \times \\
& \times \theta_{3,18,1,9} \theta_{1,9,3,9} \theta_{3,9,5,0} = g(3-g)(1-g)^3.
\end{aligned}$$

Из определения $f_k^{(i,0)}$ и (5) следует, что вероятность P может быть рассчитана по формуле

$$P = \sum_{k=0}^{m^*+n^*-2} f_k^{(5,0)}, \quad (6)$$

причём вероятности $f_k^{(i,0)}$ можно представить в виде

$$f_k^{(i,0)} = \sum_{\substack{m+n=k \\ 0 \leq m < m^* \\ 0 \leq n < n^*}} p_{mn}^{(i,0)}, \quad (7)$$

где $p_{mn}^{(i,0)}$ — вероятность того, что за время установления соединения сообщение INVITE будет ретранслировано m раз, а сообщение 200 OK — n раз, включая ретрансляции по причине ошибочной передачи сообщения АСК.

Введём множества $\Omega_{mn}^{(i,0)}$ траекторий, содержащих ровно m переходов $(1, r_1) \rightarrow (4, \cdot)$, а также в сумме n переходов $(2, r_5) \rightarrow (4, \cdot)$ и $(2, r_5) \rightarrow (1, r_2) \rightarrow (4, \cdot)$. Фрагмент графа ЦМ $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$, иллюстрирующий эти переходы, изображён на рис. 7.

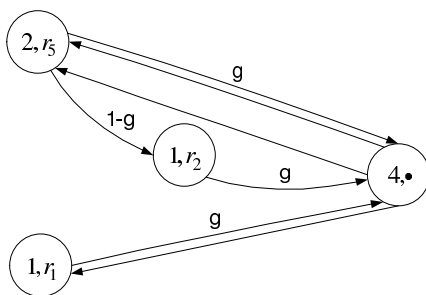


Рис. 7. Фрагмент графа ЦМ $\{\xi_n\}_{n \geq 0}$, описывающий переходы в состояние $(4, \cdot)$

Тогда вероятности $p_{mn}^{(i,0)}$ определяются формулой

$$p_{mn}^{(i,0)} = P \left\{ \omega \in \Omega_{mn}^{(i,0)} \right\}, \quad (8)$$

и, несложно убедиться, что

$$\begin{aligned}
p_{mn}^{(5,0)} = P \left\{ \omega \in \Omega_{mn}^{(5,0)} \right\} &= g^m \left(\sum_{i=0}^n C_n^i g^i (g(1-g))^{n-i} \right) (1-g)^3 = \\
&= g^{m+n} (2-g)^n (1-g)^3, \quad 0 \leq m < m^*, \quad 0 \leq n < n^*. \quad (9)
\end{aligned}$$

С учётом (6)–(9), вероятность $P = P(g)$ успешного установления соединения вычисляется по формуле

$$P(g) = (1 - g^{m^*}) (1 - g^{n^*} (2 - g)^{n^*}). \quad (10)$$

Перейдём к анализу СВ $\Delta_{\text{SIP}}(\cdot, \cdot) = \Delta_{\text{SIP}}$ — времени установления соединения по протоколу SIP, математическое ожидание которой определяется из формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} M(\Delta_{\text{SIP}}) &= \sum_{m=0}^{m^*-1} \sum_{n=0}^{n^*-1} P(\tilde{B}_{mn}^{(5,0)}) M(\Delta_{\text{SIP}} | \tilde{B}_{mn}^{(5,0)}) = \\ &= \sum_{m=0}^{m^*-1} \sum_{n=0}^{n^*-1} \frac{p_{mn}^{(5,0)}}{P(g)} M(\Delta_{\text{SIP}} | \tilde{B}_{mn}^{(5,0)}), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} B^{(5,0)} &= \{\omega \in \Omega^{(5,0)}\}; \\ B_{mn}^{(5,0)} &= \{\omega \in \Omega_{mn}^{(5,0)}\}; \quad \tilde{B}_{mn}^{(5,0)} = B_{mn}^{(5,0)} | B^{(5,0)}, \quad 0 \leq m < m^*, \quad 0 \leq n < n^*. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности изложения, примем $\Delta_{\text{INVITE}} = \Delta_{\text{ACK}} = \Delta_1$, $\Delta_{100 \text{ Trying}} = \Delta_{183 \text{ Session Progress}} = \Delta_{200 \text{ OK}} = \Delta_2$, $\Delta_{\text{IP}} = \Delta_3 = \text{const}$, где Δ_i — СВ времени пребывания заявки в i -узле рассматриваемой СеМО. В таком случае, с учётом формулы (4), имеем

$$\begin{aligned} M(\Delta_{\text{SIP}} | \tilde{B}_{mn}^{(5,0)}) &= \\ &= 2M\Delta_1 + 3M\Delta_2 + 4M\Delta_{\text{IP}} + M(\beta(\cdot) | \tilde{B}_{mn}^{(5,0)}) + M(\gamma(\cdot) | \tilde{B}_{mn}^{(5,0)}). \end{aligned} \quad (12)$$

Пусть $v_i = M\Delta_i$, и, подставив (12) в (11), получим формулу для расчёта $M(\Delta_{\text{SIP}})$ в виде

$$M(\Delta_{\text{SIP}}) = \sum_{m=0}^{m^*-1} \sum_{n=0}^{n^*-1} \frac{p_{mn}^{(5,0)}}{P(g)} \cdot (2v_1 + 3v_2 + 4v_3 + \beta(m) + \gamma(n)). \quad (13)$$

Таким образом, мы получили метод для вычисления основных вероятностно-временных характеристик процесса установления соединения по протоколу SIP.

3. Численный анализ

Примем значения таймеров $T_1 = 0,5$ с, $T_2 = 4$ с в соответствии с требованиями международных стандартов [1]. Длины сообщений SIP, с учётом заголовков протоколов нижних уровней, выберем согласно [3] — среднюю длину сообщения INVITE примем равной 650 байт, сообщения 100 Trying — 260 байт, сообщения 183 Session Progress — 530 байт, сообщения 200 OK — 480 байт, сообщения ACK — 260 байт.

Произведём расчёт среднего времени установления соединения по формуле (13). Для этого примем величину задержки сообщений SIP по IP-сети $v_3 = 0,1$ с, а для вычисления среднего времени v_1 и v_2 пребывания заявок в узлах с номерами 1 и 2 рассчитаем интенсивности потоков заявок в этих узлах.

Интенсивности λ_{ir} , $(i, r) \in \mathcal{L}'$, потоков заявок класса r в узле i вычисляются из системы уравнений (14), имеющей единственное решение:

$$\begin{cases} \lambda_{1,1} = \sum_{(j,s) \in \mathcal{L}'} \lambda_{js} \theta_{js;1,1} + \lambda, \\ \lambda_{ir} = \sum_{(j,s) \in \mathcal{L}'} \lambda_{js} \theta_{js;ir}, \quad (i, r) \in \mathcal{L}' \setminus \{(1,1)\}, \end{cases} \quad (14)$$

где λ — интенсивность потока заявок из внешнего источника на Узел 1 или интенсивность поступления вызовов. Тогда средняя длина $\bar{l}_i$ сигнального сообщения, поступающего на i -й узел, может быть получена по формуле

$$\bar{l}_i = \frac{\sum_{(i,r) \in \mathcal{L}_i} \lambda_{i,r} l_r}{\sum_{(i,r) \in \mathcal{L}_i} \lambda_{i,r}}, \quad i = 1, 2, \quad (15)$$

где $\mathcal{L}_i$ — множество заявок, обслуживаемых в узле i , а l_r — длины соответствующих сообщений SIP. Среднее время b_i обслуживания в узлах определим из формулы

$$b_i = \frac{\bar{l}_i}{C}, \quad (16)$$

где C — ширина полосы пропускания. Таким образом, с учётом (14)–(16), для случая экспоненциального обслуживания в узлах с номерами 1 и 2 среднее время v_i пребывания в этих узлах определяется формулой

$$v_i = \frac{b_i}{1 - \rho_i}, \quad i = 1, 2. \quad (17)$$

На рис. 8 изображён график зависимости вероятности $\bar{P}(g)$ потери вызова от вероятности g ошибочной передачи сообщения. Как видно из графика, даже при ненадёжной работе IP-сети, когда с ошибкой передаётся один из 10 пакетов, вероятность потери вызова не превышает 10^{-7} , что позволяет говорить об эффективности механизмов ретрансляции сигнальных сообщений SIP, обеспечивающих высокую надёжность установления соединения.

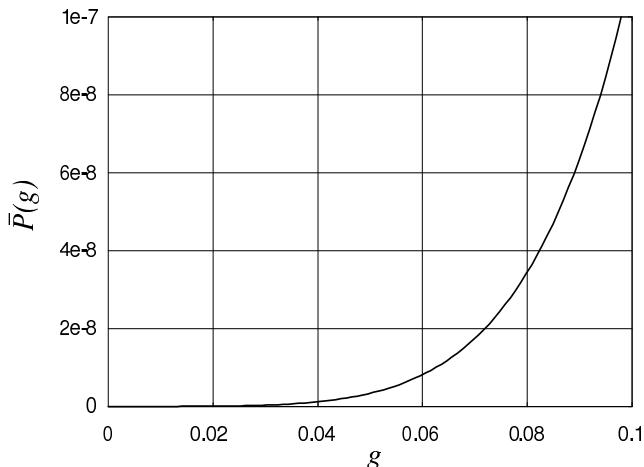


Рис. 8. Вероятность потери вызова

На рис. 9 показана зависимость среднего времени установления соединения $M(\Delta_{\text{SIP}})$ от интенсивности λ поступления вызовов для случаев, когда длина сообщения имеет экспоненциальное или детерминированное распределение. Согласно [8], вероятность потери IP-пакета в сетях следующего поколения не должна превышать 10^{-3} , именно это значение использовалось при построении графиков на рис. 9. Анализ результатов вычислений показывает, что при допустимых значениях вероятности $g \leq 10^{-3}$ среднее время установления соединения не превосходит 0,6 с, это удовлетворяет нормам Международного союза электросвязи, устанавливающего ограничение 3 с на время установления соединения [9]. Отметим, что аналогичные результаты были получены с помощью имитационного моделирования и измерений в ряде работ, в частности, в [10], где диапазон времени установления соединения изменяется от 0,49 до 1 с.

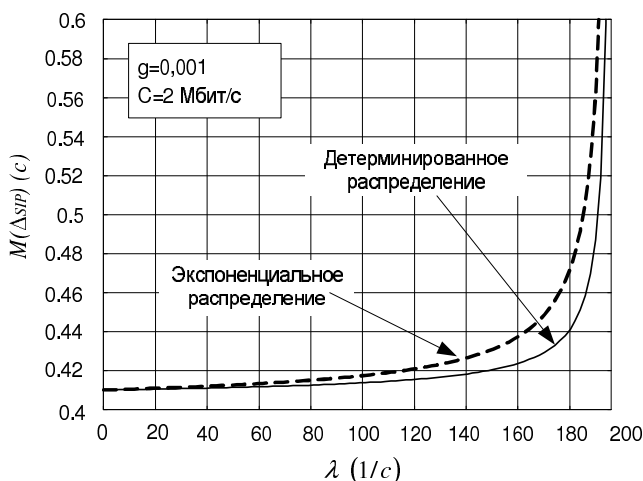


Рис. 9. Зависимость времени установления соединения от интенсивности поступления вызовов

Заключение

Разработка методов анализа показателей качества функционирования протокола SIP является важной прикладной задачей, решение которой может быть использовано на этапе проектирования сетей следующего поколения (NGN — Next Generation Networks), а также оценки качества предоставляемых услуг следующего поколения (NGS — Next Generation Services). С этой целью в статье предложена математическая модель в виде сети массового обслуживания и метод расчёта вероятности успешного установления соединения и среднего времени установления соединения.

В ближайшем будущем перед авторами стоит задача усовершенствования представленных методов, позволяющая снять ряд упрощающих предположений, а также разработка методов анализа при использовании в качестве транспорта протоколов TCP (Transmission Control Protocol) и SCTP (Stream Control Transport Protocol) и учёт задержек, связанных с работой протокола RTCP (RTP Control Protocol).

Литература

1. SIP: Session Initiation Protocol / J. Rosenberg, H. Schulzrinne, G. Camarillo et al // IETF RFC 3261. — 2002.
2. Rosenberg J., Schulzrinne H. Reliability of Provisional Responses in the Session Initiation Protocol (SIP) // IETF RFC 3262. — 2002.
3. Hannu H. Signaling Compression (SigComp) Requirements & Assumptions // IETF RFC 3322. — 2003.
4. Башарин Г. П., Толмачев А. Л. Теория сетей массового обслуживания и ее приложения к анализу информационно-вычислительных систем // Итоги науки и техники. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. — Т. 21. — 1983.
5. Бочаров П. П., Печинкин А. В. Теория массового обслуживания. — М.: РУДН, 1995.
6. Open, Closed, and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers / F. Baskett, K. M. Chandy, R. R. Muntz, F. G. Palacios // Journal of the ACM. — Vol. 22, No 2. — 1975. — Pp. 248–260.
7. Вишне夫斯基 В. М. Теоретические основы проектирования компьютерных сетей. — М.: Техносфера, 2003.

8. ITU-T Recommendation Y.1541, Network Performance Objectives for IP-Based Services. — 2002.
9. ITU-T Recommendation E.721, Network Grade of Service Parameters and Target Values for Circuit-Switched Services in the Evolving ISDN. — 1991.
10. Wu J.-S., Wang P. Y. The Performance Analysis of SIP-T Signaling System in Carrier Class VoIP Network // Proceedings of the 17th International Conference on Advanced Information Networking and Applications (AINA'03). — 2003.

UDC 621.39

Modelling SIP Connections with Open Multiclass Queueing Networks

K. E. Samouylov, M. V. Luzgachev, O. N. Plaksina

*Telecommunications Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

In this paper we study the performance of the session initiation protocol (SIP). We focus on SIP session setup over UDP that can be affected by the quality of the link. The transmissions are assumed to experience errors, which result in retransmissions of SIP messages based on session timers mechanism. We propose the technique of analysis with network of queues with different classes of customers (BCMP-networks). Finally, formulas for session setup time and session setup rate estimation are represented.

УДК 621.39

Приближенный анализ вероятностно-временных характеристик многофазной системы массового обслуживания

В. А. Наумов, П. О. Абаев

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

В статье предложен метод расчёта основных вероятностно-временных характеристик системы массового обслуживания, состоящей из нескольких фаз и обслуживающей несколько потоков заявок. Получены приближенные формулы для среднего и квантилей времени пребывания заявки в системе, предложен алгоритм расчёта и проведён предварительный численный анализ.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: многофазная система массового обслуживания, среднее время пребывания, квантиль времени пребывания.

Введение

В последнее время потребитель уже привык к мысли, что современная связь — это совокупность предоставляемых ему разнообразных услуг. Дальнейшее развитие телекоммуникационных сетей основывается на концепции построения сети связи следующего поколения (ССП), суть которой заключается в создании на основе существующих сетей IP универсальной сети, которая позволяла бы передавать любые виды информации, такие как речь, видео, аудио, графику, а, следовательно, предоставлять широкий спектр телекоммуникационных и мультимедийных услуг. При этом для инициации и модификации сеансов связи в сетях СПП международными организациями по стандартизации был принят протокол SIP (Session Initiation Protocol).

Хорошо известно, что качество функционирования сетей телекоммуникаций существенно зависит от своевременной и надёжной доставки сигнального трафика. Отличительной особенностью сигнализации с использованием протокола SIP является отсутствие выделенных канальных ресурсов для передачи сигнального трафика, который обслуживается на базе общих транспортных механизмов, реализованных в сети передачи данных общего пользования оператора связи на базе протокола IP. Однако не совсем ясно как переход от сигнализации по выделенным каналам к сигнализации по сети передачи данных общего пользования сказывается на качестве функционирования сигнализации и, в частности, на задержке сигнальных сообщений. Важными характеристиками качества сигнализации являются как средние задержки сигнальных сообщений, так и квантили функций распределения задержек.

В данной работе исследуется многофазная система массового обслуживания с несколькими входящими потоками. Предложены методы расчёта для среднего значения и квантилей времени пребывания заявки в системе. Проведён численный анализ погрешности получаемых значений формул. Разработанный метод применим для расчёта моделей передачи сигнальных сообщений протокола SIP по сети IP/MPLS [1].

1. Постановка задачи

Рассматривается система массового обслуживания, состоящая из N последовательных однолинейных СМО с накопителями неограниченной ёмкости и постоянным временем обслуживания (рис. 1). На систему поступают два типа заявок: основные и фоновые. Интенсивность потока и время обслуживания основных заявок в i -узле будем обозначать λ_0 и d_i , а интенсивность потока и время обслуживания фоновых заявок в i -узле — λ_i и b_i , $i = \overline{1, N}$. При этом поступающие на каждый узел потоки заявок предполагаются пуассоновскими.

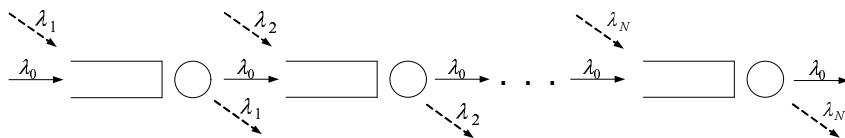


Рис. 1. Обслуживание последовательной цепочкой приборов

Пусть ξ_i — время пребывания заявки основного потока в i -узле, $i = \overline{1, N}$, ξ — время её пребывания в многофазной СМО, η_i — время обслуживания заявки, а ψ_i — время ожидания начала обслуживания заявки в i -узле, $i = \overline{1, N}$. Математические ожидания этих величин будем обозначать $M\psi_i = w_i$, $M\xi_i = D_i$, а функцию распределения (ФР) времени ожидания обозначим $W_i(x) = P\{\psi_i < x\}$. Для введённых случайных величин справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}\xi_i &= \eta_i + \psi_i, \\ \xi &= \sum_{i=1}^N \xi_i.\end{aligned}\tag{1}$$

Целью исследований является разработка метода расчёта основных ВВХ СМО — среднего значения $D = M\xi$ и квантилей Q_p времени пребывания заявки основного потока в системе соответствующих уровню p .

2. Метод вычисления вероятностно-временных характеристик

Для расчёта величины среднего значения D времени пребывания заявок основного потока в системе воспользуемся соотношениями (1). Среднюю задержку заявок основного потока в i -узле можно вычислить по формуле $D_i = w_i + d_i$. Средняя задержка заявок основного потока в системе с момента их поступления на первый прибор и до момента завершения обслуживания на последнем приборе находится как сумма средних задержек во всех узлах системы

$$D = \sum_{i=1}^N D_i.\tag{2}$$

Для расчёта k -ого момента $m_i^{(k)} = M\eta_i^k$ времени обслуживания заявок η_i можно воспользоваться формулой

$$m_i^{(k)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + \lambda_i} \cdot d_i^k + \frac{\lambda_i}{\lambda_0 + \lambda_i} \cdot b_i^k, \quad k = 1, 2.\tag{3}$$

Отсюда вытекает, что для коэффициента вариации c_i длительности обслуживания в i -узле справедлива следующая формула:

$$c_i^2 = \frac{(\lambda_0 + \lambda_i)(\lambda_0 d_i^2 + \lambda_i b_i^2)}{(\lambda_0 d_i + \lambda_i b_i)^2} - 1.\tag{4}$$

В сделанных выше предположениях среднее время ожидания как основных, так и фоновых заявок в i -узле даётся известной формулой Поллачека–Хинчина [2]

$$w_i = \frac{\rho_i m_i}{1 - \rho_i} \left(\frac{1 + c_i^2}{2} \right), \quad (5)$$

где $\rho_i = \lambda_0 d_i + \lambda_i b_i$ — нагрузка на i -узел.

Для больших значений аргумента функция распределения $W_i(x)$ времени ожидания в i -узле хорошо аппроксимируется [3] экспоненциальной функцией вида

$$W_i(x) \approx 1 - \varphi_i e^{-v_i x}, \quad (6)$$

где v_i — параметр затухания и φ_i — асимптотический коэффициент. Параметр затухания v_i является единственным положительным числом и имеет минимальную действительную часть среди корней уравнения

$$\alpha(v_i) \cdot \beta(-v_i) = 1, \quad (7)$$

где $\alpha_i(s)$ — преобразование Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) ФР интервалов между поступлениями заявок в i -узел, $\beta_i(s)$ — ПЛС ФР длительности обслуживания [4] в i -узле. ПЛС ФР интервалов между поступлениями заявок и ПЛС ФР длительности обслуживания в рассматриваемом случае имеют следующий вид

$$\alpha_i(s) = \frac{(\lambda_0 + \lambda_i)}{(\lambda_0 + \lambda_i) + s}, \quad (8)$$

$$\beta_i(s) = \frac{\lambda_0}{(\lambda_0 + \lambda_i)} \cdot e^{-s d_i} + \frac{\lambda_i}{(\lambda_0 + \lambda_i)} \cdot e^{-s b_i}. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (7) можно переписать в виде

$$\frac{\lambda_0}{(\lambda_0 + \lambda_i) + v_i} \cdot e^{d_i v_i} + \frac{\lambda_i}{(\lambda_0 + \lambda_i) + v_i} \cdot e^{b_i v_i} = 1. \quad (10)$$

Корень этого уравнения может быть найден численно с помощью итерационного алгоритма, например, методом бисекции. Для определения асимптотического коэффициента φ_i можно воспользоваться простой приближенной формулой, предложенной в [5]:

$$\varphi_i \approx v_i w_i. \quad (11)$$

Обозначив $T_i = \frac{1}{v_i} \ln(\varphi_i)$, формулу (6) можно записать в виде смещённого экспоненциального распределения

$$W_i(x) \approx 1 - e^{-v_i(x - T_i)}. \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что эта аппроксимация эквивалентна представлению времени ожидания заявки в i -узле в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является случайной величиной имеющей, экспоненциальное распределение с параметром v_i , а второе слагаемое является постоянной величиной равной параметру сдвига T_i . Аналогично, в виде суммы двух слагаемых можно представить величину задержки заявок основного потока в i -узле. Первое слагаемое, как и при аппроксимации времени ожидания, является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром v_i , а второе слагаемое является постоянной величиной, равной $T_i + d_i$. Если допустить, что длительности ожидания заявок в различных узлах являются независимыми величинами, имеющими смещённое экспоненциальное распределение (12), то функцию распределения задержки заявок основного потока в системе можно аппроксимировать смещённым распределением Эрланга порядка N со смещением $\Delta = \sum_{i=1}^N (T_i + d_i)$ и параметрами распределения Эрланга $v_1, v_2, \dots, v_N$.

3. Пример вычислений и анализ точности

Анализ проведём для случая, когда определённые выше величины не зависят от номеров узлов. Формулы для расчёта средних времён ожидания и пребывания заявки основного потока в системе примут вид

$$w = \frac{\rho m}{1 - \rho} \left(\frac{1 + c^2}{2} \right), \quad (13)$$

$$D = N (w + d). \quad (14)$$

Квантиль Q_p может быть вычислена по формуле

$$Q_p = q_p + N (T + d), \quad (15)$$

где q_p — квантиль уровня p распределения Эрланга с N одинаковыми этапами и параметром каждого этапа, равным v . Заметим, что квантиль q_p является единственным положительный корнем уравнения

$$(1 - p) e^{v q_p} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(v q_p)^k}{k!}. \quad (16)$$

Для оценки точности формул за основу были приняты результаты имитационного моделирования.

Построенная математическая модель иллюстрирует процесс передачи сигнального сообщения SIP по IP/MPLS сети, поэтому расчёты проведём в предположении, что основной поток заявок — это сигнальные сообщения протокола SIP длиной 407 байт, а фоновый поток — это медиаконтент, передаваемый в пакетах протокола IP максимальной длины (1500 байт). В качестве среды передачи рассмотрим сеть с пропускной способностью 10 Мбит/с (10BASE-T), состоящую из а) 4 и б) 8 маршрутизаторов. Считаем, что основная нагрузка равна 0,4 Эрл, а величина фоновой нагрузки варьируется таким образом, чтобы суммарная нагрузка на каждой фазе модели не превышала значения 1. Среднее время обслуживания основных заявок вычисляется по формуле $d = \frac{407 \cdot 8 \cdot 1000}{V_{\text{Eth}}}$, а фонового трафика — $b_i = \frac{1500 \cdot 8 \cdot 1000}{V_{\text{Eth}}}$, $\forall i = \overline{1, N}$, где V_{Eth} — скорость передачи (Мбит/с).

На рисунках 2 и 3 представлены графики зависимости от нагрузки 95%-квантили времени пребывания заявки в системе и относительной погрешности вычислений.

Анализ показывает, что при невысокой загрузке сети IP/MPLS (до 0,7 Эрл) задержка сообщений не превосходит 10 мс во всем диапазоне исследуемых параметров, а квантили задержки не превышают 20 мс, что укладывается в нормы требований МСЭ-Т. Загрузка сети выше значения 0,7 Эрл. приводит к недопустимым задержкам сигнальных сообщений — до 100 мс. Приблизненная формула (14) для среднего времени пребывания заявки позволяет получить значения, относительная погрешность которых в среднем не превышает 5%, для квантили этот показатель немного выше, однако не превосходит 10%.

Заключение

В статье изложены результаты исследований, связанных с разработкой методов расчёта основных ВВХ многофазных СМО с поступающими заявками нескольких типов. В работе были получены формулы для расчёта среднего и квантилей времени пребывания заявок в системе. Проведён сравнительный анализ с результатами имитационного моделирования, позволяющий говорить о получении хороших приближений для значений среднего и квантилей времени пребывания.

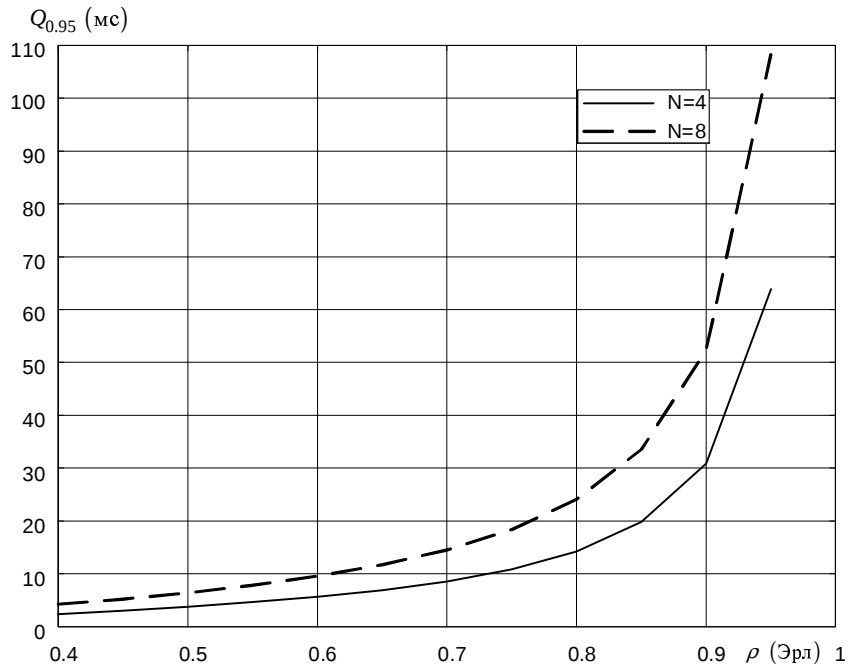


Рис. 2. 95%-квантиль времени пребывания заявки в системе

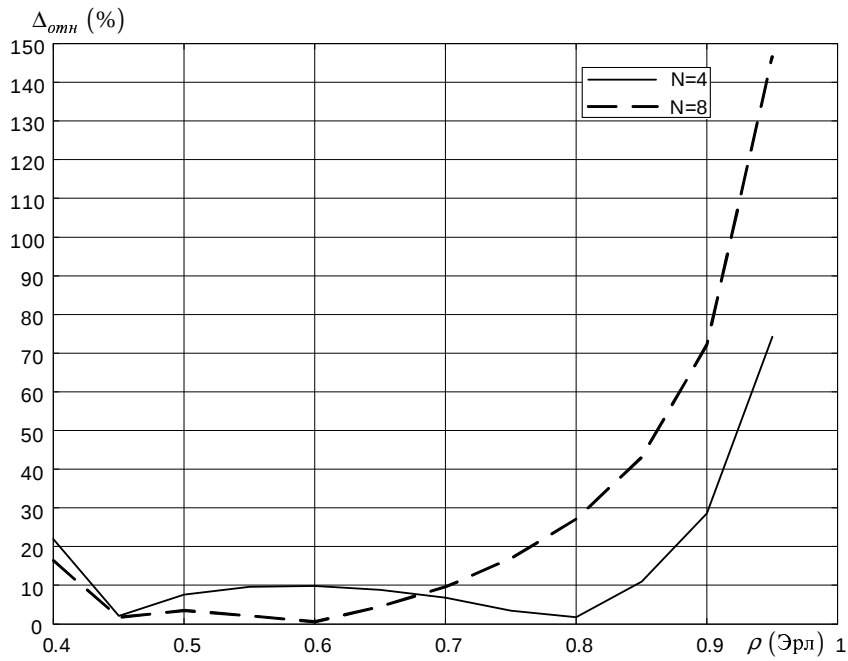


Рис. 3. Относительная погрешность расчётов 95%-квантили времени пребывания в зависимости от нагрузки

Литература

1. *Chakraborty S. S., Prasad R., Fathi H.* Optimization of SIP Session Setup Delay for VoIP in 3G Wireless Networks // *IEEE Transactions on Mobile Computing*. — Vol. 5, No 9. — 2006. — Pp. 1121–1132.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: КомКнига, 2005. — 400 с.
3. *Fredericks A. A.* A Class of Approximations for the Waiting Time Distribution in a $GI|G|1$ Queueing System // *Bell System Technical Journal*. — Vol. 61, No 3. — 1982. — Pp. 295–325.
4. Наумов В. А. О максимальном полюсе преобразования Лапласа-Стилтьеса времени ожидания // Сб. «Модели систем распределения информации и их анализ». — М.: Наука, 1982. — С. 77–82.
5. Mean Waiting Time Approximation in the $G|G|1$ Queue / D. L. Jagerman, B. Balcioglu, T. Altioik, B. Melamed // *Queueing Systems*. — Vol. 46. — 2004. — Pp. 481–506.

UDC 621.39

Approximate Performance Analysis of Queues in Series

V. A. Naumov, P. O. Abaev

*Telecommunications Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Signaling system is the key element of the telecommunication infrastructure. Migration from traditional circuit-based networks to packet-based requires preserving quality and reliability of SS7. Hence, the performance analysis of SIP signaling system will play an essential role in optimizing network QoS provisioning. In this paper we investigate the behavior of SIP protocol over IP/MPLS network. In order to analyze SIP reliability and performance we develop an analytical model, which is multiphase queueing system with two incoming flows. Finally, we present formulas and numerical results to estimate mean and quantiles of sojourn time distribution.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 519.6

Дискретное преобразование значений функций на сетке в коэффициенты полиномов Цернике

Л. А. Севастьянов, К. П. Ловецкий, М. Г. Кокотчикова

*Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Разработан инструмент для решения практической задачи серийного восстановления коэффициентов разложения функций по полиномам Цернике по их приближенно измеренным значениям на сетке. Решается серия переопределенных и несовместных систем линейных алгебраических уравнений с разными правыми частями и матрицами из одного класса точности методом тихоновской регуляризации. Исследуются условия существования единственной псевдообратной матрицы для точной системы. Доказывается сходимость регуляризованных псевдообратных матриц к точной при стремлении возмущения к нулю.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: разложение в ряд Фурье, система линейных алгебраических уравнений, регуляризация.

Введение

Во многих прикладных задачах оптики при численной обработке экспериментальных данных возникает необходимость [1, 2] отыскания вектора коэффициентов Фурье в разложении по полиномам Цернике на единичном круге $\mathcal{Q}$ функции f , значения которой известны лишь в точках некоторой сетки $S = \{s_1, \dots, s_n\} \subset \mathcal{Q}$ [3, 4].

Конечный набор $S(f) = (f(s_1), \dots, f(s_n))^T$ значений функции f (след функции) позволяет найти только конечное число k информативных коэффициентов Фурье в разложении по полиномам Цернике, причём $k \leq n$. Известно, что для удовлетворительного описания экспериментальных данных в оптике обычно достаточно использовать небольшое число k первых полиномов Цернике степени $0, 1, \dots, l : k = k(l) = (l+1)(l+2)/2, \quad l \leq 10$ (см. [5, 6]).

В гильбертовом пространстве $L_2(\mathcal{Q})$ квадратично интегрируемых на единичном круге $\mathcal{Q}$ функций со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \int_{\mathcal{Q}} f g d\mathcal{Q}$ полиномы

Цернике $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$ образуют полную ортонормированную систему Φ . Для любой функции $f \in L_2(\mathcal{Q})$ однозначно определена последовательность её коэффициентов Фурье в базисе Φ : $F(f) = \{\langle f, \varphi_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots\}$.

Преобразование Фурье в базисе Φ — это отображение $F : L_2(\mathcal{Q}) \rightarrow l_2, f \rightarrow F(f)$, которое ставит в соответствие каждой функции $f \in L_2(\mathcal{Q})$ последовательность $F(f) = \{\langle f, \varphi_i \rangle \mid i = 1, 2, \dots\}$, которую называют также спектром функции f по системе Φ . F является изоморфизмом гильбертовых пространств $L_2(\mathcal{Q})$ и l_2 , сохраняющим скалярное произведение, т.е. для любых функций $f, g \in L_2(\mathcal{Q})$ выполняется равенство $\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \varphi_i \rangle \langle \varphi_i, g \rangle$.

Если для некоторой непрерывной функции f известен её след $S(f)$ только на сетке S , то точные значения скалярных произведений $\langle f, g \rangle$ для всех $i = 1, 2, \dots$ найти в общем случае невозможно. Возникает задача приближенного вычисления вектора коэффициентов Фурье функции f по её следу $S(f)$. Так как экспериментальное получение следа $S(f)$ всегда содержит некоторую ошибку, то способ вычисления вектора коэффициентов Фурье в базисе Φ должен быть устойчивым к возмущениям $S(f)$.

1. Точное дискретное преобразование

Пусть фиксировано натуральное число $k, k \leq n$. Обозначим через H_k подпространство в $L_2(Q)$, натянутое на первые k полиномов Цернике, через $\mathbf{F}^k(f)$ — вектор-столбец $(\langle f_1, \varphi_2 \rangle, \dots, \langle f_1, \varphi_k \rangle)^T$ первых k коэффициентов Фурье в базисе Φ . Для непрерывных функций f след $S(f)$ определён на любой сетке S . Оператор S взятия следа функции является линейным, так же как преобразование Фурье F .

Нашей задачей является построение для фиксированной сетки S дискретного преобразования Фурье D_k^s в базисе $\Phi_k = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, т.е. такого линейного отображения D_k^s пространства $R^n \supset S(H_k)$ в R^k , что значение $D_k^s(f)$ оператора D_k^s на следе $S(f)$ функции f даёт вектор $\mathbf{F}^k(f)$ первых k коэффициентов Фурье в базисе Φ . Линейное отображение D_k^s однозначно определяется матрицей

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_k^1 & F_k^2 & \dots & F_k^n \end{bmatrix},$$

поэтому следует в действительности искать $n \times k$ элементов матрицы $\mathbf{F}$.

Исследуем условия, при которых дискретное преобразование Фурье D_k^s будет давать по точному следу $S(f)$ на сетке S точное значение первых k -коэффициентов Фурье в базисе Φ для любой функции f из конечномерного пространства H_k . В силу линейности операторов S , $\mathbf{F}^k$ и D_k^s для существования D_k^s на H_k необходимо и достаточно, чтобы равенство

$$D_k^s(S(f)) = \mathbf{F}^k(f) \quad (1)$$

выполнялось для любой базисной функции $\varphi_i, i = 1, 2, \dots, k$, что даёт систему уравнений

[illegible]

линейную относительно F_i^j . С учётом ортонормированности базиса систему уравнений (2) можно записать в виде одного матричного уравнения

$$\begin{bmatrix} F_1^1 & F_1^2 & \dots & F_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_k^1 & F_k^2 & \dots & F_k^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1(s_1) & \dots & \varphi_k(s_1) \\ \varphi_1(s_2) & \dots & \varphi_k(s_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1(s_n) & \dots & \varphi_k(s_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Таким образом, искомая матрица $\mathbf{F}$ является левой обратной для матрицы

$$S(\Phi_k) = [S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)] = \begin{bmatrix} \varphi_1(s_1) & \dots & \varphi_k(s_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(s_n) & \dots & \varphi_k(s_n) \end{bmatrix}$$

значений базисных функций φ_i в точках сетки S . Необходимым и достаточным условием существования левой обратной к $S(\Phi_k)$ является равенство ранга матрицы $S(\Phi_k)$ числу k —размерности единичной матрицы в правой части матричного уравнения (3). Это условие эквивалентно линейной независимости векторов $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ —столбцов матрицы $S(\Phi_k)$. Следовательно, справедливо

Предложение 1. *Точное дискретное преобразование Фурье $D_k^s : R^n \rightarrow R^k$ пространства H_k по базису $\Phi_k = \{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ на сетке $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ существует тогда и только тогда, когда вектор-столбцы $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ матрицы $S(\Phi_k)$ — следы базисных функций на сетке — являются линейно-независимыми.*

Проверка условия линейной независимости может осуществляться численно. Однако и для хорошо обусловленных матриц при больших n и k (> 100) проверка связана с трудностями, возникающими из-за приближенного вычисления элементов $\varphi_i(s_j)$ матрицы $S(\Phi_k)$ и выполнения операций в конечноразрядной арифметике.

2. Возмущенное дискретное преобразование

Рассмотрим далее ситуацию, когда требуется разложить в конечный ряд Фурье по системе полиномов Цернике Φ большое число функций f , данные о которых имеются в виде измеренных с некоторой погрешностью δ значений $f(s_j)$ в точках s_j сетки S . Такая задача обладает своей спецификой.

Во-первых, точное равенство n и k практически не осуществляется, ибо, с одной стороны, естественно брать все полиномы Цернике степени не выше какого-либо натурального числа l , что приводит к числу полиномов $k = k(l) = (l+1)(l+2)/2$, и при переходе к следующему числу $l+1$ число полиномов увеличивается сразу на $l+2$. С другой стороны, возможен выход из строя части датчиков, расположенных в точках планировавшейся сетки S' и тем самым вместо планировавшихся данных по сетке S' в распоряжении экспериментатора окажутся только данные по меньшей сетке $S < S'$.

Во-вторых, погрешность δ измеренных значений $f(s_1), \dots, f(s_n)$ на два-три порядка выше, чем погрешность δ_M в значениях базисных функций $\varphi_i(s_j)$.

Таким образом, неравенство $n > k$ оставляет некоторую свободу в построении матрицы $\mathbf{F}$ дискретного преобразования Фурье в базисе Φ_k на сетке S , которую можно использовать для минимизации ошибки в векторе дискретных коэффициентов Фурье, вызванной неустранимой ошибкой в измеренном следе $S(f)$ раскладываемой в ряд функции f .

Взаимное расположение точек сетки S может быть таким, что векторы $S(\varphi_1), \dots, S(\varphi_k)$ окажутся линейно зависимыми, несмотря на то, что n больше k . Тогда точного на пространстве H_k дискретного преобразования Фурье D_k^s по системе Φ_k с сетки S не существует. Однако даже тогда, когда теоретически для сетки S существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье D_k^s по системе Φ_k , матрица $\mathbf{F}$ может быть восстановлена по экспериментальным данным лишь приближенно. Численно мы оперируем не с точной f , а с некоторым её возмущением $\tilde{f}$ (хотя бы из-за усечения). Раз возмущение неизбежно, то надо сделать его разумно согласованным с возмущением δ и δ_M с целью получения достоверных значений $\bar{c}(f) = (c_1, \dots, c_k) = \mathbf{F} \cdot S(f)$ векторов дискретных преобразований Фурье в базисе Φ_k .

3. Регуляризованное дискретное преобразование

Устойчивый метод построения искомой матрицы $\mathbf{F}$ дискретного преобразования Фурье на сетке S основан на методе регуляризации А.Н.Тихонова (см. [7, 8]) и сводится к задаче минимизации по $\mathbf{F} \in L(R^n; R^k)$ сглаживающего функционала

$$M^\alpha(\mathbf{F}) = M^0(\mathbf{F}) + \alpha \|\mathbf{F}\|^2, \quad (4)$$

где

$$M^0(\mathbf{F}) = \sum_{i=1}^k \|\mathbf{F} \cdot S(\varphi_i) - \mathbf{F}^k(\varphi_i)\|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(\sum_{m=1}^n F_j^m \varphi_i(s_m) - \delta_{ij} \right)^2$$

является квадратом невязки системы уравнений (2) (δ_{ij} — символ Кронекера), квадрат нормы $\|\mathbf{F}\|^2 = \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^n (F_j^m)^2$ является стабилизирующим функционалом, а α — параметр регуляризации, который должен быть выбран согласованным с погрешностью задания исходной информации [9].

Имеются два уровня погрешности: δ и δ_M , причём $\delta_M \ll \delta$. Так как решение $\mathbf{F}_\alpha$ вариационной задачи (4) обычно используется для многократного вычисления векторов $\bar{c}(f)$ конечного спектра в базисе Φ_k функций f по правилу

$$\bar{c}(f) = \mathbf{F}_\alpha \cdot S(f), \quad (5)$$

то выбор параметра $\alpha = \alpha(\delta)$ в (4) должен быть осуществлён согласованно с уровнем погрешности δ измерения следа $S(f)$ [9].

Полученная указанным путём матрица $\mathbf{F}_\alpha$ является матрицей регуляризованного дискретного преобразования Фурье $D_k^s[\alpha] : R^n \rightarrow R^k$ по системе Φ_k на сетке S . Применение к $\mathbf{F}_\alpha$ и $D_k^s[\alpha]$ результатов [7, 8] о регуляризованных решениях делает справедливым

Предложение 2. Если сетка S такова, что для неё существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье по системе Φ_k с сетки S , то при стремлении уровней погрешностей δ и $\delta_M < \delta$ к нулю и согласованном с ними стремлении к нулю параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\delta)$ матрица $\mathbf{F}_\alpha$ будет стремиться к нормальному решению $\mathbf{F}$ системы уравнений (2), т.е. матрица

$$\mathbf{F} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{F}_\alpha, \quad (6)$$

будет определять по правилу (5) дискретное преобразование Фурье D_k^s на сетке S по базису Φ_k , точное на H_k и обладающее минимальной нормой $\|\mathbf{F}\|$ среди точных на H_k дискретных преобразований Фурье D_k^s .

При обработки экспериментальных данных $S(f)$ для непрерывных на $\mathcal{Q}$ функций f заранее неизвестно, принадлежат ли они выбранному пространству H_k , либо близки к нему с точностью δ измерения значений функции f в точках сетки. Оценку погрешности, вносимую в вектор коэффициентов Фурье по системе φ_k при вычислении их по правилу (5), для непрерывной функции f , близкой к конечномерному пространству H_k , даёт

Предложение 3. Если для сетки $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ существует точное на H_k дискретное преобразование Фурье по системе Φ_k , то для любой матрицы $\mathbf{F}$ точного на H_k дискретного преобразования Фурье по системе Φ_k на сетке S , для любого числа $\varepsilon > 0$ и любой функции f на $\mathcal{Q}$ такой, что

$$\|f - H_k\|_C = \inf_{p \in H_k} \max_{x \in \mathcal{Q}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

выполняется неравенство

$$\|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| < (\sqrt{\pi} + \sqrt{n} \|\mathbf{F}\|) \varepsilon. \quad (7)$$

Доказательство. Действительно, существует полином $p \in H_k$ такой что

$$\|f - p\|_C = \max_{x \in \mathcal{Q}} |f(x) - p(x)| < \varepsilon.$$

Для $h = f - p$ имеют место неравенства

$$\|\mathbf{F}^k(h)\| \leq \|h\|_{L_2(\mathcal{Q})} = \left[\int_{\mathcal{Q}} |h|^2 d\mathcal{Q} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_{\mathcal{Q}} d\mathcal{Q} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \|h\|_C < \sqrt{\pi}\varepsilon,$$

$$\|\mathbf{F} \cdot S(h)\| = \|\mathbf{F} \cdot S(-h)\| \leq \|\mathbf{F}\| \cdot \|S(h)\| \leq \|\mathbf{F}\| \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |h(s_j)| < \|\mathbf{F}\| \sqrt{n} \cdot \varepsilon.$$

Спектр $\mathbf{F}^k(p)$ вычисляется с помощью $\mathbf{F}$ по правилу (5) точно:

$$\mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| &= \|\mathbf{F}^k(f) - \mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p) + \mathbf{F} \cdot S(p) - \mathbf{F} \cdot S(f)\| \leq \\ &\leq \|\mathbf{F}^k(h)\| + \|\mathbf{F}^k(p) - \mathbf{F} \cdot S(p)\| + \|\mathbf{F} \cdot S(-h)\| < \sqrt{\pi} \cdot \varepsilon + 0 + \sqrt{n} \|\mathbf{F}\| \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1. Из (6) следует, что минимальность нормы $\|\mathbf{F}\|$ точного на H_k дискретного преобразования Фурье D_k^s по системе Φ_k на сетке S среди всевозможных точных на H_k дискретных преобразований Фурье D_k^s обеспечивает наилучшую по отношению к возмущениям следа $S(f)$ устойчивость D_k^s в сравнении с остальными точными на H_k преобразованиями D_k^s , а решение $\mathbf{F}_\alpha$ задачи (4) доставляет по правилу (5) наиболее устойчивый по отношению к возмущениям следа $S(f)$ способ вычисления вектора коэффициентов Фурье по системе Φ_k среди согласованных с δ дискретных преобразований Фурье D_k^s .

Литература

1. Войцехович В. В. Влияние атмосферной турбулентности на точность определения параметров волнового фронта // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-862. — 1984.
2. Севастьянов Л. А., и др. Программно-математический комплекс для обработки киногартманогамм // Препринт ИКИ АН СССР, Пр-1209. — 1987.
3. Микулич А. В. О восполнении дифференцируемой функции на круге по ее неполному следу на сетке. В кн. Современные задачи мат. физики. — М.: УДН, 1986. — С. 63–70.
4. Микулич А. В., Севастьянов Л. А. О дискретном преобразовании Фурье по системе полиномов Цернике. В кн. Современные задачи мат. физики. — М.: УДН, 1986. — С. 71–78.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. — М.: Наука, 1970.
6. Luneburg R. K. Mathematical theory of optics. — Berkley: University of California Press, 1965.
7. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР. — Т. 151, № 3. — 1963. — С. 501–504.
8. Тихонов А. Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР. — Т. 153, № 1. — 1963. — С. 49–52.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1972.

UDC 519.6

Discrete Transformation of Mesh Functions Values to Fourier Polynomials Coefficients

L. A. Sevastianov, K. P. Lovetsky, M. G. Kokotchikova

*Telecommunications Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Here is elaborated the instrument for solving the practical task of serial reconstruction of coefficients of functions expansion by Zernike polynomials when knowing approximately measured their mesh values. A series of overdetermined and incompatible systems of linear algebraic equations with different right parts and matrices within one accuracy class is solved by Tikhonov regularization method. The conditions of the existence of unique pseudoinverse matrix for exact system are considered. The convergence of regularized pseudoinverse matrices to the exact one is proved when perturbation tends to zero.

УДК 539.17

Численное исследование дискретного спектра оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курышкина

А. А. Гусев ^{*}, А. В. Зорин [†], К. П. Ловецкий [†], Н. П. Третьяков [†]

^{*} Объединённый институт ядерных исследований
Россия, 141980, Моск. область, Дубна, ул. Жолио Кюри, 6

[†] Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6

В работе обсуждается поведение потенциала одночастичного приближения уравнения Шредингера для описания оптического спектра многоэлектронного атома с одним оптическим электроном. Свойства дискретного и непрерывного спектра Гамильтона-Курышкина позволяет применить для численного вычисления собственных значений два альтернативных метода. Сравнение результатов и их обсуждение свидетельствуют о перспективности использования предложенной модели для описания оптических характеристик атомных систем с одним оптическим электроном.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: оптические характеристики атомной системы, потенциал одночастичного приближения, мультипольное представление.

Введение

Атом с более чем одним элементом представляет собой сложную систему взаимодействующих друг с другом электронов в поле ядра. Для такого случая подаются строгому рассмотрению лишь состояния системы в целом характеризующиеся полным орбитальным моментом $\vec{L}$ постоянным спином $\vec{S}$. Тем не менее, с хорошей точностью определяются состояния отдельного электрона в эффективном поле ядра и остальных электронов, образующих атомный остаток. Состояния электрона зависят от орбитального момента l , они нумеруются в порядке возрастания энергии с помощью главного квантового числа n . При этом последовательность возрастания уровней энергии E_n с различными l в сложных атомах отличается от последовательности возрастания уровней энергии в атоме водорода, когда $\mathcal{E}_n$ не зависит от l и при $n_1 > n_2$ имеет место $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. В этом смысле, о распределении электронов в атоме по состояниям с различными n, l говорят, как об электронной конфигурации. О совокупности электронов, заполняющих все состояния с заданными n и l говорят, как о замкнутой оболочке типа (n, l) . При одинаковой электронной конфигурации (n, l) с различными значениями L и S , энергии атомных уровней различаются на малую величину, обусловленную взаимодействием электронов. Взаимное расположение таких термов удовлетворяет «правилу заполнения Бора» (его часто называют правилом Маделунга или эмпирическим правилом Хунда): наименьшей энергией обладает терм с наибольшим значением S , а при заданном S — наибольшим значением L .

Такая структура атомных уровней дается описанием релятивистских эффектов в применении к атомным термам.

На сдвиге уровней оказывает влияние как поляризация «атомного остова», так и его размазанность. Статистический метод Томаса-Ферми дает хорошие качественные и удовлетворительное количественное описание этих сдвигов. Тем же статистическим методом Клечковский доказал зависимость энергетических термов от пар $(n + l, n)$. Этому соответствует описание атомных объектов с одним

внешним электроном в параболических и сплюснутых сфероидальных координатах [1]. В работе [2] В. А. Фок рассмотрел приближенную внутреннюю симметрию водородной задачи для многоэлектронного атома. При этом эффективное поля для всех электронов заполненной оболочки с заданным главным числом n считалось кулоновским с некоторым эффективным зарядом ядра Z^* , который рассматривался как варьируемый параметр. Это позволило с хорошей точностью рассчитать согласованное поле для валентного электрона щелочных металлов.

Ю.Н. Демков и В.Н. Островский в работах [3, 4] развили этот подход, основанный на изучении скрытых симметрий. Они выбирали эмпирический одноэлектронный потенциал в форме

$$V(r) = -\frac{RN(N+1)}{2r(r+R)^2}$$

с некоторой константой R и $N = n + l$. При выборе $\frac{1}{4}R^2N(N+1) \cdot 2 = ZR^3$ получается $R = N(N+1)/2Z$, и потенциал ведет себя в нуле как

$$V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -Z/r,$$

а на бесконечности как $(-c/r^3)$.

Рассмотренный модельный потенциал позволил объяснить правило Маделунга $(n + l, n)$ для нейтральных атомов без привлечения феноменологических рассуждений.

Данный подход был развит в работах [5, 6]. Авторы преобразовали уравнение Демкова-Островского в новую форму с сокращением всех динамических симметрий, однако допускающую лучшее приближение спектральных данных. В заключение авторы [5, 6] отметили хорошее качественное совпадение своей модели с экспериментом и удовлетворительное количественное, а так же отметим, что их модификация модели Демкова-Островского не единственна.

В данной работе мы предлагаем, исходя из совершенно других предпосылок, ещё одну модель описания водородоподобных атомных объектов.

1. Квантовая модель Курышкина задачи Кеплера

В квантовой механике Курышкина (КМК) правило квантования задается с помощью вспомогательной функции [7–9]. В первых работах [10–13], посвященных конкретизации правила квантования, В.В. Курышкин и его ученики использовали метод теории возмущений и представление вспомогательных функций в виде(сферически-симметричных) прямоугольных ступенек. В последующем развитие вычислительной техники и создание программных средств для аналитических вычислений позволили расширить класс функций, которые можно использовать в качестве вспомогательных.

В цикле работ [14–17], при участии одного из соавторов, были проведены исследования о количестве и виде вспомогательных функций при квантовании по правилу Курышкина задачи Кеплера. В итоге оказалось, что функции, впервые рассмотренные В.А. Фоком [18], а впоследствии названные Штурмовскими [19–21], лучше других подходят для моделирования водородоподобных квантовых объектов с одним оптическим электроном.

Квантовая модель Курышкина задачи Кеплера описывается [16, 17] оператором Гамильтона вида

$$O(H) = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{Z}{r} + Z \sum_k C_k^2 \left(\frac{1}{2b_k^2} + V_k(r, \cos \theta) \right). \quad (1)$$

В этом разложении выполняется условие квантования Курышкина $\sum C_k^2 = 1$.

Явный вид оператора $O(H)$ был получен с помощью аналитических вычислений в рамках пакета символьных вычислений QDF01, разработанный с

участием двух соавторов. С работой пакета можно познакомиться на сайте <http://www.mathmod.sci.pfu.edu.ru/> научно-исследовательской Лаборатории вычислительной физики и математического моделирования РУДН.

Одной из движущих целей данной работы является моделирование оптических свойств атомных объектов с одним оптическим электроном. Чтобы более детально приступить к решению данной задачи, напомним некоторые классические результаты описания спектральных характеристик атомных объектов, опубликованные в книгах [22–24]. Наиболее приближенным к целям данной работы являются результаты, изложенные в [23], о «мультипольном виде» эвристического потенциала взаимодействия оптического электрона с атомным остатком. Именно мультипольное разложение возникает при моделировании по правилу квантования Курышкина задачи Кеплера. Причем в возникающем при этом мультипольном разложении потенциала оператора Гамильтона присутствуют только четные мультипольности.

Факт мультипольности потенциала в операторе Гамильтона-Курышкина не зависит от вида и количества вспомогательных функций.

Во всех вариантах квантовой модели Курышкина задачи Кеплера оператор Гамильтона-Курышкина является существенно самосопряженным ограниченным снизу оператором, дискретный спектр которого целиком расположен ниже существенно непрерывной части спектра [14, 15]. В качестве вспомогательных функций использовались скалярные кратные Штурмовских функций, совпадающие с обычными Штурмовскими функциями [20, 21], деленными на радиус r , а последующей заменой $r \mapsto r/b_k$, так что первые пять имеют вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1(r, \theta, \varphi) &= c_1 S_{10}(r/b_1) Y_{00}(\theta, \varphi), \\ \varphi_2(r, \theta, \varphi) &= c_2 S_{20}(r/b_2) Y_{00}(\theta, \varphi), \\ \varphi_3(r, \theta, \varphi) &= c_3 S_{21}(r/b_3) Y_{10}(\theta, \varphi), \\ \varphi_4(r, \theta, \varphi) &= c_4 S_{21}(r/b_4) Y_{11}(\theta, \varphi), \\ \varphi_5(r, \theta, \varphi) &= c_5 S_{21}(r/b_5) Y_{1-1}(\theta, \varphi).\end{aligned}$$

Использование таких функций приводит к следующему виду частичных потенциалов:

$$\begin{aligned}V_1(r, \theta, \varphi) &= \frac{Ze^2 \exp\left(-\frac{2r}{b_1}\right) (r + b_1)}{b_1 r} - \frac{Ze^2}{r}, \\ V_2(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \frac{Ze^2 \exp\left(-\frac{2r}{b_2}\right) (3b_2^2 r + 2b_2^3 + 2r^2 b_2 + 2r^3)}{b_2^3 r} - \frac{Ze^2}{r}, \\ V_3(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{2} Ze^2 (-b_3^2 r^3 - 4b_3^3 r^2 + 12 \cos(\theta)^2 b_3^2 r^3 + 9b_3^5 \cos(\theta)^2 + \\ &\quad + 18 \cos(\theta)^2 b_3^3 r^2 + 18b_3^4 \cos(\theta)^2 r + 2r^5 \cos(\theta)^2 + 6r^4 \cos(\theta)^2 b_3 - \\ &\quad - 3b_3^5 - 6b_3^4 r) \exp\left(-\frac{2r}{b_3}\right) / (b_3^3 r^3) - \frac{Ze^2}{r} - \frac{9}{2} \frac{Ze^2 b_3^2 \cos(\theta)^2}{r^3} + \frac{3Ze^2 b_3^2}{2r^3}, \\ V_4(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4} Ze^2 (-10b_4^2 r^3 - 10b_4^3 r^2 - 6r^4 b_4 - 2r^5 + 12 \cos(\theta)^2 b_4^2 r^3 + \\ &\quad + 9b_4^5 \cos(\theta)^2 + 18 \cos(\theta)^2 b_4^3 r^2 + 18b_4^4 \cos(\theta)^2 r + 2r^5 \cos(\theta)^2 + \\ &\quad + 6r^4 \cos(\theta)^2 b_4 - 3b_4^5 - 6b_4^4 r) \exp\left(-\frac{2r}{b_4}\right) / (b_4^3 r^3) - \frac{Ze^2}{r} + \\ &\quad + \frac{9}{4} \frac{Ze^2 b_4^2 \cos(\theta)^2}{r^3} - \frac{3Ze^2 b_4^2}{4r^3}, \\ V_5(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4} Ze^2 (-10b_5^2 r^3 - 10b_5^3 r^2 - 6r^4 b_5 - 2r^5 + 12 \cos(\theta)^2 b_5^2 r^3 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 9b_5^5 \cos(\theta)^2 + 18 \cos(\theta)^2 b_5^3 r^2 + 18b_5^4 \cos(\theta)^2 r + 2r^5 \cos(\theta)^2 + \\
& + 6r^4 \cos(\theta)^2 b_5 - 3b_5^5 - 6b_5^4 r) \exp\left(-\frac{2r}{b_5}\right) / (b_5^3 r^3) - \frac{Ze^2}{r} + \\
& + \frac{9Ze^2 b_5^2 \cos(\theta)^2}{4r^3} - \frac{3Ze^2 b_5^2}{4r^3}.
\end{aligned}$$

Отметим, что потенциалы V_4 и V_5 совпадают, если не считать различными варьируемые параметры b_4 и b_5 .

Чтобы облегчить обсуждение свойств получившегося оператора, приведем асимптотики частичных мультипольных вкладов потенциала.

$$\begin{aligned}
V_1(r \mapsto 0, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{b_1} + \frac{2Z}{3b_1^3} r^2 - \frac{2Z}{3b_1^4} r^3 + \frac{2Z}{5b_1^5} r^4 + O(r^5), \\
V_2(r \mapsto 0, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{4b_2} + \frac{Z}{12b_2^3} r^2 - \frac{Z}{12b_2^4} r^3 + \frac{7Z}{160b_2^5} r^4 + O(r^5), \\
V_3(r \mapsto 0, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{4b_3} - \frac{Z(3 \cos^2 \theta - 1)}{120b_3^3} r^2 + \frac{Z(10 \cos^2 \theta - 1)}{1120b_3^5} r^4 + O(r^5), \\
V_4(r \mapsto 0, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{4b_4} + \frac{Z(3 \cos^2 \theta - 1)}{240b_4^3} r^2 - \frac{Z(5 \cos^2 \theta - 4)}{1120b_4^5} r^4 + O(r^5),
\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}
V_1(r \mapsto \infty, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{r} + O\left(\exp\left(-\frac{2r}{b_1}\right)\right), \\
V_2(r \mapsto \infty, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{r} + O\left(\exp\left(-\frac{r}{b_2}\right)\right), \\
V_3(r \mapsto \infty, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{r} - \frac{6Zb_3^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} + O\left(\exp\left(-\frac{r}{b_3}\right)\right), \\
V_4(r \mapsto \infty, \theta, \varphi) &= -\frac{Z}{r} + \frac{3Zb_4^2(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} + O\left(\exp\left(-\frac{r}{b_3}\right)\right).
\end{aligned}$$

Обсуждение будет опубликовано в одной из следующих публикаций.

2. Зависимость спектра Оператора Гамильтона–Курышкина от параметров модели

В работах [25–27] получены оценки собственных значений оператора $O(H)$. Уточнить их можно лишь применив тот или иной метод численного решения уравнения $O(H)\psi = \lambda\psi$. Дискретный спектр оператора $O(H)$ расположен ниже его непрерывного спектра [26, 27]. Благодаря этому факту минимаксный метод Рэлея, применимый к ограниченным снизу самосопряженным в существенном операторам [28], вначале приводит к собственным значениям, а лишь после их исчерпания — к нижней границе непрерывного спектра. Численная реализация метода Рэлея возможна после конечномерной аппроксимации матрицей Ритца исходного оператора $O(H)$. В качестве координатных функций для построения матрицы Ритца мы выбираем Штурмовские функции, зависящие от энергетического параметра E [20], так как они образуют ортонормированный базис в пространстве представления оператора $O(H)$.

Матрица Ритца $\mathbf{M}_N[c_1, \dots, c_n; b_1, \dots, b_n; E](H)$ размерности $N \times N$ в координатных функциях $S_{nl}(r; E)Y_{lm}(\theta, \varphi)$, зависящих от параметра $E \in (-\infty, 0)$, для оператора $O(H)$, зависящего от $2n$ параметров $(c_1, \dots, c_n; b_1, \dots, b_n)$ и вспомогательных функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, вычисляется с помощью уже упомянутого пакета QDF01. При всех значениях операторов матрица $M_N(H)$ является эрмитовой

сильно разреженной (например, в случае матриц размера 30×30 , из 900 элементов порядка 800 равны нулю), почти диагональной матрицей (см., например, [29, 30]). Спектр $\lambda_1^N, \dots, \lambda_N^N$ матрицы $M_N(H)$ можно вычислить приближенно с помощью различных алгоритмов, мы выбрали метод Якоби, который работает успешно для комплексных матриц. Вычисленные собственные значения λ_j зависят от параметров $(c_1, \dots, c_n; b_1, \dots, b_n; E)$.

Следующим этапом моделирования оптических свойств водородоподобных атомных объектов является фиттирование вычисленного спектра $\{\lambda_j\}$ матрицы Рэлея–Ритца к экспериментально наблюдаемому спектру конкретного элемента. С этой целью по параметрам $(\vec{c}, \vec{b}, E)$ минимизируем целевую функцию

$$F[\vec{c}, \vec{b}, E] = \sum_{j=1}^{N_0 < N} \left(\lambda_j(\vec{c}, \vec{b}, E) - \lambda_j^{\text{эксп}} \right)^2 / \left(\lambda_j^{\text{эксп}} \right)^2.$$

Для начала мы взяли экспериментальные спектры лития и натрия из Atomic Spectra Database Levels (<http://pphysics.hist.gov/PhysRefData/Handbook/index.html>) и посмотрели на зависимость целевой функции от параметров. Выяснилось, что наиболее чувствительной она оказалась к параметру E координатных функций, и в области физически интерпретируемых значений $E \in (-\infty, 0)$ целевая функция является унимодальной, выпуклой вниз. Этот характер выполняется при любом наборе вспомогательных функций и при любой размерности матрицы Ритца.

Для более детального изучения мы остановились на пяти вспомогательных функциях и на размерностях матрицы Ритца равных 30×30 и 55×55 , когда численные процедуры диагонализации матрицы и минимизации целевой функции выполняются с помощью пакета **Maple** на персональном компьютере.

При размерности матриц Ритца 55×55 с точностью до третьего знака моделировались первые пять экспериментальных спектральных линий, при размерности 30×30 с такой же точностью моделировались экспериментальные данные с фиксированным значением $n + l$. Для моделирования всего экспериментально измеримого спектра требуются матрицы Рэлея–Ритца на порядок большей размерности. Для численной реализации в пакете **QDF01** создана процедура экспорта формируемой матрицы в код языка **Fortran** и языка **C++**.

Результаты предварительного моделирования в рамках **QDF01** спектральных линий нейтрального лития с $n + l = 2$ привели к локальному минимуму: $E = -0,88$, $b_1 = b_3 = 1.333400002$, $c_1 = 1/6$, $c_3 = 5/6$, $c_2 = c_4 = c_5 = 0$ (последние равенства исключают из процедуры вычислений параметры b_2, b_4, b_5).

Аналогичные вычисления для первых пяти спектральных линий натрия привели к локальному минимуму: $E = -0,44$, $b_1 = b_3 = 1.375187695$, $c_1 = 0.2499898275$, $c_3 = 1.0 - c_1$.

Получившиеся при этом собственные значения матрицы $M_N(H)$ сравнивались с соответствующими собственными значениями оператора $O(H)$, вычисленными с помощью программы **FECCDE**, разработанной в ОИЯИ с участием одного из соавторов данной работы.

3. Вычисление спектра методом Канторовича

Гамильтониан (1) представим в следующем виде

$$O(H) = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{Z}{r} + B_0(r, c_1, c_2, c_3, c_4, b) + B_2(r, c_3, c_4, b) \cos^2 \theta. \quad (2)$$

Решение уравнения Шредингера

$$O(H)\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (3)$$

ищем в виде разложения Галёркина

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \chi_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4)$$

где $Y_{lm} \in \mathbf{L}_2(\mathbf{S}_2)$ базис сферических функций, а выбор необходимого количества базисных функций $l_{\max}$ зависит от значений параметров c_1, c_2, c_3, c_4, b и значения требуемой точности вычисления $R_{tol} = \varepsilon$ собственных значений и собственных функций. В результате подстановки (4) в (3) и усреднения по конечному базису получаем систему $l_{\max} + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных коэффициентов $\chi^T(r) = \{\chi_0(r), \chi_1(r), \dots, \chi_{l_{\max}}(r)\}$:

$$(H^{(0)} + H^{(1)}(r, c_1, c_2, c_3, c_4, b) - E)\chi(r) = 0 \quad (5)$$

с граничными условиями на конечном интервале

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \chi(r) = 0, \quad \chi(r_{\max}) = 0 \quad (6)$$

и условием нормировки

$$\int_0^{r_{\max}} \chi^T(r) \chi(r) = 1, \quad (7)$$

аппроксимирующие решение исходной задачи на полуоси.

Матричные элементы матриц $H^{(0)}$ и $H^{(1)}$ размерностью $(l_{\max} + 1) \times (l_{\max} + 1)$ заданы выражениями

$$H_{ll'}^{(0)}(r) = \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{l(l+1)}{2r^2} - \frac{Z}{r} \right] \delta_{ll'},$$

$$H_{ll'}^{(1)}(\tilde{r}) = B_0(r, c_1, c_2, c_3, c_4, b) \delta_{ll'} + B_2(r, c_3, c_4, b) \langle l | \cos^2 \theta | l' \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle l | \cos^2 \theta | l' \rangle = & \left\{ 1 - \left[1 - \frac{(l+1)^2}{4(l+1)^2 - 1} - \frac{l^2}{4l^2 - 1} \right] \right\} \delta_{ll'} - \\ & - \left\{ -\frac{1}{4\sqrt{(2l+1)(2l'+1)}} \frac{(l+l'+1)^2 - 1}{(l+l'+1)} \right\} \delta_{2, |l'-l|}. \end{aligned}$$

Граничные условия для вектор-функции $\chi(r)$ следуют из ограниченности решения (4) на границах области определения $0 \leq r < \infty$ и определяются условием ограниченности произведения $\lim_{r \rightarrow 0} |\tau V| < \infty$, элемента объема $\tau = r^2$ и матриц потенциалов V (потенциальная часть $H^{(0)}$ и потенциалы $H^{(1)}$) в окрестности $r = 0$ [31].

При значении параметра $b = 0$ собственные функции и собственные значения невозмущенного водородоподобного атома с зарядом Z известны (в атомных единицах):

$$\chi_l^n(\tilde{r}, 0) = N_l R_{nl}(\tilde{r}), \quad E_n = \frac{Z^2}{2n^2},$$

где

$$N_l = \frac{1}{(2l+1)!} \sqrt{\frac{(n+l)!}{2n(n-l-1)!}} \left(\frac{2Z}{n} \right)^{3/2},$$

$$R_{nl}(\tilde{r}) = \left(\frac{2Zr}{n} \right)^l \exp \left(-\frac{2Zr}{n} \right) \sqrt{\frac{(n+l)!}{(n-l-1)!}} {}_1F_1 \left(-n+l+1, 2l+2, \frac{2Zr}{n} \right),$$

N_l — нормировочная константа и ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Для $b \neq 0$ задача на собственные значения решается численно с помощью программы FESSDE, реализующей метод конечных элементов. При малых значениях b для получения результата в аналитическом виде можно использовать программу Pointfield, реализующую теорию возмущений в терминах неприводимых представлений алгебры $so(4, 2)$.

В таб. 1, 2 приведены основные результаты.

Таблица 1

Полученные значения энергетических уровней лития при $b = 1.333400002$, $\alpha_1 = 1/6$: p — программа pot_Li_2_0.mws; g — метод Галёркина; m — магнитное число, σ — чётность

e	p	g	m	σ
−0.198141308	−0.1981413057	−0.1983859156810	0	0
−0.130234483	−0.1075886207	−0.1088798840814	0	1

Таблица 2

Полученные значения энергетических уровней натрия при $b = 1.375187695$, $\alpha_1 = 0.2499898275$: e — экспериментальные значения; p — программа pot_Na_first_5_levels.mws; g — метод Галёркина; m — магнитное число, σ — чётность

e	p	g	m	σ
−0.188858429	−0.1990045847	−0.1990024860015	0	0
−0.111561249	−0.1136718750	−0.1155306355929	0	0
−0.111561249	−0.1001797687	−0.1018830623981	0	0
−0.111561249	−0.1001797686			
−0.071578399	−0.07251607689	−0.0718488753176	0	1
−0.055937079	−0.04310045553	−0.0550965418591	0	1
−0.055937079	−0.04150270976	−0.0540875552820	0	1
−0.055937079	−0.04150270974	−0.0508331941748	0	1
−0.055937079	−0.03529903967			
−0.055937079	−0.03529903967			

4. Заключение

Среди квантовых моделей водородоподобных атомных объектов до сих пор нет ни одной модели, явно выделяющейся среди остальных в лучшую сторону. До сих пор остается открытой проблема адекватного моделирования оптических спектральных характеристик многоэлектронных атомов. Предлагаемая нами модель обладает потенциальными возможностями для улучшения количественных характеристик. Даже при небольших наборах вспомогательных функций правило квантования Курышкина оказывается удовлетворительным для описания оптических спектров атомов щелочных металлов. Альтернативные алгоритмы приближенного вычисления спектров адаптированных операторов показывают хорошее совпадение результатов численных экспериментов.

Наиболее строгие и очень сложные модели расчетов спектральных характеристик многоэлектронных систем, описание, например, в книгах [23, 24], приводят к мультипольному представлению одноэлектронного потенциала в приближенном уравнении Шредингера для вычисления радиальных функций, участвующих в расчетах вероятностей радиационных переходов. Модель Курышкина задачи Кеплера приводит именно к такому виду модельного потенциала. Расчеты переходных вероятностей будут приведены в одной из следующих публикаций.

В настоящее время представляет значительный интерес вычисление вероятностей радиационных переходов в присутствии сильных магнитных полей. При

этом упомянутое выше уравнение Шредингера из [23] становится более сложным для численной реализации. Изучаемая нами модель оптических характеристик щелочных металлов имеет единообразную форму как в отсутствие, так и в присутствии внешнего магнитного поля. Это ещё одно преимущество изучаемой нами модели.

Литература

1. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. — М.: Наука, 1976.
2. Фок В. А. Атом водорода и неевклидова геометрия // Изв. АН СССР, ОМЕН. — Вып. 2. — 1935. — С. 169–179.
3. Демков Ю. Н., Островский В. Н. Внутренняя симметрия задачи Максвелла о «рыбьем глазе» и группа Фока для атома водорода // ЖЭТФ. — Т. 6. — 1971. — С. 2011–2018.
4. Демков Ю. Н., Островский В. Н. Правило заполнения $n+1$ в периодической системе Менделеева и фокусирующие потенциалы // ЖЭТФ. — Т. 62. — 1972. — С. 125–132.
5. Kitagawara Y., Barut A. O. On the dynamical symmetry of the periodic table: II. Modified Demkov-Ostrovsky atomic model // J. Phys. B. — Vol. 16. — 1983. — Pp. 3305–3327.
6. Kitagawara Y., Barut A. O. Period doubling in the $n+1$ filling rule and dynamical symmetry of the Demkov-Ostrovsky atomic model // J. Phys. B. — Vol. 17. — 1984. — Pp. 4251–4259.
7. Курьшкин В. В. Квантовые функции распределения. Дисс. — канд. физ.-мат. наук. — УДН, 1969.
8. Kuryshkin V. V. La mécanique quantique avec une fonction nonnegative de distribution dans l'espace des phases // Annales Inst. Henri Poincaré. — Vol. 17, No 1. — 1972. — Pp. 81–95.
9. Kuryshkin V. V. Some problems of quantum mechanics possessing a non-negative phase-space distribution function // Int. J. Theor. Phys. — Vol. 7, No 6. — 1973. — Pp. 451–466.
10. Kuryshkin V. V., Zaparovanny Y. I. L'atome d'hydrogene dans mecanique quantique a fonction de distribution non-negative dans l'espace des phases // Compt. Rend. Acad. Sc. Paris. — Vol. 277, Serie B. — 1974. — Pp. 17–21.
11. Сорокин В. А., Запарованный Ю. И. К задаче об атоме водорода в квантовой механике с неотрицательной КФР // В сб. «Современные задачи в точных науках». — Вып. 1. — 1975. — С. 84–88.
12. Запарованный Ю. И., Курьшкин В. В. К задаче о гармоническом осцилляторе в квантовой механике с неотрицательной КФР // В кн. Проблемы статистической физики и теории поля. — М.: УДН, 1976. — С. 97–101.
13. Запарованный Ю. И., Курьшкин В. В. К реализации предельных переходов в квантовой механике с неотрицательной КФР // В кн. Проблемы статистической физики и теории поля. — М.: УДН, 1980. — С. 107–112.
14. Зорин А. В., Курьшкин В. В., Севастьянов Л. А. Описание спектра водородоподобного атома // Вестник РУДН, сер. Физика. — Т. 6, № 1. — 1998. — С. 62–66.
15. Жидков Е. П., Зорин А. В. Описание спектра водородоподобного атома в квантовой механике с последовательно вероятностной интерпретацией // Сообщения ОИЯИ 2000 – P11-2000-316. — Дубна: Изд-во ОИЯИ, 2000. — 19 с.
16. Zhidkov E. P., Zorin A. V. Quantum Theory with Statistical Interpretation: The Hydrogen-like atom Problem // Journ. Comp. Meth. Sci. Engin. — Vol. 2, No 1-2. — 2002. — Pp. 293–307.
17. Зорин А. В., Севастьянов Л. А. Математическое моделирование квантовой механики с неотрицательной КФР // Вестник РУДН, Физика. — Т. 11, № 2. — 2003. — С. 81–87.
18. Фок В. А. Начала квантовой механики. — М.: Наука, 1976.

19. *Rothenberg M.* Application of Sturmian functions to the Schroedinger three-body problem // *Ann. Phys (N.Y.)*. — Vol. 19. — 1962. — Pp. 262–278.
20. *Rothenberg M.* Theory and application of Sturmian functions // *Adv. At. Molec. Phys.* — Vol. 6. — 1970. — Pp. 233–268.
21. *Христенко С. В.* Штурмовские разложения функций Грина для простейших систем // *ТМФ*. — Т. 22. — 1975. — С. 31–45.
22. *Фриш С. Э.* Оптические спектры атомов. — М.: Физматгиз, 1963.
23. *Собельман И. И.* Введение в теорию атомных спектров. — М.: Физматгиз, 1963.
24. *Веселов М. Г., Лабзовский Л. Н.* Строение электронных оболочек. — М.: Наука, 1986.
25. *Зорин А. В., Севастьянов Л. А.* Метод оценок снизу для собственных значений дифференциального оператора Гамильтона в квантовой механике Курышкина // *Вестник РУДН, сер. Прикладная и компьютерная математика*. — Т. 1, № 1. — 2002. — С. 134–144.
26. *Зорин А. В., Севастьянов Л. А.* Спектральные свойства операторов Гамильтона в квантовой механике с неотрицательной КФР // Тезисы 2 Международн. конф. «Функциональный анализ и дифференциальные операторы». — М.: Физматлит, 2003. — С. 169–170.
27. *Зорин А. В.* Метод исследования существенного и дискретного спектров оператора Гамильтона водородоподобного атома в квантовой механике Курышкина // *Вестник РУДН, сер. Прикладная и компьютерная математика*. — Т. 3, № 1. — 2004. — С. 121–131.
28. *Зорин А. В., Севастьянов Л. А., Беломестный Г. А.* Аналитическое вычисление матриц наблюдаемых водородоподобного атома в квантовой механике Курышкина // *Вестник РУДН, сер. Прикладная и компьютерная математика*. — Т. 3, № 1. — 2004. — С. 106–120.
29. *Zorin A. V., Sevastianov L. A., Belomestny G. A.* Numerical search for the states with minimal dispersion in quantum mechanics with non-negative quantum distribution function // *Lect. Notes in Comp. Sci.* — Vol. 3401. — 2005. — Pp. 613–621.
30. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. — М.: Мир, 1978. — Т. 4.
31. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

UDC 539.17

Numerical Investigation of the Discrete Spectrum of Hamiltonian Operators of the Hydrogen-Like Atoms in Kuryshkin's Quantum Mechanics

A. A. Gusev ^{*}, A. V. Zorin [†], K. P. Lovetsky [†], N. P. Tretyakov [†]

^{*} *Joint Institute for Nuclear Research
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia*

[†] *Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

The behaviour of the potential of one-particle approximation of the Schroedinger equation is discussed for the description of the optical spectrum of a many-electron atom with one optical electron. Properties of discrete and continuum spectra of Hamilton-Kuryshkin operator let to use for its numerical calculation two alternative methods. The comparison of the results and their discussion shows the perspectives of the proposed model for the description of optical characteristics of atomic systems with one optical electron.

UDC 539.3

Parthenogenetic Versus Sexual Reproduction: Mathematical Modelling of Population Dynamics

V. S. Tretyakov, N. P. Tretyakov

*Laboratory for Computational Physics and Mathematical Modelling
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Using a modified bit string aging model proposed by Penna we try to explain population dynamics of holocyclic species. In a system with two fractions (sexual and parthenogenetic) sexual population generates individuals with more genetic variability and these individuals are better adapted to the current environment. On the other hand, parthenogenetic population produces more offsprings. In our model a female can choose the best male among two randomly chosen males (i.e. with less deleterious mutations). We simulate a natural selection by this way. We show that in a system under deleterious external conditions, sexual fraction is better adapted to the current environment because of this single factor. In other words, female choice may be a unique factor responsible for the maintenance of sexual reproduction.

Introduction

Evolutionary processes can be studied using computer simulation [1–4]. In this kind of modelling cell automations represent genomes of unicellular organisms. Bit arrays used in our simulations consist of “0” and “1” [5,6]. Unities mean mutations, i.e. damages of the genome, while zeroes symbolize undamaged fragments of DNA. By the hypothesis of Jan, Stauffer and Moseley [7], evolution has led to sexual reproduction in order to avoid extinction from very high level of deleterious mutations. But some sexual species of animals can return to reproduce in an asexual way in their life cycle although sexual way of reproducing is more perfect. For example, many species of insects and some lizards are holocyclic. (Species that produce both sexual and asexual morphs are called holocyclic).

In a system with two fractions (sexual and parthenogenetic) sexual population generates individuals with more genetic variability and these individuals are better adapted to the current environment. On the other hand, parthenogenetic population produces more offspring. A question arises: what is more important in a system with competition? The answer is not obvious. Under some conditions it is more effective to have higher fertility but under other conditions it may be more effective to have more genetic variability [8].

This complete process has been studied in reference [9]. The authors used a bit string model (a modified model of Penna [10]). In their model once a year in autumn sexual females laid winter eggs. In order to model winter (i.e. harsh condition) they used an enhanced Verhulst factor. All adult insects suffer from that enhanced factor. In spring parthenogenetic females hatch from these winter eggs. During the whole summer and autumn they reproduce by parthenogenesis and only at the end of autumn they give birth to sexual insects (females and males). In this model parthenogenetic females dominate under favorable conditions. But under unbearable conditions only sexual way of reproduction can avoid extinction.

In other works authors used a simple model for biological aging. As in many previous simulations, starting with Redfield [11,12], the sexual version does not give a clear advantage over the asexual one and additional assumptions like in [13] may be needed to justify sex.

Using a bit string model of Penna we try to explain population dynamics of holocyclic species. We have modified the original model. In our model the system consists of two fractions: sexual diploids (SD) and parthenogenetic diploids (PD). At the beginning only SD are present but later a number of PD are added too (a “parthenogenetic invasion”). A sexual female can select a male with less number of homozygous “1”’s positions. PD and SD compete between each other. As usual one fraction wins and the other fraction comes to extinction. It depends on conditions and existence or absence of the above mentioned factor of female preference. This way we simulate natural selection. The aim of this work consists in simulation of such an evolution of populations of unicellular organisms when transition to parthenogenesis occurs as a consequence of the self-organization of the system in response to external conditions.

1. The model

In the model proposed by Penna [10], each individual is represented by two parallel bit strings of 32 “0”’s and “1”’s. One time-step (“one year”) corresponds to read one position of all the genomes. In this way, each individual can live at most for 32 time-steps (“years”). Damages of genome (i.e. lethal mutations) are described by “1”’s.

If an individual has two bits “1”’s (homozygous) at the fifth position, for instance, it starts to suffer from a genetic disease at its fifth year of life. If it is an homozygous position with two bits “0”’s, no disease appears at that age. If the individual is heterozygous in some position, it will not get sick as well (i.e. lethal mutations are recessive). When the number of accumulated diseases of any individual reaches a threshold μ , the individual dies.

Apart from deaths from genetic diseases, on every time step an individual can die with the probability

$$P_V = \frac{N}{N_{\max}}, \quad (1)$$

where N is the size of population at the current time step. The expression (1) is named a logistic Verhulst factor, which models the volume of ecological niche and competition of individuals for limited resources [12,13].

Reproduction is modeled by the introduction of new genomes in the population. Each female becomes reproductive after having reached a minimum reproductive age (R_m), after which she generates an offspring at the completion of each period of life. The meiotic cycle is represented by the generation of a single-stranded cell out of the diploid genome. To do so, each string of the parent genome is cut at a randomly selected position, the same for both strings, and the left part of one is combined with the right part of the other, thus generating two new combinations of the original genes (by this means the crossover is modeled). The selection of one of these completes the formation of the haploid gamete coming from the mother and then:

Case 1: The female selects the best male among two (randomly chosen) reproductive males, i.e. the male with less number of homozygous “1”’s positions. The male undergoes the same meiotic cycle, generating a second haploid gamete from his genome.

Case 2: The female selects any male with age more or equal to R_m . The male undergoes the same meiotic cycle, generating a second haploid gamete out of his genome.

For both regimes, the next stage of the reproduction process is the introduction of M independent mutations (i.e. “1”’s) in the newly generated genetic strands.

The two gametes, one from each parent, are now combined to form the genome of the offspring. The gender of the newborn is then randomly selected, with equal probability for each sex.

In this model at the beginning the population consists only of males and females reproducing in a sexual way, but then (after 700 time steps) we added a few parthenogenetic females which reproduce by parthenogenesis.

As a whole, manipulations with PF are the same as those described above for sexual females and males. The meiosis is represented by generation of haploid gametes

from the diploid genome. Also as for sexual fraction, crossover is performed in the gametes. Then some M randomly chosen bits are flipped from 0 to 1. PF reproduce by parthenogenesis, generating only parthenogenetic females.

The use of a single Verhulst factor for sexual population and PF leads to competition between them.

We used the following values of the parameters of the model:

- 1) minimum reproductive age: $R = 10$;
- 2) total number of time steps: $T_{\max} = 1800$;
- 3) maximum population size: $N_{\max} = 300000$;
- 4) initial population of males and females: $N_{0m} = 1000$, $N_{0f} = 1000$;
- 5) threshold of lethal mutations: $\mu = 4$ (fine conditions) and $\mu = 3$ (harsh conditions);
- 6) M — mutation rate: $M = 1$ (fine conditions), $M = 3$ (harsh conditions).

2. Results and discussion

We begin by showing the sexual population under fine conditions (i.e low mutation rate M and high threshold of lethal mutations μ) in Fig. 1A. Fig. 1B represents a system with invasion of parthenogenetic population. In this case the parthenogenetic fraction wins and the sexual population becomes extinct. The similar behavior was observed in case of female preference, i.e. when a female selects a male with less number of homozygous “1”’s positions (Fig. 2). In a system under fine conditions the sexual version does not give a clear advantage over the parthenogenetic one. That also has been shown in references [11, 14].

In Fig. 3, 4 one can see a system under harsh conditions. Without natural selection (without female preference) the parthenogenetic fraction dominates (Fig. 3). The situation changes dramatically when the factor of female preference is switched on (Fig. 4). In this case the sexual fraction dominates. Data is collected as an average over many runs, and sexual males and females win in 100% percent of cases.

Typical genes (bit strings) of the winners (Fig. 4C) have $26.26 (\pm 4.22)$ percent of heterozygous positions (and $56.88 \pm 3.85\%$ of homozygous “1”’s positions). It may be deduced that heterozygous order of lethal mutations allows the sexual fraction to survive. Bit strings (Fig. 1) of losing sexual fraction have 34.67 ± 9.01 percent of heterozygous positions and $41.86 \pm 9.60\%$ of homozygous “1”’s positions; $48.13 \pm 9.46\%$ of heterozygous positions and $19.97 \pm 8.28\%$ of homozygous (Fig. 2); and $20.96 \pm 2.96\%$, $65.93 \pm 3.45\%$ for Fig. 3.

One can see, looking at Fig. 1C, Fig. 2C, Fig. 3C, that parthenogenetic females have only homozygous positions.

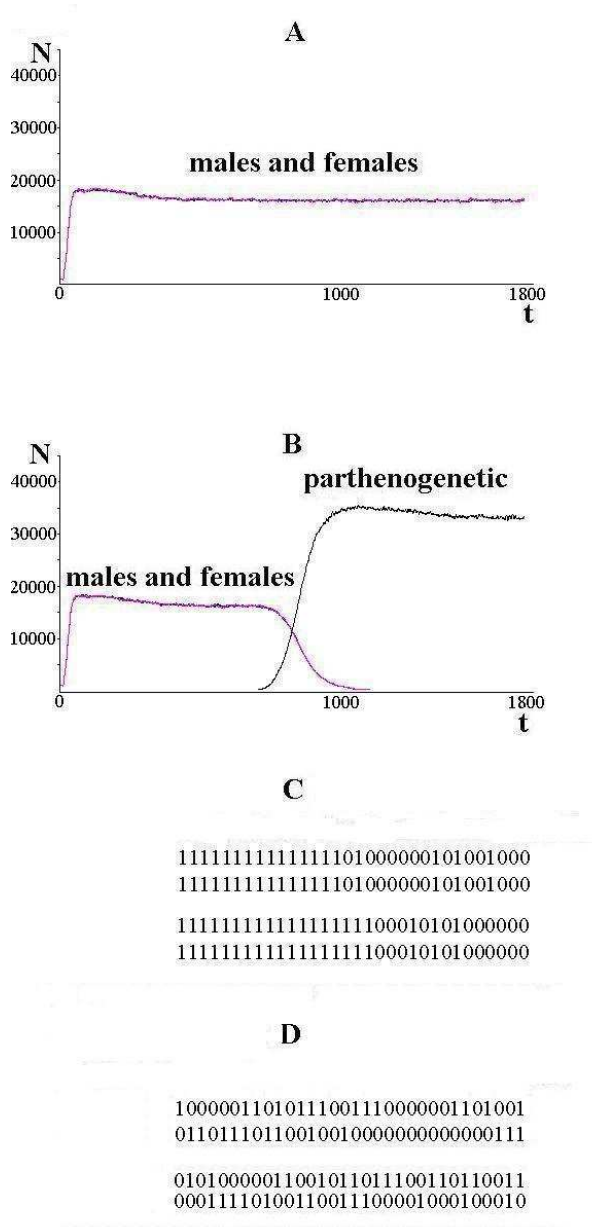


Figure 2. Population dynamics under the conditions of low rate and high threshold of lethal mutations: $M = 1$, $\mu = 4$ (“fine” conditions). The factor of female preference is switched on (Case 1). The remaining parameters are the same as in Fig. 1. A — without invasion of parthenogenetic females (PF). B — with invasion of PF. PF dominate in the system. C — typical genes of the surviving fraction (i.e. PF). D — typical genes of the dying fraction (i.e. sexual).

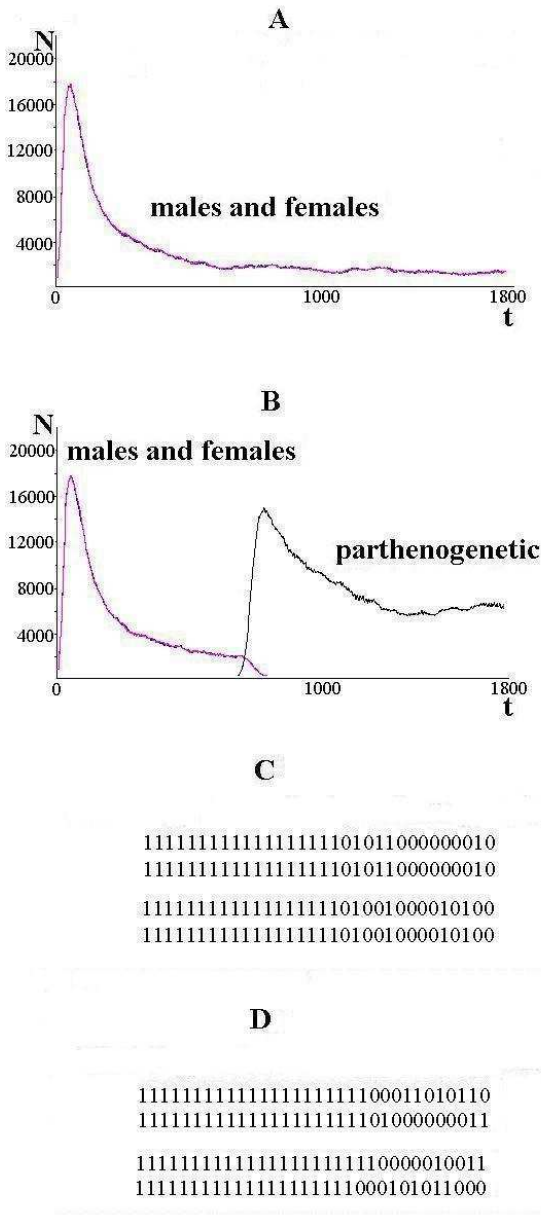


Figure 3. Population dynamics under the conditions of high rate and high threshold of lethal mutations: $M = 3$, $\mu = 3$ (“harsh” conditions). No female preference (Case 2). The remaining parameters are the same as in Fig. 1. A — without invasion of parthenogenetic females (PF). B — with invasion of PF. PF dominate in the system. C — typical genes of the surviving fraction (i.e. PF). D — typical genes of the dying fraction (i.e. sexual).

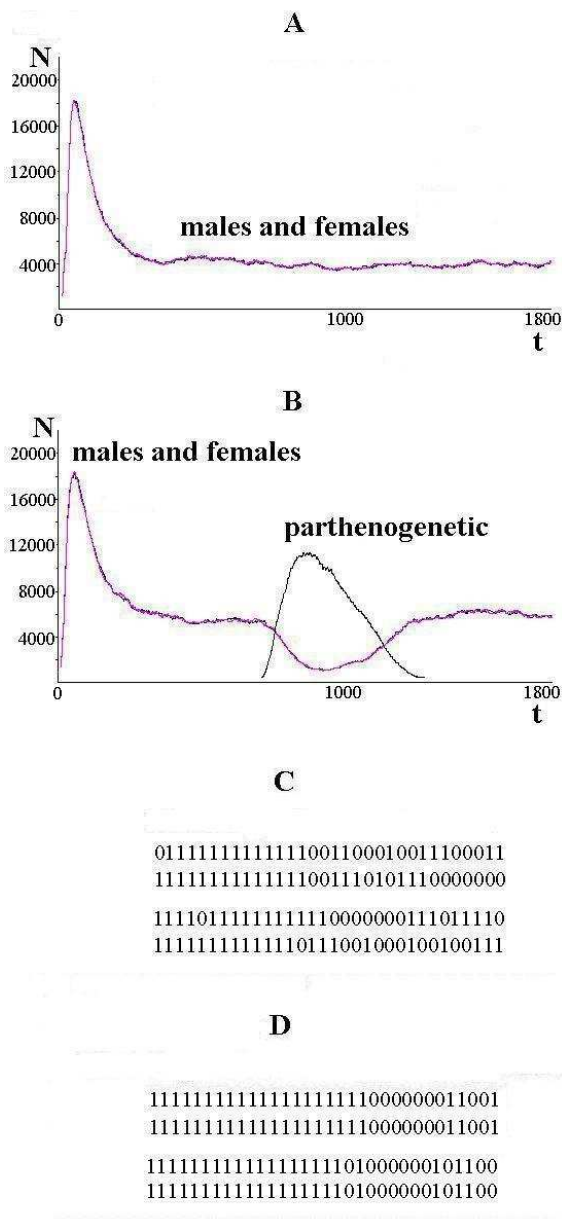


Figure 4. Population dynamics under the conditions of high rate and high threshold of lethal mutations: $M = 3$, $\mu = 3$ (“harsh” conditions). The factor of female preference is switched on (Case 1). The remaining parameters are the same as in Fig. 1. A — without invasion of parthenogenetic females (PF). B — with invasion of PF. Sexual fraction dominate in this case. C — typical genes of the surviving fraction (i.e. sexual males and females). D — typical genes of the dying fraction (i.e. PF).

So, sexual fractions demonstrate its advantages only in systems under harsh conditions with natural selection.

Analyzing bit strings of survived sexual males and females, we see that in the dominant positions of their bit strings are homozygous "1"s. But in the other positions are mostly heterozygous "1"s. So the sexual fraction can better adopt to the current environment because of a female selecting of a better genetic material (i.e. a better male).

Sexual reproduction is more efficient than parthenogenetic reproduction only in this case. On the basis of that we think that our model describes truly some significant characters of the evolution that led to the sexual reproduction.

References

1. Carletti T., Fanelli D. // Eur. Phys. Lett. — Vol. 77. — 2007. — P. 18005.
2. Aguirre J., Manrubia S. C. // Eur. Phys. Lett. — Vol. 77. — 2007. — P. 38001.
3. Penna T. J. P., Racco A., de Menezes M. A. // Comput. Phys. Commun. — Vol. 108. — 1999. — P. 121.
4. de Oliveira S. M., Alves D., Martins J. S. S. // Physica A. — Vol. 77. — 2000. — P. 285.
5. de Oliveira P. M. C. // Theory in Biosciences. — Vol. 120. — 2001. — Cond-mat/0101170 preprint.
6. Martins J. S. S., Stauffer D. // Physica A. — Vol. 294. — 2001. — P. 191.
7. Jan N., Stauffer D., Moseley L. // Theory in Biosciences. — Vol. 119. — 2000. — P. 166.
8. Smith J. M. The Evolution of Sex. — Cambridge, England: Cambridge University Press, 1978. — Pp. 69–73.
9. Martins J. S. S., Racco A. cond-mat/0011499v2 preprint. — 2000.
10. Penna T. J. P. // J. Stat. Phys. — Vol. 78. — 1995. — P. 1629.
11. Redfield R. J. // Nature. — Vol. 369. — 1994. — P. 145.
12. Sousa A. O., de Olivera S., Martins J. S. S. cond-mat/0212402v1 preprint. — 2002.
13. Penna T. J. P. // J. Stat. Phys. — Vol. 78. — 1995. — P. 1629.
14. Sousa A. O., de Olivera S. M., Stauffer D. cond-mat/0108493v1 preprint. — 2001.

УДК 539.3

Партеногенетическое воспроизводство в сравнении с половым. Математическое моделирование

В. С. Третьяков, Н. П. Третьяков

*Лаборатория вычислительной физики и математического моделирования
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6*

Используя модифицированную модель Пенна, мы пытаемся объяснить динамику развития голоциклических видов. В системе с партеногенетическими самками и обычными самцами и самками последние дают начало потомкам, обладающим большим генетическим разнообразием, которые лучше приспособлены к условиям окружающей среды. С другой стороны партеногенетические самки продуцируют больше потомства. В нашей модели самка может выбирать лучшего самца (с меньшим количеством мутаций) среди двух случайно выбранных самцов. Мы моделируем так естественный отбор. Мы показали, что в системе с значительным мутационным фоном, половая фракция лучше приспособлена благодаря выбору самкой лучшего самца.

УДК 519.21; 519.246.8

Определение структурных изменений в динамике фондового рынка

П. В. Зрелов

*Лаборатория вычислительной техники и автоматизации
Объединённый институт ядерных исследований
Россия, 141980, Моск. область, Дубна, ул. Жолио-Кюри, 6*

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [1], где была предложена новая переменная фондового рынка Ξ (отношение дневной цены закрытия к соответствующему объёму торгов), и изучены статистические свойства этой переменной для широкого спектра данных фондового рынка. В настоящей работе предложены две новые переменные и показано, что они могут быть использованы для выявления структурных изменений в динамике исходного процесса. Для обнаружения моментов таких изменений предложен оригинальный подход, в котором две новые переменные являются основой для построения двумерного рыночного индикатора, служащего для определения точек смены состояния рынка на временной оси.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: фондовый рынок, логнормальное распределение.

Введение

Финансовые временные ряды имеют сложный характер вследствие большого числа факторов, влияющих на динамику исходного процесса. Основная задача исследователей фондового рынка — научиться предсказывать его дальнейшее поведение на основе анализа данных за предыдущий период. Для этого надо выявить основные закономерности функционирования рынка и использовать их для построения соответствующих теорий и моделей. В настоящее время основной теорией является теория фрактального рынка, основным методом исследования — фрактальный анализ, а доминирующим семейством распределений — устойчивые распределения Леви [2–5]. В свою очередь, распределения Леви [6] возникли из необходимости описать эмпирические распределения с тяжёлыми хвостами, обнаруженные Парето при попытке аппроксимировать распределения доходов логнормальным распределением.

При этом логнормальное распределение имеет свою историю в исследованиях фондового рынка. В основном эти исследования были посвящены изучению поведения приращений цен и цен опционов (модель Блэка–Шоулса [7]), обзор этих исследований содержится в книге [8]. Кроме этого исследовались логнормальные свойства волатильности для акций и индексов [9, 10].

Тема логнормальности в финансовых рядах далеко не исчерпана. Например, в работе [1] были представлены результаты исследований по выявлению новых статистических закономерностей, характеризующих мировые рынки ценных бумаг. На основе анализа большого количества акций различных компаний было показано, что распределение цен закрытия, нормированных на дневные объёмы сделок (показатель, обозначаемый авторами через Ξ), с хорошей точностью отвечает либо логнормальному закону, либо взвешенной сумме логнормальных распределений с различными параметрами. Распределения величин Ξ для рыночных

Эти исследования были поддержаны Министерством культуры, высшего образования и науки Люксембурга, грант BFR01/071.

Автор благодарен профессорам Люксембургского университета М. Malvetti и U. Sorger за внимание и поддержку, а также профессорам В. В. Иванову и I. Antoniou за обсуждения и полезные замечания.

индексов, как правило, описываются взвешенными суммами логнормальных распределений. Эти факты говорят о том, что для ряда акций и большей части индексов существуют различные режимы для динамических систем, описывающих их функционирование. Как отмечалось в работе, это свойство требует дальнейшего детального исследования.

Настоящая работа посвящена построению индикатора смены состояния системы на основе использования новых рыночных переменных.

1. Новые переменные фондового рынка

В настоящей работе были проанализированы фондовые индексы США, такие как S&P500, Dow Jones Industrial Average, NYSE Composite, NASDAQ Composite; европейские фондовые индексы FTSE-100, BEL-20, а также японский фондовый индекс Nikkei-225.

Был проанализирован широкий спектр акций отдельных компаний рынков США и Европы: Motorola, Microsoft, IBM, Boeing, Exxon Mobil, Ford Motor, DaimlerChrysler, Merck, Delta Airlines, Lockheed Martin, Intel, Solvay, Arbed etc. Рассматривались дневные данные, при этом для каждой ценной бумаги или индекса анализировались наименьшая и наибольшая цена дня, цена закрытия торговой сессии и величина дневного объёма торгов. Анализируемые данные охватывали различные периоды — от нескольких лет до нескольких десятилетий (например, для индекса Dow Jones этот период составлял более 70 лет).

В долгосрочной перспективе временные ряды, отражающие стоимость ценных бумаг, демонстрируют растущие тренды, что затрудняет анализ данных, требующий в этом случае их предварительного удаления. В работе [1] были предложены методы удаления тренда, основанные на вейвлет-анализе и анализе сингулярного спектра. С другой стороны, введённая в этой же работе новая рыночная переменная Ξ , которая построена на основе показателей, имеющих растущие тренды, сама тренда не имеет, а её среднее значение и дисперсия относительно стабильны. В настоящей работе вводятся две новые рыночные переменные для акций и индексов, также имеющих относительно стабильные средние значения и дисперсии:

- 1) Λ , отношение разности наибольшей и наименьшей цены дня и цены закрытия дневной сессии — «(High-Low)/Close»,
- 2) Φ , отношение разности наибольшей и наименьшей цены дня к объёму торгов дневной сессии — «(High-Low)/Volume».

Эмпирические распределения величин Λ и Φ в простых случаях выглядят как логнормальные распределения. Для проверки гипотезы о соответствии эмпирической выборки логнормальному закону распределения, данные подвергались аппроксимации функцией следующего вида (см., например, [8, 11]):

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2}, \quad (1)$$

где σ^2 — дисперсия, μ — среднее значение, A — масштабный множитель. Качество аппроксимации определялось величиной χ^2/ndf , где «ndf» — число степеней свободы. Результаты аппроксимации (параметры, χ^2/ndf), полученные с помощью системы PAW (Physics Analysis Workstation) [12], представлены в правом верхнем углу соответствующих рисунков.

В ряде случаев использовалась более общая форма логнормального распределения [8, 13]:

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-c)} \exp^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln(x-c) - \mu)^2}, \quad (2)$$

где c — дополнительный параметр.

2. Статистический анализ данных фондового рынка

Статистический анализ цен акций и индексов показал, что распределения величин Λ и Φ отвечают либо логнормальному распределению, либо взвешенной сумме логнормальных распределений. При этом случай, когда оба распределения Λ и Φ одновременно принадлежат «чистым» логнормальным распределениям, не является типичным. Более вероятно, когда одна из этих переменных имеет распределение, определяемое суммой нескольких функций (1) или (2).

На рис. 1 приведены результаты статистической обработки данных для компании Lockheed Martin. Наряду с исходными данными для временных рядов трах величин «Close», «High–Low» и «Volume» представлены распределения величин Λ и Φ .

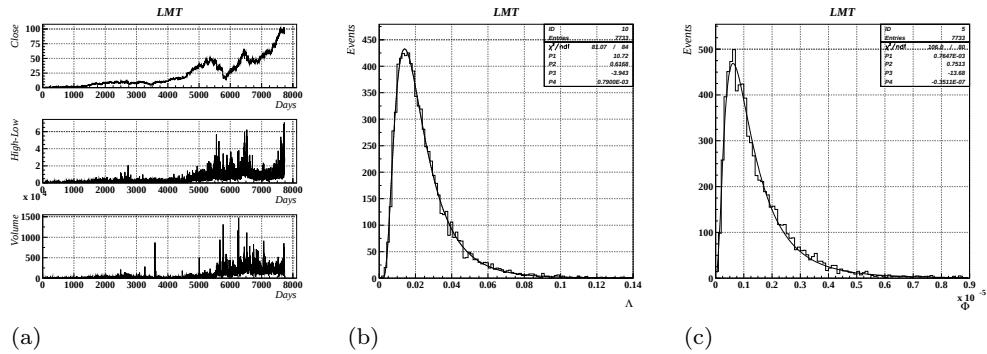


Рис. 1. Lockheed Martin: (a) временные ряды величин «Close», «High–Low» и «Volume»; (b) и (c) распределения величин Λ и Φ с наложенными аппроксимирующими кривыми (2)

Хорошо видно, что для акций компании Lockheed Martin эмпирическое распределение переменной Λ хорошо аппроксимируется функцией (2) — величина χ^2/ndf равна 0.96. Эмпирическое распределение переменной Φ аппроксимируется хуже — величина χ^2/ndf равна 1.33, что говорит о незначительном вкладе другого распределения. Для компании Exxon Mobil оба распределения Λ и Φ плохо описываются отдельными логнормальными распределениями, но могут быть представлены суммами таких распределений. Для компании General Electric распределение Λ описывается одним логнормальным распределением, а Φ — только суммой. Аналогичная ситуация для Motorola, Boeing, General Motors, Delta Airlines, IBM и ряда других. Похожая картина и для индексов. В частности, для индексов AMEX Composite, BEL-20 (Бельгия), FTSE-100, Nikkey-225 распределения для Λ хорошо описываются отдельными функциями (2).

Поведение индексов NYSE Composite, NASDAQ Composite (рис. 2–3), S&P500 (рис. 4–5) и Dow Jones носит более сложный характер. В ряде случаев, например, для индекса S&P500 структурные изменения заметны «на глаз» — хорошо видно, что ни Λ , ни Φ не описываются одиночными логнормальными функциями. В то же время структурные изменения для индекса NASDAQ, хотя и не определяются «на глаз», однако проявляются в процессе статистического анализа. Подробнее эти особенности будут рассмотрены в следующей главе.

3. Выявление структурных изменений в динамике рыночных показателей

Статистическое свойство логнормальности в действительности отражает определённое внутреннее свойство динамики анализируемого временного ряда. Мы полагаем, что возможные структурные изменения в динамике исходного процесса

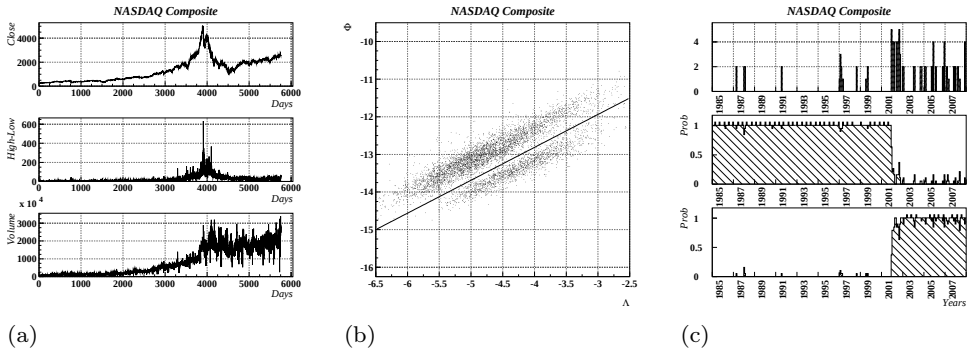


Рис. 2. NASDAQ Composite: (a) временные ряды величин “Close”, “High–Low” и “Volume”; (b) совместное распределение величин $\ln \Lambda$ и $\ln \Phi$, а также граница, разделяющая два состояния; (c) распределение числа изменений состояния на временной оси (вверху) и вероятности нахождения системы в каждом из найденных состояний

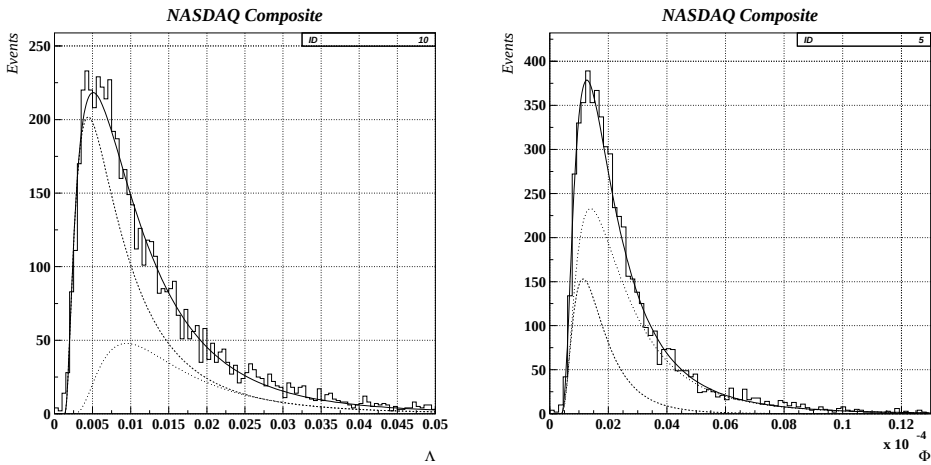


Рис. 3. NASDAQ Composite: распределение величин Λ (слева) и Φ (справа) с наложенными кривыми, аппроксимирующими распределения этих величин для каждого из двух выявленных состояний функциями (2), а также кривая их суммы

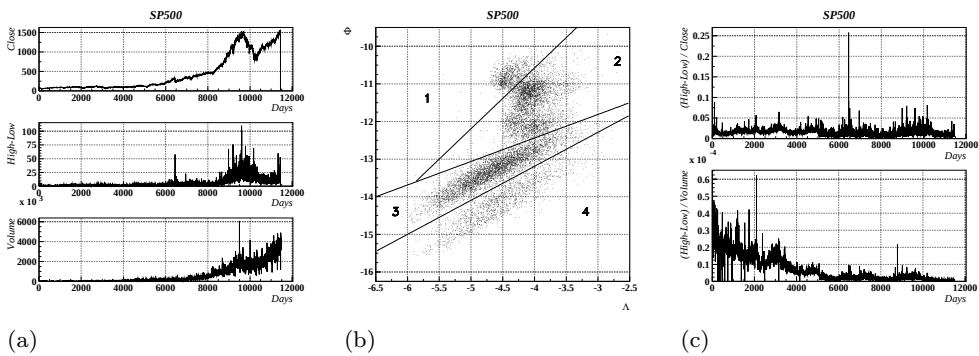


Рис. 4. S&P500: (a) временные ряды величин “Close”, “High–Low” и “Volume”; (b) совместное распределение величин $\ln \Lambda$ и $\ln \Phi$, представлены границы областей четырёх различных состояний; (c) временные ряды величин Λ и Φ

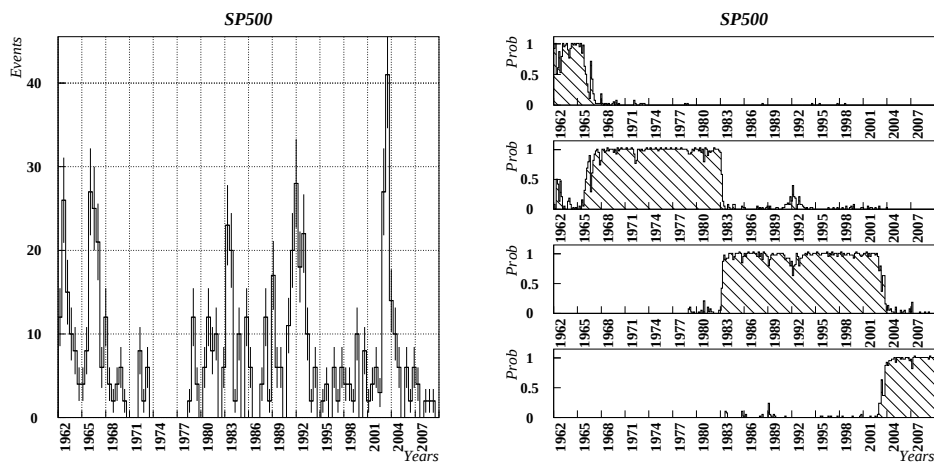


Рис. 5. S&P500: распределение числа изменений состояния системы на временной оси (слева); вероятность нахождения системы в каждом из выявленных состояний (справа)

должны выражаться в статистическом смысле через переходы между «чистыми» логнормальными распределениями с различными параметрами. При этом отрезки ряда между точками перехода можно считать «однородными».

Для определения момента смены состояния анализируемого временного ряда предлагается метод, в основе которого лежит двумерный (Λ, Φ) индикатор состояния. В большинстве рассмотренных случаев разные состояния системы соответствуют различным кластерам¹ на плоскости (Λ, Φ) и в первом приближении могут быть разделены границами вида $\Phi = \alpha\Lambda + \beta$, где α и β — параметры. Следует отметить, что при более детальном анализе могут потребоваться более сложные методы. Гауссовость логарифмов величин Λ и Φ внутри кластеров даёт возможность использовать хорошо проработанные для этих случаев методы теории распознавания образов [14]. Границы могут представлять собой как отрезки прямых, так и окружности, эллипсы, параболы или гиперболы.

Примеры применения указанного подхода иллюстрируются рисунками 6(b), 2(b) и 4(b). В результате анализируемый временной ряд разделяется на различные отрезки, соответствующие «однородным» состояниям. Хорошо видно, что для акций компании Motorola (рис. 6(b)) и индекса NASDAQ Composite (рис. 2(b)) основных состояний только два (для анализируемых интервалов), в то время как для индекса S&P500 (рис. 4(b)) и Dow Jones их, как минимум, четыре. Второе состояние индекса S&P500 (отмечено цифрой 2 на рис. 4(b)) очевидно является составным, но выделить отдельные состояния, чтобы они с хорошей точностью описывались логнормальными распределениями, на этом этапе не удалось. Для индекса DJIA ситуация ещё более сложная, но четыре основных режима определяются однозначно.

В качестве примера на рис. 7 представлены распределения величин Λ (слева) и Φ (справа) с наложенными кривыми, аппроксимирующими распределения этих величин для каждого из двух выявленных состояний функциями (2), а также суммарные кривые, хорошо описывающие исходные эмпирические распределения.

На рисунках 5 и 8 для индексов S&P500 и DJIA, соответственно, представлены распределения количества изменений состояния системы и вероятности нахождения системы в каждом из выявленных состояний. Хорошо видно, что найденные режимы индексов S&P500 и DJIA соответствуют друг другу, а также режимам индекса NASDAQ (см. рис. 2(c)). Этот факт говорит о том, что выявленные состояния соответствуют не отдельным индексам, а рынку в целом.

¹В тех случаях, когда распределения переменных Λ и Φ следуют логнормальному закону, соответствующее двумерное распределение содержит только один кластер.

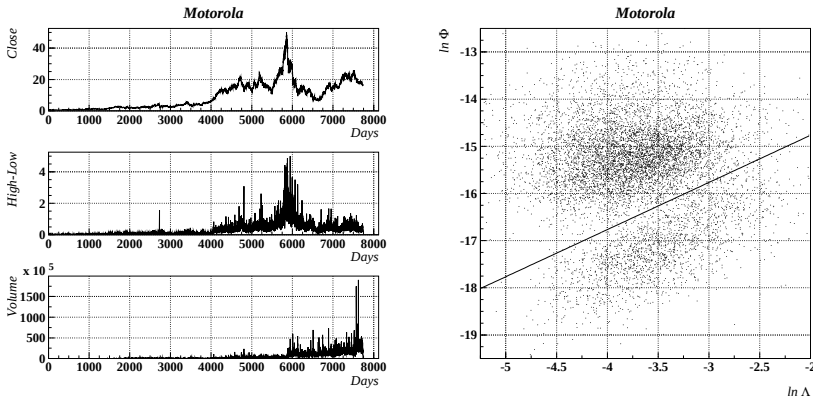


Рис. 6. Motorola: Слева — временные ряды для величин “Close”, “High–Low” и “Volume”; справа — совместное распределение величин $\ln \Lambda$ и $\ln \Phi$, линейная граница разделяет два выявленных состояния

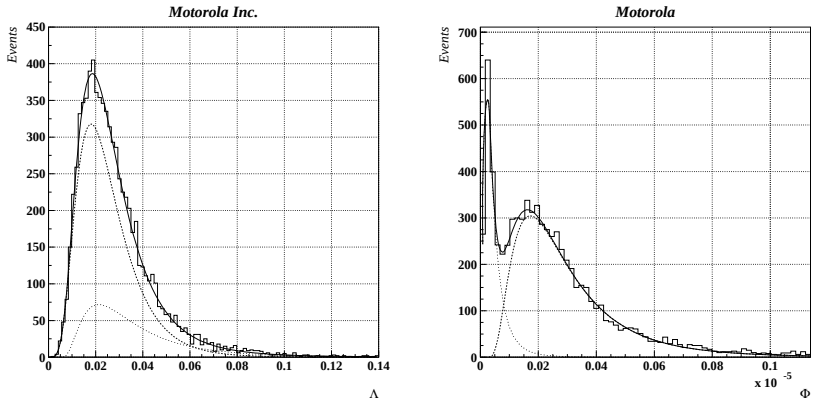


Рис. 7. Motorola: распределение величин Λ (слева) и Φ (справа) с наложенными кривыми, аппроксимирующими распределения этих величин для каждого из двух выявленных состояний функциями (2), а также кривая их суммы

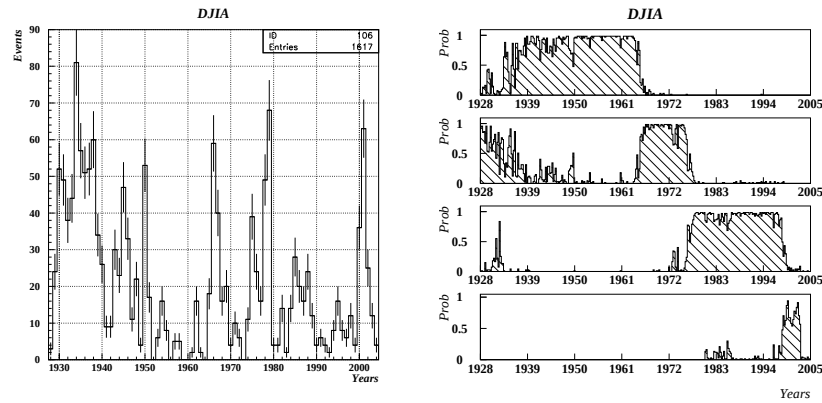


Рис. 8. DJIA: распределение числа изменений состояния системы на временной оси (слева); вероятность нахождения системы в каждом из четырёх выявленных состояний (справа)

На примере имеющего наиболее продолжительную историю индекса Dow Jones хорошо видно, что наибольшее количество изменений состояния приходится на 30-е годы прошлого века. Заметные перемены были в середине 40-х, ещё большие — во второй половине 60-х, второй половине 70-х, в 2000-ом, 2001-ом и, в меньшей степени, в 2002-ом годах. Наиболее спокойный период наблюдался в 50-х (за исключением 1951 года) и первой половине 60-х годов прошлого века. Соответствие этих выводов реальным историческим данным конечно требует дальнейшего детального анализа, а сама гипотеза о связи количества переходов между однородными состояниями индекса и нестабильностью экономики нуждается в проверке.

Заключение

В работе предложены и исследованы две новые рыночные переменные, которые были использованы для выявления структурных изменений в динамике рядов цен акций и рыночных индексов. Новые переменные основываются на наибольшей и наименьшей ценах дня, цене закрытия дневной сессии и дневного объёма торгов.

Временные ряды этих переменных не имеют выраженного тренда, а среднее значение и дисперсия относительно стабильны. Кроме того их статистические распределения следуют логнормальному закону распределения либо описываются взвешенной суммой нескольких распределений с различающимися параметрами. При этом следует отметить, что в значительном числе случаев как для акций, так и фондовых индексов, распределение хотя бы одной из переменных Δ или Φ может быть аппроксимировано лишь взвешенной суммой логнормальных распределений. Это свойство дало возможность построить на основе этих переменных индикатор смены состояния динамической системы, определяющей поведение акции или индекса. При анализе основных индексов с помощью индикатора смены состояния было обнаружено четыре основных режима (с конца 20-х годов по настоящее время). Эти режимы определяют состояние рынка по большей части в последовательные периоды времени, однако существуют их взаимные «вкрапления», отстоящие друг от друга на десятилетия (возможно также, что это просто близкие состояния). Индексы S&P500 и DJIA представляют собой наиболее трудные для анализа примеры, и обнаруженные в этой работе режимы должны рассматриваться лишь как «генеральные», требующие дальнейшего анализа для выявления их внутренней структуры.

Используя индикатор смены режима, можно значительно упростить последующий анализ данных, поскольку временной ряд будет предварительно разбит на «однородные» в смысле динамики интервалы, а значит представлять собой более простой объект исследования.

Литература

1. Log-Normal Distribution of Stock Market Data / I. Antoniou, V. V. Ivanov, V. V. Ivanov, P. V. Zrellov // *Physica A*. — Vol. 331. — 2004. — Pp. 617–638.
2. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. — М.: Мир, 2000.
3. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков. — М.: Интернет-Трейдинг, 2004.
4. Дубовиков М. М., Крянев А. В., Старченко Н. В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // *Вестник РУДН. Прикладная и компьютерная математика*. — Т. 3, № 1. — 2004. — С. 30–44.
5. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. — М.: Фазис, 1998. — Т. 1.
6. Золотарев Э. М. Одномерные устойчивые распределения. — М.: Наука, 1983.
7. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // *The Journal of Political Economy*. — Vol. 81, No 3. — 1973. — Pp. 637–654.

8. Lognormal Distributions. Theory and Applications / Ed. by E. L. Crow, K. Shimizu. — New York: Marcel Dekker, Inc., 1988.
9. Volatility distribution in the S&P500 stock index / P. Cizeau, Y. Liu, M. Meyer et al // Physica A. — Vol. 245. — 1997. — Pp. 441–445.
10. Hammel C., Paul W. B. Monte Carlo simulations of a trader-based market model // Physica A. — Vol. 313. — 2002. — Pp. 640–650.
11. Statistical Methods in Experimental Physics / W. T. Eadie, D. Dryard, F. E. James et al. — Amsterdam-London: North-Holland Pub.Comp., 1971.
12. Brun R., Couet O., Vandoni C., Zanarini P., 1989. — PAW – Physics Analysis Workstation. — CERN Program Library Q121.
13. Aitchison J., Brown J. A. C. The Lognormal Distribution. — Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
14. Дуда Р., Харм П. Распознавание образов и анализ сцен. — М.: Мир, 1976.

UDC 519.21; 519.246.8

Revealing of Structural Changes in the Stock Market Dynamics

P. V. Zrelov

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research, Dubna
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia*

This work is a continuation of investigations started in [1], where a new stock market variable Ξ (daily closing price normalized by corresponding traded volume) has been proposed and its statistical properties has been studied for a wide spectrum of stock market data. In the present work we propose and investigate two new stock market variables. We show that these variables can be used for revealing structural changes in dynamics of the stock market series. Aiming to identify the position in time of the change point, we propose a novel approach. These new variables and method can be considered as a two-dimensional market indicator that provides the change point detection in the stock market dynamics.

ФИЗИКА

УДК 539.142

Электромагнитная структура состояния $1f_{7/2}$ ядер в реакциях $e^- + A \rightarrow e^- + A$

Ю. П. Богданов

*Кафедра физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

В статье рассмотрено упругое рассеяние электронов на ядрах спина $7/2$ на основе волновых функций Рариты–Швингера. Получены выражения для электромагнитного тока ядра и проекционного оператора (спиновая матрица плотности). На основе этих выражений с помощью мультипольного разложения найдены общие соотношения для мультипольных и инвариантных формфакторов. Полученные формулы могут быть особенно полезны при изучении асимптотических свойств формфактора, индуцированных кварковой структурой ядра.

Введение

Теоретическое и экспериментальное изучение электромагнитной структуры основного и возбужденных состояний ядер с высоким спином может служить источником информации о широком круге вопросов теории ядра и ядерной спектроскопии [1, 2]. Сюда же следует отнести изучение простых оболочечных моделей, проблемы смешивания конфигураций, поляризацию кора, обменные токи и т. д. Особое место при этом занимает экспериментальное изучение упругого рассеяния электронов ядрами со спином $7/2$ (^{49}Ti , ^{51}V , ^{58}Co , ^{59}Co , ...) и, в частности, магнитное рассеяние назад [2–4], которое непосредственно дает информацию о радиальном распределении высшего мультипольного момента $M7$. Очевидно, что в таких экспериментах можно измерить радиальное распределение нуклонных орбит. Возможность такого измерения обусловлена законом сохранения углового момента, согласно которому состояния с более высокими моментами соответствуют более чистым конфигурациям [2, 5].

Рост энергии электронных пучков до десятков ГэВ требует релятивистского обобщения расчетов сечения, выполняемого в рамках импульсного приближения при мультипольном разложении ядерных матричных элементов электромагнитного тока [5]. Отмеченное обобщение достигается на основе ковариантного описания ядерных волновых функций и вершинных операторов электромагнитного тока. Получаемое при этом сечение упругого рассеяния электронов ядром массы M определяется структурными функциями, зависящими от инвариантных формфакторов вершины:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \left\{ A(q^2) + 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) B(q^2) \right\}. \quad (1)$$

С точки зрения соответствия выражения (1) сечению нерелятивистского импульсного приближения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \left\{ \sum_{l, \text{четн.}} F_{Cl}^2(q^2) + \left[1 + 2 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \sum_{l, \text{нечетн.}} F_{Ml}^2(q^2) \right\} \quad (2)$$

и наглядной физической интерпретации инвариантных формфакторов вершины надо найти для (1) представление, переходящее в (2) при малых $\tau = -q^2/(4M^2)$ (или при бесконечно большой массе ядра: $M \rightarrow \infty$). Так в работе [6] ковариантным методом исследовалось упругое рассеяние электронов ядрами со спином $3/2$ и $5/2$ и на основе мультипольных разложений [5, 7] получены выражения для мультипольных формфакторов через инвариантные формфакторы вершины.

В данной работе, являющейся продолжением [6], рассматривается упругое рассеяние электронов ядрами со спином $7/2$, описываемых волновыми функциями типа функций Рариты–Швингера. Получено выражение для электромагнитного тока ядра, содержащее восемь инвариантных формфакторов, а также найдено выражение для проекционного оператора частиц со спином $7/2$. На их основе вычислено сечение рассеяния и с помощью мультипольного разложения [5] получены соотношения для мультипольных и инвариантных формфакторов.

1. Вершинный оператор электромагнитного тока и его симметризованное представление

Следуя [8, 9], основное состояние ядра спина $7/2$ будем описывать симметричной по всем трем индексам спин-тензорной волновой функцией $U_{\alpha\beta\delta}(P)$, которая удовлетворяет уравнениям:

$$(\hat{P} - M)U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (3)$$

$$P^\alpha U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (4)$$

$$\gamma^\alpha U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0, \quad (5)$$

$$g^{\alpha\beta} U_{\alpha\beta\delta}(P) = 0. \quad (6)$$

Согласно (3) «дираковские» свойства волновой функции факторизованы, поэтому вершинный оператор электромагнитного тока

$$J^\mu = \bar{U}_{\alpha\beta\delta}(P') \Gamma^{\mu;\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}(P', P) U_{\sigma\omega\varphi}(P) \quad (7)$$

можно искать в виде

$$\Gamma^{\mu;\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = \sum_{n=1}^4 \tilde{I}_n^\mu Q_n^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}. \quad (8)$$

Здесь в (8) каждая из матриц $\tilde{I}_n^\mu$ является аналогом вершинного оператора электромагнитного тока нуклона и выбирается подобно [8, 9] в форме

$$\tilde{I}_n^\mu = F_m^{(n)}(q) \gamma^\mu - \frac{1}{2M} P^\mu F_e^{(n)}(q), \quad (9)$$

при этом

$$F_m^{(n)} = F_1^{(n)} + F_2^{(n)}; \quad F_e^{(n)} = F_1^{(n)} - \tau F_2^{(n)}, \quad (10)$$

где $F_1^{(n)}$ и $F_2^{(n)}$ соответствуют дираковскому и паулиевскому формфакторам, а $F_e^{(n)}$ и $F_m^{(n)}$ — электрическому и магнитному саксовским формфакторам, и, наконец, величина P равна сумме начального (p) и конечного (p') 4-импульсов ядра. В (8) величины $Q_n^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}$ являются симметричными по каждой тройке индексов тензорами-однородными функциями порядка $2(n-1)$ от компонент переданного импульса q . Учитывая равенство нулю следа (6), получаем для них следующие выражения (несимметризованный вид):

$$Q_1^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = g^{\alpha\sigma} g^{\beta\omega} g^{\delta\varphi}, \quad (11a)$$

$$Q_2^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma g^{\beta\omega} g^{\delta\varphi}, \quad (11b)$$

$$Q_3^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma t^\beta t^\omega g^{\delta\varphi}, \quad (11c)$$

$$Q_4^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = t^\alpha t^\sigma t^\beta t^\omega t^\delta t^\varphi. \quad (11d)$$

Способ приведения (11a)–(11b) к полностью симметричному виду легко определить из данного ниже симметризованного представления (11c):

$$\begin{aligned} Q_2^{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi} = \frac{1}{9} \{ & g^{\alpha\sigma} t^\beta t^\omega t^\delta t^\varphi + g^{\alpha\omega} t^\beta t^\delta t^\sigma t^\varphi + g^{\alpha\varphi} t^\beta t^\delta t^\sigma t^\omega + \\ & + g^{\beta\sigma} t^\alpha t^\delta t^\omega t^\varphi + g^{\beta\omega} t^\alpha t^\delta t^\sigma t^\varphi + g^{\beta\varphi} t^\alpha t^\delta t^\sigma t^\omega + \\ & + g^{\delta\sigma} t^\alpha t^\beta t^\omega t^\varphi + g^{\delta\omega} t^\alpha t^\beta t^\sigma t^\varphi + g^{\delta\varphi} t^\alpha t^\beta t^\sigma t^\omega \}. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (11a)–(12) $t = q/(2M)$, а $g^{\alpha\beta}$ — метрический тензор сигнатуры $(+ - - -)$.

2. Матрица плотности неполяризованного состояния для частицы спина 7/2

Определим матрицу плотности (проекторный оператор) неполяризованного состояния для частицы спина 7/2 выражением

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = \sum U_{\alpha\beta\delta}(P, m) \bar{U}_{\sigma\omega\varphi}(P, m), \quad (13)$$

в котором суммирование идет по всем значениям спиновой проекции m . Очевидно, что оператор (13) должен удовлетворять уравнению (3), а по каждой тройке индексов — уравнениям (4)–(6). Кроме того, он должен также удовлетворять уравнениям

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\rho\tau\lambda}(P) \Lambda_{\dots\sigma\omega\varphi}^{7/2;\rho\tau\lambda\cdot\cdot\cdot}(P) = 2M \Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P), \quad (14)$$

$$g^{\delta\varphi} \Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = \frac{4}{3} \Lambda_{\alpha\beta\sigma\omega}^{5/2}(P). \quad (15)$$

Для того, чтобы выполнялось равенство (3), достаточно представить (13) в виде

$$\Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = (\hat{P} + M) \lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P). \quad (16)$$

Если теперь тензор $\lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}$ строить из поперечных величин

$$g_P^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - \frac{1}{M} P^\alpha \frac{1}{M} P^\beta; \quad \gamma_\alpha^\pm(P) = \gamma_\alpha \pm \frac{1}{M} P_\alpha, \quad (17)$$

то будет выполнено также условие (4). В силу того, что (5) является следствием (3) и (4), то остается три уравнения (6), (14) и (15), с помощью которых и фиксируется структура (16), представляемая первоначально в виде разложения с неопределенными коэффициентами по характерным тензорным комбинациям из величин (17). Выполнив соответствующие вычисления, получим, что в несимметризованном (но вполне достаточном для дальнейших целей) виде проекционный оператор для частицы спина 7/2 дается формулой (16) при

$$\begin{aligned} \lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P) = & g_{\alpha\sigma}^P g_{\beta\omega}^P g_{\delta\varphi}^P - \frac{3}{7} g_{\alpha\beta}^P g_{\delta\sigma}^P g_{\omega\varphi}^P + \\ & + \frac{3}{7} \gamma_\alpha^-(P) \gamma_\sigma^+(P) g_{\beta\omega}^P g_{\delta\varphi}^P - \frac{3}{35} g_{\alpha\beta}^P \gamma_\delta^-(P) \gamma_\sigma^+(P) g_{\omega\varphi}^P. \end{aligned} \quad (18)$$

3. Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов

Дифференциальное сечение упругого рассеяния электронов высокой энергии ($E = k_0 \gg m_e$) дается равенством

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma_{Mott} \frac{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}{16M^2 E^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} (l_{\mu\nu} L^{\mu\nu}), \quad (19)$$

где электронный тензор равен

$$l_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Spur} [\hat{k}'_\mu \gamma_\mu \hat{k} \gamma_\nu] = 2 \left[k'_\mu k_\nu + k_\mu k'_\nu + \frac{1}{2} q^2 g_{\mu\nu} \right]. \quad (20)$$

Адронный тензор представим в виде

$$\begin{aligned} L^{\mu\nu} &= \frac{1}{8} \text{Spur} \left[\Lambda_{\alpha\beta\delta\sigma\omega\varphi}^{7/2}(P') \Gamma^{\mu;\sigma\omega\varphi\rho\tau\lambda} \Lambda_{\rho\tau\lambda\psi\chi\eta}^{7/2}(P) \Gamma^{\nu;\psi\chi\eta\alpha\beta\delta} \right] = \\ &= P^\mu P^\nu A(\tau) - 4M^2 g^{\mu\nu} B(\tau), \end{aligned} \quad (21)$$

где структурные функции $A(\tau)$ и $B(\tau)$ вычисляются с помощью (8), (11) и (16). Не будем выписывать для них громоздких выражений, а воспользуемся тем, что после подстановки (20) и (21) в (19) дифференциальное сечение может быть представлено следующим образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sigma_{Mott}}{(1+\tau)} \left\{ F_E^2(\tau) + \frac{3}{7} \tau \left[1 + 2(1+\tau) \text{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right] F_M^2(\tau) \right\}. \quad (22)$$

Для полных электрического $F_E(\tau)$ и магнитного $F_M(\tau)$ формфакторов справедливы мультипольные разложения:

$$\begin{aligned} F_E^2(\tau) &= F_{C0}^2(\tau) + \tau^2 \frac{4}{21} F_{C2}(\tau) + \tau^4 \frac{11 \cdot 16 \cdot 16}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^3} F_{C4}^2(\tau) + \\ &+ \tau^6 \frac{4 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}{11 \cdot 13 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{C6}^2(\tau); \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} F_M^2(\tau) &= F_{M1}^2(\tau) + \tau^2 \frac{2 \cdot 11 \cdot 16}{3^3 \cdot 5^2 \cdot 7} F_{M3}(\tau) + \tau^4 \frac{13 \cdot 16 \cdot 16}{3 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{M5}^2(\tau) + \\ &+ \tau^6 \frac{4 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 16}{9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2} F_{M7}^2(\tau). \end{aligned} \quad (24)$$

Подставив (23) и (24) в (22) и воспользовавшись представлением сечения в виде (1), найдем связь мультипольных кулоновских $F_{Cl}(\tau)$ и магнитных $F_{Ml}(\tau)$

формфакторов с инвариантными формфакторами вершин (9)

$$\begin{aligned}
 F_{C0} &= \left[1 + 2\tau \left(1 + \frac{4}{5}\tau \left(1 + \frac{2}{7}\tau \right) \right) \right] F_e + \frac{2}{15}\tau^2(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{6}{7}\tau \right) H_e - \\
 &\quad - \frac{1}{3}\tau(1+\tau) \left[1 + \frac{8}{5}\tau \left(1 + \frac{3}{7}\tau \right) \right] G_e - \frac{2}{35}\tau^3(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C2} &= 3 \left[1 + \frac{8}{7}\tau \left(1 + \frac{1}{3}\tau \right) \right] F_e + \frac{2}{7}\tau(1+\tau)^3 H_e - \\
 &\quad - \frac{1}{2}(1+\tau) \left[1 + \frac{16}{7}\tau \left(1 + \frac{1}{2}\tau \right) \right] G_e - \frac{1}{7}\tau^2(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C4} &= \frac{9}{2} \left(1 + \frac{6}{11}\tau \right) F_e + \frac{3}{8}(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{18}{11}\tau \right) H_e - \\
 &\quad - \frac{3}{2}(1+\tau) \left(1 + \frac{9}{11}\tau \right) G_e - \frac{27}{88}\tau(1+\tau)^3 R_e, \\
 F_{C6} &= \frac{45}{4} \left[F_e - \frac{1}{2}(1+\tau)G_e + \frac{1}{4}(1+\tau)^2 H_e - \frac{1}{8}(1+\tau)^3 R_e \right];
 \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}
 F_{M1} &= \left[1 + \frac{12}{5}\tau \left(1 + \frac{6}{7}\tau \left(1 + \frac{8}{27}\tau \right) \right) \right] F_m + \frac{6}{35}\tau^2(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{8}{9}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{2}{5}\tau(1+\tau) \left[1 + \frac{12}{7}\tau \left(1 + \frac{4}{9}\tau \right) \right] G_m - \frac{8}{105}\tau^3(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M3} &= \frac{9}{2} \left[1 + \frac{4}{3}\tau \left(1 + \frac{4}{11}\tau \right) \right] F_m + \frac{1}{2}\tau(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{12}{11}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{3}{4}(1+\tau) \left[1 + \frac{8}{3}\tau \left(1 + \frac{6}{11}\tau \right) \right] G_m - \frac{3}{11}\tau^2(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M5} &= \frac{45}{2} \left[1 + \frac{8}{13}\tau \right] F_m + \frac{15}{8}\tau(1+\tau)^2 \left(1 + \frac{24}{13}\tau \right) H_m - \\
 &\quad - \frac{15}{2}(1+\tau) \left(1 + \frac{12}{13}\tau \right) G_m - \frac{45}{26}\tau(1+\tau)^3 R_m, \\
 F_{M7} &= \frac{315}{4} \left[F_m - \frac{1}{2}(1+\tau)G_m + \frac{1}{4}(1+\tau)^2 H_m - \frac{1}{8}(1+\tau)^3 R_m \right].
 \end{aligned} \tag{26}$$

Здесь в формулах (25) и (26) (см. также (10)):

$$\begin{aligned}
 F_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(1)}}{\sqrt{1+\tau}}, & G_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(2)}}{\sqrt{1+\tau}}, \\
 H_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(3)}}{\sqrt{1+\tau}}, & R_{e,m} &= \frac{F_{e,m}^{(4)}}{\sqrt{1+\tau}}.
 \end{aligned}$$

Заключение

Полученные здесь формулы (22)–(26) дают возможность реализовать релятивистское описание имеющихся экспериментальных данных по упругому рассеянию электронов ядрами спина 7/2. Эти формулы особенно полезны в области больших q^2 . Их следует использовать, в частности, при анализе асимптотического поведения формфакторов, которое может определяться, например, кварковой структурой ядра.

Литература

1. Ricci R. A. On Electromagnetic Structure of $1f_{7/2}$ nuclei // Proc. Topical Conf. on the Struct. of $1f_{7/2}$ nuclei. — Legnaro: 1971.
2. Sick I. Radial Wave Functions of Valence Nucleons // Comments on Nuclear and Particle Physics. — Vol. 9, No 2. — 1980. — Pp. 55–66.
3. De Witt Huberts P. K. A. On the Radial Description of the $1f_{7/2}$ Proton Orbit // Physics Letters. — Vol. 71B, No 2. — 1977. — P. 317.
4. Nascimento I. O. Elastic Electron Scattering from the M7 Magnetization Density of ^5V // Physics Letters. — Vol. 53B, No 2. — 1974. — P. 168.
5. Donnelly T. W., Walecka J. D. On Nuclear Moments and Nuclear Structure // Ann. Rev. Nucl. Sci. — Vol. 25. — 1975. — P. 329.
6. Rand R. E. Elastic Electron Scattering from the Magnetic Multipole Distributions of Li^6 , Li^7 , Be^9 , B^{10} , B^{11} and N^{14} // Physical Review. — Vol. 144. — 1966. — P. 859.
7. Griffy T. A., Yu D. V. L. Electron Scattering from Nuclear Magnetic Moments // Physical Review. — Vol. 139B. — 1965. — P. 880.
8. Богданов Ю. П., Керимов Б. К., Сафин М. Я. Упругое рассеяние электронов ядрами соспином $3/2$ в формализме Рариты–Швингера // Известия АН СССР. — Т. 44, вып. Физ. — 1980. — С. 2337.
9. 1981. — Тезисы докладов 31-го Совещания по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра. Ленинград: Наука.

UDC 539.142

Electromagnetic Structure of State $1f_{7/2}$ for Nuclei in reactions $e^- + A \rightarrow e^- + A$

Yu. P. Bogdanov

*Department of Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Elastic electron scattering on nuclei of spin $7/2$ is considered on the base of Rarita–Schwinger wave functions. The expressions for covariant electromagnetic vertex function and projection (spin density matrix) are derived. Furthermore these results with a help of the multipole resolution method yielded in general formulas for multipole and invariant form factors, the latter are useful in the analysis of its asymptotic properties induced by the quark structure of nuclei.

УДК 53.01

Электромеханическая модель атома водорода как представление стохастического квантовополевого процесса взаимодействия электрона с протоном

В. М. Дубовик, Е. Н. Дубовик

*Объединённый институт ядерных исследований,
Россия, 141980, Дубна, Московской обл., ул. Жолио-Кюри, 6*

Показано, что уравнение Шрёдингера можно формально свести к уравнению теории устойчивых тонкостенных упругих пластин и оболочек в механике. Исходя из этого, на примере атома водорода обсуждается возможность учёта классических механических и квантовополевых электромагнитных эффектов, как факторов, обуславливающих квантовую структуру атома.

Введение

В настоящей работе нами подчёркивается та простая мысль, что с квантово-полевой точки зрения даже такую простейшую систему как атом водорода мы не можем рассматривать как систему, состоящую из двух частиц, т. к. в моменты «соприкосновения электрона с протоном» следует учитывать «возбуждение физического вакуума», прежде всего появление виртуальных фотонов и электрон–позитронных пар (ср. с попыткой аксиометрического обоснования квантовой механики с помощью модифицированной теории матрицы рассеяния [1]). С позиций классического электромагнетизма виртуальные пары возбуждения можно рассматривать в атоме, находящемся в стационарном состоянии как максвелловские микротоки смещения. При их достаточной напряжённости, например, вследствие внешних воздействий или при образовании сверхтяжёлого атома, эти токи могут приводить к процессам внутренней конверсии, К-захвату электронов и, наконец, к существенно теоретико–полевому процессу: к рождению реальной электрон–позитронной пары.

Напомним, что явление поляризации электрон–позитронного вакуума, в атоме обычно связывают с наличием сверхкритического кулоновского заряда у ядра. Такая постановка вопроса связана с рудиментарными представлениями о точечном электроме и точечном ядре. Напомним, что «кулоновский размер» электрона, т. е. его томсоновский радиус $r_0 = 2,86$ фм, сопоставим с размерами протона, а как раз на таких расстояниях в атоме начинает «резонировать» виртуальная электрон–позитронная пара. В то же время, фигурально выражаясь, можно сказать, что во внутреннем объёме классического электрона (не случайно) сидит большая часть таблицы Менделеева.

Кроме возбуждения пар следует также учитывать, например, переход атома водорода в виртуальную нейтрон–нейтринную пару. В нормальных условиях такой переход, конечно, запрещён весьма высоким энергетическим порогом. Однако известно, что этот процесс весьма существен при рассмотрении, например, сжатия водорода в сверхплотной среде при переходе определённого типа звёзд от состояния «белого карлика» к нейтронной звезде. Для атома же водорода в вакуумных условиях возможность такого превращения следует учитывать как виртуальный канал.

Однако, в многоэлектронных атомах пересечение электронных орбит с периферией ядер может происходить в нормальных земных условиях. Из теоретического анализа нейтрондефицитных ядер, например, изотопов свинца [2], следует, что их три основных состояния соответствуют трём изомерным формам: вытянутого эллипсоида, сферы и сжатого эллипсоида. Однако, эти выводы делаются без

учёта влияния электронных оболочек на свойства ядер. Более того, даже без учёта степени ионизированности атома в данном конкретном исследовании. Можно предположить, что изомеры формы образуются с одновременными перестройками электронных оболочек данного изотопа, точнее, имеет место взаимообусловленность типов форм электронных и ядерных оболочек и последовательностей их заполнений [3].

На эти обстоятельства намекает также радикальное изменение времён жизни β -распадчиков при обдираании с их ядер электронных оболочек [4–6]. С теоретической точки зрения, в этой пограничной области в атоме, где смешиваются электроны и нуклоны, могла бы быть вполне полезна модель томсоновской «среды» с учётом магнитного фона, создаваемого протонами и нейтронами в духе электродинамики сплошных сред, развитой в работе [7]. В экспериментальном отношении весьма было бы информативным также изучение мезоатомов и т. п. с нейтроныбыточными ядрами.

Таким образом, именно наличие быстрых и мощных квантовополевых процессов при контактах электронов с ядрами и приводит к квантовомеханическому поведению электрона в атоме, которая в среднем, в области существования стационарных орбит, сводится к описанию электрона с помощью волновых функций. Эта мысль сопрягается с почти тривиальным утверждением, что в отрыве от рассмотрения конкретного физического объекта, атома, нерелятивистская квантовая механика есть следствие любой модели квантовой релятивистской теории поля (см., например, книгу Л. В. Прохорова и С. В. Шабанова [8]). Поэтому квантовая механика как таковая, вообще говоря, не нуждается ни в каких особых, в том числе философских, обоснованиях или выводах из какого-либо типа континуальных теорий: гидродинамики, теории теплопроводности или диффузии.

Отметим, что поведение электрона в атоме по мере удаления его от ядра, требует последовательной смены трёх видов описания: квантовополевого в непосредственной близости к ядру, квантовомеханического в области существования стационарных орбит и квазиклассического, сопряжённого с классическим вне пределов атома. В то же время подчеркнём ещё раз: интенсивность взаимодействия электрона с ядром на расстояниях порядка комптоновской длины волны электрона вообще нельзя оценивать с помощью поведения в этой области нерелятивистских волновых функций электрона и представления о точечном ядре без учёта квантовополевых процессов, разыгрывающихся в этой области. Кстати говоря, шрёдингеровские атомарные волновые функции нельзя экстраполировать непосредственно и в область ридберговских состояний.

1. Квантовая механика атома как электромеханическая модель

Как известно, мнемоническое правило вывода уравнения Шрёдингера состоит в том, что в определение механической кинетической энергии

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

подставляются дифференциальные волновые операторы $E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ и $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, действующие в гильбертовом пространстве ортонормированных комплексных функций:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\Psi. \quad (1)$$

Возьмём ещё одну производную по времени от этого уравнения и, подставляя в его правую часть исходное уравнение, приведём его к виду:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\Psi} + \left(\frac{\hbar c}{2mc^2}\right)^2 \Delta^2\Psi = 0. \quad (2)$$

Где коэффициент $1/c^2$ введён для того, чтобы придать этому уравнению сходство со стандартной записью волнового уравнения в электродинамике.

Прямой аналогией из области теоретической механики этой системе уравнений будут уравнения колебаний стержней, пластин, оболочек (разных геометрических форм), решаемые путём комплексификации параметров смещения, в данном случае Ψ . Отметим, что в механике материальных упругих тел уравнение, подобное нашему базовому, описывает их свободные равновесные колебания (см. [9] или, например, спецкурс [10]).

При введении потенциальной энергии W в исходное уравнение Шрёдингера наше базовое уравнение (2) принимает вид:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{\Psi} + \frac{\lambda^2}{4}\Delta^2\Psi = -\frac{i\lambda}{2c}W\Delta\Psi - \frac{i\lambda}{2c}\Psi\Delta W - i\lambda\nabla_i W\nabla_i\Psi - \frac{1}{c^2}W^2\Psi - \frac{1}{c^2}\dot{W}\Psi. \quad (3)$$

Если в этом уравнении положить равными нулю производные во времени, то оно приобретает вид, сходный с уравнением, которое используется для поиска равновесных конфигураций гибкого объекта под действием силовых нагрузок с учётом совместности испытываемых этим объектом деформаций. Для этого в уравнении подразумевается произведённая замена $\Psi \rightarrow \lambda\Psi q$, где q получает смысл комплексифицированной величины смещения элемента рассматриваемой оболочки. Приведём это уравнение к виду, удобному для сравнения с уравнениями движения в перемещениях, используемых в теоретической механике:

$$\ddot{q} + \frac{\lambda^2 c^2}{4}\Delta^2 q = -\frac{i\lambda c}{2}W\Delta q - \frac{i\lambda c}{2}q\Delta W - i\lambda c^2\nabla_i W\nabla_i q - W^2 q - \dot{W}q. \quad (4)$$

Произведём идентификацию параметров, фигурирующих в нашем квантовом уравнении, с коэффициентами статических и динамических характеристик упругого тела, как то: модуль Юнга, коэффициенты Пуассона и пр. Оказывается, что квантовые электромеханические параметры уравнения Шрёдингера можно идентифицировать не только с характеристиками изучаемого квантового объекта и константами взаимодействия с ним, стоящими в потенциалах, но и с параметрами воздействия на него «внешней среды» (физического вакуума).

Поскольку уравнение явно нормировано по своим линейным характеристикам на комптоновскую длину волны, то проще всего произвести апробацию нашего уравнения на примере модели электрона как упругой оболочки. Результат оказывается удивительно простым. Модуль Юнга E , который в данном случае следует представить по указанным выше причинам как коэффициент всестороннего сжатия $E = 3K$, оказывается равным ρ/c^2 , где ρ — плотность сжимаемого тела. Откуда следует: $3VK = mc^2$, где V — объем частицы, имеющей массу m . Отметим, что это первый намёк на происхождение кварковой мистики и подчеркнём, что делится при такой трактовке на три не масса, а энергия покоя с учётом формальной альтернативы уменьшения скорости света внутри рассматриваемой частицы вплоть до в $\sqrt[3]{c}$.

Подчеркнём, что модулю Юнга можно придать достаточно фундаментальный смысл, что наверняка обсуждалось во многих работах в различных контекстах. Мы здесь сошлёмся лишь на одну небольшую, близкую к нам по подходу, заметку В. Вайскопфа [11], в которой обсуждаются совместно квантовые и механические свойства атомов. Ограничимся формальными возможностями представления модуля Юнга в терминах фундаментальных констант и параметров частиц:

$$E := \rho c^2 = \frac{mc^2}{V} \sim \frac{h\nu}{\lambda^3} \sim \frac{h}{\lambda^3 T} \sim \frac{\hbar c}{\lambda^4} \sim \frac{F}{S},$$

где F — сила, действующая на площадь поверхности S рассматриваемого объекта.

Эти соотношения не столь тривиальны, как может показаться на первый взгляд. Так, модуль Юнга для безмассовой частицы, например, фотона, равняется переносимой им энергии, поделённой на объем элементарной ячейки, определяемой его «комптоновской» длиной волны (с точностью до коэффициента, например, $4\pi/3$, которой мы не учитывали в самом первом представлении объема V через линейный размер системы объекта, обладающего массой — энергией mc^2).

В конкретном случае, для атома водорода введём $W = -\frac{e^2}{r} = -\frac{\alpha\hbar c}{r}$, где α — константа электромагнитных взаимодействий. Очевидно, что левую часть уравнения (3) нам удобно заранее поделить на α^2 , чтобы в дальнейшем обезразмеривание переменных t и r производить по характеристикам первой орбиты Бора. Если мы интересуемся только поиском положений равновесных «оболочек», то надо исключить в нашем уравнении все производные по времени. Далее, в правой части уравнения (3) ввиду малости константы α можно пренебречь третьим членом. Что же касается второго вклада в правую часть (3), то рассматривая кулоновский потенциал, как создаваемый протоном, локализованным в начале координат, мы вступаем в некое противоречие с основами квантовой механики.

Действительно, локализация квантовой частицы — протона — привела бы к тому, что описывающая его волновая функция в силу соотношения неопределённости оказалась бы размазанной по всему неограниченному пространству. В стандартной квантовой механике это противоречие легко снимается тем, что для нахождения спектральных свойств атома водорода фактически рассматривается не задача об электроном в кулоновском поле протона, а приближённая задача для приведённой массы в поле неподвижного кулоновского центра. Этого хватает для установления спектральных характеристик атома водорода. Однако, такой подход ничего не говорит нам об интенсивности энергетических процессов взаимодействия электрона и протона на расстояниях значительно меньших, чем радиусы «оболочек».

В свете сказанного попытаемся заняться динамической картиной поведения электрона в атоме (водорода). Начнём *ab ovo*.

В начале прошлого века Резерфорд экспериментально обнаружил, что «атом» пуст. Действительно, в настоящее время мы твёрдо знаем, что средний радиус атома водорода в стабильном состоянии приблизительно равен 10^{-8} , комптоновская длина волны электрона — $3,86 \times 10^{-11}$ см, размеры протона (электрический, механический) порядка 10^{-13} см. При таком соотношении размеров системы к размерам составляющих её элементов, казалось бы, можно было бы действительно попытаться построить динамическую модель атома с помощью уравнений классической механики и электродинамики по крайней мере в области химических энергий. Тогда следовало бы, скажем, в уравнении Ньютона ввести силу Лоренца

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{e}{r^2} - \beta \times \mathbf{B},$$

где β , как мы знаем из правил квазиклассического квантования, определяется константой α . Следовательно, даже если напряжённость магнитного поля имеет тот же порядок, что и напряжённость кулоновского поля, то в области боровских орбит («оболочек») магнитным полем можно пренебречь. В целом же, для атома рассматриваемого как динамическая система, это было бы странным, т. к. в стационарном состоянии электрическая и магнитная энергия в резонаторе, именуемом атомом, скорее всего были бы в среднем равными.

Осознание того факта, что электрон не вращается в атоме на квазипланетарных орбитах произошло довольно скоро после создания первых квантовых моделей. Но необычайная эффективность, с которой даже простейшая модель Резерфорда-Бора описывает, например, спектральные линии до сих пор, «по большому счёту» не объяснена. В общем-то, причина такого состояния ясна: построенный впоследствии аппарат квантовой механики, несмотря на его большую универсальность, сам по себе является только рецептурой, моделью *ad hoc*, прекрасно работающей в сфере его применимости, в частности, для описания процессов, происходящих в химических реакциях, т. е. при энергиях, сравнимых с энергией обычных тепловых движений. Вклады же квантовополевых процессов, которые казалось бы следовало учитывать, когда электрон сосредоточен в основном вблизи ядра дезавуируют на том основании, что геометрический размер ядер (протона) и интеграл перекрытия в этой области с волновой функцией электрона чрезвычайно мал, что является достаточно скользким местом в силу приведённых выше соображений относительно сведения потенциала, создаваемого протоном, к точечному кулоновскому центру.

Рамки данной работы не смогут вместить тщательных исследований всех этих проблем, возникающих на пути построения динамической модели атома. Поэтому мы ограничимся ссылками на результаты исследований, проведённых с помощью моделей, близких к нам по их конструкции. Прежде чем перейти к построению нашей модели, сформулируем две основные идеи в неё заложенные.

Первая заключается в том, что первопричиной стохастизации классических траекторий в атоме, как раз являются указанные во введении квантовополевые процессы и именно они неявно обеспечивают, без всякой философской мистики и имманентных причин, действенность квантовых уравнений как адекватного аппарата в соответствующем интервале энергий. Напомним, что процессы, ассоциируемые, например, с возбуждением виртуальных фотонов и электрон–позитронных пар, начинают происходить при взаимодействии электрона с ядром на расстояниях порядка классического радиуса электрона $r_0 = e^2/m_e c^2 = 8,2 \times 10^{-13}$ см. Исходя из этого, мы дадим простейший рецепт модификации кулоновского потенциала в уравнении Шрёдингера, который эффективно учитывает указанные процессы, приводящие к отгалкивающему кору, не позволяющему электрону «упасть» на ядро (в водороде — на протон).

Вторая идея (скорее представление, сценарий, который должен быть оправдан решениями соответствующих динамических уравнений) сводится к тому, что на орбите Бора, а точнее на сфере, которую она замечает при вращении вокруг оси, проходящей через протон, не существует замкнутых траекторий движения электрона. Сфера заполняется отрезками траекторий, входящими в состав примерно миллиона маятниковых движений электрона, которые он совершает в результате указанных выше «случайных» квантовополевых процессов, происходящих внутри атома на сфере, окружающей протон и имеющей радиус r_0 . Число порядка 10^6 колебаний, образно говоря, «прыжков» электрона из центра атома, означает, как не трудно убедиться, то, что электрон, касаясь «сферы Бора», оставит на ней «след» с площадью примерно λ_e^2 . Это — простейшая картина. Точнее же, из-за наличия у электрона спин-магнитного момента, электрон при его движении от ядра будет двигаться как кончик спицы на подброшенном раскрывающемся зонтике, при чем площадь раскрывшегося зонта как раз и будет площадью круга, очерченного орбитой Бора. В работе такой характер движения возникнет как следствие решения предложенного стохастического уравнения. Заметим попутно, что из образа траектории электрона, как траектории кончика спицы, зависающей на излёте зонтика, качественно видно формирование сферы с радиусом Бора, как области, в которой электрон с точки зрения квантовой механики считается существующим в стационарном состоянии. На самом деле каждая его точка остановки в этой области максимально неустойчива, как состояние остановившегося велосипедиста, который имеет минимальные возможности контролировать своё состояние и совершает ряд хаотических движений перед падением. Это — более чем аналогия. Это — фактически модель формирования ширины спектральной линии.

Приведём ещё один пример из истории физики. Картина формирования эффективного кусочно-гладкого движения молекулярных токов на поверхности магнетика была предложена впервые Ампером. В нашем случае подобная картина создаётся в атоме водорода одним электроном, а не с совокупностью электронов в магнетике, число которых имеет порядок числа Авогадро. Однако, при наблюдении и того, и другого явления с тактовой частотой, значительно меньшей частоты «вращения» электрона на орбите Бора, мы будем наблюдать один и тот же эффект: сплошной фиктивный электрический ток, создаваемый многими электронами (движущимися на поверхности магнетика в отдельных атомах) при отсутствии глобального потока электронов на поверхности магнетика; или фиктивный электрический ток на орбите Бора, создаваемый одним электроном (т.е. не пропеллер — скачок электрона от протона и его возвращение к нему, а зачёркиваемый этими прыжками сплошной круг). При стробоскопическом сканировании этих процессов с частотой в миллион раз превышающих частоту Бора мы «увидели бы» движения электронов на траекториях внутри сфер Бора, обусловленных квантово-полевыми стохастическими силами. Подчеркнём, что внутри атома, на

расстояниях от ядра порядка комптоновской длины электрона, движение последнего имеет чисто стохастический характер, напоминающий механическое явление — флаттер. Именно к этой картине *Zitterbewegung* приводит анализ уравнения Дирака, вскрывающий с помощью соответствующих проективных преобразований стохастическое устройство электрона внутри сферы с радиусом, равным его комптоновской длине волны.

2. Введение магнитных полей в модель Резерфорда–Бора с последующей модификацией

Планетарная модель Резерфорда–Бора, самая первая, наивная модель атома водорода, обусловившая дальнейший прогресс построения квантовой теории атома, основывается на приравнивании к кулоновской силе притяжения между электроном и протоном центробежной силе, возникающей благодаря гипотетическому вращению электрона вокруг протона. Таким образом модель затрагивает самые основные проблемы ньютоновской механики типа происхождения сил инерции, вопрос о выборе ориентации вращательного движения и т.д. Детализация же электромагнитного описания движений частиц в этой модели не проводится. Например, движение электрона по орбитам должно создавать амперовское магнитное поле. Хотя, как вскоре было обнаружено, модель, несмотря на её первые успехи, ущербна, и впоследствии, конечно, никаких движений электрона на орбите обнаружено не было, мы все же отнесёмся к модели серьёзно, как эффективному теоретическому инструменту и попробуем для начала исправить положение с пренебрежением в ней магнитного поля. Спустя почти сто лет после формулировки этой знаменитой модели мы, конечно, будем исходить из современной феноменологии атома. Сразу учтём, не вводя понятие спина, что электрон имеет магнитный момент и выдвинем гипотезу, что уж в атоме-то магнитные потоки обязательно должны быть квантованы. т.е. используем знания, полученные в рамках теории конденсированных сред, где экспериментом оправдано введение флюксона для таких квантовых объектов, как куперовские пары, экситоны, поляроны, магноны и пр.

Более того, как мы сейчас покажем, именно это пренебрежение магнитной энергии в атоме заставляло вводить некие мистические понятия типа отталкивательной «силы Шрёдингера», использованию специфических вириальных соотношений для осцилляторов (Зоммерфельд) и т.п. Действительно, в модели Резерфорда–Бора энергия механического движения на орбите ровно в два раза меньше энергии кулоновского притяжения. В соответствии с кинетостатическим подходом введём *ad hoc* в полную энергию электрона в атоме водорода взаимодействие магнитного момента электрона μ_e с неким внутриатомным магнитным полем $\mathbf{B}$, происхождение которого будет выявлено ниже:

$$W = \frac{p^2}{2m} + \mu_e \mathbf{B} - \frac{e^2}{r}, \quad (5)$$

где

$$\mu_e \mathbf{B} = -\mu_e \frac{\Phi}{S} = -\mu_e \frac{N\Phi_0}{S} = -\frac{e\hbar}{2mc} \frac{N\Phi_0}{S} = -\frac{e\hbar}{2mc} \frac{N 2\pi\hbar c}{\pi r^2 2e} = -\frac{N\hbar^2}{2mr^2}. \quad (6)$$

Здесь использованы формулы квантования магнитного потока $\Phi = N\Phi_0$, где $\Phi_0 = \hbar c/2e$, и величина $\mu_e = e\hbar/2mc$. Приравняем окончательное выражение в (6) вакантной половине кулоновской энергии:

$$-\frac{N\hbar^2}{2mr^2} = -\frac{e^2}{2r}. \quad (7)$$

Отсюда получаем квантование радиуса орбиты по числу охватываемых ей квантов магнитного потока:

$$r_B = \frac{N\hbar^2}{me^2} = N \frac{\lambda}{\alpha} = N \frac{r_0}{\alpha^2}, \quad (8)$$

где λ — комптоновская длина волны электрона, а r_0 — его, так называемый, классический радиус или радиус Томсона.

Напомним, что боровское квантование, которое мы теперь получим без апеллирующих к приравниванию сил, а из вириального соотношения — равенства кинетической энергии половине кулоновской — имеет величину:

$$r_B = \frac{n^2 \hbar^2}{m e^2} = n^2 \frac{\lambda}{\alpha} = n^2 \frac{r_0}{\alpha^2}. \quad (9)$$

Логично приравнять полученные формулы квантования радиусов орбит атома водорода, полученные этими двумя способами. Имеем:

$$n^2 = N = 1, 4, 9, 25, \dots \quad (10)$$

Обоснование такого вида числовой последовательности в правой части этого соотношения, конечно, решается экспериментальными данными о строении атома водорода. При N , не равных квадратам целых чисел, орбиты не формируются, а при равном единице главном квантовом числе $N = 1$ в устойчивом s -состоянии атома магнитный поток в атоме состоит ровно из одного флюксона!!! Напомним, что при решении задачи о движении частицы (электрона) в центральном кулоновском потенциале с помощью уравнения Шрёдингера для связанных состояний частицы в сферической системе координат возникают три квантовых числа: n_r , l , m . Их называют: n_r — радиальным квантовым числом, l — азимутальным квантовым числом, m — магнитным квантовым числом. В этом нерелятивистском подходе к задаче о структуре атома водорода линии энергетического спектра зависят лишь от n_r и l , но не m (действительно, квантовое число m в случае центральной симметрии ничем в пространстве не выделено). При этом оказывается, что линии дискретного спектра определяются так называемым главным квантовым числом

$$n = n_r + l + 1$$

разностями значений энергии:

$$E_n = \frac{\alpha m c^2}{n^2}. \quad (11)$$

В рамках шрёдингеровской квантовой механики вопрос о конкретизации движения электрона в объёме атома не возникает. Однако, признаки этого движения несомненно остаются хотя бы в том, что волновая функция характеризуется орбитальным квантовым числом. Следовательно, при различных n_r и l волновые функции вероятностным образом определяют характер «размазывания» не только заряда электрона в объёме атома, но и магнитного поля. Вследствие этого формула (11) с учётом возможности (и даже необходимости) квантования магнитного поля привела к замене формулы (11) формулой:

$$E_n = \frac{\alpha m c^2}{N}. \quad (12)$$

Однако, как мы видели выше, эти формулы квантования следует воспринимать совместно, поскольку:

$$n^2 = \sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = N.$$

В рамках квантовой механики эта формула определяет общую кратность вырождения стационарного состояния с квантовым числом n и называется случайным вырождением. Выведенные же нами формулы дезавуируют последний термин, т. к. они есть следствие строго определённого в классическом электромагнетизме связи движения заряженной частицы и порождаемого этим движением магнитного поля, поток которого, однако, квантован. Более того, мистическая «нулевая»

энергия ($l = 0$) оказывается вовсе не связанной с орбитальным движением, а определяется наличием в S -состоянии конфигураций токов типа потоков в гидродинамическом вихре Хилла. Следовательно, вопреки вере творцов квантовой механики в её «имманентное происхождение», перед нами встал вопрос: если волновые функции описывают нам характер распределения кулоновского поля электрона в атоме, а магнитное поле в нем контролируется числом заключённых в нем флюксонов N , то нельзя ли исходя из этой информации как-либо прояснить динамику движения электрона в атоме водорода?

Из сказанного во Введении ясно, что нам скорее всего это удастся сделать только «в среднем», т. е. в некотором статистическом смысле, через средние величины параметров орбит, трактуемых как амперовские токи и т. п. Если позволено объяснять простое через сложное, то напомним, что уже более 70 лет известно, что средняя скорость распространения «собственных движений» внутри электрона с радиусом, равным половине комптоновской длины волны, равна скорости света. Это, так называемая, картина *Zitterbewegung*'а, впервые введённая Шрёдингером и Л. де Бройлем [12]. Обычно эта скорость приписывается скорости смещений центра масс электрона относительно центра распределения заряда электрона, который размывается ввиду рождения электрон-позитронных пар. Естественно считать, что последний (горячий) процесс происходит «внутри электрона» в малой сфере с радиусом r_0 , в то время как центр масс размывается процессами рождений-поглощений виртуальных фотонов, которые лишь на поверхности сферы с радиусом, равным половине комптоновской длины волны электрона, приближаются к их массовой оболочке (т. е. имеют массу, приближающуюся к 0) и, соответственно, скорость, близкую к скорости света. Однако лишь наивные люди придумывают модели, в которых фотонное поле действительно распространяется на этой поверхности. Скорее всего, выражаясь классическим языком, электрон как сплошная неоднородная среда, имеет такие свойства преломления и отражения, что закон Рывта заставляет каждый фотон, испускаемый вследствие виртуальных квантовополевых процессов из «сердцевин» электрона возвращаться в неё обратно.

В ортодоксальном подходе (в соответствии с основами квантовой электродинамики!) электрон представляется как двухкомпонентная среда, состоящая из фотонов и электрон-позитронных пар, причём распределение зарядов в ней определяется только одним из двух виртуальных (случайных) процессов, а распределение массы — обоими. Таким образом, возникает рассогласованность движений «центров распределений» массы и заряда электрона. Следовательно, в точках остановки относительного движения этих центров скорость обращается в ноль, а потому, при средней скорости колебаний, равной c (которая следует непосредственно из уравнения Дирака, даже без переходов к картине *Zitterbewegung*'а!), относительная скорость колебаний двух указанных субстанций в «сердцевине» электрона должна быть равна, как минимум, $2c$.

Рассматривая эту картину как эвристическую, займёмся дальнейшим обследованием электромагнитной структуры атома водорода на подобном простейшем уровне. Тогда, относясь вполне серьёзно к томсоновскому $\text{Ansatze } r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$, займёмся, с его использованием, квантованием кинетической энергии электрона в атоме водорода:

$$\frac{p^2}{2m} \equiv \frac{p^2 c^2}{2m c^2} \equiv \frac{r^2 p^2 c^2 e^2}{2m c^2 r^2 e^2} = \frac{n^2 h^2 c^2 4r_0 \pi^2 r^2}{2(\pi r^2)^2 4e^2} = \frac{n^2 \Phi_0^2 2\pi^2 r^2 r_0}{S^2} = (nB_0)_r^2 V_T = NB_0^2 V_T. \quad (13)$$

Здесь, в этих соотношениях совершён переход от квантования Бора-Зоммерфельда к квантованию с помощью кванта потока магнитного поля и, в итоге, кинетическая энергия предстала в виде энергии, содержащейся в объёме (пересеченного) тора $V_T = 2\pi^2 r^2 r_0$. (Заметим, что такого сорта объекты естественно возникают в алгебродинамике клиффордовых полей [13]). Вообще говоря, в рамках нерелятивистской квантовой механики волновая функция не имеет сингулярности в нуле, а потому формально допустимы значения $r < r_0$, при которых тор теряет свойство пересечённости. Однако, при рассмотрении задачи о

структуре атома водорода с помощью уравнения Дирака следует, что эту область надо исключить (см. ниже). Приравняв найденную величину энергии в (13) к полученному в (6), легко убедиться, что формулы консистентны вне зависимости от выбранного значения r .

Напомним, что введение спина и спиновых взаимодействий в задачу о структуре атома водорода осуществляется с помощью уравнений Дирака в представлении Дирака для γ -матриц. Решения же уравнений Дирака с кулоновским потенциалом в этом представлении рассматриваются в приближении $E - e^2 r \ll 2mc^2$. Таким образом, решения релятивистского уравнения сразу рассматриваются в области орбит Бора (сфер Бора). Поэтому в квазирелятивистском представлении Паули, идентифицирующем спин-орбитальное, контактное (дарвиновское) и прочие взаимодействия, последние вносят на этих удалениях электрона от протона, лишь релятивистские поправки к основным нерелятивистским вкладам. Нами же задача поставлена в полноте, в духе нерелятивистской задачи, минуя обоснования введения магнитных взаимодействий через паулиевскую матрицу. Заметим, кстати, что оператор спина в любом каноническом подходе вводится тавтологически, т. е. умножением паулиевской матрицы на $\hbar/2$. Точнее говоря, $\hbar/2$ не является собственным значением никакого оператора квантовой теории электромагнитных взаимодействий, а играет роль фундаментального внешнего параметра.

Более того, фиксированная математическая структура алгебр Клиффорда, которая в кватернионном представлении включает паулиевские матрицы, имеющие определённые выражения для их коммутаторов и антикоммутаторов. Эти соотношения, конечно, можно умножать на $\hbar^2/4$, но эта перенормировка приводит к порче антикоммутационного соотношения, выводя его за рамки собственно клиффордовых алгебр. Это связано с тем, что кватернионы представляют собой матрицы, квадрат которых равен единице, что исключает свойство дилатации и спиновых матриц Паули. Тем более, умножение их на какие-либо величины, например, имеющие размерность магнитных моментов. В нашей наивной модели мы пока избежали этой трудности, введя в выражение для энергии феноменологический член взаимодействия магнитного момента электрона с неким средним магнитным полем, порождаемым движением электрона в атоме. Заметим, что несмотря на то, что нами введено это псевдовекторное поле, зависимости термов от квантового числа m не возникло, как и в модели Резерфорда–Бора. Это признак того, что введённая за счёт этого взаимодействия корреляция, определена как случайная величина, имеющая изотропный характер.

Поскольку мы имеем выражение для полной энергии, то естественно перейти к её анализу в классическом лагранжевом подходе.

3. Лагранжев подход к задаче о динамике электрона в атоме водорода

Главным исходным условием для формулировки этой задачи будет необходимость учесть основные экспериментальные факты о свойствах атома водорода: отсутствие его намагничённости, которое неизбежно возникало бы при движении электрона на регулярных замкнутых орбитах вокруг протона и, соответственно, орбитального углового момента в основном состоянии. Решим поставленную задачу способом радикально отличным образом от общепринятых, в соответствии с картиной, обрисованной во введении, и двумя правилами квантования, применённого в параграфе 1. В нашем классическом понимании движение электрона осуществляется на поверхности усечённого конуса, где нижнее его дно имеет радиус Бора, а усечённая вершина имеет площадь πr_0^2 и центр её расположен на сфере с радиусом r_0 , окружающей протон.

Электрон, «падая на протон по поверхности конуса» с орбиты Бора, движется по спирали из-за спин-орбитального взаимодействия, которое у нас определяется на всех расстояниях между электроном и протоном вкладом в гамилтониан μB . При этом «падении» на расстояниях порядка комптоновской длины волны от протона (выражаясь фигурально, при вхождении протона внутрь электрона) электрон начинает «тормозиться» и расстояние от протона, равное r_0 является точкой

поворота его движения. Это и есть эффективное описание процесса торможения движения электрона, нарождающейся (виртуальной) электрон–позитронной пары.

Квантовополевой процесс (на)рождения виртуальной электрон–позитронной пары является стохастическим процессом и с теоретикополевой точки зрения пару можно рассматривать как кольцевой ток единственного (виртуального) электрона, который, однако, имеет обычный физический отрицательный элементарный заряд (действительно, понятие виртуальности относится только к единственному глобальному параметру любой частицы — её массе!!!). Этот кольцевой ток создаёт магнитное поле дипольного характера, причём ориентация этого диполя носит случайный характер. Оценим порядок величины напряжённости магнитного поля этого диполя на расстояниях $r \sim r_0$:

$$\mathbf{B}_{virt} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{I}_{orb}}{cr^3} \rightarrow \frac{e}{\alpha r_0^2} = \frac{e}{\alpha^3 \lambda^2},$$

где скорость условного носителя заряда на амперовской (т. е. фиктивной) орбите положена в соответствии с принципом определённости (т. е. детерминированностью соотношений между кинематическими и энергетическими переменными в рамках фундаментальных квантовых уравнений Дирака, Паули, Шрёдингера, см. ниже) положена равной c/α . Напоминаем, что фактически наша квазиклассическая картина является прямой интерпретацией ортодоксального квантовополевого процесса возбуждения виртуальных пар в рамках КЭД, в которой на языке энергетических переменных вводятся такие понятия как поляризация физического вакуума, создаваемого локальными электромагнитными взаимодействиями высших порядков. Именно они превращают точечный («затравочный») электрон в некоторую квантовую стохастическую среду в объёме сферы, диаметр которой равен комптоновской длине волны. В данном случае мы используем эту картину в рамках квазиклассического рассмотрения поведения электрона в составе атома водорода в пространственном координатном представлении [14, 15].

Ниже мы покажем, что именно это магнитное поле (18), создаваемое виртуальной электрон–позитронной парой, ответственное за взаимодействие в (6), ассоциирующееся со спин-орбитальным. А пока мы напишем простейший лагранжиан для задачи движения электрона в атоме водорода, исходя из суммы энергий взаимодействий, введённых в параграфе 1. В стандартных лагранжевых переменных и простейшем выборе корреляций между координатой и скоростью, этот лагранжиан можно записать в виде:

$$\mathcal{L} = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{\mu\Phi}{\pi c} \frac{\mathbf{s} \cdot (\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}})}{q^3} - \frac{e^2}{q}, \quad (14)$$

где вектор $\mathbf{s}$, ассоциируемый в обычной квантовой механике с оператором спина, здесь трактуется как единичный вектор случайных радиальных направлений из точки, в которой находится в атоме протон.

Согласно обычным правилам получения уравнения движения с помощью лагранжиана, находим:

$$m\ddot{\mathbf{q}} = \alpha\hbar c \frac{\mathbf{q}}{q^3} - \frac{3\mu\Phi}{\pi c} \frac{|\dot{\mathbf{q}}|(\mathbf{s} \times \mathbf{q})}{q^4} - \frac{3\mu\Phi}{\pi c} \frac{\mathbf{q}(\mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}))}{q^5}. \quad (15)$$

Переходя в волновое пространство $(\omega, \mathbf{k})$ и вводя обозначения $\omega_C = \frac{c}{\lambda} = \frac{mc^2}{\hbar}$ превращаем дифференциальное уравнение в алгебраическое:

$$\frac{\omega^2}{\omega_C^2} \mathbf{q} = \alpha\lambda^3 \frac{\hat{\mathbf{q}}}{q^2} - \frac{3\lambda^4}{2\pi c} \left\{ \frac{|\dot{\mathbf{q}}|(\mathbf{s} \times \mathbf{q})}{q^4} + \frac{\mathbf{q}(\mathbf{s} \cdot (\dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q}))}{q^5} \right\}. \quad (16)$$

В правой части производная по времени от вектора $\mathbf{q}$ сохранена, т. к. величина этой производной будет рассматривается в дальнейшем анализе как независимый

параметр. Действительно, оценим относительные вклады в правой части последнего соотношения при выборе следующих трёх характерных областей значений переменных, от которого оно зависит:

$$\begin{aligned}
 a) \quad q &\sim \frac{\lambda}{\alpha} = r_B, \quad \dot{q} = \alpha c, \\
 \omega_C &\sim \alpha^2 \omega_0 \Rightarrow \alpha \lambda = \alpha^3 \lambda + \frac{3}{2\pi} (\alpha^4 \lambda + \alpha^4 \lambda) \approx \alpha^3 \lambda + \alpha^4 \lambda; \\
 b) \quad q &\sim \lambda \equiv c\lambda, \quad \dot{q} = c, \\
 \omega_C = \omega_0 &\Rightarrow \lambda = \alpha \lambda + \frac{3}{2\pi} (\lambda + \lambda) \approx \alpha \lambda + \lambda; \\
 c) \quad q &\sim \alpha \lambda = r_0, \quad \dot{q} = \frac{c}{\alpha}, \\
 \omega_C = \frac{\omega_0}{\alpha^2} &\Rightarrow \frac{\lambda}{\alpha} = \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{3}{2\pi} \left(\frac{\lambda}{\alpha^4} + \frac{\lambda}{\alpha^4} \right) \approx \frac{\lambda}{\alpha} + \frac{\lambda}{\alpha^4}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Прежде всего отметим, что выбор значения параметра $\dot{q} = \frac{c}{\alpha}$ не случаен. Этот выбор определяется сохранением величины произведения $q\dot{q}$ во всех трёх областях. В рамках теории дифференциальных уравнений эта величина должна являться интегралом движения; с физической же точки зрения, этот выбор есть следствие наших размышлений (см. выше) о природе Zitterbewegung'a. В более общем плане, противоположные по знаку масштабирования q и $\dot{q}$ по константе электромагнитного взаимодействия α должны быть продолжены «и вверх, и вниз» по колонкам приведённых значений. Это приводит к очень глубоким идеям, которые неоднократно обсуждались многими исследователями от П. Дирака и до А. Барута в различных контекстах. Идея такого масштабирования настойчиво обсуждается, например, в работах Г.П. Шпенкова и Л. Кредика (см. [16]) и другие работы этих авторов, а также многочисленны статьи неортодоксальной направленности в таких журналах, как «Известия ВУЗов», «Физическая Мысль России», «Galilean Electrodynamics» и т. п.) Ориентируясь на известную формулу Й. Намбу [17], которая связывает массу протона с массой электрона с помощью коэффициента $\alpha^{3/2}$, нетрудно установить подобные приведения к массе электрона и для других элементарных частиц (бозонов и фермионов), продолжая начатое Намбу исследование по связи спектров масс адронов и лептонов. Более того, ещё в 1971 г. М. Мак-Грегор ([18] и развитие им этого наблюдения в его последующих работах) указал на то, что вероятность слабых распадов элементарных частиц соотносится как α^n , где n — целое число. Это указывает на то, что в природе имеется лишь одно универсальное взаимодействие — электромагнитное, воспринимаемое нами на различных расстояниях, как слабое или сильное. Это весьма правдоподобно, если учесть, что на малых пространственных интервалах топология взаимодействий усложняется (т. е. «внутри» элементарных частиц, где плотность энергии-массы может возрастать). Усложнение топологии непосредственно проявляется, например, в том, что у электрона кроме магнитного момента, который формируется скорее всего во всем его комптоновском объёме, на расстояниях, где эффективно слабые взаимодействия, формируется ещё один статический параметр описания: тороидный дипольный момент. Непосредственным следствием существования этих двух характеристик электрона является то, что конфигурация «внутреннего тока» в электроне описывается ненулевыми индексами Хопфа, являющимися одним из простейших признаков топологической нетривиальности распределения замкнутого векторного поля [19].

Кстати говоря, из такого фактического состояния дел сразу вытекает то, что и магнитный момент (спин) и тороидный момент являются в равной мере топологическими характеристиками частицы и, таким образом, подтверждается широко обсуждающаяся в последнее время идея рассмотрения симметрии Пуанкаре–Лоренца, как приближенной.

Мы фактически пришли к той же картине, обсуждая динамику электрона в окрестности его «соприкосновения» с протоном, когда обнаружили возможность превращения пересекающегося тора в обычный топологически нетривиальный тор, с уменьшением на малых пространственных интервалах взаимодействия между электроном и протоном. Эта картина повторяет ту, что предписана в Стандартной Модели для внутренности электрона с фактором масштабирования α^2 . Таким образом, фактор масштабирования α скорее всего предписывается сильным взаимодействием, если пытаться их генерировать, уменьшая характерные масштабы чисто электромагнитных взаимодействий и ввести топологически нетривиальные интегралы по путям (что глобально и осуществляют матрицы Гелл-Манна в КХД).

Отметим, что, начиная со знаменитой работы Каббibo, в которой произведён переход к единой константе слабых взаимодействий G_F за счёт поворота в пространстве состояний, дальнейшее развитие калибровочных теорий, приведшее к формулировке Стандартной Модели, действительно шло по пути универсализации константы слабых взаимодействий за счёт введения феноменологических параметров (в окончательной формулировке с помощью матрицы Кобаяши–Маскава).

После этого отступления займёмся анализом найденных нами соотношений (17). Из соотношения (17.а) видим, что поведение решения дифференциального уравнения не может иметь осцилляторного характера. Однако, в этой области переменных соотношение между кулоновским вкладом и вкладом, ассоциирующимся со спин-орбитальным, имеет обычный вид релятивистской поправки первого порядка к кулоновскому потенциалу.

Из соотношения (17.б) следует, что на расстояниях порядка комптоновской длины волны превалирует «сила трения», а релятивистской поправкой к ней является кулоновское взаимодействие. Именно в этой области изменения динамических переменных нашего уравнения возможно осцилляторное поведение системы и далее стохастизация этого решения дополнительно к *Zitterbevegung*'у невозмущённого электрона.

Из соотношения (17.с) с очевидностью следует, что на интервалах $\lambda > r > r_0$ «сила трения» стремительно возрастает, а об осцилляторном поведении решения не может быть и речи. Расстояния же, на которых столь резко возросла сила трения требуют анализа следующих релятивистских потенциалов, что нами и начато.

Соответственно, энергия взаимодействия с этим магнитным полем магнитного момента протона, выраженная единым образом через комптоновскую длину электрона

$$W \sim \frac{2,79\hbar c}{\sqrt{\alpha}\lambda}.$$

Следовательно, вклады взаимодействия с этим полем магнитных моментов электрона и протона будут иметь порядок

$$\mu_e B_{virt} = \mu_e \frac{ec}{\alpha^3 \lambda^2} = \frac{e\lambda}{2} \frac{ec}{\alpha^3 \lambda^2} = \frac{\hbar c}{\alpha^2 \lambda}. \quad (18)$$

Отсюда следует, что в правой части последней строки соотношения возникнет дополнительный вклад порядка λ/α^2 . Заодно, с помощью классической формулы взаимодействия магнитных моментов

$$W = \frac{3(\boldsymbol{\mu}_1 \mathbf{r})(\boldsymbol{\mu}_2 \mathbf{r}) - r^2(\boldsymbol{\mu}_1 \boldsymbol{\mu}_2)}{r^5} + 4\pi \boldsymbol{\mu}_1 \boldsymbol{\mu}_2 \delta^3(\mathbf{r}), \quad (19)$$

справедливой не только в классической, но и в рамках квантовой электродинамики (см. эффективный потенциал взаимодействия двух электронов в формуле

Брейта). Оценим порядок их вкладов для электрон–электронного и электрон–протонного магнитодипольных взаимодействий на расстояниях r_0 :

$$\begin{aligned}\Delta W &= \mu_e \mu_e = 2 \frac{e^2 \lambda^2}{4r_0^3} = \frac{\hbar c}{2\alpha^2 \lambda}, \\ \Delta W &= \mu_e \mu_p = \frac{2,79 \hbar c}{2\sqrt{\alpha} \lambda}.\end{aligned}\tag{20}$$

Подчеркнём, что динамика электрон–протонных взаимодействий на расстоянии r_0 полностью определяется магнитными свойствами этих частиц и характером их движения, поскольку кулоновское взаимодействие на этих расстояниях имеет всего лишь порядок $e^2/r_0 = \hbar c/\lambda$. Естественно, что эти потенциалы должны быть введены в уравнения и (3), и (15).

Итак, наша единственная гипотеза о случайной ориентации магнитного поля, создаваемого электрон–позитронной парой, непосредственно обоснует возможность эффективного описания атома водорода с помощью волновой функции в S -состояниях, поскольку наша методика близка к той, что была развита Грызинским [20], то формирование состояний с более высокими квантовыми числами идёт по той же схеме, что и у него. Мы посвятим этому вопросу отдельное исследование. Исходя из этой картины, отметим то обстоятельство, что круговое движение виртуального электрона вблизи протона, стабилизированное присутствием мощного дипольного магнитного поля, выглядит «естественно» при его движении к (положительно заряженному) протону и «противоестественно» при движении от протона, имитируя позитрон. Это, по-видимому, и является общей подоплёкой СРТ-теоремы и её выражением в данном конкретном случае. С классической же электромагнитной точки зрения причиной расталкивания реального и виртуального электронов является большой положительный вклад в гамильтониан на этих расстояниях от взаимодействия их магнитных моментов, который ориентированы по одной оси, поскольку лишь один из них, виртуальный (а реально, конечно, электрон–позитронная пара, поскольку один электрон имеет отрицательный заряд, а пара нулевой!), создаёт продольное магнитное поле. Эту расталкивающую силу можно ассоциировать с действием принципа Паули (сравни изложенное с детализацией действия этого принципа, данного в работе [21]).

Заключение

Итак, подчеркнём самое существенное свойство развитых нами полуклассических моделей. Основное их отличие от остальных моделей строения атома заключается в том, что в них сразу, уже в самой простейшей формулировке учитывается наличие магнитных полей разных конфигураций на различных расстояниях. В целом атом водорода выглядит как весьма специфическая (динамическая!) магнитная ловушка, создающаяся при падении электрона на кулоновский центр (протон, ядро). При этом в области обычных квантово-механических стационарных орбит магнитное поле малой напряжённости возникает спорадически и имеет стохастическую радиальную направленность. На самых же малых расстояниях в атоме, куда ещё может проникнуть электрон, $r \sim r_0$, возникает, как мы показали, «перевитое» магнитное поле. Его силовые линии имитируют магнитную структуру электрона, которая формируется на расстояниях ровно в 137 раз меньших, чем в атоме водорода, — на комптоновской длине промежуточных векторных бозонов. Таким образом в «сердцевине» обоих объектов поле имеет магнитотороидный характер. В то же время эти объекты с глобальной точки зрения разные. Атом водорода практически магнитонейтрален, а потому корреляцию магнитного и тороидного моментов, точнее соответствующую единую топологически нетривиальную конфигурацию магнитного поля в нем трудно установить. В то же время мы верим, что когда электрон выстраивается (а может быть поляризуется!) при сравнительно невысоких напряжённостях магнитного поля за счёт своего большого магнитного момента, то по нему ориентируется и тороидный диполь. Это явление по недоразумению считается эффектом «несохранения

чётности», хотя таковым оно только представляется в линейном локальном пределе учёта внешнего магнитного поля и описания внутреннего магнитного поля с помощью простейших (разделённых по характеру токов их образующих) дипольных моментов (магнитного и тороидного), имеющих противоположные свойства при отражении пространственных координат.

Теоретическое и экспериментальное моделирование различного типа магнитных полей и векторного потенциала можно проследить в работах Р. Варма [22]. На основе развитой картины сделаем ещё одно замечание весьма общего характера. Поскольку наличие магнитного и тороидного диполей у электрона — физикоматематический факт, то очевидно, что торы с полоидальными магнитными силовыми линиями на поверхности могут прилегать к друг другу только в том случае, если их тороидные и магнитные диполи направлены в противоположные стороны (сравни с картиной молекулярных амперовских токов). Можно предположить, что именно эта «живая» (электромагнитная) картина и является причиной справедливости формального введённого принципа Паули на уровне спинов. Немедленным следствием такого предположения будет составная природа бозонов.

Заметим также, что наше феноменологическое введение спина и магнитных моментов сравнимо с описанием дислокаций и дисклинаций [23], как мезоскопических дефектов упругих тел в рамках нерелятивистских калибровочных теорий. При этом компенсирующие поля, определяющие упругость материалов, являются аналогами возникающих при движении заряженных частиц электромагнитных потенциалов (которые неудачно называют калибровочными). Подтверждается, что спин не является динамической характеристикой элементарной частицы, а по способу введения он скорее формируется в ней как стандартный механический отклик, например, при воздействии на неё внешнего магнитного поля. В ядерных реакциях такие отклики могут быть следствием соударений ядер.

Литература

1. *Kuryshkin V. V., Zorin A. V.* // *Nuovo Cim. A.* — Vol. 101, No 3. — 1989. — Pp. 497–503.
2. *Egido J. L., Robledo L. M., Rodriguez-Guzman R. R.* Unveiling the Original of Shape Coexistence in Lead Isotopes // *Phys. Rev. Lett.* — Vol. 93. — 2004. — Pp. 082502–1.
3. *Захарова В. П.* // *Известия ВУЗов. Физика.* — № 5. — 2005. — С. 47.
4. *Takahashi K. et al* // *Phys. Rev.* — Vol. C36, No 3. — 1987. — P. 1522.
5. *Jung M. et al* // *Phys. Rev. Lett.* — Vol. 69, No 15. — 1992. — P. 2164.
6. *Bosh F. et al* // *Phys. Rev. Lett.* — Vol. 77, No 26. — 1996. — P. 5190.
7. *Dubovik V. M., Martsenyuk M. A., Saha B.* // *Phys. Rev. E.* — Vol. 61, No 6. — 2000. — P. 7087.
8. *Прохоров Л. В., Шабанов С. В.* Гамильтонова механика калибровочных систем. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1997.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. — Т. VII: Теория упругости. — М.: Наука, 1987.
10. *Огibalов П. М., Колтунов М. А.* Оболочки и пластины. — М.: Изд-во МГУ, 1969.
11. *Weisskopf V. F.* // *Amer. J. Phys.* — Vol. 53, No 2. — 1985. — Pp. 109–110.
12. *Де Бройль Л.* Введение в волновую механику: Пер. с фр. / Под ред. Д. Д. Иваненко. — Изд. 2-е, испр. издание. — М.: Едиториал УРСС, 2005. — 232 с. — см. также первое издание книги: ОНТИ, Гос. НКТП, Науч.-техн. Изд. Украины, Харьков — Киев — 1934.
13. *Kassandrov V. V.* // *Grav. Cosmol.* — Vol. 8. — 2002. — Pp. 57–62.
14. *Dyson F.* // *Phys. Rev.* — Vol. 75. — 1949. — P. 1736.
15. *Thirring W.* Principles of Quantum Electrodynamics. — New York, 1958.
16. *Shpenkov G. P., Kriedik L.* // *Hadronic J.* — Vol. 26, No 2. — 2003. — Pp. 217–230.
17. *Nambu Y.* // *Progr. Theor. Phys.* — Vol. 7. — 1952. — P. 595.

18. *Mac Gregor M. H.* // *Lettere Al Nuovo Cimento.* — Vol. 1, No 18. — 1970. — P. 759.
19. *Dubovik V. M., Tugushev V. V.* // *Phys. Rev.* — Vol. 187, No 18. — 1990. — P. 145.
20. *Грызинский М.* Об атоме точно. — Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева, 2004. — ФПВ-2004, Вып. 1. — 92 с.
21. *Чувылкин Н. Д., Смоленский Е. А., Зефиров Н. С.* // *УХН.* — Т. 74, № 11. — 2005. — С. 1118–1131.
22. *Varma R. K. et al* // *Phys. Lett.* — Vol. A303. — 2002. — Pp. 114–120.
23. *Кадич А., Эделен Д.* Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. — М.: Мир, 1987. — 168 с.

UDC 53.01

The Hydrogen Electromechanical Model as a Presentation of the Stochastic Quantum–Field Process of Electron–Proton Interaction

V. M. Dubovik, E. N. Dubovik

*Joint Institute for Nuclear Research,
6, Joliot-Curie str., Dubna, Moscow Region, 141980, Russia*

It is shown that the Schrödinger equation can be formally reduced to the equation of the theory of stable thin film elastic disk and envelope in mechanics. Starting from it the possibility of considering the classical mechanical approach with regard to the quantum field electromagnetic effects, as the factors, responsible for quantum structure of atom is discussed. As an example we analyze the hydrogen atom structure.

UDC 531.145

Dynamical Methods of Investigations in Application to the Schrödinger Particle

Yu. A. Rylov

*Institute for Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences
101-1, Vernadskii Ave., Moscow, 119526, Russia*

Quantum systems are dynamic systems restricted by the principles of quantum mechanics (linearity of dynamic equations, linear transformation of the wave function etc.). One suggests to investigate the quantum systems simply as dynamic systems, ignoring the quantum principles and constraints imposed by them. Such dynamic methods of investigation appear to be more adequate and effective, than the conventional quantum methods of investigation. Using these methods, which ignore the quantum principles, one can overcome the principal problem of quantum field theory: join of nonrelativistic quantum principles with the relativity principles. Investigation of dynamic system $\mathcal{S}_S$, described by the Schrödinger equation, admits one to prove that the Copenhagen interpretation is incompatible with quantum mechanics formalism. Besides, it is shown that sometimes the application of quantum principles leads to incorrect results.

Introduction

One uses new dynamical methods of investigation, which ignore the quantum principles. Elimination of the quantum principles admits one to eliminate the principal problem of QFT: *join of the relativity principles with the principles of quantum mechanics*. After this elimination the relativistic quantum theory is constructed on the basis of relativistic dynamics only, whereas the conventional approach uses in addition the linearity of dynamic equations. This linearity is based on a special gauge of the wave function. A use of such an artificial property of the wave function for construction of the relativistic quantum theory seems to be unjustified, although the linearity is very convenient, because the linear equations are simple for solution. We show in the simple example of Schrödinger particle $\mathcal{S}_S$ (dynamic system described by the Schrödinger equation), that the difference between the quantum system and the classical one is purely dynamical, and the quantum system may be described without a reference to quantum principles.

A fundamental physical theory $\mathcal{T}_f$ must be a logical structure. It means, that the theory contains a few fundamental propositions. All predictions of the theory $\mathcal{T}_f$ as well as other propositions $\mathcal{P}_i$ intermediate between the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$ and experimental data $\mathcal{D}_e$ are deduced from the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$ by means of logical reasonings and mathematical calculations. Practical derivation of predictions and explanations from the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$ may be difficult and complicated, because of long reasonings and complicated calculations. In this case one uses a set of intermediate propositions $\mathcal{P}_i$, which are valid in some region of physical phenomena. Practical application of the intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ as some physical theory $\mathcal{T}_c$ may appear to be more effective and simpler, than a use of the fundamental theory $\mathcal{T}_f$.

In general, the intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ are to be corollaries of the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$. However, if it is impossible to discover the true fundamental propositions $\mathcal{P}_f$, we may guess intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ and consider them as a curtailed physical theory $\mathcal{T}_c$. The set of prescriptions $\mathcal{P}_i$ is chosen in such a way to explain some set of experimental data. The curtailed theory $\mathcal{T}_c$ is not a logical structure, it is simply a list of prescriptions, which are not connected logically between themselves. The logical structure appears, only if we discover and add the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$, which generate this list of prescriptions $\mathcal{P}_i$ under some conditions. In

this case the intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ may be eliminated from the formulation of the fundamental theory $\mathcal{T}_f$, because the propositions $\mathcal{P}_i$ are corollaries of fundamental propositions $\mathcal{P}_f$.

Thus, we may use the curtailed physical theory $\mathcal{T}_c$ instead of the fundamental physical theory $\mathcal{T}_f$. For instance, the axiomatic thermodynamics is a curtailed theory with respect to kinetic theory, which may be considered to be a fundamental theory. The conventional quantum mechanics is a curtailed theory, whereas the corresponding fundamental theory is not known yet. Such an application of $\mathcal{T}_c$ is possible only under those conditions (for instance, in the nonrelativistic case), when the intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ are valid. However, extension of the curtailed theory $\mathcal{T}_c$ to other conditions (for instance, to the relativistic case) may appear to be impossible, because the intermediate propositions $\mathcal{P}_i$ are only corollaries of the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$ in the nonrelativistic case. Under another conditions (for instance, in the relativistic case) the fundamental propositions $\mathcal{P}_f$ may generate another intermediate propositions $\mathcal{P}_i^*$, which does not coincide with $\mathcal{P}_i$ and cannot be obtained from $\mathcal{P}_i$, because the set of $\mathcal{P}_i$ is simply a list of prescriptions (a list of corollaries of $\mathcal{P}_f$), but not a logical structure.

1. Artificiality of conventional method of description

The action for the Schrödinger particle $\mathcal{S}_S$ has the form

$$\mathcal{A}_S[\psi] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi \right\} d^4x, \quad (1)$$

where $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$ is a complex wave function. The action carries out the complete description of the Schrödinger particle $\mathcal{S}_S$, because it generates the dynamic equation

$$i\hbar \partial_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi, \quad (2)$$

and corresponding canonical quantities: the 4-current j^k and the energy-momentum tensor T_l^k

$$j^k = \{\rho, \mathbf{j}\} = \left\{ \psi^* \psi, -\frac{i\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \nabla \psi^* \cdot \psi) \right\}. \quad (3)$$

Connection between the particle and the wave function is described by the relations.

$$\begin{aligned} \langle F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rangle &= B \int \Re \{ \psi^* F(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}) \psi \} d\mathbf{x}, \\ \hat{\mathbf{p}} &= -i\hbar \nabla, \quad B = \left(\int \psi^* \psi d\mathbf{x} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

which define the mean value $\langle F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rangle$ of any function $F(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ of position $\mathbf{x}$ and momentum $\mathbf{p}$. We shall refer to these relations together with the restrictions imposed on its applications as the quantum principles, because von Neumann [1] has shown, that all proposition of quantum mechanics can be deduced from relations of this type.

Setting $\hbar = 0$ in the action (1), we hope to obtain a description of classical particle. Instead, the description disappears, and in this sense the description (1) is artificial.

2. Natural description of the Schrödinger particle

To obtain the natural description of the Schrödinger particle, we produce the change of variables (another gauge of the wave function phase)

$$\psi \rightarrow \Psi_b : \quad \psi = |\Psi_b| \exp \left(\frac{b}{\hbar} \log \frac{\Psi_b}{|\Psi_b|} \right), \quad b = \text{const} \neq 0 \quad (5)$$

in the action (1). We obtain

$$\mathcal{A}_S[\Psi_b] = \int \left\{ \frac{ib}{2} (\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b) - \frac{b^2}{2m} \nabla \Psi_b^* \nabla \Psi_b + \right. \\ \left. + \frac{b^2}{2m} (\nabla |\Psi_b|)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla |\Psi_b|)^2 \right\} dt d\mathbf{x}. \quad (6)$$

This change of variables leads to the replacement $\hbar \rightarrow b$ and to appearance of two nonlinear terms which compensate each other, if $b = \hbar$.

The dynamic equation becomes to be nonlinear, if $b^2 \neq \hbar^2$

$$ib \partial_0 \Psi_b = -\frac{b^2}{2m} \nabla^2 \Psi_b - \frac{\hbar^2 - b^2}{8m} \left(\frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} + 2 \nabla \frac{\nabla \rho}{\rho} \right) \Psi_b, \quad (7)$$

$$\rho = \Psi_b^* \Psi_b, \quad \mathbf{j} = -\frac{ib}{2m} (\Psi_b^* \nabla \Psi_b - \nabla \Psi_b^* \cdot \Psi_b). \quad (8)$$

However, the description becomes to be natural in the sense, that after setting $\hbar = 0$, the action $\mathcal{A}_S[\Psi_b]$ turns into the action

$$\mathcal{A}_{Scl}[\Psi_b] = \int \left\{ \frac{ib}{2} (\Psi_b^* \partial_0 \Psi_b - \partial_0 \Psi_b^* \cdot \Psi_b) - \frac{b^2}{2m} \nabla \Psi_b^* \nabla \Psi_b + \frac{b^2}{2m} (\nabla |\Psi_b|)^2 \right\} dt d\mathbf{x}, \quad (9)$$

which describes the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]$ of free classical particles $\mathcal{S}_d$. The action $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]}$ for this statistical ensemble can be represented in the form

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]}[\mathbf{x}] = \int \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 dt d\xi, \quad (10)$$

where $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ is a 3-vector function of independent variables $t, \xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. The variables (Lagrangian coordinates) ξ label particles $\mathcal{S}_d$ of the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]$. The statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]$ is a dynamical system of the hydrodynamical type. One can show that the dynamic system, described by the action $\mathcal{A}_{Scl}[\Psi_b]$ (9) is a partial case (irrotational flow) of the dynamic system $\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]$ [2].

Connection between the Schrödinger equation and hydrodynamical description is well known [3, 4]. But a connection between the description in terms of wave function and the hydrodynamic description was one-way. One can transit from the Schrödinger equation to the hydrodynamic equations, but one cannot transit from hydrodynamic equations to the description in terms of the wave function, because one *needs* to *integrate* hydrodynamic equations. Indeed, the Schrödinger equation consists of two real first order equations for the density ρ and the phase φ , whereas the system of the hydrodynamical equations consists of four first order equations for the density ρ and for the velocity $\mathbf{v}$. To obtain four hydrodynamic equations one needs to take gradient of the equation for the phase φ . On the contrary, if we transit from the hydrodynamic description to the description in terms of the wave function, we are to integrate hydrodynamic equations. In the general case this integration was not known for a long time.

Change of variables, leading from the action $\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]}[\mathbf{x}]$ to the action $\mathcal{A}_{Scl}[\Psi_b]$ contains integration (see [2] or mathematical appendices to papers [5, 6]). The constant b in the action $\mathcal{A}_{Scl}[\Psi_b]$ is an arbitrary constant of integration (gauge constant). Arbitrary integration functions are “hidden” inside the wave function Ψ_b . Thus, the limit of Schrödinger particle (6) at $\hbar \rightarrow 0$ is a statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_d]$, but not an individual particle $\mathcal{S}_d$. It means, that the *wave function describes a statistical ensemble of particles, but not an individual particle*, and Copenhagen interpretation, where the wave function describes an individual particle, is *incompatible* with the quantum mechanics formalism.

A use of Copenhagen interpretation does not generate any problems, until we consider mathematical formalism of QM, because in the framework of this formalism

we have the only object of investigation. It is of no importance what is the name of the investigated object. But at the consideration of the measurement we have two different kinds of measurement:

- 1) Individual measurement (S -measurement), which is produced over the individual stochastic particle $\mathcal{S}_{st}$.
- 2) Massive measurement (M -measurement), which is produced over the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$, or over the statistical average particle $\langle S \rangle$.

3. Statistical ensemble as a starting point of quantum theory

One can show, that the Schrödinger particle $\mathcal{S}_S$ is a special case of the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ of stochastically moving free particles $\mathcal{S}_{st}$, i.e. the action (6) for $\mathcal{S}_S$ can be obtained from the action for the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ by means of a proper change of variables [2].

The statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ of *stochastic* particles $\mathcal{S}_{st}$ is a dynamic system, described by the action

$$\mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}[\mathbf{x}, \mathbf{u}_{df}] = \int \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2 + \frac{m}{2} \mathbf{u}_{df}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u}_{df} \right\} dt d\xi, \quad (11)$$

where $\mathbf{u}_{df} = \mathbf{u}_{df}(t, \mathbf{x})$ is the diffusion velocity, describing the mean value of the stochastic component of the velocity, whereas $\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t, \xi)$ describes the regular component of the particle velocity, and $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$ is a 3-vector function of independent variables $t, \xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. The variables ξ label stochastic particles $\mathcal{S}_{st}$, constituting the statistical ensemble. The operator ∇ is defined in the space of coordinates $\mathbf{x}$. Dynamic equations have the form

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}}{\delta \mathbf{x}} = -m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} + \nabla \left(\frac{m}{2} \mathbf{u}_{df}^2 - \frac{\hbar}{2} \nabla \mathbf{u}_{df} \right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\delta \mathcal{A}_{\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]}}{\delta \mathbf{u}_{df}} = m \rho \mathbf{u}_{df} + \frac{\hbar}{2} \nabla \rho = 0, \quad (13)$$

$$\rho = \left[\frac{\partial (x^1, x^2, x^3)}{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \right]^{-1} = \frac{\partial (\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)}. \quad (14)$$

Resolving (13) with respect to $\mathbf{u}_{df}$ in the form

$$\mathbf{u}_{df} = -\frac{\hbar}{2m} \nabla \ln \rho, \quad (15)$$

and eliminating $\mathbf{u}_{df}$ from equation (12), we obtain the dynamic equations of the hydrodynamical type

$$m \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\nabla U(\rho, \nabla \rho), \quad U(\rho, \nabla \rho) = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} - 2 \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} \right). \quad (16)$$

Hydrodynamic equations (16) may be written in terms of the wave function [2,5,6]. The proper change of the variables together with *integration* turns the action (11) for $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{st}]$ into the action containing the quantum constant $\hbar$ and an arbitrary integration constant b .

The wave function is not a specific quantum quantity. The wave function is a method of description of *any ideal fluid*. Quantum and classical dynamic systems distinguish *dynamically* (by the form of their actions). The form of description (in

terms of wave function, or in terms of position and momentum of the particle) is of no importance.

Considering the statistical ensemble of stochastic particles as a starting point of the quantum mechanics, *one does not need quantum principles*, because the interpretation is carried out directly via the particles of the statistical ensemble. Besides, the quantum theory turns into a consistent statistical theory, where there are two sorts of particles: (1) individual stochastic particle $\mathcal{S}_{st}$ and (2) statistical average particle $\langle \mathcal{S}_{st} \rangle$, which is the statistical ensemble, normalized to one particle. Formalism of quantum mechanics deals only with the statistical average particle $\langle \mathcal{S}_{st} \rangle$. All predictions of QM relate only to $\langle \mathcal{S}_{st} \rangle$. In accordance with two sorts of particles we have two sorts of measurements: (1) S -measurement produced over $\mathcal{S}_{st}$ and (2) M -measurement produced over $\langle \mathcal{S}_{st} \rangle$. The two kinds of measurements have different properties and one may not confuse them (see for details [7]).

The Copenhagen interpretation meets the difficulties, when it tries to test predictions of mathematical formalism in single experiments. For instance, there exists the problem of the mechanism of the wave function reduction at a single experiment. Another problem concerns the two-slit experiment. How can an individual particle pass through two slits at once? The physical journals publish discussions concerning problems of quantum measurements. For instance, such a discussion was declared in 2002 by the journal *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*. These problems cannot be solved in the framework of the Copenhagen interpretation, which does not distinguish between the individual particle $\mathcal{S}$ and the statistically average particle $\langle \mathcal{S} \rangle$. Confusion of two different objects, having different properties generates difficulties and paradoxes. The wave function does not describe the state of individual particle $\mathcal{S}$, and it is meaningless to ask, how the wave function changes at a single measurement (S -measurement). At the massive experiment (M -measurement) we obtain a distribution $F(R')$ of the measured quantity $\mathcal{R}$, but not a single value R' of the measured quantity. At such a situation it is useless to ask, how the obtained result R' influences on the the state of the statistical ensemble (statistical average particle). Finally, we may define the third type of measurement (SM -measurement): the massive measurement of the quantity $\mathcal{R}$ leading to a definite value R' of the measured quantity $\mathcal{R}$. The SM -measurement is the M -measurement leading to a distribution $F(R')$, accompanied by a selection of those particles, where result of S -measurement is R' . Uniting all particles with the measured value R' in one statistical ensemble $\mathcal{E}_{R'}$, we can put the question about the wave function of $\mathcal{E}_{R'}$. Of course, the wave function $\psi_{R'}$ of $\mathcal{E}_{R'}$ does not coincide, in general, with the initial wave function ψ , and this change of the wave function is considered as a reduction of the wave function. The origin of the reduction is quite transparent. It is the selection, which is produced to obtain the same value R' of the measured quantity for all particles of the statistical ensemble. Thus, the problems of reduction are conditioned by the confusion of concepts of the individual particle $\mathcal{S}$ and the statistical average particle $\langle \mathcal{S} \rangle$, which takes place at the Copenhagen interpretation (see for details [7]).

As concerns the particle, passing through two slits simultaneously, it is a reasonable property of the statistical average object. It is a pure statistical property, which has nothing to do with quantum properties. Individual particle $\mathcal{S}$ can pass either through one slit, or through another, whereas the statistical average particle $\langle \mathcal{S} \rangle$ can pass through both slits simultaneously. (Compare, individual person is either a man, or a woman, whereas the statistical average person is a hermaphrodite (half-man half-woman), and there are no quantum mechanical properties here).

Using statistical ensemble as a starting point, we can test validity the quantum principles. The quantum principles or their conventional interpretation appear to be wrong in some cases. For instance, the momentum distribution $w(\mathbf{p}) = |\langle \mathbf{p} | \psi \rangle|^2$ is in reality a distribution over mean momenta $\langle \mathbf{p} \rangle$. Let us illustrate the difference between the two distribution in the example of ideal gas, whose state may be described by the wave function. In the case, when the gas moves with the constant velocity $\mathbf{u}$, the wave function has the form

$$\psi(\mathbf{x}) = A_1 e^{\frac{i}{\hbar} m \mathbf{u} \mathbf{x}}, \quad A_1 = \text{const}, \quad (17)$$

where m is the mass of a molecule. Corresponding momentum distribution has the form

$$w(\mathbf{p}) = |\langle \mathbf{p} | \psi \rangle|^2 = A \delta(\mathbf{p} - m\mathbf{u}), \quad A = \text{const.} \quad (18)$$

This distribution does not coincide with the Maxwell momentum distribution

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{p} = \frac{1}{(2\pi mkT)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\mathbf{p} - m\mathbf{u})^2}{2mkT}\right\} d\mathbf{p}, \quad (19)$$

which depends on the gas temperature kT .

Let us divide the space into small cells V_i and calculate the mean momentum $\langle \mathbf{p} \rangle_i$ of molecule in each cell V_i . In the given case we obtain in the i th cell $\langle \mathbf{p} \rangle_i = m\mathbf{u}$. All mean momenta $\langle \mathbf{p} \rangle_i$ form the mean momenta distribution (18). The mean momenta $\langle \mathbf{p} \rangle_i$ correlate with the position $\mathbf{x}_i$ of the cell V_i , and mutual distribution over position $\mathbf{x}$ and momentum $\langle \mathbf{p} \rangle$ appears to be impossible. More detail consideration one can find in [8].

Description of “classical particle” $\mathcal{S}_{\text{cl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ in the “quantum language” is realized by the action.

$$\mathcal{A}_{\text{Scl}}[\psi, \psi^*] = \int \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\psi^* \partial_0 \psi - \partial_0 \psi^* \cdot \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \nabla \psi + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla |\psi|)^2 \right\} dt d\mathbf{x}, \quad (20)$$

where we use the quantum constant $\hbar$ instead of arbitrary constant b .

$$i\hbar \partial_0 \psi + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi - \frac{\hbar^2}{8m} \left(2 \frac{\nabla^2 \rho}{\rho} - \frac{(\nabla \rho)^2}{\rho^2} \right) \psi = 0, \quad \rho = \psi^* \psi. \quad (21)$$

Description of “quantum particle” $\mathcal{S}_{\text{S}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ in the “classical language” is realized by equations

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\nabla U(\rho, \nabla \rho), \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (22)$$

where U is defined by the second relation (16).

Dynamic equations (22) are the *partial* differential equations, because ρ contains derivatives with respect to ξ_α , $\alpha = 1, 2, 3$.

Description of “classical particle” $\mathcal{S}_{\text{cl}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ in the “classical language” has the form

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (23)$$

where $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \xi)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t, \xi)$. Dynamic equations (23) are *ordinary* differential equations.

Describing quantum system $\mathcal{S}$ and corresponding classical system $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ in the classical language, we recognize that dynamic equations for the quantum system $\mathcal{S}$ are *partial* differential equations, whereas dynamic equations for its classical approximation $\mathcal{S}_{\text{cl}}$ are *ordinary* differential equations.

The difference between the ordinary and partial differential equations is dynamical (but not quantum). This invariant difference is a foundation of the procedure of the dynamical disquantization (transition to classical approximation).

Dynamic disquantization is the procedure of projecting of derivatives onto the direction of 4-current j^k

$$\partial^l \rightarrow \partial_{||}^l = \frac{j^l j^k}{j^s j_s} \partial_k, \quad l = 0, 1, 2, 3.$$

To obtain ordinary differential equations, one needs to project derivatives onto one direction.

The dynamic disquantization admits one to *formalize* the transition to the classical description. Being applied to Schrödinger particle $\mathcal{S}_{\text{S}}$, the dynamic disquantization transform $\mathcal{S}_{\text{S}} = \mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{st}}]$ into the statistical ensemble $\mathcal{E}[\mathcal{S}_{\text{d}}]$ of free classical particles $\mathcal{S}_{\text{d}}$.

The procedure of dynamic disquantization is determined by the dynamic system *completely* and does not refer to the quantum constant and the quantum principles.

Concluding remarks

We have analysed application of dynamical methods to the Schrödinger particle and have obtained results, which cannot be obtained by means of conventional axiomatic methods. Analogous results are obtained at application of dynamical methods to other quantum systems. Application of dynamical methods to investigation of quantum systems admits one to eliminate quantum principles. The number of fundamental propositions is reduced essentially. The quantum theory ceases to be a list of prescriptions and becomes a logical structure.

In the conventional quantum theory the allness of the quantum constant $\hbar$ is explained by the quantum nature of all physical phenomena. In particular, it means that all physical fields should be quantized. Application of dynamical methods and elimination of quantum principles suppose some primordial stochastic motion of free particles with dependence of the stochasticity intensity on the particle mass. The universal character of the quantum constant and the particle motion stochasticity may be explained freely by the space-time properties, when the quantum constant is a parameter of the space-time geometry [9,10]. In this case not all physical fields have the quantum nature. Dynamic equations for the metric fields (gravitational and electromagnetic) do not contain the quantum constant $\hbar$. There is no necessity to quantize these fields.

It is well known that the electromagnetic field is absorbed and emitted in the form of quanta of energy $\hbar\omega$. However, this fact does not mean that the electromagnetic field exists in the form of quanta. There are no experiments, which show directly or indirectly that the electromagnetic field exists in the form of quanta. (At least, such experiments are unknown for us). Absorption and emission of the electromagnetic field in the form of quanta may be easily explained by the quantum properties of the absorption devices and the emission ones. The same relates to the gravitational field. All attempts of its quantization appear to be unsuccessful.

Quantum and classical dynamic systems distinguish *only* dynamically, i.e. by their dynamic equations, but not by their enigmatic quantum properties. Linearity of the conventional axiomatic methods is simple and attractive, but these methods are founded on nonrelativistic quantum principles, and we cannot be sure that these methods may be applied in the relativistic case.

There is a hope that application of dynamical methods in the relativistic case will be successful. First, extension to the relativistic case is produced on the logical basis, but not by means of incident hypotheses. Second, in the relativistic case the diffusion velocity $\mathbf{u}_{df}$ turns to the relativistic field, responsible for pair production, whereas neither quantum principles nor classical relativistic dynamics can describe effect of pair production, which is the principle effect of the high energy physics.

References

1. *Neumann J. V.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. — Berlin: Berlin, 1932.
2. *Rylov Y. A.* Spin and wave function as attributes of ideal fluid // J. Math. Phys. — Vol. 40, No 1. — 1999. — Pp. 256–278.
3. *Madelung E.* Quanten Theorie in hydrodynamischer Form // Z. Phys. — Vol. 40. — 1926. — Pp. 322–326.
4. *Bohm D.* A suggested interpretation of the quantum theory in terms of “hidden” variables // Phys. Rev. — Vol. 85. — 1952. — Pp. 166, 180.
5. *Rylov Y. A.* Is the Dirac particle composite? — <http://arXiv.org/abs/physics/0410045>.
6. *Rylov Y. A.* Is the Dirac particle completely relativistic? — <http://arXiv.org/abs/physics/0412032>.
7. *Rylov Y. A.* Dynamics of stochastic systems and peculiarities of measurements in them. — <http://arXiv.org/abs/physics/0210003>.
8. *Rylov Y. A.* Hydrodynamical interpretation of quantum mechanics: the momentum distribution. — <http://arXiv.org/abs/physics/0402068>.

9. *Rylov Y. A.* Non-Riemannian model of the space-time responsible for quantum effects // J. Math. Phys. — Vol. 32, No 8. — 1991. — Pp. 2092–2098.
10. *Rylov Y. A.* Tubular geometry construction as a reason for new revision of the space-time conception. — <http://arXiv.org/abs/physics/0504031>.

УДК 531.145

Динамический метод исследования в приложении к Шрёдингеровской частице

Ю. А. Рылов

*Институт проблем механики РАН,
Россия, 119526, Москва, просп. Вернадского, 101-1*

Квантовые системы — это динамические системы, ограниченные принципами квантовой механики (линейность динамических уравнений, линейные преобразования волновых функций и т. п.). Предлагается исследовать квантовые системы просто как динамические системы, игнорируя ограничивающие их квантовые принципы. Такой динамический метод исследований представляется более адекватным и эффективным. Используя этот метод можно преодолеть основные трудности квантовой теории поля: объединить принципы нерелятивистской квантовой механики и принцип относительности. Исследование динамической системы, описываемой уравнением Шрёдингера, позволяет показать, что Копенгагенская интерпретация несовместна с квантовомеханическими принципами. Кроме того, показано, что иногда использование квантовомеханических принципов приводит к неверным результатам.

УДК 621.378.826.535.8

Бианки-I космологическая модель с вязкой жидкостью и нелинейным спинорным полем: качественный анализ

Б. С. Саха, В. В. Рихвицкий

Лаборатория Информационных Технологий
Объединённый Институт Ядерных Исследований
Россия, 141980, Дубна, Московская обл.

Рассматривается система нелинейного спинорного и гравитационного полей типа Бианки-I (BI) в присутствии вязкой жидкости и Λ -члена. Выведена система уравнений для объёмного масштаба τ и плотности энергии вязкой жидкости ϵ . Полученная система решена для некоторых частных случаев. Было показано что введение спинорного поля в систему в корне изменяет характер эволюции, в частности, в некоторых специальных случаях это приводит к неограниченному росту плотности энергии за конечное время.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: спинорное поле, вязкая жидкость.

Введение

Исследователи релятивистских космологических моделей обычно имеют дело с тензором энергии-импульса, создаваемым идеальной жидкостью. Чтобы рассмотреть более реалистичные модели следует принять во внимание механизм вязкости, который уже привлек внимание многих исследователей. Однородная космологическая модель, наполненная жидкостью, которая характеризуется давлением и второй (объёмной) вязкостью, была развита в работе [1]. Найденное решение интересно тем, что особенность типа «большого взрыва» оказывается в бесконечном прошлом. Точное решение изотропной однородной космологической модели для открытой, замкнутой и плоской вселенной было найдено в [2], в которой вторая вязкость есть степенная функция плотности энергии.

Характер космологических решений для однородной модели типа Бианки-I (BI) был исследован Белинским и Халатниковым [3], которые принимали во внимание диссипативный процесс, связанный с вязкостью. Они показали, что вязкость не может устранить космологическую сингулярность, но имеет следствием качественно новое поведение решений вблизи сингулярности. Они обнаружили, что в модели материя создаётся гравитационным полем во время *большого взрыва*.

В последние годы нами было и аналитически, и качественно изучена роль вязкой жидкости в эволюции Бианки типа I вселенной в присутствии Λ -члена [4, 5]. А в работах [6, 7] также было учтено влияние спинорного поля в эволюции вселенной. Целью этой работы является качественный анализ системы уравнений для объёмного масштаба τ и плотности энергии вязкой жидкости ϵ , поскольку все остальные величины, такие как компоненты спинорного поля, метрические функции и различные инварианты, характеризующие физически наблюдаемые величины и пространство-время, выражаются через τ .

Выберем лагранжиан спинорного поля в виде

$$\mathcal{L}_{sp} = \frac{i}{2} \left[\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \right] - m \bar{\psi} \psi + \lambda F. \quad (1)$$

Здесь m — масса спинора, λ — константа самодействия и F — некоторая произвольная функция инвариантов $I = S^2 = (\psi\psi)^2$ и $J = P^2 = (i\bar{\psi}\gamma^5\psi)^2$.

В качестве модели гравитационного поля мы рассмотрим космологическую модель типа Бианки-I (BI)

$$ds^2 = dt^2 - a_1^2 dx^2 - a_2^2 dy^2 - a_3^2 dz^2 \quad (2)$$

с функциями a_1, a_2, a_3 , зависящими только времени t . Также мы определяем объёмный масштаб вселенной типа BI

$$\tau = a_1 a_2 a_3. \quad (3)$$

Мы рассматриваем пространственно-независимое спинорное поле. Если нелинейность спинорного поля является функцией $I(S)$, то для S находим

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = \text{const}. \quad (4)$$

Для компонент спинорного поля находим [6]

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{C_1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, & \psi_2(t) &= \frac{C_2}{\sqrt{\tau}} e^{-i\beta}, \\ \psi_3(t) &= \frac{C_3}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, & \psi_4(t) &= \frac{C_4}{\sqrt{\tau}} e^{i\beta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где C_i должны быть константами, связанными с C_0 как $C_0 = C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2$. Здесь $\beta = \int (m - \mathcal{D}) dt$. Заметим, что похожие выражения получаются для безмассового спинорного поля с $F = F(J)$. В результате обнаруживается, что компоненты спинорного поля находятся в некоторой функциональной зависимости от τ . Отметим, что физически наблюдаемые величины, такие как спиновый ток, полный заряд спинорного поля и т. д. также зависят от τ [6].

Приступим теперь к изучению уравнений Эйнштейна

$$\frac{\ddot{a}_j}{a_j} + \frac{\ddot{a}_k}{a_k} + \frac{\dot{a}_j}{a_j} \frac{\dot{a}_k}{a_k} = \kappa T_i^i - \Lambda, \quad i \neq j \neq k = 1, 2, 3, \quad (6a)$$

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} \frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} \frac{\dot{a}_1}{a_1} = \kappa T_0^0 - \Lambda, \quad (6b)$$

в которых точка обозначает дифференцирование по t , κ есть гравитационная константа Эйнштейна, а Λ — космологическая постоянная. В движущихся друг относительно друга системах отсчёта таких, что $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, для компонент тензора энергии-импульса спинорного поля и вязкой жидкости можно найти

$$T_0^0 = mS - \lambda F(I, J) + \varepsilon, \quad (7a)$$

$$T_i^i = \mathcal{D}S + \mathcal{G}P - \lambda F(I, J) - p' + 2\eta \frac{\dot{a}_i}{a_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7b)$$

где

$$p' = p - \left(\xi - \frac{2}{3}\eta\right) u_{;\mu}^\mu. \quad (8)$$

Здесь ε — плотность энергии, p — давление, η и ξ — коэффициенты первой и второй вязкостей соответственно.

С учётом (7) из (6) можно найти следующие выражения для метрических функций [6]:

$$a_i(t) = D_i \tau^{1/3} \exp \left[X_i \int \frac{e^{-2\kappa \int \eta dt}}{\tau(t)} dt \right], \quad i = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Здесь константы интегрирования D_i и X_i связаны соотношениями

$$D_1 D_2 D_3 = 1, \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0.$$

Таким образом метрические функции также зависят от τ . Может быть показано, что скалярная кривизна $I_1 = R$, $I_2 = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ и Кречманновский (Kretschmann) скаляр $I_3 = R_{\alpha\beta\mu\nu} R^{\alpha\beta\mu\nu}$, которые могут быть использованы как средство определения пространственно-временной сингулярности, зависят от τ , а именно $I_1 \propto \frac{1}{\tau^2}$, $I_2 \propto \frac{1}{\tau^4}$, $I_3 \propto \frac{1}{\tau^4}$. Мы видим, что в произвольной пространственно-временной точке, где $\tau = 0$, инварианты I_1 , I_2 , I_3 , также как скалярное и спинорное поля, обращаются в бесконечность. Следовательно, пространство-время становится в этой точке сингулярным.

Далее запишем уравнение для τ и изучим его в деталях. Для этого введём обобщённую константу Хаббла H

$$\frac{\dot{\tau}}{\tau} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = 3H. \quad (10)$$

Напомним также, что первая (ξ) и вторая (η) вязкости положительно определённые, то есть $\eta > 0$, $\xi > 0$. Обе они могут быть постоянными или функциями времени или энергии. Предположим, что они являются функциями плотности энергии:

$$\eta = A\varepsilon^\alpha, \quad \xi = B\varepsilon^\beta, \quad (11)$$

с положительными величинами A и B . Зададим так же уравнение состояния для p и ε

$$p = \zeta\varepsilon, \quad \zeta \in (0, 1]. \quad (12)$$

Заметим, что в этом случае $\zeta \neq 0$, тогда как для давления пыли температура равна нулю, что влечёт нулевую вязкость.

Тогда из уравнений Эйнштейна (6), тождества Бианки с учётом уравнения спинорного поля, а также вводя $\nu = 1/\tau$, находим систему

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (13a)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{2}(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) - (3H^2 - \varepsilon + \Lambda) + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1}), \quad (13b)$$

$$\dot{\varepsilon} = 3H(3B\varepsilon^\beta H - (1 + \zeta)\varepsilon) + 4A\varepsilon^\alpha(3H^2 - \varepsilon + \Lambda) - 4A\varepsilon^\alpha[m\nu - \lambda\nu^n]. \quad (13c)$$

Заметим, что плоскости $\nu = 0$ и $\varepsilon = 0$ являются динамически инвариантными подмножествами, которые делят пространство на четыре не сообщающиеся части, поскольку

$$\dot{\tau}|_{\tau=0} = 0, \quad \text{и} \quad \dot{\varepsilon}|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (14)$$

Заметим также, что $\varepsilon < 0$ бессмысленно, если α и/или β не являются целыми.

Плоскость $\varepsilon = 0$ является притягивающим множеством для $H > 0$ и отталкивающим для $H < 0$, поскольку

$$\left. \frac{\partial \dot{\varepsilon}}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = -3H(1 + \zeta). \quad (15)$$

Когда $H > 0$, плоскость $\varepsilon = 0$ оказывается притягивающей.

Представляет интерес выяснить характер движения на самой плоскости, хотя бы это и не было физически значимо. В этом случае, т.е. при $\varepsilon = 0$, система принимает вид

$$\dot{\nu} = -3H\nu, \quad (16a)$$

$$\dot{H} = -3H^2 - \Lambda + \frac{1}{2}(m\nu + \lambda(n-2)\nu^{n-1}). \quad (16b)$$

Решениями системы (16) являются кривые

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \lambda\nu^{n-1}\left(1 + \frac{1}{n-3}\right), \quad \text{для } n > 3, \tag{17a}$$

$$3H^2 = C\nu^2 + m\nu - \Lambda - \lambda\nu^2 \ln(\nu), \quad \text{для } n = 3, \tag{17b}$$

где C — некоторая произвольная константа.

Проиллюстрируем результаты. Для числового решения возьмём следующие значения параметров: $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\zeta = 0,5$, $A = 1$, $B = 1$, $n = 4$, $m = 1$, $\lambda = 1$ и $\Lambda = 10$.

Если правая часть уравнения (17) имеет два положительных корня и между ними H не равно нулю, то на плоскости $\varepsilon = 0$ существует замкнутый цикл. Очевидно, что число корней не может быть больше трёх, поэтому не может быть неконцентрических циклов (т. е. циклов, имеющих разные центры). В результате, вблизи плоскости $\varepsilon = 0$ могут быть циклические колебания. На рис. 1 изображена фазовая диаграмма, демонстрирующая осцилляторный характер эволюции.

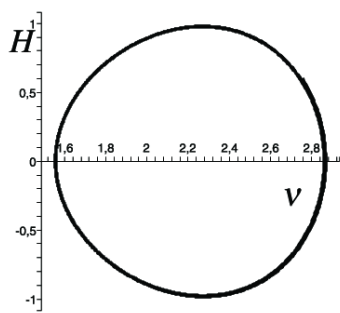


Рис. 1. Демонстрируется, что около плоскости $\varepsilon = 0$ существует циклический режим эволюции

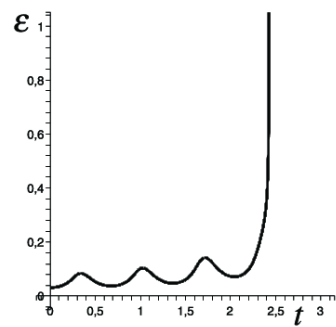


Рис. 2. Изменение ε со временем. Плотность энергии достигает бесконечности за конечное время

При выполнении условий $\varepsilon = 0$ и $\dot{\varepsilon} = 0$ нетривиальный цикл должен содержать внутри себя особую точку, где $\dot{\tau} = 0$ и $\dot{H} = 0$. Заметим, что $\dot{\tau} = 0$ может быть получено как при $H = 0$ так и при $\tau = 0$. Поскольку $\tau = 0$ есть сингулярность пространства-времени, то рассмотрим случай $H = 0$.

Итак, особая точка, вокруг которой выполняются осцилляции, имеет $H = 0$, поэтому траектории осцилляций частично проходят в области притяжения к плоскости $\varepsilon = 0$, частично в области отталкивания. Математическое моделирование показало, что эти траектории начинают раскручиваться, и в области отталкивания в некоторый момент рост ε становится преобладающим, т. е. становится таким большим, что кривая не возвращается в область притяжения. В действительности может оказаться, что ε становится бесконечным за конечный отрезок времени. На рис. 2 показано изменение плотности энергии во времени. Как видно, плотность энергии в конечном счёте имеет тенденцию к неограниченному росту.

Рис. 3 показывает, что когда $\varepsilon \rightarrow 0$, вселенная VI осциллирует, то при возрастающем ε величина τ стремится к малой константе, т. е. возникает большая гравитационная сила вследствие большой плотности энергии, что не позволяет вселенной типа VI расширяться свыше некоторого критического размера.

Таким образом нами было подробно исследована самосогласованная система нелинейного спинорного и Бианки типа I гравитационного полей с учётом вязкой жидкости и космологической постоянной. Было показано что введение спинорного поля в систему в корне изменяет характер эволюции, в частности, в некоторых специальных случаях это приводит к неограниченному росту плотности энергии за конечное время.

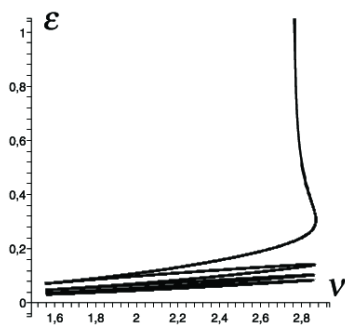


Рис. 3. Изменение ε по отношению к τ . Как видно, после нескольких осцилляций ε уходит в бесконечность, τ стремится к некоторой малой константе

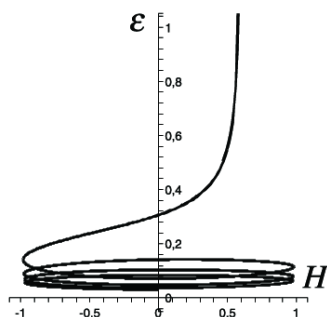


Рис. 4. Изменение ε по отношению к H

Литература

1. *Murphy G. L.* // Phys. Rev. D. — Vol. 8. — 1973. — P. 4231.
2. *Santos N. O., Dias R. S., Banerjee A.* // J. Math. Phys. — Vol. 26. — 1985. — P. 876.
3. *Belinski V. A., Khalatnikov I. M.* // J. of Experimental and Theoretical Physics. — Vol. 69. — 1975. — P. 401.
4. *Saha B.* // Mod. Phys. Lett. A. — Vol. 20. — 2005. — P. 2127.
5. *Saha B., Rikhvitsky V.* // Physica D. — Vol. 219. — 2006. — P. 168.
6. *Saha B.* // Romanian Report of Physics. — Vol. 57, No 1. — 2005. — P. 7.
7. *Биджан С., Рихвицкий В.* // Материалы XLII Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии / РУДН. — М.: 2006. — С. 88.

UDC 621.378.826.535.8

Bianchi-I Cosmological Model with Viscous Fluid and Nonlinear Spinor Field: a Qualitative Analysis

B. S. Saha, V. V. Rikhvitsky

*Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
Dubna, Moscow reg., 141980, Russia*

A system of nonlinear spinor field and Bianchi type-I gravitational field in presence of a viscous fluid and Λ term has been considered. A system of equations for volume scale τ and energy density ε has been reduced. The system obtained has been solved for some special cases. It has been shown that the introduction of spinor field to the system radically changes the character of evolution, in particular for some special choice of parameters it leads to the unlimited growth of the energy density at the finite interval of time.

Алгебраическая твисторная динамика тождественных сингулярностей в комплексном расширении пространства–времени

В. В. Кассандров

*Институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

Представлена алгебраическая теория поля со структурой, целиком основанной на нелинейном обобщении условий комплексной аналитичности Коши–Римана на некоммутативную алгебру бикватернионов. Каждое бикватернионное поле обладает естественной твисторной структурой и в пространстве Минковского порождает некоторую бессдвиговую изотропную конгруэнцию лучей и ассоциированные с ней калибровочные поля. В работе эта алгебродинамическая схема развивается на комплексном расширении пространства–времени Минковского — полном векторном пространстве алгебры бикватернионов. Исходное пространство динамически редуцируется к 6-мерному «наблюдаемому» пространству–времени комплексного изотропного конуса, которое в свою очередь разлагается на 4-мерное физическое пространство–время и 2-мерное внутреннее «спиновое пространство». При этом естественно возникает ансамбль тождественных точечных зарядов («дубликонов») — фокальных точек конгруэнции. Временная динамика различных дубликонов сильно коррелирована через фундаментальное твисторное поле конгруэнции. Кратко обсуждаются с необходимостью возникающие в рассматриваемой алгебродинамической схеме понятия «комплексного времени» и «кривой эволюции», а также их возможная связь с квантовой неопределённостью.

Введение

В данной статье мы продолжаем развивать *алгебродинамическую* теорию поля, представленную, например, в работе [1]. Напомним, что в парадигме алгебродинамики все фундаментальные физические законы и явления рассматриваются, в духе радикальной «неопифагорейской» философии, как реализация некоторой первичной абстрактной структуры — *Кода Вселенной*, — в качестве которого могла бы выступать исключительная группа (например, группа *Монстра*), алгебра или геометрия. Вся структура и эволюция Вселенной, основные категории времени, частицы, поля, движения и взаимодействия должны быть целиком предопределены и закодированы во внутренних свойствах этой «Мировой» структуры. Известные физические законы являются, с этой точки зрения, лишь отдельными *фрагментами* Структуры, и следовало бы на время *забыть* их все и попытаться заново и *непредвзято* прочесть «Книгу Природы», которая при этом могла бы открыть для нас удивительную и величественную картину физического Мира, совершенно отличную от ныне принятой в теоретической физике.

В основной развитой к настоящему времени версии алгебродинамики (см., например, [1–6] и ссылки в этих работах) в качестве *Мировой алгебры* выбрана исключительная алгебра *кватернионов* (точнее, её комплексификация — алгебра *бикватернионов* $\mathbb{B}$). Фундаментальные физические поля при этом являются $\mathbb{B}$ -значными функциями $\mathbb{B}$ -переменной, а первичные уравнения поля есть не что иное, как *условия $\mathbb{B}$ -дифференцируемости*, или, иначе, — *обобщённые условия Коши–Римана* (КРОУ). Эти условия были предложены автором ещё в 1980 году (подробнее см. [2, 3, 7–9]) и имеют следующий инвариантный вид:

$$dF = \Phi * dZ * \Psi, \quad (1)$$

где $F : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}$ представляет собой $\mathbb{B}$ -дифференцируемую функцию $F(Z)$ от $\mathbb{B}$ -переменной $Z \in \mathbb{B}$; $\Phi, \Psi : \mathbb{B} \mapsto \mathbb{B}$ — две вспомогательные функции (т.н. левая и правая «полупроизводные»), сопоставляемые F , а символ $(*)$ обозначает операцию умножения в $\mathbb{B}$, изоморфного умножению в 2×2 полной матричной алгебре с элементами в поле комплексных чисел.

Как прямое следствие условий (1), каждая матричная компонента $\mathbb{B}$ -поля $f = \{F_{AB}\}$, $A, B = 1, 2$ удовлетворяет дифференциальному уравнению детерминантного типа

$$\det \left\| \frac{\partial f}{\partial Z_{AB}} \right\| = 0, \quad (2)$$

которое, для случая некоммутативной $\mathbb{B}$ -алгебры, представляет собой *нелинейный* аналог условия *гармоничности* Лапласа из комплексного анализа. Если теперь ограничить координаты Z на подпространство $\mathbf{M}$ полного $4\mathbb{C}$ векторного пространства $\mathbb{B}$ -алгебры, представленное эрмитовыми матрицами $X = X^+$ и имеющее метрическую структуру пространства Минковского $\mathbf{M}$, например выбрать представление

$$Z \mapsto X = \begin{pmatrix} u & w \\ p & v \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где $u = ct + z$, $v = ct - z$ вещественны, $w = x - iy$ и $p = x + iy$ — комплексно сопряжены, а x, y, z, t — декартовы и временная координаты на $\mathbf{M}$, то КРОУ запишутся в виде

$$dF = \Phi * dX * \Psi, \quad (4)$$

а фундаментальное уравнение (2) примет форму

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial f}{\partial p} \equiv \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 = 0, \quad (5)$$

в которой нетрудно узнать *уравнение комплексного эйконала* (УКЭ) [2].

На фоне координатного пространства Минковского вся схема немедленно становится лоренц-инвариантной, и оказывается возможным построить «алгебраическую» теорию поля, в которой нелинейный комплекснозначный эйконал выступает в качестве основного физического поля, причём поля с *самодействием*.

Основные положения и результаты алгебраической (нелинейной, нелагранжевой, переопределённой) теории $\mathbb{B}$ -поля были представлены ранее в серии статей (см. [1, 3, 6, 8–12] и другие работы автора). Оказалось, в частности, что КРОУ и являющееся их следствием УКЭ обладают естественной 2-спинорной, твисторной и т.н. «слабой» калибровочной структурами. Более того, *условия интегрируемости для (4) приводят к тождественному выполнению (комплексифицированных) свободных уравнений Максвелла и Янга–Миллса*.

В работе [11] (см. также [12]) была найдена лоренц-инвариантная форма *общего* решения УКЭ, основанная на (амби)твисторной структуре этого уравнения. А именно, любое (почти всюду аналитическое) решение УКЭ может быть получено из некоторой генерирующей функции

$$\Pi(G, \tau^1, \tau^2) \equiv \Pi(G, wG + u, vG + p) \quad (6)$$

трёх комплексных аргументов — компонент проективного изотропного твистора, связанных с точками пространства–времени $X \in \mathbf{M}$ через *соотношение инцидентности* Пенроуза [13]

$$\tau = X\xi \quad (\tau^A = X^{AA'}\xi_{A'}), \quad (7)$$

которое, после выбора калибровки вида $\xi_{A'}^T = \{1, G\}$, соответствует связям вида

$$\tau^1 = wG + u, \quad \tau^2 = vG + p. \quad (8)$$

А именно, было показано, что всякая генерирующая твисторная функция (6) порождает пару «сопряжённых» решений УКЭ. Для получения первого из них следует разрешить алгебраическое условие

$$\Pi(G, wG + u, vG + p) = 0 \quad (9)$$

относительно G ; при этом получим комплексное (и, вообще говоря, *многозначное*) поле $G(u, v, w, p) \equiv G(x, y, z, t)$, которое для любой Π и любой непрерывной ветви решения тождественно удовлетворяет УКЭ.

Во-вторых, можно уже после дифференцирования (6) разрешить возникающее уравнение

$$P \equiv \frac{d\Pi}{dG} = 0 \quad (10)$$

относительно G и подставить полученное таким образом поле $G(u, v, w, p)$ в исходную функцию (6). В этом случае приходим к некоторой функции координат $\Pi(G(X), \tau^1(X), \tau^2(X)) \equiv \Pi(x, y, z, t)$, которая снова тождественно удовлетворяет УКЭ. В работе [11] было показано, что два представленных выше класса исчерпывают (почти всюду аналитические) решения УКЭ.

С геометрической точки зрения, любое твисторное поле $\mathbf{W}(X) = \{G, \tau^1, \tau^2\}$ определяет некоторую *изотропную геодезическую конгруэнцию*, т. е. конгруэнцию прямолинейных светоподобных лучей на $\mathbf{M}$. Для твисторных полей, полученных из соотношения (9), эта конгруэнция является, кроме того, *бессдвиговой* (БСК). Более того, любая БСК может быть получена таким способом (это утверждение составляет содержание т.н. *теоремы Керра* [13, 14]).

Рассматриваемые совместно, условия (9) и (10) определяют множество *каустики* соответствующей конгруэнции лучей, так что после исключения G приходим к уравнению

$$\Pi(u, v, w, p) \equiv \Pi(x, y, z, t) = 0 \quad (11)$$

(с функцией Π , всегда удовлетворяющей УКЭ, см. выше), которое *определяет форму и временную эволюцию каустик*, в общем случае чрезвычайно сложными [5, 12, 15]. С другой стороны, то же самое условие определяет множество *особых точек* сопоставляемых каждому решению УКЭ полей Максвелла и Янга-Миллса [8, 10], так же как и поля кривизны соответствующей БСК *римановой метрики* типа Керра–Шилда [14, 16, 17]. Таким образом, в данном подходе мы можем рассматривать *частицы как сингулярности*¹, общие для электромагнитного и других полей, сопоставляемых каждому решению КРОУ (или, эквивалентно, УКЭ) [8, 10, 15].

Следует отметить, что такие сингулярности демонстрируют некоторые черты реальных квантовых частиц, в том числе благодаря *переопределённой* структуре КРОУ. Действительно, согласно теореме квантования заряда, доказанной в работах [1, 5], всякая ограниченная изолированная сингулярность электромагнитного поля, ассоциируемая с его источником, непременно имеет электрический заряд либо равный нулю, либо целократный от некоторого минимального, *элементарного*, соответствующего заряду статического аксиально симметричного решения Керра с кольцеобразной сингулярностью [2, 3, 9, 10]. В соответствии с наблюдениями Картера [18] и Ньюмена [19], значение гиромангнитного отношения для сингулярностей керровского типа в точности соответствует этому значению для дираковского фермиона. Многочисленные примеры БСК со сложной структурой и динамикой сингулярного множества были рассмотрены в наших работах [8–10, 12, 15].

С более общей точки зрения, на этом пути мы приходим к необычайно интересной картине физического Мира, основными элементами которой являются конгруэнция первичных светоподобных лучей (по-видимому, не воспринимаемая непосредственно наблюдателем) — поток *Предсвета* [12, 20] — и материя, «порождаемая» этим «эфироподобным», но релятивистски инвариантным потоком в фокальных точках, или на каустиках. Последовательная концепция физического

¹По крайней мере в случае, когда сингулярное множество ограничено в 3-мерном пространстве

Времени как *параметра эволюции первичного поля* вдоль лучей «предсветового» потока также была предложена ранее и обсуждалась в наших работах [12, 20, 21] (см. в этой связи раздел 2).

К сожалению, вышеизложенная алгебраическая теория взаимодействующих частиц и полей не является вполне реалистической. Действительно, в общем случае частицы-сингулярности в этой теории представлены некоторым числом изолированных одномерных кривых (*струн*), нетривиально эволюционирующих во времени, но, как правило, неустойчивых по форме и размерам и «высвечивающихся» на бесконечность. Помимо того, не видно никаких корреляций во временном поведении различных (в том числе близко расположенных) струн, которые можно было бы рассматривать как проявление их взаимодействия. Наконец, с общей математической точки зрения, вещественное подпространство Минковского M ничем не выделено в структуре $\mathbb{W}$ -алгебры, не образуя даже подалгебры.

Последний аргумент особенно важен в общем контексте алгебродинамики. Действительно, неизвестна ни одна алгебра с группой автоморфизмов, изоморфной группе Лоренца специальной теории относительности². Поэтому, оставаясь в рамках алгебродинамической парадигмы, мы приходим к необходимости рассматривать геометрии пространства-времени, отличные от геометрии Минковского. При этом полное 4-мерное *комплексное* векторное пространство $\mathbb{W}$ -алгебры выглядит наиболее подходящим «фоновым» пространством для алгебраической теории поля и частиц, основанной на условиях $\mathbb{W}$ -дифференцируемости, т. е. на КРОУ.

Комплексное расширение CM пространства-времени Минковского на самом деле многократно возникало в контексте общей теории относительности, в твисторной и струнной теориях. В частности, Ньюмен и др. [19, 22, 23] использовали процедуру комплексификации пространства-времени для получения физически интересных решений электровакуумной системы уравнений Эйнштейна-Максвелла и связей между характеристиками соответствующих частицеподобных сингулярных источников (см. следующий раздел). В нашей работе [21] развивалась алгебродинамика в пространстве CM на основе представления Ньюмена о «виртуальном» точечном заряде, «движущемся» по комплексной мировой линии в CM и формирующим при этом конгруэнцию комплексных «светоподобных лучей». На действительном «срезе» CM , отвечающем пространству Минковского M , при этом порождается БСК с нетривиальными геометро-физическими характеристиками.

При этом, однако, приходится иметь дело с достаточно искусственным и по-прежнему недостаточным ограничением координат исходного пространства на M . В качестве альтернативы, в рамках алгебродинамического подхода использовалась полная структура CM [21] и вводилась концепция *наблюдаемого* пространства-времени — 6-мерного подпространства, соответствующего *комплексному изотропному конусу* точечного «наблюдателя» O в CM . При этом предполагалось, что каждый частицеподобный (каустический) элемент C , который мог бы регистрироваться наблюдателем O , лежит на его комплексном конусе и имеет то же значение первичного твисторного поля, что и в O , так что временная динамика C и O в существенной степени коррелирована (они «взаимодействуют»).

С другой стороны, комплексный изотропный конус имеет топологию вида $\mathbb{R}_+ \times S^3 \times S^2$ (см. раздел 2), поэтому естественно разлагается в основное 4-мерное пространство (в котором промежутки времени считаются пропорциональными полному перемещению в 4-мерном пространстве, по аналогии с работами [24, 25]) и на ортогональное пространство 2-мерной сферы, которое естественно интерпретировать в качестве внутреннего *спинового пространства*.

Более того, как мы увидим ниже, при таком подходе с необходимостью возникает ансамбль тождественных точечных частиц — «дубликонов» — образов одного и того же генерирующего заряда с коррелированной эволюцией во времени. В рамках рассматриваемой алгебродинамической схемы естественно вводятся и будут обсуждаться также понятия *кватернионного времени*, *комплексного времени*

²За исключением как раз рассматриваемой алгебры бикватернионов, для которой, однако, её группа автоморфизмов $S(3, \mathbb{C})$ действует на пространстве, отличном от M

и *кривой эволюции*, которые могут оказаться связанными с проблемой квантовой неопределённости.

1. Заряд Ньюмена в $\mathbb{CM}$ и множество его образов — «дубликонов»

Изотропные бессдвиговые конгруэнции (БСК) простейшего типа образуются пучком светоподобных лучей от точечной частицы, движущейся по произвольной мировой линии в действительном пространстве-времени $\mathbf{M}$ [26]. Каждой такой БСК может быть сопоставлено некоторое электромагнитное поле $F_{\mu\nu}$ путём интегрирования уравнений Максвелла с дополнительным требованием $F_{\mu\nu}k^\nu = 0$, так что тензор напряжённости поля должен быть ортогональным к изотропному 4-векторному полю $k_\mu = \xi_A \xi_{A'}$, касательному к лучам конгруэнции. При этом, как и следовало ожидать, это поле оказывается обычным полем Лиенара–Вихерта. В алгебродинамическом подходе, поле такого же типа сопоставляется каждой подобной БСК непосредственно, через вторые производные по координатам от спинорного поля конгруэнции G [3, 9, 10]; при этом, однако, такое поле с необходимостью соответствует *элементарному (единичному) значению электрического заряда генерирующей сингулярности*³. Заметим, что в статическом случае БСК, образуемая покоящимся зарядом, имеет радиальный вид и, в контексте алгебродинамики, порождает «квантованное» кулоновское поле и метрику Райсснера–Нордстрема.

Ньюмен с сотр. предложили [27, 28] в качестве обобщения вышеописанной конструкции рассматривать точечный заряд, «движущийся» в комплексном расширении $\mathbb{CM}$ пространства-времени $\mathbf{M}$ (на самом деле, изучался даже случай *искривлённого* пространства-времени). При этом на вещественном срезе $\mathbf{M}$ пространства $\mathbb{CM}$ образуется БСК более сложного вида с ненулевым *вращением*, которая в случае, например, покоящегося «виртуального» заряда порождает электромагнитное поле и метрику электровакуумного решения *Керра–Ньюмена с кольцеобразной сингулярностью* («керровским кольцом»).

Рассмотрим подробнее твисторный вариант конструкции Ньюмена [16, 29] и его обобщение в формализме алгебродинамики. Пусть точечная сингулярность (виртуальный «заряд») «движется» по комплексной мировой линии $Z_\mu = \hat{Z}_\mu(\sigma)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, где параметр $\sigma \in \mathbb{C}$ играет роль «комплексного времени» (ниже мы уточним смысл этого понятия, введя для него самого «закон эволюции» $\sigma = \sigma(s)$, $s \in \mathbb{R}$). Для «световых» и декартовых координат в $\mathbb{CM}$ будем использовать следующее, близкое к (3) представление:

$$Z = \{Z^A_B\} = \begin{pmatrix} u & w \\ p & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 - iz_3 & -iz_1 - z_2 \\ -iz_1 + z_2 & z_0 + iz_3 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где все z_μ (как и u, v, w, p) являются теперь комплекснозначными. Соотношение инцидентности (7) принимает теперь форму

$$\tau = Z\xi \quad (\tau^A = Z^A_B \xi^B, \quad \tau^1 = wG + u, \quad \tau^2 = vG + p), \quad (13)$$

в которой совокупность величин $\{G, \tau^1, \tau^2\}$, $G \equiv \xi^2/\xi^1$ образует теперь проективный твистор в $\mathbb{CM}$. Если при этом точка $Z \in \mathbb{CM}$ отделена от заряда $\hat{Z}$ нулевым комплексным интервалом,

$$S := \det\|Z - \hat{Z}(\sigma)\| = (u - \hat{u}(\sigma))(v - \hat{v}(\sigma)) - (w - \hat{w}(\sigma))(p - \hat{p}(\sigma)) = 0, \quad (14)$$

то из соотношения (14) определяется поле $\sigma = \sigma(Z) = \sigma(u, v, w, p)$ и отвечающее этому значению параметра σ положение заряда $\hat{Z}(Z) \equiv \hat{Z}(\sigma(Z))$, которое «влияет» на точку Z . Последнее означает, что *твисторное поле* в точках Z и $\hat{Z}$ имеет

³Это свойство связано с переопределённой структурой КРОУ (или соответствующих уравнений БСК), см. раздел 24

одно и то же значение. Действительно, при выполнении условия (14) линейная система уравнений

$$(Z - \hat{Z}(\sigma))\xi = 0 \quad (15)$$

единственным образом определяет отношение спинорных компонент $G = \xi^2/\xi^1$. С другой стороны, система (15) эквивалентно записывается в виде

$$\tau \equiv Z\xi = \hat{Z}\xi, \quad (16)$$

так что все твисторные компоненты на самом деле оказываются равными в точках Z и $\hat{Z}$.

Отметим, что комплексный параметр σ как функция точки наблюдения Z всегда удовлетворяет уравнению эйконала. В покомпонентной записи система (15) имеет вид

$$\begin{cases} (u - \hat{u}(\sigma)) + (w - \hat{w}(\sigma))G = 0, \\ (p - \hat{p}(\sigma)) + (v - \hat{v}(\sigma))G = 0, \end{cases} \quad (17)$$

откуда сразу видно, что поле G на самом деле *не определено* на самой мировой линии заряда (и зависит от направления в её окрестности). С другой стороны, расписывая (16) в форме

$$\begin{cases} \tau^1 = \hat{u}(\sigma) + \hat{w}(\sigma)G, \\ \tau^2 = \hat{p}(\sigma) + \hat{v}(\sigma)G, \end{cases} \quad (18)$$

и исключая отсюда параметр σ , приходим к выводу о функциональной зависимости трёх проективных твисторных компонент,

$$\Pi(G, \tau^1, \tau^2) = 0, \quad (19)$$

что, как и в действительном случае (см. (9)), означает, что изотропная конгруэнция «лучей», исходящих от заряда Ньюмена, на самом деле является *бессдвиговой* при произвольном виде его мировой линии (или, иначе, для любой соответствующей ей твисторной функции Π).

Вспомним теперь об имеющей фундаментальное значение *многозначности* решений КРОУ или, эквивалентно, — решений определяющих БСК уравнений (9), или (17) для рассматриваемого случая конгруэнций «ньюменовского» типа. А именно, в каждой фиксированной точке $Z = \{u, v, w, p\} \in \mathbb{CM}$ имеем, как правило, (конечное или счётное) множество решений $\{G, \sigma\}$ системы (17), так что *в общем случае существует большое число непрерывных ветвей* — «мод» — твисторных полевых функций $\mathbf{W}(Z)$, поля эйконала $\sigma(Z)$ и отдельных составляющих бессдвиговых конгруэнций, образующих *суперпозицию* в каждой точке Z . Отметим, что общая концепция многозначных полей была предложена и обсуждалась в работе [12].

Мы видим теперь, что *каждый* комплексный луч для *каждой* из мод БСК исходит из некоторого места расположения $\hat{Z}(\sigma)$ генерирующего заряда, которое является поэтому *фокальной точкой* конгруэнции. Таким образом, Мировая линия генерирующего заряда Ньюмена может рассматриваться в качестве *фокальной линии*.

При этом следует отличать фокальные точки с неопределённым значением в них основного спинорного поля G от точек каустик (оггибающей конгруэнции лучей), в которых все полевые моды вполне определены, однако две или более из них «сливаются», принимая одинаковые значения. Для БСК «ньюменовского» типа точки каустики, в соответствии с основным уравнением (14), удовлетворяют условию

$$S' = \frac{dS}{d\sigma} = \hat{u}'(v - \hat{v}(\sigma)) + \hat{v}'(u - \hat{u}(\sigma)) - \hat{w}'(p - \hat{p}(\sigma)) - \hat{p}'(w - \hat{w}(\sigma)) = 0. \quad (20)$$

Множество точек «гиперкаустик» — «каспов» (от англ. «cusp») — в которых сливаются по меньшей мере *три* моды — аналогичным образом определяются условием

$$S'' := \frac{d^2 S}{d\sigma^2} = \hat{u}''(v - \hat{v}(\sigma)) + \hat{v}''(u - \hat{u}(\sigma)) - \\ - \hat{w}''(p - \hat{p}(\sigma)) - \hat{p}''(w - \hat{w}(\sigma)) - 2(\hat{u}'\hat{v}' - \hat{w}'\hat{p}') = 0, \quad (21)$$

и, наконец, для наиболее сильных сингулярностей (*гиперкаспов*) имеем $S''' = \dots = 0$. Ещё более сильные сингулярности соответствуют вырожденному по коразмерности пространству и, вообще говоря, могут возникать в **СМ** лишь в качестве изолированных точек (т.е. существуют лишь «мгновение» наподобие инстантонных решений в квантовой теории).

Из условий (14) и (20) легко видеть, что в каждой фокальной точке сливаются по крайней мере две моды, так что для любой точки на мировой линии $Z = \hat{Z}(\lambda)$, полагая $\sigma = \lambda$, имеем тождественное выполнение условий $S = S' \equiv 0$. При этом в специальном случае *изотропной* Мировой линии, определяемой условием

$$\det \|\hat{Z}'\| \equiv \hat{u}'\hat{v}' - \hat{w}'\hat{p}' \equiv 0, \quad (22)$$

в каждой точке $Z = \hat{Z}(\lambda)$ на траектории при $\sigma = \lambda$ легко доказать выполнение более сильных условий для сингулярностей: $S = S' = S'' = S''' = 0$, так что в этом случае уже *четыре* моды сливаются в одну и имеют неопределённое значение в самой фокальной точке.

Отметим, что фундаментальное уравнение изотропного конуса (14) в случае действительного пространства–времени **М** хорошо известно, например, в классической электродинамике как *уравнение запаздывания*. При использовании действительных декартовых координат $\{x, y, z, t\}$ и естественной параметризации $\hat{t}(s) = s = \Re(\sigma)$ оно переписывается в виде

$$c^2(t - s)^2 - (x - x(s))^2 - (y - y(s))^2 - (z - z(s))^2 = 0, \quad (23)$$

причём заряд движется по вещественной Мировой линии $\{x(s), y(s), z(s)\}$. Если считать, что скорость заряда не превышает скорость света, $v < c$, то известно [30], что это уравнение всегда имеет два вещественных корня, из которых только для одного выполняется требование причинности $s \leq t$. Благодаря этому однозначно фиксируется некоторое *предшествующее* положение генерирующего заряда, которое определяет поле (в том числе электромагнитное поле Лиенара–Вихерта) в точке наблюдения $\{x, y, z, t\}$, распространяющееся по направлению к этой точке прямолинейно со скоростью света. Если, в частности, точка наблюдения лежит на самой мировой линии заряда, то уравнение (23), как и следовало ожидать, имеет только тривиальное решение $s = t$ (т.е. время запаздывания равно нулю, точка наблюдения совпадает с точкой «влияния»).

Положение радикально меняется при переходе к комплексному пространству–времени. Действительно, в этом случае уравнение комплексного изотропного конуса (14) имеет целый набор решений $\{\sigma_N\}$ (для каждой точки наблюдения поля Z). Эти решения, в свою очередь, определяют множество «точек влияния», или, иначе, *образов* одного и того же заряда, каждый из которых создаёт свою собственную моду твисторного поля в точке Z и воспринимается поэтому наблюдателем в Z как представитель ансамбля тождественных по свойствам, но различных (по своему расположению и конкретной динамике) точечных зарядов — *дубликонов*.

Отметим, что полное количество дубликонов, как правило, не зависит от точки наблюдения (как число корней одного и того же комплексного уравнения конуса). Однако реальный «физический» наблюдатель **О** должен сам по себе быть *материальным* и, поэтому, в простейшем идеализированном случае может быть отождествлён с самой фокальной точкой. При этом для точки наблюдения имеем

$Z = \hat{Z}(\lambda)$, с переменным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$, играющим роль *собственного комплексного времени* идеализированного наблюдателя и выступающим в качестве параметра эволюции (см. далее). Теперь *четыре* либо *два* дубликона (в зависимости от того, является ли Мировая линия изотропной (22) или нет) сливаются в одну точку — фокальную точку самого наблюдателя, тогда как оставшиеся $N - 4$ (или $N - 2$) дубликона воспринимаются наблюдателем в $\mathbf{O}$ в качестве ансамбля внешних тождественных точечных частиц, расположенных и «двигающихся» относительно $\mathbf{O}$ в «наблюдаемом» 6-мерном пространстве-времени, определяемом уравнением комплексного изотропного конуса (14). Геометрия этого конуса и её редукция к 4-мерному «физическому» пространству-времени рассматривается ниже.

2. Комплекснозначное время и 6-мерная физическая геометрия комплексного изотропного конуса

На фоне вещественного пространства-времени $\mathbf{M}$ фундаментальное твисторное поле с необходимостью возникает в алгебродинамике как следствие исходной структуры $\mathbb{W}$ -дифференцируемых функций-полей. При этом физическое время t не только является координатой, но приобретает также смысл фундаментального *параметра эволюции первичного твисторного поля*. Действительно, соотношение инцидентности (7) инвариантно относительно преобразований однопараметрической группы локальных трансляций координат $X = X^+ \in \mathbf{M}$ вдоль лучей соответствующей изотропной конгруэнции:

$$\begin{aligned} x_a &\rightarrow x_a + n_a t, & (a = 1, 2, 3); \\ x_0 &\rightarrow x_0 + t, & n_a = \xi^+ \sigma_a \xi / \xi^+ \xi, \quad \vec{n}^2 \equiv 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Наличие такой симметрии соответствует *распространению* твисторного поля от любой начальной точки с универсальной скоростью $v = c = 1$ вдоль 3-мерных направлений $\vec{n}$ (определяемых локальными значениями самого твисторного поля) или, эквивалентно, *сохранению* этих значений с 4-мерной точки зрения. Параметр t вдоль этих направлений-лучей как раз и может рассматриваться в качестве локального физического времени (см. соответствующую дискуссию в работах [12, 21]).

При обобщении схемы на случай комплексного фонового пространства те же самые рассуждения приводят к значительно более сложному и интересному понятию структуры времени. А именно, в случае $\mathbf{CM}$ соответствующая группа трансляций является уже $2\mathbb{C}$ -параметрической (координаты могут меняться вдоль т.н. *комплексной α -плоскости* [13]). Мы, однако, будем исходить из другого представления этой симметрии твисторного поля, для чего разложим пространство $\mathbf{CM}$ алгебры бикватернионов на два *действительных кватернионных* (4-мерных евклидовых) пространства, представимых в виде 2×2 *унитарных* матриц $\mathbf{U}$ and $\mathbf{V}$:

$$Z = U + iV, \quad U^+ = U^{-1}, \quad V^+ = V^{-1}. \quad (25)$$

Одно из этих подпространств, например $\mathbf{U}$, можно рассматривать в качестве основного координатного пространства, при этом второе $\mathbf{V}$ будет играть роль *пространства параметров эволюции*. А именно, из соотношений инцидентности (13) и представления (25) получим после некоторых эквивалентных преобразований следующий закон трансляций:

$$U = U^{(0)} + V * N, \quad (26)$$

в котором кватернион $U^{(0)}$ исходных координат алгебраически выражается через компоненты твисторного поля, кватернион $V = v_0 + iv_a \sigma_a$ определяет четыре

параметра эволюции $\{v_0, v_a\}$ («кватернионное время»), а *единичный* кватернион $N = 1 + in_a\sigma_a$ (с вектором $\vec{n}$, имеющим тот же вид, что и в вещественном случае (24)) определяет локальные направления *трансляций, сохраняющих твисторное поле*.

Интересно, что в структуре закона трансляции (26) отсутствует какой-либо след исходной комплексной структуры, поскольку все входящие в него матрицы унитарны, так что символ $(*)$ может рассматриваться как операция умножения в *действительной алгебре кватернионов* $\mathbb{H}$. В компонентах закон трансляции (26) для 4-х координат $\{x_\mu\}$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ основного *евклидова* пространства $U \in \mathbf{E}^4$, $U = x_0 + ix_a\sigma_a$ имеет следующий вид:

$$\Delta x_a = n_a \Delta v_0 + \varepsilon_{abc} n_b \Delta v_c, \quad \Delta x_0 = n_a \Delta v_a, \quad (27)$$

так что каждая из трансляций удовлетворяет одной комплексной (двум вещественным) связям $\Sigma(\Delta z_\mu)^2 = 0$, имеющим в компонентах вид

$$\begin{cases} (\Delta x_0)^2 + (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 = \\ \quad = (\Delta v_0)^2 + (\Delta v_1)^2 + (\Delta v_2)^2 + (\Delta v_3)^2 \equiv (\Delta t)^2, \\ (\Delta x_0)(\Delta v_0) + (\Delta x_1)(\Delta v_1) + (\Delta x_2)(\Delta v_2) + (\Delta x_3)(\Delta v_3) = 0, \end{cases} \quad (28)$$

и фиксирующим структуру *комплексного изотропного конуса*. В соответствии с (28), элемент этого многообразия фиксируется вектором Δx_μ 3-мерной сферы $\mathbf{S}^3$, переменным радиусом этой сферы (Δt) и вектором Δy_μ , равным по модулю и ортогональным (согласно первому и второму уравнению (28)) первому вектору Δx_μ , принадлежащим тем самым двумерной сфере $\mathbf{S}^2$. Таким образом, комплексный изотропный конус имеет нетривиальную топологию вида $\mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}^3 \times \mathbf{S}^2$.

Заметим, что в частном случае, когда три параметра Δv_a обращаются в нуль, а четвёртый приобретает смысл физического времени $\Delta v_0 = t$, три «пространственных» координаты $\{x_a\}$ преобразуются совершенно аналогично случаю пространства Минковского (24), т.е. прямолинейно и с универсальной «световой» скоростью, в то время как для дополнительной евклидовой координаты $\Delta x_0 = 0$, так что последняя является в некотором смысле «замороженной» и не несёт динамической нагрузки.

Между тем, в своей наиболее общей форме (27) закон трансляций имеет гораздо более богатую и нетривиальную структуру. Наличие 4-х независимых параметров эволюции делает полевую динамику существенно недоопределенной, поскольку отсутствует *упорядоченность* в непрерывном изменении этих параметров. Тем не менее, в качестве параметра, выполняющего роль локального физического времени, естественно рассматривать полное евклидово расстояние $(\Delta t)^2 = \Sigma(\Delta x_\mu)^2$, на которое распространяется твисторное поле в основном координатном пространстве. При этом в силу условий (28) это расстояние оказывается, с другой стороны, равным соответствующему расстоянию в пространстве параметров и вдвое меньше расстояния в полном комплексном пространстве, оснащённом естественной метрикой $\Sigma|z_\mu|^2$.

Итак, в общем случае комплексного пространства локальное физическое время может быть соотнесено с трансляциями, сохраняющими значение основного твисторного поля, а именно с полным евклидовым интервалом — расстоянием, на которое распространяется это поле при сохраняющих его значения трансляциях. В некоторых аспектах подобная трактовка физического времени близка к предложенной ранее в работах Монтануса [24] и Альмейды [25].

Эти авторы рассматривали модель пространства-времени как 4-мерного евклидова пространства $\mathbf{E}^4$ с четвёртой координатой, интерпретируемой в качестве локального *собственного времени* материальной частицы, и с локальным *интервалом координатного времени*, соответствующим расстоянию, покрываемому любой из частиц (в естественных единицах). При этом в духе старых идей Клейна, Румера и др. предполагается, что *все материальные образования движутся в*

исходном 4-мерном пространстве $\mathbf{E}^4$ с одинаковой и всегда постоянной по модулю скоростью, равной фундаментальной (световой) $\Sigma (\Delta x_\mu / \Delta t)^2 = 1 (= c^2)$. Отсюда немедленно следует, что обычная 3-мерная скорость всех без исключения элементов материи не может превышать скорость света.

Мы видим, таким образом, что в контексте последовательной бикватернионной алгебродинамики, при редукции первичной «наблюдаемой» геометрии комплексного изотропного конуса «элементарного» наблюдателя, возникает модель 4-мерного евклидова пространства–времени, близкая к постулировавшейся в подходах Монтануса и Альмейды. Однако структура комплексного конуса включает, помимо основного евклидова «физического» пространства $\mathbf{U}$, ещё две дополнительные координаты ортогонального пространства $\mathbf{V}$, которые могут рассматриваться в качестве координат 2-мерной сферы S^2 и интерпретироваться (по крайней мере в фокальных точках, соответствующих положению частиц) как координаты их «вектора спина».

Очевидно, однако, что сама по себе представленная выше концепция 4-мерного евклидова пространства–времени Монтануса–Альмейды не вполне соответствует требованиям специальной теории относительности. Действительно, хотя первое из соотношений (28) формально может быть представлено в форме интервала Минковского $ds^2 := dx_0^2 = dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2$, не видно, по каким причинам интервал собственного времени ds должен оставаться инвариантным при 4-мерных вращениях, а промежутки времени dt — преобразовываться в соответствии с группой Лоренца. В бикватернионной алгебродинамике положение значительно лучше, поскольку при преобразованиях группы автоморфизмов $SO(3, \mathbb{C})$ алгебры $\mathbb{B}$ собственное время, представленное нулевой координатой, действительно остаётся инвариантным. Однако даже при этом преобразования пространственных координат и координатного времени отличаются от канонических преобразований Лоренца. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Напомним теперь, что в алгебродинамическом подходе необходимо также решить вышеупомянутую проблему недоопределённого характера эволюции поля, связанную с наличием, помимо временного, ещё 3-х дополнительных свободных параметров v_a или, другими словами, — проблему упорядочения 4-мерного «кватернионного времени». Эта последняя трудность может быть разрешена достаточно естественным образом. А именно, заметим, что при произвольных, сохраняющих первичное поле трансляциях, определяемых 4-мя параметрами $\{v_\mu\}$, сами частицеподобные образования (фокальные точки, каустики и т. п.) не воспроизводят, вообще говоря, свою структуру и могут даже совсем исчезнуть из основного координатного пространства $\mathbf{U}$.

В частности, если фиксировать начальное распределение полей и частиц в «начальный момент времени» естественным выбором нулевых значений для всех параметров эволюции $v_\mu = 0$, то, в общем случае, координатное пространство $\mathbf{U}$ окажется пустым, т. е. свободным от каких-либо фокальных точек. Действительно, последние определяются голоморфно как точки комплексной Мировой линии $Z = \hat{Z}(\sigma)$, и все 4 условия, необходимые для того, чтобы координаты этих точек оказались унитарными, не могут быть удовлетворены ни при каком выборе значения комплексного параметра Мировой линии σ .

Таким образом, необходимо согласовать структуру главного кватернионного евклидова пространства $\mathbf{U}$ (и «вещественно-кватернионный» тип закона эволюции первичного поля (27)) с принципиально голоморфной структурой изотропной конгруэнции и её частицеподобных сингулярностей. Для решения этой проблемы вернёмся к структуре ранее введённого наблюдаемого пространства–времени, а именно к вещественно 6-мерному пространству комплексного изотропного конуса «элементарного» наблюдателя $\mathbf{O}$, отождествляемого с фокальной точкой конгруэнции и движущегося по собственной Мировой линии синхронно с процессом эволюции первичного поля. На таком относительном подпространстве, моделирующем физическое пространство–время, мы намерены теперь рассмотреть закон эволюции для координат $\mathbf{U}$, сохраняющей структуру как основного уравнения (14), так и условия существования сингулярности (20), т. е. сохраняющей не только значения первичного твисторного поля, но и структуру каустик. Легко видеть, что такой расширенный автоморфизм системы «поле-частицы» имеет

следующую 1С-параметрическую голоморфную форму:

$$Z \rightarrow Z + \tau(Z - \hat{Z}(\sigma)), \quad \tau \in \mathbb{C}. \quad (29)$$

Последнее соотношение означает, что каустики воспроизводятся вдоль комплексных прямых линий, начинающихся/оканчивающихся на фокальной точке, а комплексный параметр τ вдоль этих прямых должен на самом деле рассматриваться в качестве единственного параметра физической эволюции — «комплексного времени». В вещественном случае такая ситуация отвечала бы «сигналу», распространяющемуся прямолинейно и с фундаментальной скоростью. Комплексная структура, однако, не является упорядоченной, так что имеется бесконечное количество «путей», соединяющих некоторые две точки на подобной комплексной прямой. Более того, невозможно даже идентифицировать, в какой из двух заданных точек имело место «излучение» сигнала, а в какой — его приём.

Отметим здесь, что концепция *двумерного* (и, вообще говоря, многомерного) времени, как и связанная с его введением проблема упорядочения физических событий рассматривалась в ряде работ, в том числе в работе Сахарова [31]. В работах Ефремова [32, 33] использовалась структура группы автоморфизмов $SO(3, \mathbb{C})$ алгебры бикватернионов, и на её основе выдвигалась концепция *3-мерного времени*, редуцирующегося при определённых условиях к физическому одномерному за счёт наложения специальных условий ортогональности.

Недоопределённость процесса эволюции, связанная с комплексной природой времени, является «более слабой» по сравнению с изначально определяемой структурой алгебры бикватернионов и связанной с введённым выше «кватернионным временем». Однако эта остающаяся неопределённость представляется все же очень затруднительной для привычной физической интерпретации, по крайней мере если оставаться в парадигме классической теории поля.

Для согласования концепции комплексного времени с классическими представлениями можно предположить, что кроме основной голоморфной структуры КРОУ (и, соответственно, уравнений БСК), существует некоторая «кривая эволюции» $\tau = \tau(s)$, $s \in \mathbb{R}$ на комплексной плоскости времени, которая восстанавливает порядок последовательного чередования различных «состояний» (распределений) системы «поле-каустики» как на основном физическом пространстве $\mathbf{U}$, так и в ортогональном спинном пространстве $\mathbf{V}$.

Такая кривая, как и Мировая линия генерирующего заряда, может быть чрезвычайно сложной, иметь точки самопересечения и т. п. Поскольку при этом наблюдатель не имеет полной (или даже никакой) информации о виде этой кривой, будущее для него представляется неопределённым. Представляется, однако, что некоторая разнovidность *вероятностей* может быть введена при рассмотрении различных (аналитических) «продолжений» кривой эволюции. Можно предполагать (пока достаточно спекулятивно), что такая процедура позволит подойти к объяснению квантовых явлений и, в частности, установить связь между алгебро-динамикой и фейнмановской версией квантовой механики. Эти вопросы оставляем для дальнейшего изучения.

Нетрудно видеть, что имеется локальное соответствие между «эволюционным временем» τ , параметром Мировой линии σ и, например, нулевой координатой наблюдателя, которая может рассматриваться в качестве его «комплексного *собственного* времени». С другой стороны, с учётом кватернионной формы представления эволюции первичного поля (28) можно интерпретировать вещественную часть Δx_0 общего «комплексного интервала времени» Δz_0 в качестве эволюционного параметра в основном координатном пространстве $\mathbf{U}$ (в качестве «поступательного» собственного времени), в то время как его *минимум* часть Δv_0 — в качестве параметра эволюции в ортогональном спинном пространстве $\mathbf{V}$ («вращательного» собственного времени). Существование кривой эволюции приводит также к прямой зависимости между приращением параметра s этой кривой и соответствующим интервалом координатного времени Δt . Соответствующие формулы могут быть представлены в явном виде.

Рассмотрим теперь подробнее ранее упомянутый процесс излучения/приёма «сигнала-каустики» фокальными точками-зарядами. Пусть «взаимодействующие» заряды — дубликоны $\hat{Z}(\lambda)$, $\hat{Z}(\sigma)$, $\sigma \neq \lambda$ соединены между собой комплексной каустической прямой. Такая ситуация соответствует решениям совместной системы уравнений (14) и (20) с подстановкой $Z = \hat{Z}(\lambda)$ вместо произвольной «точки наблюдения» Z . Возникающая система имеет в общем случае *дискретный* набор решений в виде пар параметров $\{\lambda, \sigma\}$, каждая из которых отвечает двум фиксированным *моментам комплексного времени*, в которые имеет место излучение или приём каустического сигнала и, соответственно, некоторым положениям двух «взаимодействующих» зарядов.

Пусть теперь «момент наблюдения» λ «лежит в будущем» по отношению к «моменту влияния» σ , а именно отвечает большему значению монотонно возрастающего параметра s кривой эволюции. Тогда «элементарный наблюдатель» $\hat{Z}(\lambda)$ будет действительно *принимать* сигнал от второго заряда в положении $\hat{Z}(\sigma)$, который, в свою очередь, будет в момент σ *испускать* каустический сигнал по направлению к $\hat{Z}(\lambda)$. Очевидно, что в зависимости от вида кривой эволюции может реализовываться и обратная ситуация. Следует, однако, помнить, что на самом деле в данной конструкции речь идёт об *одном и том же* заряде, *взаимодействующем со своими тождественными образами-дубликонами в «собственном прошлом и будущем»*.

Итак, все *события* в комплексном пространстве-времени однозначно фиксированы и вполне определены заданием лишь одного вида Мировой линии генерирующего заряда (фокальной линией фундаментальной конгруэнции лучей). Такими событиями являются: полное число зарядов-дубликонов («наблюдаемых» одним из них); относительные координаты дубликонов, *непрерывно* скоррелированные с положением наблюдателя одинаковыми значениями первичного твисторного поля; наконец, отдельные точки на Мировой линии, в которых такая корреляция между отдельной парой резко *усилена* (пара зарядов реализует процесс излучения/приёма сигнала-каустики). С другой стороны, общая *последовательность* реализации данных событий остаётся неопределённой, и для её фиксации следует обладать дополнительной информацией о форме кривой эволюции (чрезвычайно сложной и, возможно, исключительной с математической точки зрения).

Микрообъект (фокальная точка) может регистрироваться идеализированным «элементарным наблюдателем» только в определённые дискретные моменты времени, которые отвечают *мгновенному* возникновению/исчезновению каустической комплексной прямой линии, связывающей объект с наблюдателем. Данный вывод представляется справедливым и для «классического» макрообъекта, который «почти непрерывно» связан с аналогичным «классическим» наблюдателем через «почти плотную» *сеть* каустических линий. Более подробная конструкция системы коррелированных пар «объект-наблюдатель», обменивающихся каустическим «сигналами» (для двух предельных случаев — квантового микроскопического и классического макроскопического) будет представлена в последующих работах.

Литература

1. Кассандров В. В. // Вестник РУДН, Физика. — № 8(1). — 2000. — С. 34–45.
2. Кассандров В. В. Алгебраическая структура пространства-времени и алгебро-динамика. — М.: Университет дружбы народов, 1992.
3. Kassandrov V. V. // Grav. & Cosm. (Moscow). — Vol. 1, No 3. — 1995. — Pp. 216–222.
4. Kassandrov V. V. // Acta Applicandae Math. — Vol. 50. — 1998. — Pp. 197–206.
5. Kassandrov V. V. Has the Last Word been Said on Classical Electrodynamics? / Ed. by A. Chubykalo, V. Onoichin, A. Espinoza, R. Smirnov-Rueda. — Rinton Press, 2004. — Pp. 42–67.

6. *Kassandrov V. V., Trishin V. N.* // Gen. Rel. Grav. — Vol. 36. — 2004. — Pp. 1603–1612.
7. *Kassandrov V. V.* Quasigroups and NonAssociative Algebras in Physics / Ed. by J. K. Löhmus, P. Kuusk. — No 66, 66. — Tallinn, Inst. Phys. Estonia Proc. — Pp. 202–212.
8. *Kassandrov V. V., Riscallah J. A.* — E-print www.arXiv.org/gr-qc/0012109.
9. *Kassandrov V. V., Riscallah J. A.* Geometrical and Topological Ideas in Modern Physics / Ed. by V. A. Petrov. — Protvino: Inst. High Energy Phys., 2002. — Pp. 199–212.
10. *Кассандров В. В., Ризкалла Д. А.* Современные проблемы в теории поля / под ред. А. В. Аминова. — Казань: Изд-во КГУ, 1998. — С. 176–186.
11. *Kassandrov V. V.* // Grav. & Cosm. (Moscow). — Vol. 8, No 2. — 2002. — Pp. 57–62.
12. *Кассандров В. В.* Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. — Т. 1, № 1. — 2004. — С. 89–105.
13. *Penrose R., Rindler W.* Spinors and Space-Time. Vol. II. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
14. *Debney G., Kerr R. P., Schild A.* // Journ. Math. Phys. — Vol. 10. — 1969. — Pp. 1842–1856.
15. *Kassandrov V. V., Trishin V. N.* // Grav. & Cosm. (Moscow). — Vol. 5, No 4. — 1999. — Pp. 272–276.
16. *Burinskii A. Y.* // Class. Quant. Grav. — Vol. 20. — 2004. — Pp. 905–912.
17. *Kerr R. P., Wilson W. B.* // Gen. Rel. Grav. — Vol. 10. — 1979. — Pp. 273–281.
18. *Carter B.* // Phys. Rev. — Vol. 174. — 1968. — Pp. 1559–1572.
19. *Newman E. T.* // Phys. Rev. D. — Vol. 65. — 2002. — Pp. 104005–104018.
20. *Кассандров В. В.* Математика и культура. Математика и практика / под ред. М. Ю. Симакова. — М.: Самообразование, 2001. — С. 61–76.
21. *Кассандров В. В.* Труды Семинара по изучению феномена времени / под ред. А. П. Левич. — М., 2007.
22. *Newman E. T.* // Journ. Math. Phys. — Vol. 14. — 1973. — Pp. 102–105.
23. *Kozameh C., Newman E. T., Silva-Ortigoza G.* // Class. Quant. Grav. — Vol. 22. — 2005. — Pp. 4679–4698.
24. *Montanus J. M. C.* // Hadron. Journ. — Vol. 22. — 1999. — Pp. 625–673.
25. *Almeida J. B.* — E-print www.arXiv.org/gr-qc/0104029.
26. *Kinnersley W.* // Phys. Rev. — Vol. 186. — 1969. — Pp. 1335–1336.
27. *Lind R. W., Newman E. T.* // Journ. Math. Phys. — Vol. 15. — 1974. — Pp. 1103–1114.
28. *Newman E. T.* // Class. Quant. Grav. — Vol. 21. — 2004. — Pp. 3197–3222.
29. *Burinskii A. Y.* // Phys. Rev. D. — Vol. 67. — 2003. — Pp. 12024–12040.
30. *Jackson J. B.* Classical Electrodynamics. — N.Y., 1975.
31. *Sakharov A. D.* // Journ. Theor. Exper. Phys. (USSR). — Vol. 87. — 1984. — Pp. 375–383.
32. *Yefremov A. P.* // Grav. & Cosm. (Moscow). — Vol. 2, No 1. — 1996. — Pp. 77–83.
33. *Yefremov A. P.* // Grav. & Cosm. (Moscow). — Vol. 2, No 4. — 1996. — Pp. 335–341.

UDC 621.378.826.535 8

Algebraic Twistor Dynamics of Identical Singularities in a Complex Extension of the Space–Time

V. V. Kassandrov

*Institute of Gravitation and Cosmology
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

We present an algebraic field theory based completely on a nonlinear generalization of the Cauchy–Riemann conditions of complex analyticity to the noncommutative algebra of biquaternions. Any biquaternionic field possesses a natural twistor structure and, in the Minkowski space, gives rise to a shear-free null congruence of rays and to an associated set of gauge fields. In the article we develop this algebrodynamical scheme on the complex extension of the Minkowski space — the full vector space of biquaternion algebra. Initial space dynamically reduces to the 6D “observable” space-time of the complex null cone which, in the turn, decomposes into a 4D physical space-time and 2D internal “spin space”. In this procedure there arises an ensemble of identical point charges (“duplicons”) — focal points of the congruence. Temporal dynamics of individual duplicons is strongly correlated via fundamental twistor field of the congruence. We briefly discuss some new notions inevitably arising in the considered algebrodynamical scheme, namely those of “complex time” and of “evolutionary curve”, as well as their hypothetical connection with the quantum uncertainty phenomena.

УДК 538.73:669.245

Исследование влияния баротермической обработки на структуру поликристаллического жаропрочного никелевого сплава

Н. В. Гусева *, Н. Н. Лобанов *, А. Г. Падалко †

** Лаборатория рентгенографии и кристаллохимии
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклуто-Маклая, 6*

*† Институт физико-химических проблем керамических материалов РАН
Россия, 119361, Москва, ул. Озерная, 48*

Методом рентгендифракционного анализа изучено влияние статического баротермического воздействия на кристаллическую структуру никелевого сплава. Установлено, что баротермическая обработка при определённых параметрах (давлении, температуре и времени изобарно-изотермической экспозиции) приводит к структурным изменениям основных фазовых составляющих сплава.

Жаропрочные сплавы на никелевой основе занимают ведущее место по масштабам производства и объёму применения среди высокотемпературных материалов конструкционного назначения. Это стало возможным благодаря интенсивному развитию научно-исследовательских, конструкторских и технологических работ в областях металлургии и металловедения жаропрочных сплавов. В современном материаловедении жаропрочные никелевые сплавы являются наиболее сложными по легированию и структуре и содержат до 12–15 основных легирующих элементов [1].

Сложнолегированные жаропрочные никелевые суперсплавы представляют собой твёрдые растворы на основе никеля с ГЦК структурой, упрочнённые вторичными выделениями γ' -фазы [2], являющейся твёрдым раствором на основе интерметаллида Ni_3Al с упорядоченной ГЦК решёткой. Основными структурными составляющими никелевых сплавов являются γ -твёрдый раствор на основе Ni с содержанием от 70 до 25 об. %, γ' -фаза на основе Ni_3Al с содержанием от 25 до 70 об. %, эвтектика $\gamma + \gamma'$ (до 2 об. %), карбиды M_xB_y (до 2 об. %), а также поры различного происхождения. γ' -фаза оказывает основное влияние на повышение термической устойчивости материала и сопротивление деформации ползучести, а её содержание определяется химическим составом сплава [3]. Разность параметров решётки γ -твёрдого раствора и γ' -фазы приводит к возникновению локальных механических напряжений, повышающих механические свойства никелевых сплавов. Подбор оптимального соотношения фазовых составляющих в этих материалах является непростой задачей, которая решается с помощью различных методов физико-химического анализа, в том числе рентгендифракционными исследованиями.

Статическое баротермическое воздействие на жаропрочные никелевые сплавы позволяет приблизить реальную микроструктуру сплава к оптимальной, а также улучшить некоторые механические характеристики материалов. Установлены изменения и кристаллической структуры монокристаллического сплава [4], поэтому представляет значительный интерес исследование влияния баротермической обработки (БТО) на структуру менее совершенного поликристаллического жаропрочного никелевого сплава, относящегося к гораздо более обширной группе никелевых материалов.

1. Методика эксперимента

В качестве исходного материала использовался поликристаллический никелевый жаропрочный сплав следующего состава (масс. %): Cr — 14,8; Mo — 0,5; W — 6,7; Al — 4; Co — 8,8; Ti — 3,7; Ni — остальное. Баротермическую обработку проводили по методике, изложенной в [4–7], при следующих параметрах: $P_1 = P_2 = P_3 = 180$ МПа; $t_1 = 1212^\circ\text{C}$, $t_2 = 1260^\circ\text{C}$, $t_3 = 1310^\circ\text{C}$. Шлифы для рентгендифракционных исследований исходного и подвергшихся баротермической обработке образцов вырезали электроэрозией, затем проводили механическую шлифовку и полировку алмазными пастами. Завершающие операции заключались в электролитической полировке и травлении шлифов в трёхкислотном реактиве. Измерение рентгендифракционных спектров исходного образца и образцов после баротермической обработки при температурах 1212°C (образец 1), 1260°C (образец 2), 1310°C (образец 3) проводили с помощью дифрактометра ДРОН-3 (монохроматизированное излучение $\text{CuK}_{\alpha 1}$ -излучение, $\lambda = 1.5405 \text{ \AA}$) в интервале углов 2θ от 20° до 145° .

Непрерывную съёмку дифрактограмм всех образцов проводили со скоростью $2^\circ/\text{мин}$ в режиме θ – 2θ сканирования при быстром вращении образца вокруг своей оси, и без вращения. Для изучения распределения зёрен в сплавах сконструировали специальную приставку для дифрактометра, позволяющую снимать профили дифракционных отражений относительно угла ψ , вращая образец в своей плоскости при фиксированных углах дифракции $2\theta_{hkl}$. Для получения профилей ряда дифракционных отражений (hkl) относительно угла ψ счётчик выставляли в отражающее положение для различных углов $2\theta_{hkl}$ и записывали развёртку дифракционного профиля при медленном вращении образца на 360° относительно своей оси со скоростью $40^\circ/\text{мин}$.

На заключительном этапе проводили цифровое сканирование рентгендифракционных спектров всех образцов в интервале углов 2θ от 20° до 145° с шагом сканирования $\Delta 2\theta = 0,05^\circ$ и временем экспозиции в точке 5 с. при быстром вращении образца относительно азимутального угла ψ . Это позволило выявить общую дифракционную картину с учётом различной ориентации зёрен. Угловые зависимости интенсивности дифрагированного рентгеновского излучения $I = f(2\theta)$ от образцов, преобразованные в цифровой сигнал, накапливали в персональном компьютере. Обработку рентгендифракционных спектров и дальнейшие расчёты проводили с помощью программного обеспечения [8–10].

2. Обсуждение результатов

На рис. 1 представлены рентгендифракционные спектры для всех образцов — псевдо трёхмерное изображение. Ближний спектр соответствует исходному образцу, последующие спектры — образцам 1, 2 и 3, соответственно. Результаты обработки рентгендифракционных спектров образцов (межплоскостное расстояние d_z , экспериментальный брэгговский угол $2\theta_z$, относительная интенсивность $I_{\text{отн}}$), индифференцирования и полученных средних параметров элементарных ячеек сплавов в представлены в таблице 1. Средние отклонения между экспериментальными и вычисленными значениями 2θ составляют $0,01$ – $0,02^\circ$, максимальное отклонение — $0,05$ – $0,07^\circ$ и находятся в пределах ошибки измерений. Как видно, наблюдается последовательное увеличение средних параметров элементарных ячеек сплавов в результате их баротермической обработки.

Для более детального исследования преимущественной ориентации зёрен в образцах были изучены формы профилей ряда дифракционных отражений относительно угла ψ . Профиль пика дифракционного отражения hkl при статистической разупорядоченности кристаллитов (блоков) должен иметь практически постоянную интенсивность дифракционного отражения относительно угла ψ . При неоднородном распределении кристаллитов (блоков), наличии их большего (или меньшего) количества в каком-либо направлении поверхности образца, происходит изменение интенсивности дифракционного отражения. На рис. 2 представлены развёртки профилей дифракционных отражений 200 относительно ψ , полученные для

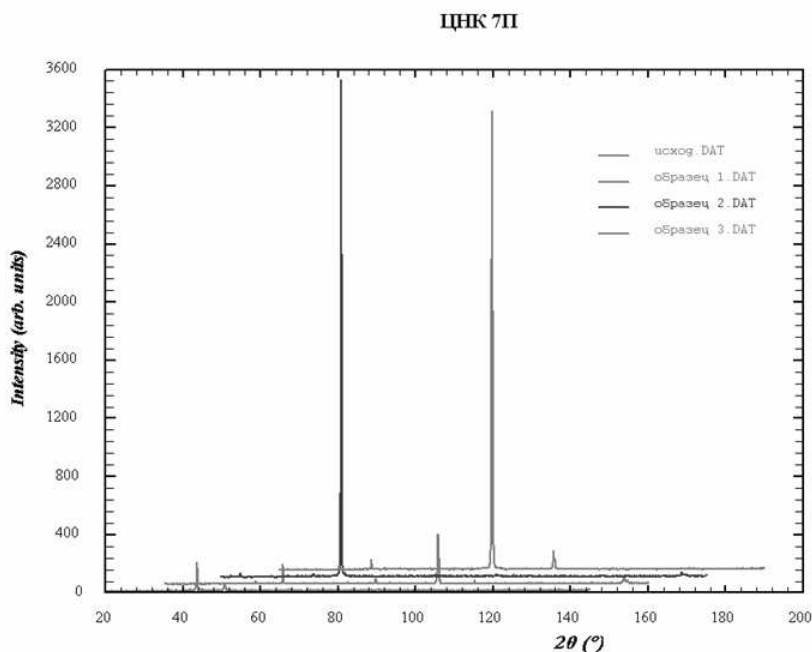


Рис. 1. Рентгендифракционные спектры для исходного образца и образцов, подвергнутых БТО при $t^\circ = 1212^\circ\text{C}$ (образец 1), $t^\circ = 1260^\circ\text{C}$ (образец 2), $t^\circ = 1310^\circ\text{C}$ (образец 3), полученные при быстром вращении образца относительно азимутального угла.

исходного образца и образцов 1 и 2 (после баротермической обработки при температурах 1212°C и 1260°C). Как видно из этого рисунка, вид профилей отражений $2\ 0\ 0$ в исходном образце и образце 1 (рис. 2а и 2б) имеет сложный характер: имеется несколько направлений ψ с более высокой отражающей способностью. С увеличением температуры баротермической обработки наблюдается исчезновение ряда пиков с сохранением лишь одной преимущественной ориентации (рис. 2в). Интервал между соседними пиками равен 180° . Значения интенсивностей пиков исходного образца гораздо выше значений интенсивностей пиков, принадлежащих образцам, подвергшимся БТО. На дифракционном профиле более дальнего отражения $3\ 1\ 1$ образца 1 характер распределения и период между пиками был аналогичен профилю отражения $2\ 0\ 0$ этого образца (рис. 2б): происходит лишь некоторое перераспределение между интенсивностями, связанное с долей кристаллитов, находящихся в отражающем направлении. Дифракционный профиль отражения $2\ 2\ 0$ образца 3 ($t_{\text{БТО}} = 1310^\circ\text{C}$) имел аналогичную форму, характерную для дифракционного профиля $2\ 0\ 0$ образца 2 (рис. 2в), — два пика с периодом 180° , т. е. наблюдалось также только одно направление преимущественной ориентации.

Таким образом, анализируя форму профилей дифракционных отражений образцов относительно угла ψ , а также сами рентгендифракционные спектры образцов, можно сказать о том, что исходный образец имеет, по-видимому, более крупные разориентированные блоки, приводящие к нескольким анизотропным направлениям в поверхности образца. По мере увеличения температуры БТО происходит, вероятно, уменьшение размеров γ' -микрочастиц в γ -матрице, которые все больше становятся статически разориентированы, и сохраняется лишь одно преимущественное направление, возможно, связанное с ориентацией оси дендрита. Кроме того, в результате баротермической обработки образцов наблюдается последовательное увеличение средних параметров элементарных ячеек данного сплава. Однако следует заметить, что интерпретация полученных результатов осложняется и из-за возможных особенностей индивидуальной структуры образцов данного поликристаллического сплава.

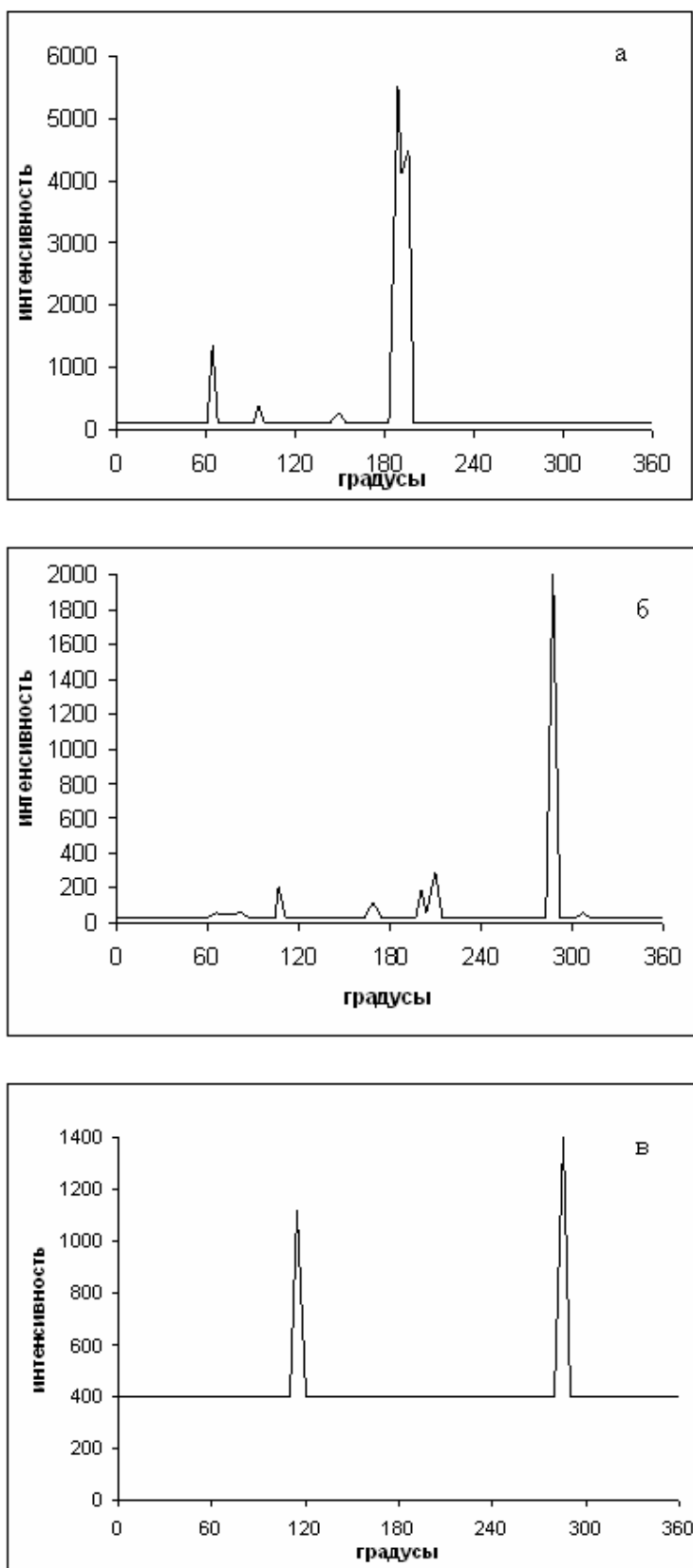


Рис. 2. Профили дифракционного отражения 2 0 0 относительно угла ψ , полученные для исходного образца (а), образца 1 (б) и образца 2 (в).

Таблица 1
Результаты обработки и индирования рентгендифракционных спектров, полученных с бы-
стрым вращением образцов в своей плоскости.

№	hkl	Исходный образец					Образец № 1				
		d _э , Å	I, %	2θ _э , °	2θ _в , °	Δ 2θ, °	d _э , Å	I,%	2θ _э , °	2θ _в , °	Δ 2θ, °
1	100	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	110	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	111	2,072	100	43,65	43,65	0,00	2,074	4	43,61	43,68	-0,07
4	200	1,795	32	50,83	50,85	-0,02	1,795	34	50,82	50,88	-0,06
5	210	1,604	12	57,39	57,37	0,02	—	—	—	—	—
6	220	—	—	—	—	—	1,269	8	74,77	74,81	-0,04
7	311	—	—	—	—	—	1,081	100	90,86	90,85	0,01
8	331	—	—	—	—	—	0,823	25	138,86	138,83	0,03
в, Å		3,588±0,002					3,586±0,001				

№	hkl	Образец № 2					Образец № 3				
		d _э , Å	I, %	2θ _э , °	2θ _в , °	Δ 2θ, °	d _э , Å	I,%	2θ _э , °	2θ _в , °	Δ 2θ, °
1	100	3,581	1	24,84	24,79	0,05	—	—	—	—	—
2	110	—	—	—	—	—	2,538	1	35,33	35,31	0,01
3	111	2,076	1	43,60	43,65	-0,05	2,074	2	43,61	43,62	-0,01
4	200	1,793	100	50,87	50,84	0,03	—	—	—	—	—
5	210	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	220	—	—	—	—	—	1,269	100	74,72	74,70	0,02
7	311	1,083	1	90,72	90,77	-0,05	1,083	4	90,67	90,69	-0,02
8	331	0,823	2	138,66	138,64	0,02	—	—	—	—	—
в, Å		3,588±0,002					3,586±0,001				

Литература

1. Монокристаллы никелевых жаропрочных сплавов / Р. Е. Шалин, И. Л. Светлов, Е. Б. Качанов и др. — Машиностроение, 1997. — 336 с.
2. Термостабильность структуры на основе Ni_3Al и его применение в рабочих лопатках малоразмерных ГТД / К. Б. Поварова, Н. К. Казанская, В. П. Бунтушкин и др // Металлы. — № 3. — 2003.
3. Bhadeshia H. K. D. H. Nickel Based Superalloys // ISIJ International. — Vol. 38. — 1998. — Pp. 495–502.
4. Рентгендифракционное исследование влияния баротермической обработки на кристаллическую структуру никелевого сплава / Н. Н. Лобанов, О. С. Лабынцева, А. Г. Падалко и др // ЖНХ. — Т. 52, № 1. — 2007. — С. 116–119.
5. Морфологические изменения карбидных фаз в никелевом сплаве при баротермическом воздействии / А. Г. Падалко, А. Н. Веселов, С. П. Авдюхин и др // Металлы. — № 4. — 2004. — С. 117–122.
6. Поведение эвтектики $\gamma + \gamma'$ в сплаве на основе никеля при баротермическом воздействии / А. Г. Падалко, С. П. Авдюхин, А. Н. Веселов и др // Физика и химия обраб. материалов. — № 5. — 2004. — С. 88–93.
7. Выделение γ' -фазы в никелевом сплаве в условиях статического баротермического воздействия / А. Г. Падалко, А. Н. Веселов, С. П. Авдюхин и др // Металлы. — № 1. — 2006. — С. 80–88.
8. Lobanov N. N. Software packages for X-ray powder diffraction analysis: data evaluation, determination microstructural data & residual stress analysis // 6th European powder diffraction conference. — Budapest: 1998. — P. 360.
9. Иванов Ю. А., Лобанов Н. Н. Программное обеспечение рентгендифракционных поликристаллических исследований: 1. Обработка данных // Тез. докл. XXXIII научн. конфер. факультета физ.-мат. и естеств. наук. Химическая секция. — М.: РУДН, 1997. — С. 34.
10. Лобанов Н. Н., Шарова П. Ю. Определение и уточнение параметров элементарной ячейки в операционной системе Windows // XLI Всероссийская научная конференция по проблемам математики, информатики, физики и химии. 18–22 апреля 2005 г. Тезисы докладов. — М.: РУДН, 2005. — С. 19–21.

UDC 538.73:669.245

Research of Influence of Barothermal Treatment on the Structure of the Polycrystalline Heat Resisting Nickel Alloy

N. V. Guseva *, N. N. Lobanov *, A. G. Padalko †

* Laboratory of X-ray Analysis and Crystal Chemistry
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

† Institute of Physicalchemical Problems in Ceramics
Russian Academy of Sciences
48, Ozernaya str., Moscow, 119361, Russia

The effect of a barothermal batch treatment on the crystal structure of a nickel alloy is studied by X-ray diffraction. It is established, that the barothermal treatment at certain parameters (pressure, temperature and duration of isobaric-isothermal exposure) leads to structural changes of the basic phase components of the alloy.

Dielectric Properties of Natural Syrian and Armenian Zeolites

A. A. Sahakyan ^{*}, S. Sh. Soulayman [†], S. Nikogosyan ^{*}, S. A. Yunusova [‡]

^{*} *Yerevan Physics Institute
Alikhanian Bros. str., Yerevan, 375036, Armenia*

[†] *Department of Applied Physics
Higher Institute of Applied Sciences and Technology
Damascus, P. O. Box 31983, Syria*

[‡] *Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia*

Using an experimental arrangement, designed and manufactured locally, the electric permittivity $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ and alternative current (a.c.) conductivity σ_{ac} of natural Syrian and Armenian zeolites were investigated in order to understand the mechanism of the electrical properties in these materials. The frequency dependence of angle tangents ($\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$) of dielectric losses was also studied for both zeolites. The mentioned measuring arrangement has a configuration of an electrical bridge. The data has showed that the dielectric constant ε' and dielectric loss ε'' for all studied samples decrease when increasing the frequency of the applied electrical field from 200 Hz to 1 MHz. Moreover, it was found out for all studied samples that the *ac* conductivity σ_{ac} increases with the frequency of the applied electrical field. The ratio of such increasing depends itself on the applied frequency.

KEY WORDS AND PHRASES: Natural zeolite, Dielectric properties, Electrical conductivity.

Introduction

Zeolites are natural minerals that are mined in many parts of the world or synthesized by man. They are characterized by a microporous, crystalline structure consisting of a three-dimensional framework of SiO_4 tetrahedra where all four-corner oxygen ions of each tetrahedra are shared with adjacent tetrahedra. Some of the quadrivalent silicon is replaced by trivalent aluminum, giving rise to a deficiency in positive charge. This charge deficiency is balanced by the presence of mono and divalent cations located in the pores. These cations are highly mobile and can be exchanged for other cationic species. The Si/Al ratio of natural zeolite is in the range of 1–6. Loosely bound water is also present in the pores of natural zeolites and range from 10–20 wt. % of the dehydrated phase. Zeolites have a void spaces (cavities or channels) that can host cations, water or other molecules. Cavities in zeolites enable them to screen molecules and sieve cations. Cation exchange capacity is primarily a function of the degree of Al substitution for Si in the structure: the greater the substitution, the higher is the deficiency of the positive charge and the greater is the number of alkali cations needed to achieve electrical neutrality. However, cation exchange capacity also depends on other factors, such the exposure of the zeolite to cations that are easily trapped in the structure but which can not be removed easily. The size of the cations also has an effect on cation exchange capacity. The large cavities and entry channel of zeolites are generally filled with water molecules that form hydration spheres around the exchangeable cations.

The physical and chemical properties of natural zeolites in the fact that they can capture and immobilize ammonium ions, water, and certain cations has resulted in numerous investigations into developing agricultural and/or horticultural applications for them. The following uses of zeolites have been extensively investigated: holding

and slow releasing valuable nutrients to plants, mainly ammonium; uses in conjunction with nitrogen (NH_4^+), potassium (K^+), magnesium (Mg_2^+), calcium (Ca_2^+) and trace elements; promoting better plant growth by improving the value of fertilizer; prevention of plant burning from over-use of fertilizers by trapping and slowly releasing valuable nutrients; improving the cation exchange capacity of soil resulting in less fertilizer requirements; and improving the water retention of soil. However, U.S. Pat. No. 5,900,387 reports experiments on clinoptilolite which has been reported as having a high affinity and selectivity for (NH_4^+). Moreover, nowadays an extensive attention is paid on Jordanite. The zeolitic component of Jordanite is primarily phillipsite, but a minor amount of chabazite may also be present. In this embodiment, the phillipsite may be present in amounts ranging from about 10 to about 90 wt. % and the chabazite in amounts ranging from about 1 to about 20 wt. %.

The investigation of dielectric properties of zeolite during the process of hydration and dehydration gives an important information about its sorption capacity and catalytic activity [1–7]. The measurement of electric permittivity $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ and a.c. conductivity σ_{ac} of zeolites, having ionic or mixed ionic/electronic conductivity, is used generally to investigate the zeolite sorption properties of water vapor, since the absorbed water molecules in zeolites play a basic role in electrical behaviors [8] of these materials at room temperature. The aim of this work is to shed a light on this question regarding Syrian and Armenian natural zeolites which contain clinoptilolite (the Armenian one) and the main components of Jordanite (the Syrian ones).

1. Experimental Arrangement

In this work, the investigated samples have been prepared from grounded Syrian (S) and Armenian (A) natural zeolites. The Armenian zeolite, denoted by A12, contains up to 85 % of clinoptilolite with a ratio of Si/Al equal to 9 and amorphous SiO_2 less than 3 %. The Syrian zeolitic tuff contains mainly about 50 % of three types of zeolite (analcime, phillipsite and chabazite). The chemical composition of the studied samples is given in the Table 1. The samples were ground and pressed at 1470 N/cm^2 into pellets of 2–3 mm of thickness. From these pellets, samples of 30 mm^2 in surface were taken mechanically. Both plate surfaces of each sample were coated using silver contacts and thermally treated at temperature 120°C for two hours followed by thermal treatment at 220°C for two extra hours. This treatment was performed in order to obtain reliable good silver contacts.

The chemical composition of the studied samples

Table 1

L.I.	P ₂ O ₅	Cr ₂ O ₃	Mn ₂ O ₃	TiO ₂	MgO	Fe ₂ O ₃	CaO	K ₂ O	Na ₂ O	Al ₂ O ₃	SiO ₂	Sample
14.19	—	—	—	0.20	1.28	2.23	4.9	2.22	0.79	11.69	67.11	A12
12.3	0.44	0.03	0.2	1.60	12.21	11.68	8.77	1.01	1.22	10.48	39.51	2S14
14.10	0.46	0.03	0.17	1.48	11.09	10.41	11.01	0.89	0.93	9.98	38.69	4S14
15.16	0.52	0.03	0.17	1.60	9.74	10.65	11.92	1.08	0.99	10.15	37.64	6S14
16.52	0.52	0.03	0.15	1.37	8.55	8.97	14.95	0.84	0.75	9.80	37.14	8S14
10.98	0.41	0.04	0.22	1.64	14.17	13.20	6.73	1.02	1.13	10.42	39.95	10S14
10.46	0.49	0.03	0.20	1.84	9.99	12.02	8.24	1.13	1.50	11.65	40.76	12S14
10.71	0.47	0.03	0.18	1.75	10.65	11.75	8.95	1.13	1.66	10.97	40.17	M5
9.28	0.52	0.03	0.20	2.10	9.01	12.60	8.26	1.24	1.45	13.04	41.36	16S14
9.31	0.49	0.03	0.19	1.92	10.45	11.99	8.18	1.19	1.43	12.00	41.08	18S14
9.24	0.47	0.03	0.19	1.87	10.62	12.30	7.96	1.18	1.65	11.63	41.23	20s14

The measurement of electric permittivity $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ of the studied samples was carried out by using a special and nonstandard arrangement designed and manufactured locally. The mentioned arrangement allows to measure electric permittivity corresponding to electrical field with frequencies varying from 200 Hz to 1 MHz and with sinusoid applied voltage amplitude of 25 mV at the contacts of the sample. This measuring arrangement has a configuration of an electrical bridge. In addition to the alternative electric field a direct current (*dc*) electric field could be applied at the studied sample. The *dc* voltage could vary from 0 to ± 20 V. The scheme of the arrangement is shown in Figure 1. The unbalance signal of the bridge is applied, after magnification, to the inputs of lock-in detectors while the conductivity and capacitance of the samples are measured at the output of these detectors. The capacitance was measured using the reading of calibrating condenser (C_c) at the zero-th indication of lock-in detector regarding C . In this arrangement three measuring transformers were used over the frequency interval ranging from 200 Hz to 1 MHz.

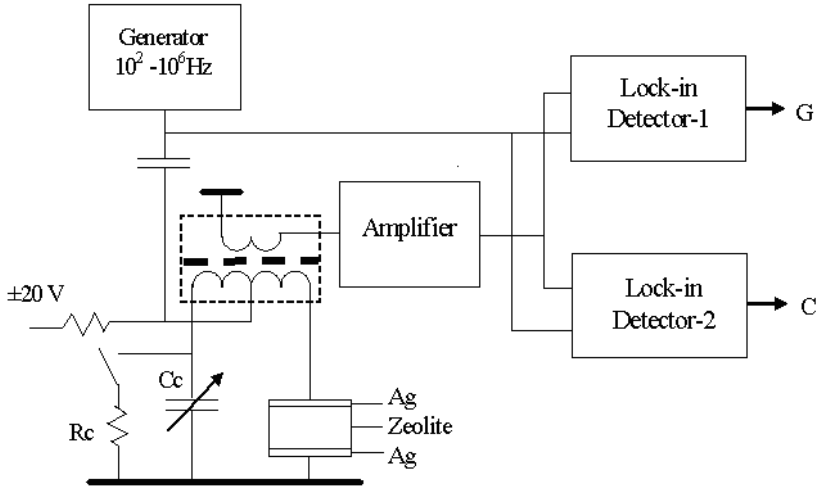


Figure 1. Scheme of the measuring arrangement: R_c stands for calibrating resistor, C_c stands for calibrating condenser

The accuracy of the measurement of the dielectric parameters is about 7%. Here it should be noted that the measurement of dielectric parameters of the studied samples was carried out in the air at room temperature. The relative humidity of the ambience during the experiments was varied from 50% to 60%.

2. Experimental Results and Discussion

The electric permittivity $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ and a.c. conductivity σ_{ac} of zeolite give an important information to understand the mechanism involved in the electrical conductivity in these materials. Figures 2 and 3 show the frequency dependence of dielectric constant ε' and dielectric loss ε'' of the studied samples respectively. It is seen from these figures that the behavior of these two parameters is qualitatively similar regarding their dependence on the frequency of the measured electrical field. The obtained data show that the dielectric constant ε' and the dielectric loss ε'' of all studied samples decrease when we increase the frequency of the applied electrical field from 200 Hz to 1 MHz. This property is characteristic for both natural and synthetic zeolites US-HY type [7]. Another characteristic property is that the dielectric parameters have relatively high values and may change in a large interval of frequency.

Moreover, the dielectric response of zeolites is highly sensitive to the water content of samples. It is supposed that electrical dipoles, which appear in the sample as a

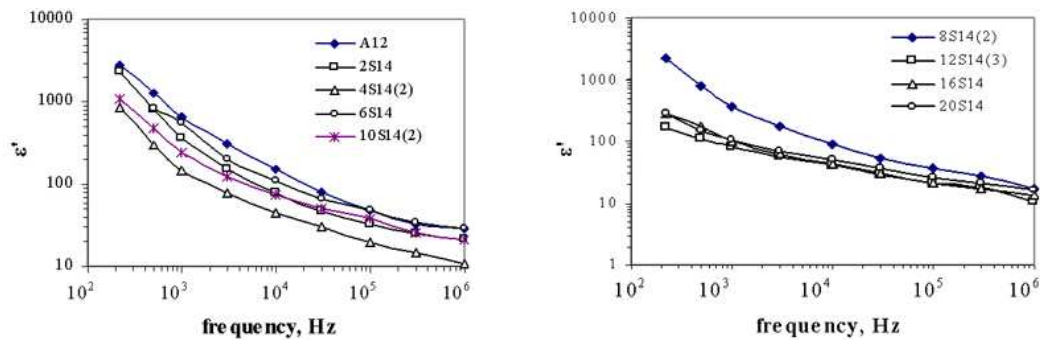


Figure 2. The frequency dependence of dielectric constant ϵ' of the studied samples

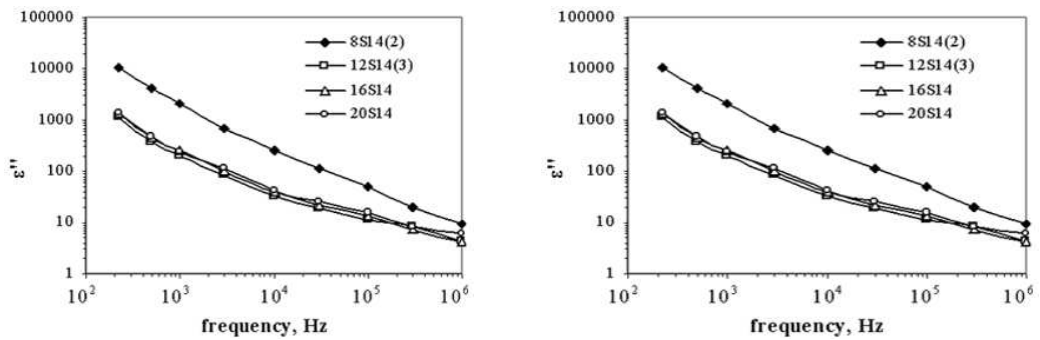


Figure 3. The frequency dependence of dielectric loss ϵ'' of the studied samples

result of formation of H^+ and OH^- forms of adsorbed water in the crystalline cells, are mainly responsible for the dielectric response. In order to somehow verify this assumption, the clinoptilolite sample was thermally treated at temperature of $8000^\circ C$ for 100 min. As a result of this treatment the crystalline structure of the studied sample disappeared totally according to X-ray diffractometric (XRD) investigation (not shown in this paper). When we measured the dielectric constant ϵ' and dielectric loss ϵ'' of the studied sample before and after the thermal treatment we found out that the values of these two parameters largely decreased after treatment. The water content in the studied sample after treatment was equal to half its value before treatment. This experimental fact could be taken as an indication of the validity of the given assumption.

The frequency dependence of angle tangents ($\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$) of dielectric losses is given in Figure 4. The angle tangents curves show some special features for all studied samples. The $\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$ decreases when increasing the frequency of the applied electrical field. At frequencies near to 1 MHz, the values of $\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$ for all the studied samples are very close to each other. The second feature is that $\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$ for all studied samples differs significantly from one sample to another in both its value and the character of the low frequency dependence of the applied electrical field. Some of these figures have a wide maximum while others tend to show this wide maximum. The appearance of wide maximum of $\tan \delta = \epsilon''/\epsilon'$ at low frequency of the applied electrical field is an indication to the fact that the studied zeolitic samples are polar materials. Indeed, the molecules of these materials contain groups having constant dipole moment [9]. In such materials a relaxation polarization and losses are developed. When the frequency of the applied field increases the values of ϵ' decrease while the values of ϵ'' pass through a maximum. However, as it is seen from Figure [2], the maximum of ϵ'' is not observed. This is probably due to the

relatively high value of the initial frequency of the applied field. Thus, it is probable to observe this maximum at frequency lower than 200 Hz.

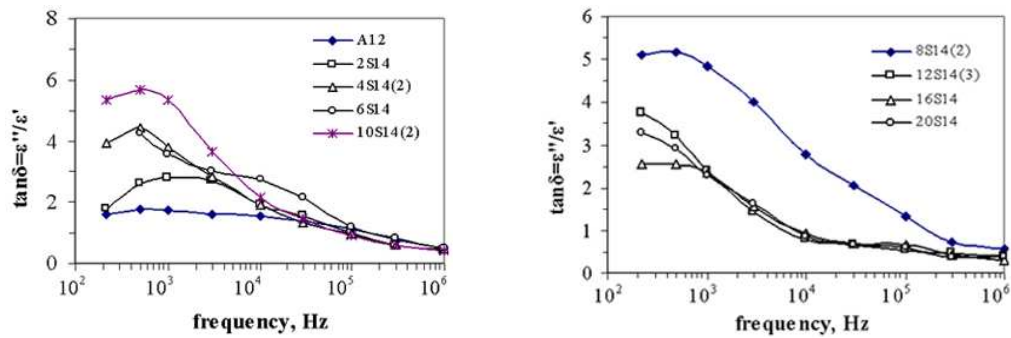


Figure 4. Frequency dependence of angle tangents of dielectric losses of studied zeolitic samples

Here it should be noted that $\tan \delta$ is a parameter which does not depend on the density of electrical dipole moments of the studied materials but it characterizes these dipoles. In fact, $\tan \delta$ constitutes a source of information for the structural changes in these dipoles and their ambience surrounding. From this point of view, the significantly observed differences of $\tan \delta$ parameter (see Fig. 4) allow us to assume that the structure of the crystalline cells of the studied samples is quite different. Moreover, this can be due, in particular, to the availability of different defects and impurities in the crystalline cells.

The frequency dependence of alternative current (*ac*) conductivity σ_{ac} is shown on Figure 5. The *ac* conductivity σ_{ac} could be calculated by using the well-known formula $\sigma_{ac} = \varepsilon_0 \omega \varepsilon'' = 2\pi f \varepsilon_0 \varepsilon''$, where ε_0 is the vacuum permittivity, ω — the angular frequency [7]. For all the studied samples it was found that *ac* conductivity σ_{ac} gets larger when the frequency of the applied electrical field increases. The ratio of the increments depends itself on the applied frequency. At very low frequencies there is a region where *ac* conductivity σ_{ac} remains practically constant, while at higher frequencies a monotonous increasing of *ac* conductivity σ_{ac} with frequency is observed. Similar results were found for US-HY type zeolite [7] and for synthetic dehydrated zeolites NaY and HY [10, 11].

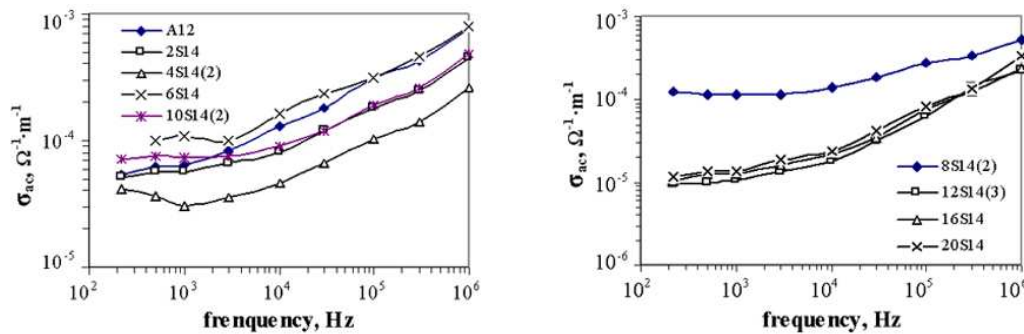


Figure 5. Frequency dependence of *ac* conductivity of the studied samples

In addition to the above mentioned experimental arrangement, a standard impedance meter was used to measure the electrical conductance and capacitance by using a special measuring cell. Samples were ground and then pressed in pellets of 2–3 mm in thickness and of 25 mm in diameter at about 1470 N/cm² of pressure. Al electrodes were vacuum deposited on both sides of the samples. The prepared

electrodes were circular in shape with diameter of about 20 mm. After that, the samples were thermally treated at temperature of 120°C for two hours followed by additional two hours of thermal treatment at 220°C. Data were collected in voltage drive mode employing a linear sweep over the frequency range 100 kHz to 13 MHz. The amplitude of the measure *ac*-voltage signal was 1 V. PC interface was used for data acquisition where connection to the frequency response analyzer was performed by screened coaxial cable of 1m in length. The obtained data agree with the mentioned results above.

Conclusions

Finally it should be mentioned here that the main results obtained in this work are:

- The dielectric constant ε' and the dielectric loss ε'' of all studied samples decrease when we increase the frequency of applied electrical field. This behavior agrees well with the results found out in other works and could be taken as a characteristic for both natural and synthetic zeolites.
- The dielectric response of zeolites is highly sensitive to the water content in the studied samples.
- $\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$ for all studied samples differs significantly from one sample to another in both its value and the character of the low frequency dependence of the applied electrical field.
- The obtained frequency dependence of alternative current (*ac*) conductivity σ_{ac} of the studied samples agrees well with the finding of others studies.
- $\tan \delta$ characterizes electrical dipole moments of the studied materials and constitutes a source of information for the structural changes in these dipoles and their ambience surrounding.

References

1. *Breck D. W.* Zeolite Molecular Sieves: Structure, Chemistry and Use. — New York: Wiley, 1974.
2. *Feodorov V. M., Glazun B. A.* // USSR AS News, Chem. — 1964. — P. 1930.
3. *V. M. Feodorov, B. A. Glazun, I. V. Gilenkov, M. M. Dubinin* // USSR AS News, Chem. — No 7. — 1966. — P. 1129.
4. *A. Delgado, A. R. Ruiz-Salvador, G. Rodriguez-Fuentes, A. Berazain* // Proc. Conf. Ree. IEEE Inter. Symp. Elect. Insul. Soc. — Montreal, Canada: IEEE New York, 1986. — P. 866.
5. *Concepcion-Rosabal D., Balmaceda-Era J., Rodriguez-Fuentes G.* // Micropor. Mesopor. Matter. — Vol. 38. — 2000. — P. 161.
6. *Sayed M. B.* // Zeolites. — Vol. 16. — 1996. — P. 157.
7. *Sayed M. B.* // Micropor. Mesopor. Matter. — Vol. 37. — 2000. — P. 107.
8. *Simon U., Franke M. E.* // Micropor. Mesopor. Matter. — Vol. 41. — 2000. — P. 1.
9. *Borisova M. E., Koikov S. N.* The Physics of Dielectrics. — Leningrad, 1979. — (in Russian).
10. *Abdoulaye A. et al.* Some remarks on the ionic conductivity in NaY dehydrated zeolite // Ionics. — Vol. 2. — 1996. — P. 39.
11. *Abdoulaye A. et al.* Polarization conductivity in dehydrated zeolite NaY and HY // Micropor. Mesopor. Matter. — Vol. 3. — 1997. — P. 63.

УДК 537.3113

Диэлектрические свойства натуральных цеолитов

А. А. Саакян ^{*}, С. Ш. Сулейман [†], С. Никогосян ^{*}, С. А. Юнусова [‡]

^{*} Ереванский физический институт
Армения, 375036, Ереван, ул. братьев Алиханян

[†] Кафедра прикладной физики
Институт прикладных технологий
Сирия, Дамаск, П.Я. 31983

[‡] Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

В работе было проведено исследование диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ и проводимости по переменному току σ_{ac} натуральных цеолитов из Сирии и Армении с целью изучения электрических свойств этих материалов. Также была исследована зависимость тангенса угла диэлектрических потерь ($\tan \delta = \varepsilon''/\varepsilon'$) от частоты для обоих видов цеолитов. Экспериментальная установка имела вид электрического моста. Полученные данные показали, что диэлектрическая постоянная ε' и диэлектрические потери ε'' для всех исследованных образцов уменьшаются с увеличением частоты приложенного электрического поля от 200 Гц до 1 МГц. В то же время для всех исследованных образцов проводимость по переменному току σ_{ac} увеличивается с ростом частоты. Характер роста зависит от частоты приложенного поля.

UDC 531.31:62-56

Tectonomagnetic Effects in the Tajikistan's Seismic Regions

F. H. Karimov

*Institute of Earthquake Engineering and Seismology
Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan
Tajikistan, 734024, Dushanbe, Ajni str., 121*

Observations of local variations of the geomagnetic field in the seismic regions of Tajikistan during the last two decades exhibit regular anomalies prior to earthquakes with a magnitude of 5.0 or greater. These anomalies may be a valuable predictive tool, and important step forward in earthquake hazard mitigation. Four main types of anomalies have been found, depending on how far they are from the epicentral zone; namely in the focus, near, intermediate or far zone. Analyses of the characteristics of the anomalies have been carried out in terms of the piezomagnetic and electrokinetic mechanisms. The dominance of electrokinetic effects in the generation of tectonomagnetic anomalies is suggested by: (1) a phase delay effect in the local geomagnetic field from the far to the near zone; (2) coincidence of the main earthquake shock with the time when the anomaly begins to return to the background level; (3) relatively low magnetic properties of rocks in the region of observation; and (4) detection of tectonomagnetic signals from the deep crust, below the active magnetic layer.

KEY WORDS AND PHRASES: earthquake prediction, tectonomagnetism, rock magnetism, electrokinetics.

Introduction

Based on the high accurate geomagnetic observations for about fifty years, mainly after the implementation of proton precession magnetometers, the geomagnetic method was proved as being very effective to discriminate background noises and to identify pure signals generated by tectonic processes [1–4]. As it is well known, the Earth's magnetic field is composed of a number of constituents with global (1,000–10,000 km, of the order of magnitude), regional (1,000 km) and local (1–100 km) scales. These constituents are generated by electric currents and rock magnetization of the Earth as a whole, and continents, platforms, or a plain geology structure (geoblocks and faults). There are global variations like secular ones generated by the Earth's core and mantle with extremely long periods of hundreds year and more, solar stipulated variations with period of 1 day, 27 days, annual, 11, 22 years and longer periodicities, and by ionospheric and magnetospheric sources as well. These variations have taken place worldwide, not in the seismic active regions only. In the Tajikistan territory, there are specific variations in Earth's magnetic field generated by tectonic processes; that is, the local effect. The special term “tectonomagnetism” was introduced by Nagata before for these variations with tectonic origin [5]. To underline tectonic processes related to seismicity, some authors used terms “seisgeomagnetism”, and “seis-motectonomagnetism”, “volcanomagnetism”. Tectonomagnetic researches have been conducted in the Tajikistan's seismic regions since early 50s starting with the works by Kalashnikov [6]. There have been found out different kinds of such variations both in space extensions and time variations generated by tectonic and seismic processes. Some of them have a bay-like shape of long-, medium- and short-term effect (depicting space-time strain accumulation and redistribution) and some are step-like (depicting crust offsets).

In almost all cases of detection of tectonomagnetic anomalies a question has arisen on what their nature is. There are several suggestions on the nature of tectonomagnetic effects observed in the Tajikistan seismic regions, mainly of piezomagnetic and

electrokinetic origin [1,6–8], but no definite conclusions have been made about it. The purpose of the present paper is to investigate the origin and nature of the tectono-magnetic anomalies observed in the seismic active regions in Tajikistan.

1. Magnetometric Network and Methods of Observations

The purpose of high accurate magnetic observations is to identify the features of the local geomagnetic field variations which are originated from the seismotectonic processes, in particular earthquake preparation. Network of magnetic field observations was arranged in the high seismic active areas of Tajikistan covering three main geological structures of South Tan-Shan, Tajik Depression and Pamirs. The region of observations includes also Hindu-Kush, Afghan Depression. The following observation sites were operating in the network: Hissar (1), Simiganj (2), Shar-Shar (3), Garm-Rasht (4, the former site of the Institute of Physics of the Earth, Academy of Sciences, USSR), Darband (5), Sultanobod (6), Djerino (7), Chuyangaron (8), Arjinak (9), Djir-gatal (10), Gezan (11), and Shaartuz (12). The number of each observing site is also indicated in Fig. 1 as the corresponding number attached to each black triangle. Here the first order faults are shown, I — Hissar-Kokshaal, II — Darvaz-Karakul, III — Ilyak-Vakhsh, IV — South-Fergana, V — North-Fergana, VI — Vanj-Akbajtal, VII — Pshart-Bartang. These faults are also indicated in Fig. 1. A number of other faults pass far away, so that they are not depicted. Circles mark the epicenters of the most powerful earthquakes with the energy classes $K \geq 12$. The connection between earthquake energy class K and magnitude M was accepted according to the formulas of Rautian [9]. Date, month and year of each earthquake are indicated near the circle of the earthquake epicenter in Fig. 1.

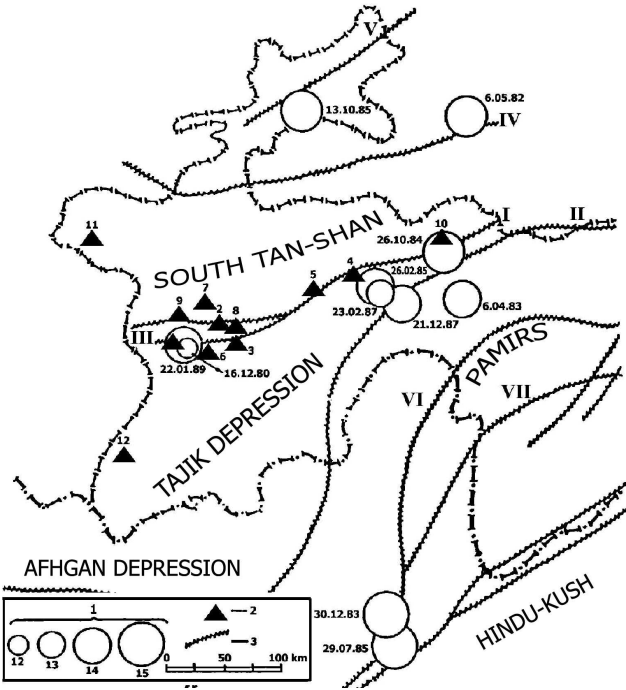


Figure 1. Magnetometric network in Tajikistan: 1 — White circles indicate epicenters of earthquakes for the period of 1980–1990 with K greater than 12, with the radius proportional to the magnitude. The connection between earthquake energy class K and magnitude M was calculated according to the formulas of Rautian (1964). Date, month and year of each earthquake are indicated near the circle of the earthquake epicenter; 2 — Magnetometric sites are indicated by black triangles; 3 — Major faults are indicated with black squiggly lines.

Annually about hundreds of people felt earthquakes occurring in the Tajikistan territory, and several tens of earthquakes in the region of observations are found to exceed the magnitude 5.0. Almost all epicenters are located along the fault zones. In the South Tan-Shan, Tajik and Afghan Depressions all earthquakes are shallow, they can be shallow and intermediate in Pamirs and deep focus in Hindu-Kush. Each site was equipped by the high sensitive magnetometer MPP-1 type (Proton Precession Magnetometer), designed by the Construction Bureau of the Institute of Earth Physics, Russian Academy of Sciences (IEP RAN) in the late 70s and widely used in the Tajikistan's seismic regions. The magnetometers have an excellent stability of the basis, reference level, the 0.1 nT sensitivity and accuracy in measurements of the total intensity of the Earth's magnetic field.

There are special and well-developed methods to eliminate global, extraterrestrial, regional geomagnetic variations and then identify pure signals generated by local tectonic processes, in particular of earthquake preparation. Because tectonic process of an earthquake preparation has been limited in space (local character) [10, 11], relevant anomalies in geomagnetic field variations have so far a local character too [1–3]. Variations of local geomagnetic fields exceeding background discrimination level are the anomalies of variations of local geomagnetic field. These anomalies are detected as exceeding of temporal evolution of local geomagnetic field variations by 2 sigma (sigma; standard deviation) criterion. The variations in local geomagnetic fields exceeding the geomagnetic background discrimination level are defined as the anomalies. Local geomagnetic field variations generated by local tectonic processes are named tectonomagnetic effect. Geomagnetic noise stipulates the standard deviation and is mainly a result of differences in electromagnetic induction effects on sites under comparison. Sampling with the intervals 2–10 minutes and averaging of the difference local geomagnetic field on the sites provide the accuracy not worse than 1.0 nT in the identification of anomalies in local geomagnetic field variations [1, 12].

2. Regularities in the Appearance of Tectonomagnetic Anomalies

There were the following regularities found out in the appearance of anomalies in Tajikistan's seismic regions [1, 7, 8, 13]

- 1) Values of the effects are within 10 nT .
- 2) There are different zones of tectonomagnetic effects; focus, near, intermediate and far zones in the sense of appearance of tectonomagnetic effects. The time duration of the anomaly for the definite earthquake is decreasing while moving from the focus zone to the far one (see Figs. 2–4).
- 3) In the near, intermediate and far zones the temporal dependence of a tectonomagnetic anomaly has a bay-like shape and the main shock moment is when the anomaly begins to return to the background level.
- 4) In the focus zone the shape of an anomaly can be either bay-like or sign-alternative bringing space mosaic distribution.
- 5) In the near zone the duration of an anomaly and its mean radius where it appears, are increasing loglinearly versus the magnitude M of a preparing earthquake. This provides a basis to attribute these anomalies to medium ones according to the classification by Rikitake [14].
- 6) In the middle zone the duration of an anomaly for the definite earthquake descends with distance of preparing earthquake's epicenter.
- 7) In the far zone the duration of an anomaly for the definite preparing earthquake is shorter than in the middle and it is less than one month.
- 8) The anomalies exhibit space anisotropy.
- 9) Sometimes anomalies appear that have a trapeze shape or an offset with sharp variations up to the first nT during the first days, which reflect assumingly earth crust creep processes.
- 10) In the vicinity of large water reservoirs there is an amplification of the tectonomagnetic anomalies stipulated assumingly by ground electrokinetic currents.

The anomaly in the variations of local geomagnetic field started in April-May 1980 at the sites of Hissar, Simiganj, Shar-Shar, and Sulatnobod before the Sultanobod earthquake on 16 October 1980, whose results are shown in Fig. 2. Darband site did not fall in the near zone, so that it was chosen as a reference. Hissar site (1 in Fig. 2) was only the west side station relative to the epicenter on the Ilyak-Vakhsh fault and the sign of the anomaly turned up positive in contrast to the ones at other sites.

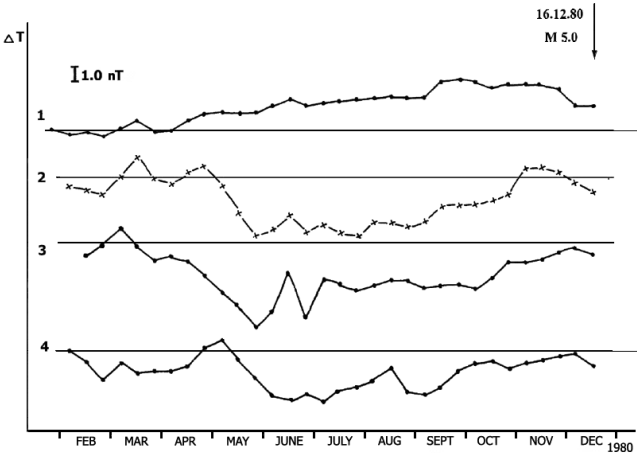


Figure 2. An example of the temporal variation of tectonomagnetic anomalies in the near zone for the Sultanobod earthquake on 16 Dec. 1980 with magnitude $M = 6.0$: Arrow indicates occurrence of the main shock. The numbered curves depict geomagnetic data for four different sites: 1 — Hissar, 2 — Simiganj, 3 — Shar-Shar, and 4 — Sultanobod. Darband is the reference site. See Fig. 1 for site locations. Bar shows 1 nT, which is also the 2 sigma interval.

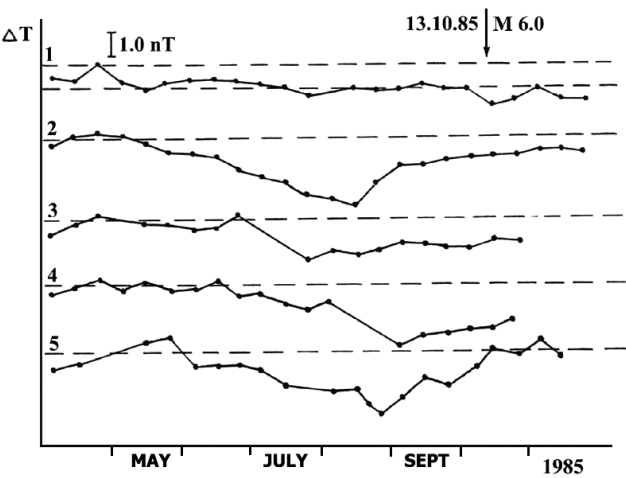


Figure 3. An example of the temporal variation of tectonomagnetic anomalies in the middle zone for the Kayrakkum earthquake on 13 Oct. 1985: Arrow indicates occurrence of the main shock. The numbered curves depict geomagnetic data for four different sites: 1 — Darband, 2 — Djerino, 3 — Chuyangaron, 4 — Arjinak, and 5 — Sultanobod. Hissar is the reference site. See Fig. 1 for site locations. Bar shows 1 nT, which is also the 2 sigma interval.

Anomalies in the variations of local geomagnetic field before the Kayrakkum earthquake on 13 October 1985 ($M = 6.0$) are found to start in May–July 1985 and were registered at the sites at Darband, Djerino, Chuyangaron, Arjinak, and Sultanobod. Fig. 3 illustrates the temporal evolution of geomagnetic field data at different observing sites. The farthest Hissar site was chosen as the reference. In spite of larger

earthquake magnitude, the Sultanobod station exhibited relatively shorter time duration of the anomaly. Kayrakkum earthquake epicenter was not in the near zone, but in the intermediate zone. It took some time for the tectonomagnetic signal to propagate from the focus to the sites, while stations will begin to register coming anomalies.

Fig. 4 illustrates the anomalies in the local geomagnetic field variations, which show bay-like temporal variations before strong earthquakes with magnitude greater than 5.0. The anomalies were registered at the sites of Darband, Djerino, Chuyangaron, and Sultanobod. Hissar site was taken as the reference. Almost all of these anomalies are found to precede earthquakes with magnitudes greater than 5.0 with the epicenters in the Hindu-Kush zone. One anomaly precedes an earthquake on 23 August 1985 ($M = 7.2$) with the epicenter in Takla-Makan. No sizable local earthquakes have been taken place during this period. The duration of anomalies turned out to be even shorter than that for the anomalies before the Kayrakkum earthquake on 13 October 1985. It can be stipulated by a very far distance of the focus preparation zone from the magnetometric sites, and it is a far zone for the registration of anomalies in the local geomagnetic field. It takes more time for the geomagnetic signal to propagate from the focus preparation zone to magnetometric sites which begin to register the anomalies with significant delay.

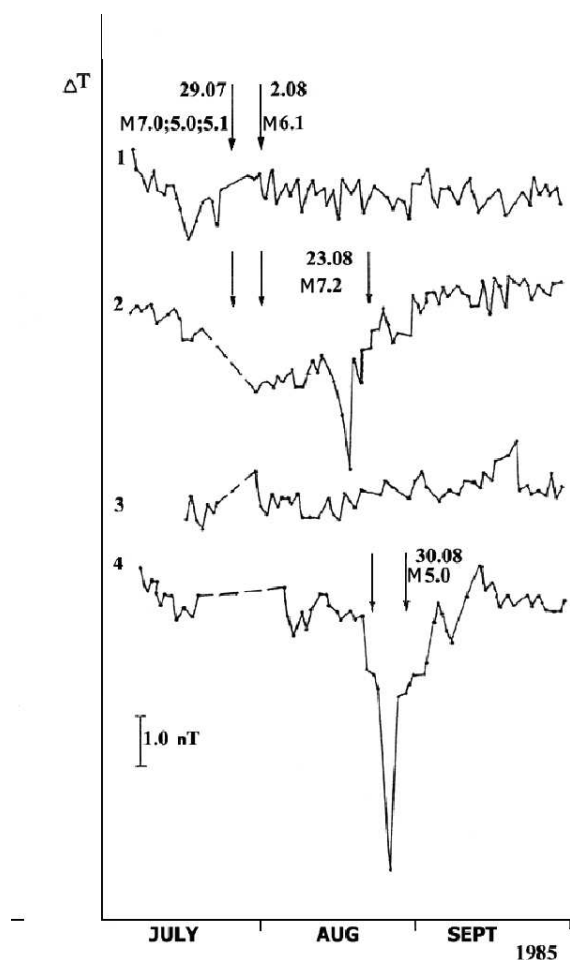


Figure 4. Pamirs-Hindu-Kush earthquakes and an example of the temporal variations of tectonomagnetic anomaly in the far zone. Arrows indicate occurrences of the main shocks: The numbered curves depict geomagnetic data for four different sites: 1 — Darband, 2 — Djerino, 3 — Chuyangaron, and 4 — Sultanobod. Hissar is the reference site. Bar shows 1 nT, which is also the 2 sigma interval.

In the first and fourth curves in Fig. 4 sharp variations up to several nT during the first days have been taking place along with the bay-like anomalies. It can be suggested that such an anomaly runs depict Earth's crust creep events. It is a striking fact that the main shocks coincide with the time when the anomaly begins to return to the background level independently of the zone where anomalies have appeared: near, intermediate, or far.

3. Analysis of Piezomagnetic and Electrokinetic Mechanisms

Let us consider possible mechanisms of the tectonomagnetic anomalies on the basis of contemporary representations on the seismic tectonic processes [10, 11]. Tectonomagnetic anomalies are stipulated by two general classes of phenomena; piezomagnetic and electrokinetic effects under the action of mechanical, tectonic stresses [1–3, 7, 15].

According to the general representations about seismic tectonic process, the integrant stress in the earthquake preparation zone has a bay-like shape [10, 11]. Starting from some moments after the beginning of earthquake preparation, when stresses will be increasing up to high enough values, we would expect the appearance of a tectonomagnetic anomaly. Stress accumulation in the preparation zone is conveyed by the anomaly's growth in space. After stress accumulation reaches critical values "inclusion" begins decay on two space parts. Outer one with reducing stresses and inner with continuing rising stresses. In local geomagnetic variations it depicts as extreme point. Integrant "inclusion" stresses became reducing at the expense of outer part. Integrant field intensity reduces accordingly. In the inner stresses continue rise compressing pores and cracking medium. In the local geomagnetic field it depicts as returning of the anomaly to a background level of a regular state. Inner part going on concentrate in shear zone where further shifting of adjacent geoblocks at the main earthquake shock takes place after large enough stress have accumulated. The main shock pertains to the stage of approaching of anomaly to this level. Therefore behavior of an anomaly in the near zone straightly reflects tectonic stresses in the preparation zone. Time delay in anomaly's appearance in the middle zone and more delay in the far one mean that one observes an effect of the anomaly source propagation. Magnetometric site in the near zone begins to register an anomaly immediately so far as tectonic stresses reach enough intensity. Later on, when anomaly sources are approaching the middle zone, the tectonomagnetic anomalies turn up appearing now over here. Anomalies in the far zone turn up later because sources are required more time to propagate and reach this zone. Besides would it these effects are effects of propagation, then the main shock moment in the middle and far zones would not be coinciding with the anomaly run to a regular state level. In that case the moment of earthquake shock would be coincided with the times when the anomalies are already over. Thus the tectonomagnetic effects are short distance effect rather than long distance one [7].

For the Kairakkum earthquake, by using the empirical dependencies [1, 7] one can obtain 140 km for the average radius R of the area of anomaly appearance and duration of the anomaly T in the near zone would have to be 630 days. Because of retarding effect the duration turned out to be less. The speed turns out to be from 30 to 150 m/day, reflecting anisotropy in source propagation. The highest propagation speed was found in the direction where the sites (6–9) are grouped, lowest speed is in the direction only to the south site (5) (Fig. 1). Besides, site (5) is located closer to the transition from Tajik depression to Pamirs and therefore where earth crust is several times thicker than in the sites (6–9). Probably that is why source propagation in the direction to the site (5) is constrained. For the Hindu-Kush earthquakes the tectonomagnetic anomalies registration sites are turning up located in the far zone at the distances about 300–400 km. It follows that speeds of anomaly propagation are within the interval from 40 to 1,000 m/day.

Rock magnetizations and magnetic susceptibilities in the area of investigation are relatively low, not exceeding 10–5 CGS and 10–4 CGS respectively, piezomagnetic coefficient is about 10–4 bar⁻¹ (1 bar = 100 kPa). Stresses in the focus and near zones

amount to about 104 bars, which are enough, in principal, to generate piezomagnetic effect up to the first nT. But these values under the tectonic stress descend in the stress inhomogeneous space within the radius r [10, 11]

$$\lg r[\text{km}] = 0.43M, \quad (1)$$

r is equal to about 120 km for the earthquake with M equal to 5. So as Eq. (1) shows, they are insufficient to generate such anomalies in the middle and in the far zone. Besides, the preparation zone of the deep focus Hindu-Kush earthquakes with the hypocenters in the depth 100–300 km, scarcely comprises magneto active layer located in the upper crust 20–40 km width where temperatures do not exceed Curie point for the natural magnetite, titanomagnetites, etc.

Electrokinetic mechanism of tectonomagnetic anomalies is stipulated by the underground fluid filtration through porous and fractured crust medium. There are a plenty of both surface and underground waters in the Tajikistan region. There are both pure and mineral waters widespread. The waters salt concentration is up to 600 mg/liter at some sites. The natural underground waters are very good electrolytes and promote appearance of electrokinetic phenomena. In terms of underground water filtration from the earthquake source preparation space the delay of tectonomagnetic effects in the near and far zones can be interpreted by limitedness of filtration speed.

There were natural observations carried out in the vicinities of Nurek water reservoir [7] and Surkhob river [1, 12] to investigate local magnetic field variations. It was found that seasonal variations of the water reservoir level from about 220 m in summer to about 270 m in winter were correlating, with the coefficient 0.85, with the local geomagnetic field variations up to 5 nT in the sites 4 km aside. Variations of the river water level within 5 m correlated, with the coefficient about 0.9, with the local geomagnetic field variations up to 4 nT at the sites 200 m aside the river bed. Obviously, the several meter layer water weight loading on the water reservoir and the river bottom ground is very low to create anomalies up to 1 nT in the order of magnitude generated by means of piezomagnetic effect. In contrast, the underground active water filtration and high water mineralization in the vicinities of Nurek water reservoir and Surkhob river, allow us to explain tectonomagnetic anomalies observed as simple calculations based on double electric layer terms [1, 12] or ion concentrations difference [7] confirm.

Conclusions

Researches on the variations of local geomagnetic field anomalies carried out in the Tajikistan seismic region, have demonstrated that they are correlating with the tectonic earthquake preparation processes. Investigations of the regularities obtained and analysis of piezomagnetic and electrokinetic mechanisms for these tectonomagnetic anomalies have shown that low rock magnetization and magnetic susceptibility make piezomagnetic mechanism insufficient to explain the tectonomagnetic anomalies. But, natural explorations in the vicinities of Nurek water reservoir and Surkhob river and calculations have confirmed that electrokinetic mechanism is effective enough to interpret tectonomagnetic anomalies observed in the Tajikistan seismic region.

References

1. *Skovorodkin Y. P.* Investigations of Tectonic Processes by Means of High Accurate Magnetometry. — Moscow: Institute of Physics of the Earth, AN USSR, 1985. — 197 p.
2. *Rikitake T., Honkura Y.* Solid Earth Geomagnetism // Terra Sci. Publ. — 1985. — Pp. 171–191.
3. *Johnston M. J. S.* Tectonomagnetism and Tectonoelectricity // Reviews of Geophysics. — Vol. 25, No 5. — 1987. — Pp. 983–988.
4. *Hayakawa M., Molchanov O. A.* Seismo Electromagnetics; Lithosphere-Atmosphere-Ionosphere Coupling. — Tokyo: TERRAPUB, 2002. — 477 p.

5. *Nagata T.* Tectonomagnetism // Int'l Assoc. Geomag. Aeron., Bull. — Vol. 27. — 1969. — Pp. 12–43.
6. *Kalashnikov A. G.* The Possible Application of Magnetometric Methods to the Questions of Earthquake Indications // Tr. Geophys. Inst. Akad. Nauk SSSR, Sb. Statei. — Vol. 25. — 1954. — Pp. 162–180.
7. *Karimov F. H.* Questions of the Theory of Rock Magnetism and Tectonomagnetism. — Doctor of Sciences Degree Dissertation. — 1993.
8. *Karimov F. H.* Tectonomagnetic Researches // Trudy Technologicheskogo Universiteta Tadjikistana (Transactions of the Technological University of Tajikistan). — No 9. — 2003. — Pp. 17–40.
9. *Rautian T. G.* On Determination of Earthquake Energy at the Distances up to 3000 km // Trudy IFZ AN SSSR. — No 32(199). — 1964. — Pp. 88–93.
10. *Dobrovolskii I. P.* Theory of Preparation of the Tectonic Earthquake. — Moscow: Nauka, 1991. — 219 p.
11. *Dobrovolskii I. P.* Theory of the Tectonic Earthquake Preparation. — Moscow: UIPERAS, 2000. — 133 p.
12. *Skovorodkin Y. P., Bezuglaya L. S.* Connection Between Geomagnetic Variations and Hydro Regime at the Gharms Polygon // Izv. AN SSSR, Fiz. Zemli. — No 4. — 1980. — Pp. 104–109.
13. *Skovorodkin Y. P., Bezuglaya L. S., Guseva T. V.* Tectonomagnetic Studies in Tajikistan // J. Geomagnetism and Geoelectricity. — Vol. 30, No 5. — 1978. — Pp. 481–486.
14. *Rikitake T.* Earthquake Prediction. — New York: Elsevier, 1976. — 357 p.
15. *Johnston M. J. S.* Review of Electric and Magnetic Fields Accompanying Seismic and Volcanic Activity // Surveys in Geophysics. — Vol. 18. — 1997. — Pp. 441–475.

УДК 531.31:62-56

Тектономагнитные эффекты в сейсмических районах Таджикистана

Ф. Х. Каримов

*Институт сейсмологии и исследования землетрясений
Академия Наук Республики Таджикистан
Таджикистан, 734024, Душанбе, ул. Айни, 121*

Наблюдения над вариациями локального геомагнитного поля в сейсмически активных районах Таджикистана привели к обнаружению аномалий перед землетрясениями с магнитудой 5,0 и выше, которые в соответствии с современными классификациями предвестников землетрясений относятся к среднесрочным. Обнаружено четыре основных типа аномалий соответственно тому, как далеко расположен пункт наблюдения от эпицентра готовящегося землетрясения, именно, в очаговой, близкой, промежуточной или дальней зонах. Анализ параметров аномалий был выполнен на основе представлений о пьезомагнитном и электрокинетическом механизмах. Превалирование электрокинетического эффекта в генерации тектономагнитных аномалий в сейсмоактивных районах Таджикистана обусловлено следующими фактами: (1) — аномалии в вариациях локального геомагнитного поля при переходе от близкой к дальней зонам отстают по фазе; (2) — моменты землетрясений совпадают с заключительной фазой возвращения аномалии к фоновому уровню в её временном ходе во всех четырёх зонах; (3) — магнитная восприимчивость и индуктивная намагниченность горных пород в районе наблюдений имеют относительно низкие значения; (4) — регистрируются тектономагнитные эффекты глубокофокусных землетрясений, очаговые области которых расположены глубже магнитоактивного слоя, где температуры выше температур Кюри основных естественных магнитных минералов.

Обнаруженные аномалии в вариациях локального геомагнитного поля вместе с другими соответствующими геофизическими данными могут быть включены в системы прогнозирования землетрясений.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

В журнале печатаются оригинальные и обзорные статьи российских и зарубежных авторов по следующей тематике: 1) Математика; 2) Математическая теория телетрафика; 3) Математическое моделирование; 4) Теоретические основы информатики; 5) Физика; 6) Квантовая и статистическая физика; 7) Радиофизика.

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1) Статьи представляются на русском или английском языке.

2) Объём статьи не должен превышать 1 печ. л.

3) Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе $\text{\LaTeX}$ (используется версия $\text{\LaTeX}_{2\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF.

4) Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS), а также ключевые слова (на языке статьи).

5) Название, аннотация, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.

6) Текст статьи должен включать аннотацию на русском и английском языках (в аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу и громоздкие формулы), введение, заключение. Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).

7) Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: EPS, PDF, $\text{\TeX}$; 2) растровые: TIFF, GIF, PNG (возможна инкапсуляция в EPS).

8) Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.

9) Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.

10) Список литературы подготавливается в системе $\text{\BibTeX}$ и должен соответствовать требованиям ГОСТ 7.1-84. Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.

11) Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точный почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректра для просмотра высылается по e-mail.

12) Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один ее экземпляр.

ВЕСТНИК
Российского университета дружбы народов
Научный журнал. Основан в 1993 г.

Серия
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА
2007, № 3–4

Редактор *Т. О. Сергеева*
Технический редактор *Н. А. Лощенова*
Компьютерный набор *Н. Э. Николаев, А. В. Королькова*

Издательство Российского университета дружбы народов
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3

Типография ИПК РУДН
117923, ГСП-1, г. Москва, ул. Орджоникидзе, 3, тел. 952-04-41