



ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СЕРИЯ:

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ФИЗИКА

Том 26 № 4 (2018)

Научный журнал
Издается с 1993 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

RUDN JOURNAL OF
MATHEMATICS,
INFORMATION SCIENCES
AND PHYSICS

Volume 26 Number 4 (2018)

Founded in 1993
Founder: RUDN University

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

Цель и тематика

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) elibrary.ru.

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year.

Languages: Russian, English.

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>.

Aim and Scope

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор

Рыбаков Юрий Петрович —
Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор института
физических исследований и технологий,
РУДН, Россия,
rybakov_yup@rudn.university

Заместитель главного редактора

Севастьянов Леонид Антонович —
доктор физико-математических наук,
профессор, профессор кафедры
прикладной информатики и теории
вероятностей, РУДН, Россия,
sevastianov_la@rudn.university

Члены редколлегии

Гайдамака Юлия Васильевна (Москва, Россия) — доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Ильгисонис Виктор Игоревич (Москва, Россия) — доктор физико-математических наук, профессор, директор института физических исследований и технологий РУДН, директор направления научно-технических исследований и разработок Госкорпорации «Росатом»

Самуйлов Константин Евгеньевич (Москва, Россия) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

Гнатич Михал (Словакия) — DrSc., профессор, профессор университета им. П.Й. Шафарика, г. Кошице

Датта Гупта Субхашис (Индия) — PhD, профессор Хайдерабадского университета

Мартикайнен Олли Эрки (Финляндия) — PhD., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

Медведев Михаил Викторович (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

Рамирез Инестрозо Рафаэль Орландо (Испания) — PhD, профессор университета Ровира и Вирхилий, Таррагона, Каталония, Испания

Саха Биджан (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Чулуунбаатар Очбадрах (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

Литературный редактор: *К. В. Зенкин*

Компьютерная вёрстка: *А. В. Королькова*

Адрес редакции:

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Адрес редакционной коллегии

серии «Математика. Информатика. Физика»:

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419
тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru
сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

Подписано в печать 17.12.2018. Выход в свет 24.12.2018. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 12,27 Тираж 500 экз. Заказ № 1649. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,

тел. (495) 952-04-41, e-mail: ipk@rudn.university

EDITORIAL BOARD

Editor-in-Chief

Rybakov Yu. P. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Honored Scientist of Russia, professor of the Institute of Physical Research & Technologies, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russian Federation, rybakov_yup@rudn.university

Vice Editor-in-Chief

Sevastianov L. A. — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russian Federation, sevastianov_la@rudn.university

Members of the editorial board

Gaidamaka Yu. V. (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

Il'gisonis V. I. (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Institute of Physical Research & Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Head of the direction of scientific and technical research and development of the State Atomic Energy Corporation ROSATOM

Samouylov K. E. (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Engineering Sciences, professor, Head of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

Hnatic Mikhal (Slovakia) – DrSc., professor of Pavol Jozef Safarik University in Kosice

Datta Gupta Subhashish (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

Martikainen Olli Erkki (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

Medvedev M. V. (USA) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Kansas University

Ramirez Inostrozo Raphael Orlando (Spain) — PhD professor of Rovira i Virgili University (Universitat Rovira i Virgili), Spain

Saha Bijan (Bangladesh) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, Russian Federation)

Chuluunbaatar Ochbadrah (Mongolia) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher in the Institute of Mathematics, State University of Mongolia, Head of the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, Russian Federation)

Review Editor: *K. V. Zenkin*

Computer Design: *A. V. Korolkova*

Address of editorial board:

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

Address of editorial board

“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “RUDN University”

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university



СОДЕРЖАНИЕ

Математическая теория телетрафика

Зарядов И. С., Цурлуков В. В., Карвалью Кравид И. Виана, Зайцева А. А., Милованова Т. А. К анализу системы массового обслуживания с ресурсами, функционирующей в случайном окружении 303

Математическое моделирование

Малых М. Д. О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением 321

Гостев И. М., Севастьянов Л. А. О влиянии шумов на значение метрики DTW при идентификации формы объектов 331

Зорин А. В., Третьяков Н. П. MAPLE программа для моделирования водородоподобных атомов в квантовой механике с неотрицательной функцией распределения 343

Информатика и вычислительная техника

Андреев С. Д., Самуйлов К. Е., Тюрликов А. М. Управление потоками в гетерогенных мобильных сетях радиодоступа с соединениями устройство – устройство 357

Апреутесей А. М. Ю., Завозина А. В., Королькова А. В., Кулябов Д. С. Вычислительная и имитационная модели системы с управлением на Modelica 371

Новикова Г. М., Азофейфа Э. Х. Семантика больших данных в корпоративных системах управления 383

Космологические модели

Янишевский Д. М. Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина 393

Правила оформления статей 399



CONTENTS

Mathematical Theory of Teletraffic

Zaryadov Ivan S., Tsurlukov Vladimir V., Carvalho Cravid H. Viana, Zaytseva Anna A., Milovanova Tatiana A. Towards the Analysis of the Queuing System Operating in the Random Environment with Resource Allocation 303

Mathematical Modeling

Malykh Mikhail D. On Normal Modes of the Closed Waveguide with Discontinuous Filling 321

Gostev Ivan M., Sevastianov Leonid A. Influence of Noise on the DTW Metric Value in Object Shape Recognition 331

Zorin Alexander V., Tretyakov Nikolay P. MAPLE program for modelling hydrogen-like atoms in quantum mechanics with non-negative distribution function 343

Computer Science and Computer Engineering

Andreev Sergey D., Samouylov Konstantin E., Tyurlikov Andrey M. Session-level control in heterogeneous mobile radio networks with device-to-device connections 357

Apreutesey Anne Marie Yu., Zavozina Anna V., Korolkova Anna V., Kulyabov Dmitry S. Computational and Simulation Models of the Control System on Modelica 371

Novikova G. M., Azofeifa E. J. Semantics of Big Data in Corporate Management Systems 383

Cosmological Models

Yanishevskiy D. M. Bianchi Type VIII Cosmological Models Described with Caplygin Gas Equation of State Fluid Sources 393

Guidelines for Authors 399

Математическая теория телетрафика

UDC 519.872, 519.217

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-303-320

Towards the Analysis of the Queuing System Operating in the Random Environment with Resource Allocation

Ivan S. Zaryadov*[†], Vladimir V. Tsurlukov*, H. Viana Carvalho Cravid*,
Anna A. Zaytseva*, Tatiana A. Milovanova*** Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation**[†] Institute of Informatics Problems, FRC CSC RAS
IPI FRC CSC RAS, 44-2 Vavilova Str., Moscow 119333, Russian Federation*

The mathematical model of the system, that consists of a storage device and several homogeneous servers and operates in a random environment, and provides incoming applications not only services, but also access to resources of the system, is being constructed. The random environment is represented by two independent Markov processes. The first of Markov processes controls the incoming flow of applications to the system and the size of resources required by each application. The incoming flow is a Poisson one, the rate of the flow and the amount of resources required for the application are determined by the state of the external Markov process. The service time for applications on servers is exponential distributed. The service rate and the maximum amount of system resources are determined by the state of the second external Markov process. When the application leaves the system, its resources are returned to the system. In the system under consideration, there may be failures in accepting incoming applications due to a lack of resources, as well as loss of the applications already accepted in the system, when the state of the external Markov process controlling the service and provision of resources changes. A random process describing the functioning of this system is constructed. The system of equations for the stationary probability distribution of the constructed random process is presented in scalar form. The main tasks for further research are formulated.

Key words and phrases: queuing system, random environment, Markov modulated Poisson process, Markov modulated service process, resource allocation

1. Introduction

The mathematical model of the analysis of the functioning of modern telecommunication systems must take into account the influence of external factors, which may be realized within the framework of the queuing theory (the theory of teletraffic) [1–4] with the help of arrival and/or service processes controlled by some external random process. The application of the Markov modulated arrival process (MMAP), Markov modulated service process (MMSP) [3, 5–9] allows us to construct not only the adequate mathematical model, but also to obtain good analytical results for different tasks [10–22].

The mathematical modeling of modern telecommunication systems when incoming applications in addition to services also require some fixed or variable volume of resources [23–29] is the actual problem.

We will try to apply Markov modulated Poisson process (MMPP) theory [5–9] to construct the mathematical model of the system, that consists of a storage device and several homogeneous servers and operates in a random environment, provides incoming applications not only services, but also access to resources of the system, is being constructed. The random environment is represented by two independent Markov processes. The first of Markov processes controls the incoming flow of applications to the system and the size of resources required by each application. The service rate and the maximum amount

of system resources are determined by the states of the second external Markov process. The initial stages of this study were presented in [30]. The system of equations for the stationary probability distribution of the random process, describing the behavior of the system, is the main goal of this part of the research.

2. System description

We will consider the queueing system $MMPP_2|MMSP_2|n|r|R_1, R_2$ (according to Kendall–Basharin notation [1]), functioning in the random environment (Markov modulated Poisson arrival process and Markov modulated service process), with $1 \leq n < \infty$ homogeneous servers and the buffer of $r \leq \infty$ capacity.

The random environment is present by two-state Markov process (MP) $\eta_1(t)$, which control the incoming Poisson process. If the external Markov process $\eta_1(t)$ is in state 1 then the rate of incoming Poisson process is λ_1 and each arriving application requires the fixed k_1 amount of system resources. If the MP $\eta_1(t)$ is in state 2 the each application arrives according the Poisson law with the rate λ_2 and requires the fixed amount of system resources of size k_2 .

The second external two-state Markov process $\eta_2(t)$ controls the service process on system servers and the maximum amount of system resources. If MP $\eta_2(t)$ is in the state 1, then the maximum value of system resources is $R_1 < \infty$, the service time of an application (on each of n homogeneous servers) is subject to the exponential distribution with the rate μ_1 . If MP $\eta_2(t)$ is in the state 2, then the amount of system resources R_2 is unlimited, the service time of an application (on each of n homogeneous servers) is subject to the exponential distribution but with the rate $m\mu_2$.

The transitions of Markov processes η_1 and η_2 from one state to another are determined by the corresponding infinitesimal matrices $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=1,2}$ and $M = (\mu_{ij})_{i,j=1,2}$.

After the end of the service each application returns to the system the resources, occupied by this application.

The functioning of the system may be defined by the multidimensional random process $\zeta(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), R(t), \eta_1(t), \eta_2(t)\}$, where random process $\xi_1(t) = (\xi_{1s}(t), \xi_{1q}(t))$ describes the number of applications with demand on k_1 amount of resources (applications of the first type) on the servers ($\xi_{1s}(t)$) and in the buffer ($\xi_{1q}(t)$) at the time moment t . Respectively, the random process $\xi_2(t) = (\xi_{2s}(t), \xi_{2q}(t))$ — the number of application with demand on k_2 amount of resources (applications of the second type) on the servers ($\xi_{2s}(t)$) and in the buffer ($\xi_{2q}(t)$) at the time moment t . $R(t)$ — the available at time t amount of system resources. If the state of the Markov process η_2 is 1, then $R(t) = \max(0, R_1 - k_1\xi_1(t)\mathbf{1} - k_2\xi_2(t)\mathbf{1})$, if the state of the Markov process η_2 is 2 then $R(t) = R_2 = \infty$.

If the amount of the system resources $R(t)$ at the moment of the new application arrival is less then k_1 (for the first type application) or k_2 (for the second type application) amount of resources needed in addition to service (i.e. $R(t) < k_1$ or $R(t) < k_2$), then the incoming application is lost. Also the accepted to the system applications may be dropped from the buffer due to the transition Markov chain η_2 from state 2 with unlimited amount R_2 of system resources to the state 1 with limited amount of resources $R(t) = R_1 - k_1\xi_1(t)\mathbf{1} - k_2\xi_2(t)\mathbf{1}$.

In order to avoid downtime of servers it is supposed that the maximum value of system resources $R_1 < \infty$ is sufficient for all servers to be occupied, that is $R_1 \geq n \cdot \max(k_1, k_2)$.

The goal of this paper is to derive the system of equations for random process $\zeta(t)$ steady-state probability distribution. The main goals of the study as a whole are to obtain main time-probability characteristics of the system as for this general case (also for the case when the maximum values of system resources are finite, but different for all states of governing external Markov process), and for special cases of only one external governing Markov process.

3. The steady-state probability distribution. The system of equations (scalar form)

The set \mathcal{X} of states of the random process $\zeta(t) = \{\xi_1(t), \xi_2(t), R(t), \eta_1(t), \eta_2(t)\}$ may be presented as $\mathcal{X} = \{(i_s; i_q), (j_s; j_q), R_1(i_s + i_q; j_s + j_q) | R_2, l, m\}$. Here, i_s and i_q ($0 \leq i_s \leq n$, $i_q \geq 0$) are numbers of the first type applications on servers (i_s) and in the buffer (i_q); j_s and j_q ($0 \leq j_s \leq n$, $j_q \geq 0$) are numbers of the second type applications on servers (j_s) and in the buffer (j_q). It should be noted that $0 \leq i_s + j_s \leq n$. The argument $l = 1, 2$ describes the state of the external Markov process η_1 as well as the $m = 1, 2$ — the state of the Markov process η_2 . $R_1(i_s + i_q; j_s + j_q) = R_1 - (i_s + i_q)k_1 - (j_s + j_q)k_2$ — the current amount of the system resources in the state 1 of Markov process η_2 .

In the case of the buffer of unlimited capacity, the entire set of states can be divided into 10 subsets corresponding to the following states:

- 1) the system is empty — the states $\{(0; 0), (0; 0), R_1(0; 0), 1, 1\}$, $\{(0; 0), (0; 0), R_1(0; 0), 2, 1\}$, $\{(0; 0), (0; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(0; 0), (0; 0), R_2, 2, 2\}$;
- 2) there are only applications of the first type in the system, not all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(i_s; 0), (0; 0), R_1(i_s; 0), 1, 1\}$, $\{(i_s; 0), (0; 0), R_1(i_s; 0), 2, 1\}$, $\{(i_s; 0), (0; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(i_s; 0), (0; 0), R_2, 2, 2\}$, $1 \leq i_s < n$;
- 3) there are only applications of the first type in the system, all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(n; 0), (0; 0), R_1(n; 0), 1, 1\}$, $\{(n; 0), (0; 0), R_1(n; 0), 2, 1\}$, $\{(n; 0), (0; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(n; 0), (0; 0), R_2, 2, 2\}$;
- 4) there are only applications of the first type in the system, all servers are occupied, the buffer is not empty — $\{(n; i_q), (0; 0), R_1(n + i_q; 0), 1, 1\}$, $\{(n; i_q), (0; 0), R_1(n + i_q; 0), 2, 1\}$, $\{(n; i_q), (0; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(n; i_q), (0; 0), R_2, 2, 2\}$, $i_q \geq 1$;
- 5) there are only applications of the second type in the system, not all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 1, 1\}$, $\{(0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 2, 1\}$, $\{(0; 0), (j_s; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(0; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2\}$, $1 \leq j_s < n$;
- 6) there are only applications of the second type in the system, all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(0; 0), (n; 0), R_1(0; n), 1, 1\}$, $\{(0; 0), (n; 0), R_1(0; n), 2, 1\}$, $\{(0; 0), (n; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(0; 0), (n; 0), R_2, 2, 2\}$;
- 7) there are only applications of the second type in the system, all servers are occupied, the buffer is not empty — $\{(0; 0), (n; j_q), R_1(0; n + j_q), 1, 1\}$, $\{(0; 0), (n; j_q), R_1(0; n + j_q), 2, 1\}$, $\{(0; 0), (n; j_q), R_2, 1, 2\}$, $\{(0; 0), (n; j_q), R_2, 2, 2\}$, $j_q \geq 1$;
- 8) there are applications of both types in the system, not all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(i_s; 0), (j_s; 0), R_1(i_s; j_s), 1, 1\}$, $\{(i_s; 0), (j_s; 0), R_1(i_s; j_s), 2, 1\}$, $\{(i_s; 0), (j_s; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(i_s; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2\}$, $1 \leq i_s \leq n - 2$, $1 \leq j_s \leq n - 1 - i_s$;
- 9) there are applications of both types in the system, all servers are occupied, the buffer is empty — $\{(i_s; 0), (n - i_s; 0), R_1(i_s; n - i_s), 1, 1\}$, $\{(i_s; 0), (n - i_s; 0), R_1(i_s; n - i_s), 2, 1\}$, $\{(i_s; 0), (n - i_s; 0), R_2, 1, 2\}$, $\{(i_s; 0), (n - i_s; 0), R_2, 2, 2\}$, $1 \leq i_s \leq n - 1$;
- 10) there are applications of both types in the system, all servers are occupied, the buffer is not empty — $\{(i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 1, 1\}$, $\{(i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 2, 1\}$, $\{(i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2\}$, $\{(i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 2, 2\}$, $1 \leq i_s \leq n - 1$, $i_q + j_q \geq 1$.

For the system with the buffer of finite size, three more groups of states will be introduced (the system is fully occupied by applications of only one type, the system is fully occupied by both type applications).

Since the states in which the amount of resources requested by applications exceeds the amount of resources of the entire system are impossible (due to our assumptions),

then conditional indicator function — the Kronecker symbol — is introduced:

$$\delta(R_1(i_s + i_q, j_s + j_q)) = \begin{cases} 1, & R_1 - (i_s + i_q)k_1 - (j_s + j_q)k_2 \geq 0, \\ 0, & R_1 - (i_s + i_q)k_1 - (j_s + j_q)k_2 < 0. \end{cases} \quad (1)$$

This indicator function will be used for the equations of transitions between the states of the groups (4), (6), (10) and for the transition from the states (3), (6) and (9) to the overlying states and for transitions from the overlying states to states of these groups.

The first four equations consider the transition of the system from the zero state:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2}) P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 1, 1) &= \mu_1 P((1;0), (0;0), R_1(1;0), 1, 1) + \\ &+ \mu_1 P((0;0), (1;0), R_1(0;1), 1, 1) + \lambda_{2,1} P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 2, 1) + \\ &+ \mu_{2,1} P((0;0), (0;0), R_2, 1, 2), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1}) P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 2, 1) &= \mu_1 P((1;0), (0;0), R_1(1;0), 2, 1) + \\ &+ \mu_1 P((0;0), (1;0), R_1(0;1), 2, 1) + \lambda_{1,2} P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 1, 1) + \\ &+ \mu_{2,1} P((0;0), (0;0), R_2, 2, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2}) P((0;0), (0;0), R_2, 1, 2) &= \mu_2 P((1;0), (0;0), R_2, 1, 2) + \\ &+ \mu_2 P((0;0), (1;0), R_2, 1, 2) + \lambda_{2,1} P((0;0), (0;0), R_2, 2, 2) + \\ &+ \mu_{1,2} P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 1, 1), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1}) P((0;0), (0;0), R_2, 2, 2) &= \mu_2 P((1;0), (0;0), R_2, 2, 2) + \\ &+ \mu_2 P((0;0), (1;0), R_2, 2, 2) + \lambda_{1,2} P((0;0), (0;0), R_2, 1, 2) + \\ &+ \mu_{1,2} P((0;0), (0;0), R_1(0;0), 2, 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Now consider the case where only the first type of application is present in the system and not all servers are occupied:

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_{1,2} + \mu_{1,2} + i_s \mu_1) P((i_s;0), (0;0), R_1(i_s;0), 1, 1) &= \\ &= \lambda_1 P((i_s - 1;0), (0;0), R_1(i_s - 1;0), 1, 1) + \lambda_{2,1} P((i_s;0), (0;0), R_1(i_s;0), 2, 1) + \\ &+ \mu_{2,1} P((i_s;0), (0;0), R_2, 1, 2) + \mu_1(i_s + 1) P((i_s + 1;0), (0;0), R_1(i_s + 1;0), 1, 1) + \\ &+ \mu_1 P((i_s;0), (1;0), R_1(i_s;1), 1, 1), \quad 1 \leq i_s \leq n - 1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \lambda_{2,1} + \mu_{1,2} + i_s \mu_1) P((i_s;0), (0;0), R_1(i_s;0), 2, 1) &= \\ &= \mu_1(i_s + 1) P((i_s + 1;0), (0;0), R_1(i_s + 1;0), 2, 1) + \\ &+ \mu_1 P((i_s;0), (1;0), R_1(i_s;1), 2, 1) + \lambda_{1,2} P((i_s;0), (0;0), R_1(i_s;0), 1, 1) + \\ &+ \mu_{2,1} P((i_s;0), (0;0), R_2, 2, 2), \quad 1 \leq i_s \leq n - 1, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \lambda_{1,2} + \mu_{2,1} + i_s \mu_2) P((i_s;0), (0;0), R_2, 1, 2) &= \\ &= \lambda_1 P((i_s - 1;0), (0;0), R_2, 1, 2) + \lambda_{2,1} P((i_s;0), (0;0), R_2, 2, 2) + \\ &+ \mu_{1,2} P((i_s;0), (0;0), R_1(i_s;0), 1, 1) + \mu_2(i_s + 1) P((i_s + 1;0), (0;0), R_2, 1, 2) + \end{aligned}$$

$$+ \mu_2 P((i_s; 0), (1; 0), R_2, 1, 2), \quad 1 \leq i_s \leq n-1, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\lambda_2 + \lambda_{2,1} + \mu_{2,1} + i_s \mu_2) P((i_s; 0), (0; 0), R_2, 2, 2) &= \lambda_{1,2} P((i_s; 0), (0; 0), R_2, 1, 2) + \\ &+ \mu_{1,2} P((i_s; 0), (0; 0), R_1(i_s; 0), 2, 1) + \mu_2(i_s + 1) P((i_s + 1; 0), (0; 0), R_2, 2, 2) + \\ &+ \mu_2 P((i_s; 0), (1; 0), R_2, 2, 2), \quad 1 \leq i_s \leq n-1. \end{aligned} \quad (9)$$

The system contains only applications of the first type, all servers are occupied, but the buffer is empty. According to the assumptions, the maximum amount of system resources is sufficient for all servers to be occupied, but it is not sufficient for arriving applications to occupy the buffer. Therefore, it is necessary to use the indicator function — verification of the existence of overlying states:

$$\begin{aligned} (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_1 \delta(R_1(n+1, 0))) P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 1, 1) &= \\ = \lambda_1 P((n-1, 0), (0, 0), R_1(n-1; 0), 1, 1) + \lambda_{2,1} P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 2, 1) + \\ + \mu_{2,1} P((n, 0), (0, 0), R_2, 1, 2) + \mu_1 \delta(R_1(n; 1)) P((n-1, 1), (1, 0), R_1(n; 1), 1, 1) + \\ + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(n+i_1; j_1))) P((n, i), (0, j), R_2, 1, 2) + \\ + n\mu_1 \delta(R_1(n+1, 0)) P((n, 1), (0, 0), R_1(n+1; 0), 1, 1), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_2 \delta(R_1(n, 1))) P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 2, 1) &= \\ = \lambda_{1,2} P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 1, 1) + \mu_1 \delta(R_1(n, 1)) P((n-1, 1), (1, 0), R_1(n; 1), 2, 1) + \\ + \mu_{2,1} P((n, 0), (0, 0), R_2, 2, 2) + n\mu_1 \delta(R_1(n+1, 0)) P((n, 1), (0, 0), R_1(n+1; 0), 2, 1) + \\ + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(n+i_1; j_1))) P((n, i), (0, j), R_2, 2, 2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_1) P((n, 0), (0, 0), R_2, 1, 2) &= \lambda_1 P((n-1, 0), (0, 0), R_2, 1, 2) + \\ &+ \lambda_{2,1} P((n, 0), (0, 0), R_2, 2, 2) + \mu_{1,2} P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 1, 1) + \\ &+ \mu_2 P((n-1, 1), (1, 0), R_2, 1, 2) + n\mu_2 P((n, 1), (0, 0), R_2, 1, 2), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_2) P((n, 0), (0, 0), R_2, 2, 2) &= \lambda_{1,2} P((n, 0), (0, 0), R_2, 1, 2) + \\ &+ \mu_{1,2} P((n, 0), (0, 0), R_1(n; 0), 2, 1) + \mu_2 P((n-1, 1), (1, 0), R_2, 2, 2) + \\ &+ n\mu_2 P((n, 1), (0, 0), R_2, 2, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

In the system there are only applications of the first type, all servers are occupied, there are also applications in the buffer. The indicator function is used to check the possibility of transition to (from) overlying states:

$$\begin{aligned} (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_1 \delta(R_1(n+i_q+1, 0))) P((n, i_q), (0, 0), R_1(n+i_q; 0), 1, 1) &= \\ = \lambda_1 P((n, i_q-1), (0, 0), R_1(n+i_q-1; 0), 1, 1) + \\ + \lambda_{2,1} P((n, i_q), (0, 0), R_1(n+i_q; 0), 2, 1) + \mu_{2,1} P((n, i_q), (0, 0), R_2, 1, 2) + \\ + \mu_1 \delta(R_1(n+i_q; 1)) P((n-1, i_q+1), (1, 0), R_1(n+i_q; 1), 1, 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(n+i_q+i_1; j_1))) P((n, i_q+i), (0, j), R_2, 1, 2) + \\
& + n\mu_1 \delta(R_1(n+i_q+1, 0)) P((n, i_q+1), (0, 0), R_1(n+i_q+1; 0), 1, 1), \quad i_q \geq 1, \quad (14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_2 \delta(R_1(n+i_q+1, 0))) P((n, i_q)(0, 0), R_1(n+i_q; 0), 2, 1) = \\
& = \lambda_{1,2} P((n, i_q), (0, 0), R_1(n+i_q; 0), 1, 1) + \mu_{2,1} P((n, i_q), (0, 0), R_2, 2, 2) + \\
& + n\mu_1 \delta(R_1(n+i_q+1, 0)) P((n, i_q+1), (0, 0), R_1(n+i_q+1; 0), 2, 1) + \\
& + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(n+i_q+i_1; j_1))) P((n, i_q+i), (0, j), R_2, 2, 2) + \\
& + \mu_1 \delta(R_1(n+i_q; 1)) P((n-1; i_q+1), (1, 0), R_1(n+i_q; 1), 2, 1), \quad i_q \geq 1, \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_1) P((n, i_q), (0, 0), R_2, 1, 2) = \\
& = \lambda_1 P((n, i_q-1), (0, 0), R_2, 1, 2) + \lambda_{1,2} P((n, i_q), (0, 0), R_2, 1, 2) + \\
& + \mu_{1,2} \delta(R_1(n+i_q; 0)) P((n, i_q), (0, 0), (R_1(n+i_q; 0), 1, 1) + \\
& + \mu_2 P((n-1, i_q+1), (1, 0), R_2, 1, 2) + \\
& + n\mu_2 P((n, i_q+1), (0, 0), R_2, 1, 2), \quad i_q \geq 1, \quad (16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_2) P((n, i_q), (0, 0), R_2, 2, 2) = \lambda_{2,1} P((n, i_q), (0, 0), R_2, 2, 2) + \\
& + \mu_{1,2} \delta(R_1(n+i_q; 0)) P((n, i_q), (0, 0), (R_1(n+i_q; 0), 2, 1) + \\
& + \mu_2 P((n-1, i_q+1), (1, 0), R_2, 2, 2) + n\mu_2 P((n, i_q+1), (0, 0), R_2, 2, 2), \quad i_q \geq 1. \quad (17)
\end{aligned}$$

There are only application of the second type in the system, not all servers are occupied, the buffer is empty:

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 + \lambda_{1,2} + \mu_{1,2} + j_s \mu_1) P((0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 1, 1) = \\
& = \mu_1 (j_s + 1) P((0; 0), (j_s + 1; 0), R_1(0; j_s + 1), 1, 1) + \\
& + \mu_1 P((1; 0), (j_s; 0), R_1(1; j_s), 1, 1) + \lambda_{2,1} P((0; 0)(j_s; 0), R_1(0; j_s), 2, 1) + \\
& + \mu_{2,1} P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 1, 2), \quad 1 \leq j_s \leq n-1, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_2 + \lambda_{2,1} + \mu_{1,2} + j_s \mu_1) P((0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 2, 1) = \\
& = \lambda_2 P((0; 0), (j_s-1; 0), R_1(0; j_s-1), 2, 1) + \mu_1 P((1; 0), (j_s; 0), R_1(1; j_s), 2, 1) + \\
& + \mu_1 (j_s + 1) P((0; 0), (j_s + 1; 0), R_1(0; j_s + 1), 2, 1) + \\
& + \lambda_{1,2} P((0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 1, 1) + \\
& + \mu_{2,1} P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2), \quad 1 \leq j_s \leq n-1, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 + \lambda_{1,2} + \mu_{2,1} + j_s \mu_2) P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 1, 2) = \\
& = \lambda_{2,1} P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2) + \mu_{1,2} P((0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 1, 1) + \\
& + \mu_2 (j_s + 1) P((0; 0), (i_s + 1; 0), R_2, 1, 2) +
\end{aligned}$$

$$+ \mu_2 P((1; 0), (i_s; 0), R_2, 1, 2), \quad 1 \leq j_s \leq n - 1, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 + \lambda_{2,1} + \mu_{2,1} + j_s \mu_2) P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2) = \\ & = \lambda_2 P((0; 0), (j_s - 1; 0), R_2, 2, 2) + \lambda_{1,2} P((0; 0), (j_s; 0), R_2, 1, 2) + \\ & + \mu_{1,2} P((0; 0), (j_s; 0), R_1(0; j_s), 2, 1) + \mu_2 (j_s + 1) P((0; 0), (j_s + 1; 0), R_2, 2, 2) + \\ & + \mu_2 P((1; 0), (j_s; 0), R_2, 2, 2), \quad 1 \leq i_s \leq n - 1. \quad (21) \end{aligned}$$

In the system there are only applications of the second type, all servers are occupied, but the buffer is empty. The indicator function is used to check the possibility of transition to (from) overlying states:

$$\begin{aligned} & (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_1 \delta(R_1(1, n))) P((0, 0), (n, 0), R_1(0; n), 1, 1) = \\ & = \lambda_{2,1} P((0, 0), (n, 0), R_1(0; n), 2, 1) + \\ & + \mu_{2,1} P((0, 0), (n, 0), R_2, 1, 2) + \mu_1 \delta(R_1(1; n)) P(1, 0), ((n - 1, 1), R_1(1; n), 1, 1) + \\ & + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_1; n + j_1))) P((0, i), (n, j), R_2, 1, 2) + \\ & + n\mu_1 \delta(R_1(0, n + 1)) P((0; 0), (n; 1), R_1(0; n + 1), 1, 1), \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_2 \delta(R_1(0, n + 1))) P((0, 0), (n, 0), R_1(0; n), 2, 1) = \\ & = \lambda_2 P((0, 0), (n - 1, 0), R_1(0; n - 1), 1, 1) + \lambda_{1,2} P((0, 0)(n, 0), R_1(0; n), 1, 1) + \\ & + \mu_1 \delta(R_1(1, n)) P(1, 0), ((n - 1, 1), R_1(1; n), 2, 1) + \mu_{2,1} P((0, 0), (n, 0), R_2, 2, 2) + \\ & + n\mu_1 \delta(R_1(0, n + 1)) P((0, 0), (n, 1), R_1(0; n + 1), 2, 1) + \\ & + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_1; n + j_1))) P((0, i), (n, j), R_2, 2, 2), \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_1) P((0, 0), (n, 0), R_2, 1, 2) = \lambda_{2,1} P((0, 0), (n, 0), R_2, 2, 2) + \\ & + \mu_{1,2} P((0, 0), (n, 0), R_1(0; n), 1, 1) + \mu_2 P((1, 0), (n - 1, 1), R_2, 1, 2) + \\ & + n\mu_2 P((0, 0), (n, 1), R_2, 1, 2), \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_2) P((0, 0), (n, 0), R_2, 2, 2) = \lambda_2 P((0, 0), (n - 1, 0), R_2, 1, 2) + \\ & + \lambda_{1,2} P((0, 0), (n, 0), R_2, 1, 2) + \mu_{1,2} P((0, 0), (n, 0), R_1(0; n), 2, 1) + \\ & + \mu_2 P((1, 0), (n - 1, 1), R_2, 2, 2) + n\mu_2 P((0, 0), (n, 1), R_2, 2, 2). \quad (25) \end{aligned}$$

In the system there are only applications of the second type, all servers are occupied, the buffer is not empty. The indicator function is used to check the possibility of transition to (from) overlying states:

$$\begin{aligned} & (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_1 \delta(R_1(1, n + j_q))) P((0, 0), (n, j_q), R_1(0; n + j_q), 1, 1) = \\ & = \lambda_{2,1} P((0, 0), (n, j_q), R_1(0; n + j_q), 2, 1) + \mu_{2,1} P((0, 0), (n, j_q), R_2, 1, 2) + \\ & + \mu_1 \delta(R_1(1; n + j_q)) P((1, 0)(n - 1, j_q + 1), R_1(1; n + j_q), 1, 1) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_1; n + j_q + j_1))) P((0, i), (n, j_q + j), R_2, 1, 2) + \\
 & + n\mu_1 \delta(R_1(0, n + j_q + 1)) P((0, 0), (n, j_q + 1), R_1(0; n + j_q + 1), 1, 1), \quad j_q \geq 1, \quad (26)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n\mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_2 \delta(R_1(0; n + j_q + 1))) P((0, 0)(n, j_q), R_1(0; n + j_q), 2, 1) = \\
 & = \lambda_2 P((0, 0), (n, j_q - 1), R_1(0; n + j_q - 1), 1, 1) + \\
 & + \lambda_{1,2} P((0, 0), (n, j_q), R_1(0; n + j_q), 1, 1) + \mu_{2,1} P((0, 0), (n, j_q), R_2, 2, 2) + \\
 & + n\mu_1 \delta(R_1(0, n + j_q + 1)) P((0, 0), (n, j_q + 1), R_1(0; n + j_q + 1), 2, 1) + \\
 & + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_1; n + i_q + j_1))) P((0, i), (n, j_q + j), R_2, 2, 2) + \\
 & + \mu_1 \delta(R_1(1; n + j_q)) P((1, 0), (n - 1; j_q + 1), R_1(1; n + j_q), 2, 1), \quad j_q \geq 1, \quad (27)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_1) P((0, 0), (n, j_q), R_2, 1, 2) = \lambda_{1,2} P((0, 0), (n, j_q), R_2, 1, 2) + \\
 & + \mu_{1,2} \delta(R_1(0; n + j_q)) P((0, 0), (n, j_q), (R_1(0; n + j_q), 1, 1) + \\
 & + \mu_2 P((1, 0), (n - 1, j_q + 1), R_2, 1, 2) + \\
 & + n\mu_2 P((0, 0), (n, j_q + 1), R_2, 1, 2), \quad j_q \geq 1, \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_2) P((0, 0), (n, j_q), R_2, 2, 2) = \lambda_2 P((0, 0), (n, j_q - 1), R_2, 1, 2) + \\
 & + \mu_2 P((1, 0), (n - 1, j_q + 1), R_2, 2, 2) + \lambda_{2,1} P(0, 0), ((n, j_q), R_2, 2, 2) + \\
 & + \mu_{1,2} \delta(R_1(0; n + j_q)) P((0, 0), (n, j_q), (R_1(0; n + j_q), 2, 1) + \\
 & + n\mu_2 P((0, 0), (n, j_q + 1), R_2, 2, 2), \quad j_q \geq 1. \quad (29)
 \end{aligned}$$

The applications of both types are in the system, but only some (not all) servers are occupied:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + (i_s + j_s)\mu_1) P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 1, 1) = \\
 & = \lambda_1 P((i_s - 1, 0), (j_s, 0), R_1(i_s - 1; j_s), 1, 1) + \lambda_{2,1} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 2, 1) + \\
 & + \mu_{2,1} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 1, 2) + (i_s + 1)\mu_1 P((i_s + 1, 0), (j_s, 0), R_1(i_s + 1; j_s), 1, 1) + \\
 & + (j_s + 1)\mu_1 P((i_s, 0), (j_s + 1, 0), R_1(i_s; j_s + 1), 1, 1), \\
 & \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n - 2}, \quad j_s = \overline{1, n - 1 - i_s}, \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_2 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + (i_s + j_s)\mu_1) P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 2, 1) = \\
 & = \lambda_2 P((i_s, 0), (j_s - 1, 0), R_1(i_s; j_s - 1), 2, 1) + \lambda_{1,2} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 1, 1) + \\
 & + \mu_{2,1} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 2, 2) + (i_s + 1)\mu_1 P((i_s + 1, 0), (j_s, 0), R_1(i_s + 1; j_s), 2, 1) + \\
 & + (j_s + 1)\mu_1 P((i_s, 0), (j_s + 1, 0), R_1(i_s; j_s + 1), 2, 1), \\
 & \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n - 2}, \quad j_s = \overline{1, n - 1 - i_s}, \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$(\lambda_1 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + (i_s + j_s)\mu_2) P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 1, 2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda_1 P((i_s - 1, 0), (j_s, 0), R_2, 1, 2) + \lambda_{2,1} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 2, 2) + \\
&+ \mu_{1,2} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 1, 1) + (i_s + 1) \mu_2 P((i_s + 1, 0), (j_s, 0), R_2, 1, 2) + \\
&+ (j_s + 1) \mu_2 P((i_s, 0), (j_s + 1, 0), R_2, 1, 2), \quad i_s = \overline{1, n - 2}, \quad j_s = \overline{1, n - 1 - i_s}, \quad (32)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(\lambda_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + (i_s + j_s) \mu_2) P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 2, 2) = \\
&= \lambda_2 P((i_s, 0), (j_s - 1, 0), R_2, 2, 2) + \lambda_{1,2} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_2, 1, 2) + \\
&+ \mu_{1,2} P((i_s, 0), (j_s, 0), R_1(i_s; j_s), 2, 1) + (i_s + 1) \mu_2 P((i_s + 1, 0), (j_s, 0), R_2, 2, 2) + \\
&+ (j_s + 1) \mu_2 P((i_s, 0), (j_s + 1, 0), R_2, 2, 2), \quad i_s = \overline{1, n - 2}, \quad j_s = \overline{1, n - 1 - i_s}. \quad (33)
\end{aligned}$$

The application of the first and the second types are in the system, all servers are occupied, but the buffer is empty:

$$\begin{aligned}
&(n \mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{1,2} + \lambda_1 \delta(R_1(i_s + 1, n - i_s))) P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; n - i_s), 1, 1) = \\
&= \lambda_1 P((i_s - 1, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s - 1; n - i_s), 1, 1) + \\
&+ \lambda_{2,1} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; n - i_s), 2, 1) + \mu_{2,1} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 1, 2) + \\
&+ i_s \mu_1 \delta(R_1(i_s + 1; n - i_s)) P((i_s, 1), (n - i_s, 0), R_1(i_s + 1; n - i_s), 1, 1) + \\
&+ (n - i_s) \mu_1 \delta(R_1(i_s; n - i_s + 1)) P((i_s, 0), (n - i_s, 1), R_1(i_s; n - i_s + 1), 1, 1) + \\
&+ (n - i_s + 1) \mu_1 \delta(R_1(i_s; n - i_s + 1)) P((i_s - 1, 1), (n - i_s + 1, 0), R_1(i_s; n - i_s + 1), 1, 1) + \\
&+ \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_s + i_1; n - i_s + j_1))) P((i_s, i), (n - i_s, j), R_2, 1, 2), \\
& \quad \quad \quad i_s = \overline{1, n - 1}, \quad j_s = n - i_s, \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(n \mu_1 + \mu_{1,2} + \lambda_{2,1} + \lambda_2 \delta(R_1(i_s, n - i_s + 1))) P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; n - i_s), 2, 1) = \\
&= \lambda_2 P((i_s, 0), (n - i_s - 1, 0), R_1(i_s; n - i_s - 1), 2, 1) + \\
&+ \lambda_{1,2} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; n - i_s), 1, 1) + \mu_{2,1} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 2, 2) + \\
&+ i_s \mu_1 \delta(R_1(i_s + 1; n - i_s)) P((i_s, 1), (n - i_s, 0), R_1(i_s + 1; n - i_s), 2, 1) + \\
&+ (n - i_s + 1) \mu_1 \delta(R_1(i_s; n - i_s + 1)) P((i_s - 1, 1), (n - i_s + 1, 0), R_1(i_s; n - i_s + 1), 2, 1) + \\
&+ (n - i_s) \mu_1 \delta(R_1(i_s; n - i_s + 1)) P((i_s, 0), (n - i_s, 1), R_1(i_s; n - i_s + 1), 2, 1) + \\
&+ \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_s + i_1; n - i_s + j_1))) P((i_s, i), (n - i_s, j), R_2, 2, 2), \\
& \quad \quad \quad i_s = \overline{1, n - 1}, \quad j_s = n - i_s, \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(n \mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{1,2} + \lambda_1) P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 1, 2) = \\
&= \lambda_1 P((i_s - 1, 0), (n - i_s, 0), R_2, 1, 2) + \lambda_{2,1} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 2, 2) + \\
&+ \mu_{1,2} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; j_s), 1, 1) + (n - i_s) \mu_2 P((i_s, 0), (n - i_s, 1), R_2, 1, 2) + \\
&+ i_s \mu_2 P((i_s, 1), (n - i_s, 0), R_2, 1, 2) + (n - i_s + 1) \mu_2 P((i_s - 1, 1), (n - i_s + 1, 0), R_2, 1, 1), \\
& \quad \quad \quad i_s = \overline{1, n - 1}, \quad j_s = n - i_s, \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (n\mu_2 + \mu_{2,1} + \lambda_{2,1} + \lambda_2) P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 2, 2) = \\
& = \lambda_2 P((i_s, 0), (n - i_s - 1, 0), R_2, 2, 2) + \lambda_{1,2} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_2, 1, 2) + \\
& + \mu_{1,2} P((i_s, 0), (n - i_s, 0), R_1(i_s; j_s), 2, 1) + (n - i_s) \mu_2 P((i_s, 0), (n - i_s, 1), R_2, 2, 2) + \\
& + (n - i_s + 1) \mu_2 P((i_s - 1, 1), (n - i_s + 1, 0), R_2, 2, 2) + i_s \mu_2 P((i_s, 1), (n - i_s, 0), R_2, 2, 2), \\
& \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n - 1}, \quad j_s = n - i_s. \quad (37)
\end{aligned}$$

The equations for the case when both types of applications are in the system (on servers and in the buffer):

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 \delta(R_1(i_s + i_q + 1, n - i_s + j_q)) + \lambda_{1,2} + \mu_{1,2} + n\mu_1) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 1, 1) = \\
& = \lambda_1 P((i_s; i_q - 1), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q - 1; n - i_s + j_q), 1, 1) + \\
& \quad + \lambda_{2,1} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 2, 1) + \\
& \quad \quad + \mu_{2,1} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2) + \\
& \quad + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_s + i_q + i_1; n - i_s + j_q + j_1))) \times \\
& \times P((i_s, i_q + i), (n - i_s, j_q + j), R_2, 1, 2) + i_s p_1 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q)) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q + 1), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q), 1, 1) + \\
& \quad \quad + (n - i_s) p_2 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1)) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q + 1), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1), 1, 1) + \\
& \quad \quad + (i_s + 1) p_2 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q)) \times \\
& \times P((i_s + 1; i_q), (n - i_s - 1; j_q + 1), R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q), 1, 1) + \\
& \quad \quad + (n - i_s + 1) p_1 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1)) \times \\
& \times P((i_s - 1; i_q + 1), (n - i_s + 1; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1), 1, 1), \\
& \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n - 1}, \quad i_q + j_q \geq 1, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_2 \delta(R_1(i_s + i_q, n - i_s + j_q + 1)) + \lambda_{2,1} + \mu_{1,2} + n\mu_1) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 2, 1) = \\
& = \lambda_2 P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q - 1), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q - 1), 2, 1) + \\
& \quad + \lambda_{1,2} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 1, 1) + \\
& \quad \quad + \mu_{2,1} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 2, 2) + \\
& \quad + \mu_{2,1} \sum_{i+j=1}^{\infty} \prod_{i_1+j_1=1}^{j+j} (1 - \delta(R_1(i_s + i_q + i_1; n - i_s + j_q + j_1))) \times \\
& \times P((i_s, i_q + i), (n - i_s, j_q + j), R_2, 2, 2) + i_s p_1 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q)) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q + 1), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q), 2, 1) + \\
& \quad \quad + (n - i_s) p_2 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1)) \times \\
& \quad \times P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q + 1), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1), 2, 1) + \\
& \quad \quad + (i_s + 1) p_2 \mu_1 \delta(R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q)) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times P((i_s + 1; i_q), (n - i_s - 1; j_q + 1), R_1(i_s + i_q + 1; n - i_s + j_q), 2, 1) + \\
& \quad + (n - i_s + 1)p_1\mu_1\delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1)) \times \\
& \times P((i_s - 1; i_q + 1), (n - i_s + 1; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q + 1), 2, 1), \\
& \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n-1}, \quad i_q + j_q \geq 1, \quad (39)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 + \lambda_{1,2} + \mu_{1,2} + n\mu_2) P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2) = \\
& \quad = \lambda_1 P((i_s; i_q - 1), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2) + \lambda_{2,1} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 2, 2) + \\
& + \mu_{1,2}\delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q)) P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 1, 1) + \\
& \quad + i_s p_1 \mu_2 P((i_s; i_q + 1), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2) + \\
& \quad + (n - i_s) p_2 \mu_2 P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q + 1), R_2, 1, 2) + \\
& \quad + (i_s + 1) p_2 \mu_2 P((i_s + 1; i_q), (n - i_s - 1; j_q + 1), R_2, 1, 2) + \\
& \quad + (n - i_s + 1) p_1 \mu_2 P((i_s - 1; i_q + 1), (n - i_s + 1; j_q), R_2, 1, 2), \\
& \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n-1}, \quad i_q + j_q \geq 1, \quad (40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_2 + \lambda_{2,1} + \mu_{1,2} + n\mu_2) P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 2, 2) = \\
& \quad = \lambda_2 P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q - 1), R_2, 2, 2) + \lambda_{1,2} P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_2, 1, 2) + \\
& + \mu_{1,2}\delta(R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q)) P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q), R_1(i_s + i_q; n - i_s + j_q), 2, 1) + \\
& \quad + i_s p_1 \mu_2 P((i_s; i_q + 1), (n - i_s; j_q), R_2, 2, 2) + \\
& \quad + (n - i_s) p_2 \mu_2 P((i_s; i_q), (n - i_s; j_q + 1), R_2, 2, 2) + \\
& \quad + (i_s + 1) p_2 \mu_2 P((i_s + 1; i_q), (n - i_s - 1; j_q + 1), R_2, 2, 2) + \\
& \quad + (n - i_s + 1) p_1 \mu_2 P((i_s - 1; i_q + 1), (n - i_s + 1; j_q), R_2, 2, 2), \\
& \qquad \qquad \qquad i_s = \overline{1, n-1}, \quad i_q + j_q \geq 1. \quad (41)
\end{aligned}$$

Here p_1 — the probability that the first type application is taken from the buffer, p_2 — the probability that the second type application is taken from the buffer.

4. Conclusions

The mathematical model of the system with the allocation of resources to incoming applications and functioning in the random environment is constructed. The system of equations for steady-state probability distribution of the random process, which describes the functioning of the system, is present.

The main task of future research is to present this system of equations in a matrix form and try to apply the well known matrix algorithms [6, 7, 31–33] in order to obtain the steady-state probability distribution in the analytical form.

Also of interest are stationary distributions of applications of each type, the average value of the system resources, the average number of discarded (lost) applications.

Acknowledgments

The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5-100” and funded by RFBR according to the research projects No. 18-07-00692 and No. 16-07-00766.

References

1. P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno, Queueing Theory, VSP, Utrecht, Boston, 2004.
2. G. P. Basharin, Yu. V. Gaidamaka, K. E. Samouylov, Mathematical Theory of Teletraffic and its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks, Automatic Control and Computer Sciences 47 (2) (2013) 62–69. doi:10.3103/S0146411613020028.
3. S. Trivedi Kishor, Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications, Second Edition, John Wiley & Sons, 2016.
4. N. Chee-Hoc, S. Boon-Hee, Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communication Networks. 2nd Edition, John Wiley & Sons, 2008.
5. M. F. Neuts, A Versatile Markovian Point Process, Journal of Applied Probability 16 (4) (1979) 764–779. doi:10.2307/3213143.
6. M. F. Neuts, Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
7. M. F. Neuts, Matrix-Analytic Methods in Queueing Theory, European Journal of Operational Research 15 (1) (1984) 2–12. doi:10.1016/0377-2217(84)90034-1.
8. M. F. Neuts, Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications, Marcel Dekker Inc., New York, 1989.
9. W. Fisher, K. S. Meier-Hellstern, The Markov-Modulated Poisson Process (MMPP) Cookbook, Performance Evaluation 18 (2) (1993) 149–171. doi:10.1016/0166-5316(93)90035-S.
10. A. Andersen, B. Nielsen, A Markovian Approach for Modelling Packet Traffic with Long-Range Dependence, IEEE Journal on Selected Areas in Communications 16 (5) (1998) 719–732. doi:10.1109/49.700908.
11. L. Muscariello, M. Mellia, M. Meo, M. A. Marsan, R. L. Cigno, Markov Models of Internet Traffic and a New Hierarchical MMPP Model, Computer Communications 28 (16) (2005) 1835–1852. doi:10.1016/j.comcom.2005.02.012.
12. A. M. Andronov, V. M. Vishnevsky, Markov-Modulated Continuous Time Finite Markov chain as the Model of Hybrid Wireless Communication Channels Operation, Automatic Control and Computer Sciences 50 (3) (2016) 125–132. doi:10.3103/S0146411616030020.
13. A. Ometov, D. Kozyrev, V. Rykov, S. Andreev, Yu. Gaidamaka, Ye. Koucheryavy, Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications, Wireless Communications and Mobile Computing 2017 (2017) 9625687. doi:10.1155/2017/9625687.
14. V. Rykov, D. Kozyrev, Analysis of Renewable Reliability Systems by Markovization Method, in: Lecture Notes in Computer Science, Analytical and Computational Methods in Probability Theory, ACMPT 2017, Germany, Heidelberg, Springer-Verlag, 2017, pp. 210–220. doi:10.1007/978-3-319-71504-9_19.
15. V. Rykov, D. Kozyrev, E. Zaripova, Modeling and Simulation of Reliability Function of a Homogeneous Hot Double Redundant Repairable System, in: ECMS 2017 Proceedings, European Council for Modeling and Simulation, European Council for Modelling and Simulation, Budapest, Hungary, May 23–26, 2017, pp. 701–705. doi:10.7148/2017-0701.
16. A. P. Pechinkin, R. Razumchik, Approach for Analysis of Finite M2—M2—1—R with Hysteric Policy for SIP Server Hop-by-Hop Overload Control, in: Proceedings – 27th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2013, European Council for Modelling and Simulation, European Council for Modelling and Simulation, Alesund, Norway, May 27–30, 2013, 2013, pp. 573–579. doi:10.7148/2013-0573.
17. R. Razumchik, Analysis of Finite MAP|PH|1 Queue with Hysteretic Control of Arrivals, in: International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, ICUMI-2016, IEEE Computer Society,

- IEEE Computer Society, Lisbon, Portugal, October 18–20, 2016, pp. 288–293. doi:10.1109/ICUMT.2016.7765373.
18. R. Razumchik, M. Telek, Delay Analysis of a Queue with Re-sequencing Buffer and Markov Environment, *Queueing Systems* 82 (1–2) (2016) 7–28. doi:10.1007/s11134-015-9444-z.
 19. R. Razumchik, M. Telek, Delay Analysis of Resequencing Buffer in Markov Environment with HOQ-FIFO-LIFO Policy, in: *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 10497, 14th European Workshop on Computer Performance Engineering, EPEW 2017, Springer Verlag, Berlin, Germany, September 7–8, 2017, pp. 53–68. doi:10.1007/978-3-319-66583-2_4.
 20. V. Klimenok, O. Dudina, V. Vishnevsky, K. Samouylov, Retrial Tandem Queue with BMAP-input and Semi-Markovian Service Process, in: *Communications in Computer and Information Science*, vol. 700, 20th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2017, Springer Verlag, Moscow, Russian Federation, September 25–29, 2017, pp. 159–173. doi:10.1007/978-3-319-66836-9_14.
 21. S. Dudin, A. Dudin, O. Dudina, K. Samouylov, Analysis of a Retrial Queue with Limited Processor Sharing Operating in the Random Environment, in: *Lecture Notes in Computer Science*, LNCS, Vol. 10372, 15th International Conference on Wired/Wireless Internet Communications, WWIC 2017, Springer Verlag, St. Petersburg, Russian Federation, June 21–23, 2017, pp. 38–49. doi:10.1007/978-3-319-61382-6_4.
 22. I. Zaryadov, A. Korolkova, D. Kulyabov, T. Milovanova, V. Tsurlukov, The Survey on Markov-Modulated Arrival Processes and Their Application to the Analysis of Active Queue Management Algorithms, in: *Communications in Computer and Information Science*, Vol. 700, 20th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2017, Springer Verlag, Moscow, Russian Federation, September 25–29, 2017, pp. 417–430. doi:10.1007/978-3-319-66836-9_35.
 23. V. Naumov, K. Samouylov, N. Yarkina, E. Sopin, S. Andreev, A. Samuylov, Lte performance analysis using queuing systems with finite resources and random requirements, in: 7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2015, IEEE Computer Society, IEEE Computer Society, Brno, Czech Republic, October 6–8, 2015, pp. 100–103. doi:10.1109/ICUMT.2015.7382412.
 24. K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, S. Shorgin, Convolution algorithm for normalization constant evaluation in queuing system with random requirements, in: *AIP Conference Proceedings*, Vol. 1863, International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016, ICNAAM 2016, American Institute of Physics Inc., Rodos Palace Hotel Rhodes, Greece, September 19–25, 2017, p. 090004. doi:10.1063/1.4992269.
 25. V. A. Naumov, K. E. Samuilov, A. K. Samuilov, On the Total Amount of Resources Occupied by Serviced Customers, *Automation and Remote Control* 77 (8) (2016) 1419–1427. doi:10.1134/S0005117916080087.
 26. K. E. Samouylov, E. S. Sopin, S. Ya. Shorgin, Queuing Systems with Resources and Signals and Their Application for Performance Evaluation of Wireless Networks, *Informatika i ee Primeneniya* 11 (3) (2017) 99–105. doi:10.14357/19922264170311.
 27. E. Sopin, O. Vikhrova, K. Samouylov, LTE Network Model with Signals and Random Resource Requirements, in: 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, IEEE Computer Society, Munich, Germany, November 6–8, 2017, pp. 101–106. doi:10.1109/ICUMT.2017.8255155.
 28. V. Naumov, K. Samouylov, Analysis of Multi-resource Loss System with State-dependent Arrival and Service Rates, *Probability in the Engineering and Informational Sciences* 31 (4) (2017) 413–419. doi:10.1017/S0269964817000079.
 29. E. S. Sopin, O. G. Vikhrova, Probability Characteristics Evaluation in Queuing System with Random Requirements, in: *CEUR Workshop Proceedings*, vol. 1995, 7th International Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, ITTMM 2017, CEUR-WS, Peoples’

- Friendship University of Russia (RUDN University) Moscow, Russian Federation, 2017, pp. 85–92.
30. V. V. Tsurlukov, The Mathematical Model of the System with Resources and Random Environment, in: Proceedings of 2nd International School on Applied Probability Theory and Communications Technologies, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation, October 23—27, 2nd International School on Applied Probability Theory and Communications Technologies, RUDN University, Moscow, 2017, pp. 318–320.
 31. S. Chakravarthy, A. S. Alfa, Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models, CRC Press, 1996.
 32. L. Breuer, D. Baum, An Introduction to Queueing Theory and Matrix-Analytic Methods, Springer Netherlands, Dordrecht, 2005.
 33. H. Qi-Ming, Fundamentals of Matrix-Analytic Methods, Springer-Verlag New York, New-York, 2014.

УДК 519.872, 519.217

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-303-320

К анализу системы массового обслуживания с ресурсами, функционирующей в случайном окружении

И. С. Зарядов*[†], В. В. Цурлуков*, И. Виана Карвалью Кравид*,
А. А. Зайцева*, Т. А. Милованова*

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

[†] *Институт проблем информатики
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН
ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, Москва, Россия, 119333*

Строится математическая модель системы, состоящей из накопителя и нескольких однородных приборов, функционирующей в случайном окружении и предоставляющей поступающим заявкам помимо обслуживания ещё и доступ к ресурсам. Случайное окружение представлено двумя независимыми марковскими процессами, управляющими поступлением заявок в систему и обслуживанием заявок. В систему поступает пуассоновский поток заявок, интенсивность поступления и объем ресурсов, необходимый заявке при обслуживании, определяются состоянием внешнего марковского процесса. Время обслуживания заявок на приборах подчинено экспоненциальному распределению. Интенсивность обслуживания и максимальный объем ресурсов системы определяются состоянием второго внешнего марковского процесса. При окончании обслуживания заявки занятые ею ресурсы возвращаются в систему. В рассматриваемой системе возможны отказы в приёме поступающих заявок из-за нехватки ресурсов, а также возможны потери уже принятых в систему заявок при изменении состояния внешнего марковского процесса, управляющего обслуживанием и предоставлением ресурсов. Построен случайный процесс, описывающий функционирование данной системы. Представлена в скалярной форме система уравнений для стационарного распределения вероятностей построенного случайного процесса. Сформулированы основные задачи для дальнейшего исследования.

Ключевые слова: система массового обслуживания, случайное окружение, ММРР, предоставление ресурсов

Литература

1. Queueing Theory / P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno. — Utrecht, Boston: VSP, 2004. — 446 p.

2. *Basharin G. P., Gaidamaka Yu. V., Samouylov K. E.* Mathematical Theory of Teletraffic and its Application to the Analysis of Multiservice Communication of Next Generation Networks // Automatic Control and Computer Sciences. — 2013. — Vol. 47, No 2. — Pp. 62–69. — DOI: 10.3103/S0146411613020028.
3. *Trivedi Kishor S.* Probability and Statistics with Reliability, Queuing, and Computer Science Applications, Second Edition. — John Wiley & Sons, 2016. — 830 p.
4. *Chee-Hoc N., Boon-Hee S.* Queueing Modelling Fundamentals with Applications in Communication Networks. 2nd Edition. — John Wiley & Sons, 2008. — 292 p.
5. *Neuts M. F.* A Versatile Markovian Point Process // Journal of Applied Probability. — 1979. — Vol. 16, No 4. — Pp. 764–779. — DOI: 10.2307/3213143.
6. *Neuts M. F.* Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. — Baltimore: Johns Hopkins University Press, 1981. — 352 p.
7. *Neuts M. F.* Matrix-Analytic Methods in Queuing Theory // European Journal of Operational Research. — 1984. — Vol. 15, No 1. — Pp. 2–12. — DOI: 10.1016/0377-2217(84)90034-1.
8. *Neuts M. F.* Structured Stochastic Matrices of M/G/1 Type and Their Applications. — New York: Marcel Dekker Inc., 1989. — 512 p.
9. *Fisher W., Meier-Hellstern K. S.* The Markov-Modulated Poisson Process (MMPP) Cookbook // Performance Evaluation. — 1993. — Vol. 18, No 2. — Pp. 149–171. — DOI: 10.1016/0166-5316(93)90035-S.
10. *Andersen A., Nielsen B.* A Markovian Approach for Modelling Packet Traffic with Long-Range Dependence // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. — 1998. — Vol. 16, No 5. — Pp. 719–732. — DOI: 10.1109/49.700908.
11. Markov Models of Internet Traffic and a New Hierarchical MMPP Model / L. Muscariello, M. Mellia, M. Meo et al. // Computer Communications. — 2005. — Vol. 28, No 16. — Pp. 1835–1852. — DOI: 10.1016/j.comcom.2005.02.012.
12. *Andronov A. M., Vishnevsky V. M.* Markov-Modulated Continuous Time Finite Markov chain as the Model of Hybrid Wireless Communication Channels Operation // Automatic Control and Computer Sciences. — 2016. — Vol. 50, No 3. — Pp. 125–132. — DOI: 10.3103/S0146411616030020.
13. Reliability-Centric Analysis of Offloaded Computation in Cooperative Wearable Applications / A. Ometov, D. Kozыrev, V. Rykov et al. // Wireless Communications and Mobile Computing. — 2017. — Vol. 2017. — P. 9625687. — DOI: 10.1155/2017/9625687.
14. *Rykov V., Kozыrev D.* Analysis of Renewable Reliability Systems by Markovization Method // Lecture Notes in Computer Science / Analytical and Computational Methods in Probability Theory, ACMPT 2017. — Germany, Heidelberg, Springer-Verlag, 2017. — Pp. 210–220. — DOI: 10.1007/978-3-319-71504-9_19.
15. *Rykov V., Kozыrev D., Zaripova E.* Modeling and Simulation of Reliability Function of a Homogeneous Hot Double Redundant Repairable System // ECMS 2017 Proceedings / European Council for Modeling and Simulation. — Budapest, Hungary, May 23–26: European Council for Modelling and Simulation, 2017. — Pp. 701–705. — DOI: 10.7148/2017-0701.
16. *Pechinkin A. P., Razumchik R.* Approach for Analysis of Finite M2—M2—1—R with Hysteric Policy for SIP Server Hop-by-Hop Overload Control // Proceedings – 27th European Conference on Modelling and Simulation, ECMS 2013 / European Council for Modelling and Simulation. — Alesund, Norway, May 27–30, 2013: European Council for Modelling and Simulation, 2013. — Pp. 573–579. — DOI: 10.7148/2013-0573.
17. *Razumchik R.* Analysis of Finite MAP|PH|1 Queue with Hysteretic Control of Arrivals // International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops, ICUMI-2016 / IEEE Computer Society. — Lisbon, Portugal, October 18–20: IEEE Computer Society, 2016. — Pp. 288–293. — DOI: 10.1109/ICUMT.2016.7765373.

18. *Razumchik R., Telek M.* Delay Analysis of a Queue with Re-sequencing Buffer and Markov Environment // *Queueing Systems*. — 2016. — Vol. 82, No 1–2. — Pp. 7–28. — DOI: 10.1007/s11134-015-9444-z.
19. *Razumchik R., Telek M.* Delay Analysis of Resequencing Buffer in Markov Environment with HOQ-FIFO-LIFO Policy // *Lecture Notes in Computer Science / 14th European Workshop on Computer Performance Engineering, EPEW 2017*. — Vol. 10497. — Berlin, Germany, September 7–8: Springer Verlag, 2017. — Pp. 53–68. — DOI: 10.1007/978-3-319-66583-2_4.
20. Retrial Tandem Queue with BMAP-input and Semi-Markovian Service Process / V. Klimenok, O. Dudina, V. Vishnevsky, K. Samouylov // *Communications in Computer and Information Science*, vol. 700 / *20th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2017*. — Moscow, Russian Federation, September 25–29: Springer Verlag, 2017. — Pp. 159–173. — DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_14.
21. Analysis of a Retrial Queue with Limited Processor Sharing Operating in the Random Environment / S. Dudin, A. Dudin, O. Dudina, K. Samouylov // *Lecture Notes in Computer Science, LNCS / 15th International Conference on Wired/Wireless Internet Communications, WWIC 2017*. — Vol. 10372. — St. Petersburg, Russian Federation, June 21–23: Springer Verlag, 2017. — Pp. 38–49. — DOI: 10.1007/978-3-319-61382-6_4.
22. The Survey on Markov-Modulated Arrival Processes and Their Application to the Analysis of Active Queue Management Algorithms / I. Zaryadov, A. Korolkova, D. Kulyabov et al. // *Communications in Computer and Information Science / 20th International Conference on Distributed Computer and Communication Networks, DCCN 2017*. — Vol. 700. — Moscow, Russian Federation, September 25–29: Springer Verlag, 2017. — Pp. 417–430. — DOI: 10.1007/978-3-319-66836-9_35.
23. LTE Performance Analysis Using Queueing Systems with Finite Resources and Random Requirements / V. Naumov, K. Samouylov, N. Yarkina et al. // *7th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems ICUMT-2015 / IEEE Computer Society*. — Brno, Czech Republic, October 6–8: IEEE Computer Society, 2015. — Pp. 100–103. — DOI: 10.1109/ICUMT.2015.7382412.
24. Convolution Algorithm for Normalization Constant Evaluation in Queueing System with Random Requirements / K. Samouylov, E. Sopin, O. Vikhrova, S. Shorgin // *AIP Conference Proceedings / International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2016, ICNAAM 2016*. — Vol. 1863. — Rodos Palace Hotel Rhodes, Greece, September 19–25: American Institute of Physics Inc., 2017. — P. 090004. — DOI: 10.1063/1.4992269.
25. *Naumov V. A., Samuilov K. E., Samuilov A. K.* On the Total Amount of Resources Occupied by Serviced Customers // *Automation and Remote Control*. — 2016. — Vol. 77, No 8. — Pp. 1419–1427. — DOI: 10.1134/S0005117916080087.
26. *Samouylov K. E., Sopin E. S., Shorgin S. Ya.* Queueing Systems with Resources and Signals and Their Application for Performance Evaluation of Wireless Networks // *Informatika i ee Primeneniya*. — 2017. — Vol. 11, No 3. — Pp. 99–105. — DOI: 10.14357/19922264170311.
27. *Sopin E., Vikhrova O., Samouylov K.* LTE Network Model with Signals and Random Resource Requirements // *9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops*. — Munich, Germany, November 6–8: IEEE Computer Society, 2017. — Pp. 101–106. — DOI: 10.1109/ICUMT.2017.8255155.
28. *Naumov V., Samouylov K.* Analysis of Multi-resource Loss System with State-dependent Arrival and Service Rates // *Probability in the Engineering and Informational Sciences*. — 2017. — Vol. 31, No 4. — Pp. 413–419. — DOI: 10.1017/S0269964817000079.

29. *Sopin E. S., Vikhrova O. G.* Probability Characteristics Evaluation in Queuing System with Random Requirements // CEUR Workshop Proceedings, vol. 1995 / 7th International Conference “Information and Telecommunication Technologies and Mathematical Modeling of High-Tech Systems”, ITTMM 2017. — Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University) Moscow, Russian Federation: CEUR-WS, 2017. — Pp. 85–92.
30. *Tsurlukov V. V.* The Mathematical Model of the System with Resources and Random Environment // Proceedings of 2nd International School on Applied Probability Theory and Communications Technologies, Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation, October 23–27 / 2nd International School on Applied Probability Theory and Communications Technologies. — Moscow: RUDN University, 2017. — С. 318–320.
31. *Chakravarthy S., Alfa A. S.* Matrix-Analytic Methods in Stochastic Models. — CRC Press, 1996. — P. 396.
32. *Breuer L., Baum D.* An Introduction to Queuing Theory and Matrix-Analytic Methods. — Dordrecht: Springer Netherlands, 2005. — P. 286.
33. *Qi-Ming H.* Fundamentals of Matrix-Analytic Methods. — New-York: Springer-Verlag New York, 2014. — P. 364.

© Zaryadov Ivan S., Tsurlukov Vladimir V., Carvalho Cravid H. Viana, Zaytseva Anna A., Milovanova Tatiana A., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Zaryadov I. S., Tsurlukov V. V., Carvalho Cravid H. V., Zaytseva A. A., Milovanova T. A. Towards the Analysis of the Queuing System Operating in the Random Environment with Resource Allocation // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 4. — Pp. 303–320. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-303-320.

For citation:

Zaryadov I. S., Tsurlukov V. V., Carvalho Cravid H. V., Zaytseva A. A., Milovanova T. A. Towards the Analysis of the Queuing System Operating in the Random Environment with Resource Allocation, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 303–320. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-303-320.

Сведения об авторах:

Зарядов Иван Сергеевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, старший научный сотрудник ИПИ ФИЦ ИУ РАН (e-mail: zaryadov-is@rudn.ru, тел.: +7(495)9550927)

Цурлуков Владимир Владимирович — магистр кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: dober.vvt@gmail.com, тел.: +7(495)9550927)

Виана Карвалью Кравид Илкиаш — магистр кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: hilvianamat1@gmail.com, тел.: +7(495)9550927)

Зайцева Анна Андреевна — магистр кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: anna-z96@mail.ru, тел.: +7(495)9550927)

Милованова Татьяна Александровна — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: milovanova-ta@rudn.ru, тел.: +7(495)9550927)

Information about the authors:

Zaryadov Ivan S. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Senior Researcher of Institute of Informatics Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences (e-mail: zaryadov-is@rudn.ru, phone: +7(495)9550927)

Tsurlukov Vladimir V. — master's degree student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: dober.vvt@gmail.com, phone: +7(495)9550927)

Viana Carvalho Cravid H. — master's degree student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: hilvianamat1@gmail.com, phone: +7(495)9550927)

Zaytseva Anna A. — master's degree student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: anna-z96@mail.ru, phone: +7(495)9550927)

Milovanova Tatiana A. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, lecturer of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: milovanova-ta@rudn.ru, phone: +7(495)9550927)

Математическое моделирование

УДК 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330

О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением

М. Д. Малых

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклуцко-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Рассматривается волновод постоянного поперечного сечения S с идеальным проведением стенками. Предполагается, что заполнение волновода не изменяется вдоль его оси и описывается кусочными непрерывными функциями ϵ и μ на поперечном сечении волновода. Показано, что возможно сделать замену переменных, которая позволяет работать только с непрерывными функциями.

Вместо разрывных поперечных компонент электромагнитного поля \vec{E} и \vec{H} мы предлагаем использовать четыре потенциала u_e, u_h и v_e, v_h . Мы можем доказать как обобщение теоремы Тихонова–Самарского, что любое поле в волноводе допускает представление в такой форме, если мы рассматриваем потенциалы u_e, u_h как элементы пространства Соболева $\dot{W}_2^1(S)$, а потенциалы v_e, v_h , как элементы пространства Соболева $W_2^1(S)$.

Если ϵ и μ — кусочные постоянные функции, то уравнения Максвелла, записанные в четырёх потенциалах, сводятся к двум независимым системам. Это обстоятельство даёт нам новый подход к исследованию спектральных свойств волноводов. Во-первых, мы можем доказать полноту системы нормальных волн в закрытых волноводах, используя стандартные функциональные пространства. Во-вторых, мы можем предложить новую технику для вычисления нормальных волн, используя стандартные конечные элементы. В конце статьи представлена программа, написанная на языке FreeFem++, для вычисления дисперсионных линий волновода. Также рассмотрен вопрос о вычислении мод при больших значениях $k = \omega/c$.

Ключевые слова: волновод, уравнения Максвелла, пространства Соболева, метод конечных элементов, нормальные моды

1. Введение

Закрытые волноводы являются наиболее изученным объектом математической теории волноведущих систем. Ещё в середине прошлого века были предложены корректные модели распространения волн по таким системам, в частности была рассмотрена весьма сложная как для теоретического анализа, так и для применения численных методов векторная модель, в которой рассматриваются поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла. Наиболее изученными оказались волноводы, заполненные однородным веществом, исчерпывающая теория которых была построена в ставших уже классическими работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1].

Тем не менее математическая сторона моделирования волноводов с сложным заполнением на основе уравнений Максвелла не развита в полной мере. Дело в том, что ключевым техническим моментом в теории полого волновода является использование потенциалов Герца или функции Боргниса [2, 3]. Этот приём не удалось обобщить на случай волноводов с переменным заполнением, и это заставляет работать с компонентами электромагнитных полей в специально конструируемых пространствах Соболева, для которых приходится в теории доказывать свои теоремы вложения [4–7], а на практике — использовать смешанные конечные элементы [8–

10]. Это, в частности, существенно осложняет использование свободных и хорошо отлаженных конечно элементных программ (FEA software) для расчёта волноводов со сложным заполнением.

Современное развитие волоконной оптики и создание мета-материалов вновь возвращает нас к модели закрытого волновода, заполнение которого описывается кусочно-постоянной функцией. Вероятно, наиболее очевидным примером являются многожильные оптические волокна (multicore fiber), которые активно исследуются в последнее время, поскольку пропускная способность обычных одноканальных волокон использована уже почти полностью [11] и, очевидно, недостаточна для перемещения огромных массивов данных, что является ключевым моментом на пути к мобильным сетям 5G. Следует также заметить, что распространение волноводных мод по открытым оптическим волноводам, равно как и взаимодействие нескольких таких волноводов, можно корректно моделировать, поместив всю волноведущую систему в ящик, на границе которого поставлены условия идеальной проводимости [12]. Не трудно заметить, что система «волокно + ящик» представляет собой не что иное, как закрытый волновод со сложным заполнением.

Конечной целью наших исследований [13–15] будет разработка численных методов исследования волноводов в стандартных функциональных пространствах и их реализация на высокоуровневых языках программирования, таких как FreeFem++ [16, 17], или в системах компьютерной алгебры. При этом мы стремимся использовать как можно более простые, а следовательно, и надёжные конструкции. На наш взгляд, ключевая проблема в исследовании волноводов с разрывным заполнением — необходимость работать с разрывными компонентами полей. Обычно потенциалы рассматривают как способ понижения системы уравнений в частных производных, то есть как способ интегрирования системы. Мы же хотим взглянуть на введение потенциалов как на замену переменных, при которой мы переходим от разрывных функций к гладким потенциалам. В этой статье мы опишем такую замену и покажем, как при её помощи вычислить дисперсионные кривые во FreeFem++.

2. Декомпозиция Гельмгольца

Рассмотрим закрытый волновод постоянного сечения S с кусочно непрерывным заполнением ϵ и μ , не меняющимся вдоль оси волновода. Линию разрыва заполнения обозначим как Γ . Направим ось Oz декартовой системы координат по оси волновода.

Под электромагнитным полем в закрытом волноводе $S \times Z \times T$ с заполнением ϵ, μ будем понимать векторные поля \vec{E}, \vec{H} , компоненты которых определены на $(S - \Gamma) \times Z \times T$, при условии, что сужение \vec{E}, \vec{H} и их частных производных по z и t на сечение S при любых значениях z и t являются кусочно гладкими функциями, удовлетворяющими

1. уравнениям Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \partial_t \vec{H}, & \nabla \cdot \epsilon \vec{E} = 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} = +\frac{\epsilon}{c} \partial_t \vec{E}, & \nabla \cdot \mu \vec{H} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

внутри волновода $S \times Z \times T$;

2. условиям идеальной проводимости стенок волновода

$$\vec{E} \times \vec{n} = 0, \quad \vec{H} \cdot \vec{n} = 0 \quad (2)$$

в регулярных точках границы $\partial S \times Z \times T$;

3. условиями сопряжения

$$\begin{cases} [\vec{E} \times \vec{n}] = \vec{0}, & [\epsilon \vec{E} \cdot \vec{n}] = 0 \\ [\vec{H} \times \vec{n}] = \vec{0}, & [\mu \vec{H} \cdot \vec{n}] = 0 \end{cases} \quad (3)$$

в регулярных точках границы разрыва заполнения $\Gamma \times Z \times T$.

Наконец, примем для краткости, что

$$\vec{A}_\perp = (A_x, A_y, 0)^T \quad \text{and} \quad \nabla = (\partial_x, \partial_y, 0)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x, 0)^T.$$

Связь между полями и потенциалами зададим следующим образом:

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \frac{1}{\epsilon} \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \frac{1}{\mu} \nabla' u_h. \quad (4)$$

Каждая из этих формул представляет собой двумерный аналог декомпозиции Гельмгольца, хорошо известной в теории упругости [18].

Замечание 1. В электродинамике для поля \vec{H}_\perp такие потенциалы возникали при доказательстве полноты системы нормальных мод в качестве вспомогательной конструкции [5]. Все четыре потенциала были введены в нашей работе [14] для гладкого заполнения без коэффициентов $1/\epsilon$ и $1/\mu$, важных только для разрывного случая.

Теорема 1. Для любого электромагнитного поля \vec{E}, \vec{H} в волноводе найдутся такие функции u_e, u_h переменных z, t со значениями в пространстве Соболева $\mathring{W}_2^1(S)$ и такие функции v_e, v_h переменных z, t со значениями в пространстве Соболева $W_2^1(S)$, что справедливо равенство (4). Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант.

Теорема 1 означает, что при переходе от переменных \vec{E}, \vec{H} к четырём потенциалам и двум компонентам E_z, H_z по формулам (4) не теряются решения уравнений Максвелла. При этом условия

$$u_e, u_h, E_z \in \mathring{W}_2^1(S) \quad \text{and} \quad v_e, v_h, H_z \in W_2^1(S)$$

заменяют нам условия на разрывах заполнения, равно как и граничные условия. Поскольку потенциалы являются элементами пространств Соболева, далее естественно рассматривать уравнения Максвелла в слабой форме [19].

Обратимся теперь к случаю, когда заполнение волновода является кусочно постоянным. Уравнения Максвелла дают, что потенциалы u_e, u_h и E_z — элементы $\mathring{W}_2^1(S)$, связанные уравнениями

$$\begin{cases} \iint_S \epsilon (\nabla u, \nabla u_e) dx dy = \partial_z \iint_S \epsilon u E_z dx dy, \\ \iint_S \frac{c}{\mu} (\nabla u, \nabla u_h) dx dy = -\partial_t \iint_S \epsilon u E_z dx dy \end{cases} \quad (5)$$

для любой u из $C_0^\infty(S)$, где $E_z = \partial_z u_e + \partial_t u_h$, потенциалы v_e, v_h и H_z — элементы $W_2^1(S)$, связанные уравнениями

$$\begin{cases} \iint_S \frac{c}{\epsilon} (\nabla v, \nabla v_e) dx dy = \partial_t \iint_S \mu v H_z dx dy, \\ \iint_S \mu (\nabla v, \nabla v_h) dx dy = \partial_z \iint_S \mu v H_z dx dy, \end{cases} \quad (6)$$

для любой v из $C^\infty(S)$, где $H_z = \partial_z v_h - \partial_t v_e$.

Уравнения (5) и (6) можно использовать и для конструирования полей в волноводе. Если u_e, u_h и E_z из $\overset{\circ}{W}_2^1(S)$ удовлетворяют уравнениям (5), а v_e, v_h и H_z из $W_2^1(S)$ удовлетворяют уравнениям (6), то поле \vec{E}, \vec{H} , вычисленное по формулам (4), удовлетворяет уравнениям Максвелла в обобщённом смысле. Более того, если это поле имеет вне разрывов заполнения непрерывные частные производные 1-го порядка по всем переменным, а на разрывах заполнения — разрывы 1-го рода, то это поле вне разрывов заполнения соответствует уравнениям Максвелла (1), условиям сопряжения (3) на разрывах заполнения и краевым условиям идеальной проводимости (2).

Поскольку система уравнений Максвелла распалась на две независимые системы, электромагнитное поле \vec{E}, \vec{H} в волноводе, заполнение которого описывается кусочно постоянными функциями ϵ и μ , представляет собой суперпозицию ТЕ- и ТМ- полей.

3. Нормальные ТМ-моды

Покажем, как развитую теорию можно применить к отысканию нормальных мод волновода. Напомним, что под нормальной модой волновода будем понимать нетривиальное поле вида

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y) e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad \vec{H} = \vec{H}(x, y) e^{i\gamma z - i\omega t},$$

где ω — положительное число (круговая частота моды), а γ , вообще говоря, число комплексное (волновое число). Моды с вещественным волновым числом называют нормальными волнами, распространяющимися вдоль или против оси волновода.

Нормальная ТМ-мода волновода описывается потенциалами

$$u_e = \tilde{u}_e e^{i\gamma z - i\omega t}, \quad u_h = \tilde{u}_h e^{i\gamma z - i\omega t},$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \iint_S \epsilon (\nabla u, \nabla \tilde{u}_e) dx dy = -\gamma^2 \iint_S \epsilon u \tilde{u}_e dx dy + k\gamma \iint_S \epsilon u \tilde{u}_h dx dy, \\ \iint_S \frac{1}{\mu} (\nabla u, \nabla \tilde{u}_h) dx dy = -k\gamma \iint_S \epsilon u \tilde{u}_e dx dy + k^2 \iint_S \epsilon u \tilde{u}_h dx dy, \end{cases} \quad (7)$$

для любой $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(S)$; здесь для краткости используется обозначение $k = \omega/c$. Перепишем эту систему уравнений в операторном виде, используя стандартную

технику теории пространств Соболева [20],

$$\begin{cases} A_\epsilon \tilde{u}_e = -\gamma^2 B_\epsilon \tilde{u}_e + k\gamma B_\epsilon \tilde{u}_h, \\ A_{\frac{1}{\mu}} \tilde{u}_h = -k\gamma B_\epsilon \tilde{u}_e + k^2 B_\epsilon \tilde{u}_h, \end{cases} \quad (8)$$

где $A_\epsilon, A_{\frac{1}{\mu}}, B_\epsilon$ — ограниченные самосопряжённые операторы, а B_ϵ ко всему прочему ещё и вполне непрерывный.

Для теоретического анализа удобно исключить \tilde{u}_h и оставить одно уравнение

$$A_\epsilon \tilde{u}_e = -\gamma^2 \left(B_\epsilon + B_\epsilon \left(\frac{1}{k^2} A_{\frac{1}{\mu}} - B_\epsilon \right)^{-1} B_\epsilon \right) \tilde{u}_e. \quad (9)$$

Поэтому задачу об отыскании всех нормальных ТМ-мод при заданной частоте ω можно рассматривать как задачу на собственные значения для операторного пучка, в которой $\lambda = \gamma^2$ рассматривается как спектральный параметр. В силу самосопряжённости операторов и полной непрерывности оператора B_ϵ собственные функции этой задачи образуют базис пространства $\overset{\circ}{W}_{\frac{1}{2}}(S)$. Отсюда нетрудно вывести, что любое ТМ-поле в волноводе можно представить в виде суперпозиции нормальных ТМ-полей.

Замечание 2. Следует подчеркнуть, что мы установили именно базисность системы нормальных мод, полнота системы нормальных мод для волноводов со сложным заполнением была установлена в работах А.Л. Делицына [6, 7]. Этот результат является естественным обобщением теоремы о базисности системы нормальных мод полого волновода, установленной ещё в 1940-х годах А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [1, 3, 21].

При фиксированной частоте ω имеется бесконечное число нормальных мод, из них лишь конечное число представляют собой бегущие волны. Прочие моды имеют чисто мнимые значения γ . Наши вычисления мод волновода, заполненного веществом, основанные на неполном методе Галёркина [15], приводили в высших модах к волновым числам, имеющим как вещественную, так и мнимую части, одна из которых была очень мала. Теперь ясно, что это был чисто численный эффект.

Чтобы описать параметры распространяющихся нормальных мод, удобно использовать дисперсионную кривую. Все точки $k\gamma$ -плоскости, где эта задача на собственные значения имеет нетривиальное решение, образуют кривую, которую будем называть дисперсионной кривой волновода. Для её построения естественно использовать метод усечения: мы будем использовать пространство конечных элементов вместо пространства Соболева и изменим операторами разреженными матрицам, порождёнными теми же самыми билинейными формами.

Для вычисления этих матриц и дальнейших манипуляций с блочными разреженными матрицами мы использовали свободное программное обеспечение FreeFem ++ [17]. На этом языке, не опускаясь на уровень матриц и чисел, можно задать пространство конечных элементов и матрицы операторов $A_\epsilon, A_{\frac{1}{\mu}}, B_\epsilon$. Однако вычисление обратной матрицы приведёт к задаче на собственные значения с неразреженными матрицами, что существенно усложнит её решение. Поэтому для вычислений удобнее пользоваться исходной системой (8). Подставляя $\gamma = k\beta$, мы можем переписать нашу задачу на собственные значения (8) в блочно-разреженном виде:

$$\begin{pmatrix} A_\epsilon & 0 \\ 0 & A_{\frac{1}{\mu}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_h \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} -\beta^2 B_\epsilon & \beta B_\epsilon \\ -\beta B_\epsilon & B_\epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_e \\ \tilde{u}_h \end{pmatrix}.$$

Эту задачу можно решить стандартными средствами, если рассматривать k^2 как собственное значение, а β — как параметр. Для построения дисперсионной кривой волновода теперь достаточно решать эту стандартную задачу, меняя значения β с некоторым шагом. Это позволяет нам работать во FreeFem++ со всеми волноводами, границы которых могут быть описаны параметрически с помощью элементарных функций, а заполнение — с помощью алгебраических неравенств.

Вычислительные возможности этой программы проиллюстрируем примером.

Пример 1. На рис. 1 представлена дисперсионная кривая для волновода с сечением

$$S = \{0 < x < 1\} \times \{0 < y < 1\}$$

и кусочно постоянным заполнением

$$\epsilon = \begin{cases} 1, 2, & (x - 0,5)^2 + (y - 0,3)^2 < 0,5, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad \mu = 1. \tag{10}$$

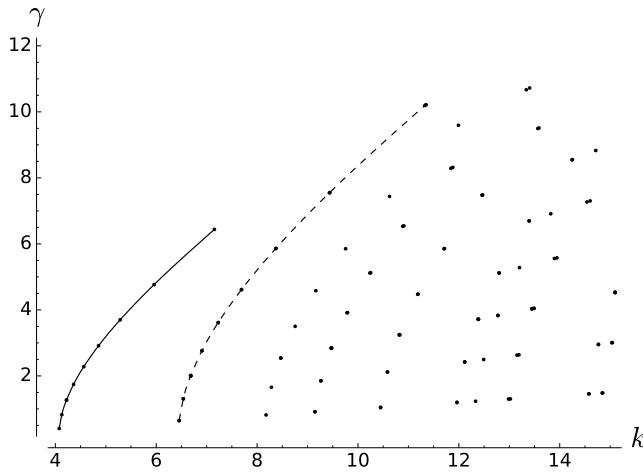


Рис. 1. Дисперсионная кривая для примера 1. Сплошной линией отмечена ветвь $\gamma_1(k)$, пунктиром — ветвь $\gamma_2(k)$, которая с графической точностью совпадает с третьей ветвью

Мы использовали 2120 треугольников для построения пространства конечных элементов и меняли значения β с шагом $\Delta\beta = 0.1$. Чтобы проверить сходимость, мы сделали ряд числовых экспериментов для полого волновода.

4. Высокочастотный предел

В оптических задачах величина $k = \frac{\omega}{c}$ весьма велика, поэтому весьма полезно взглянуть на высокочастотный предел [22]. Мы не можем перейти к пределу $k \rightarrow \infty$ непосредственно в (9), но мы можем сделать это после усечения. Дело в том, что оператор B_ϵ является вполне непрерывным и поэтому необратим. Однако МКЭ вносит некоторую регуляризацию: матрица B_ϵ становится обратимой, причём норму обратной матрицы можно оценить через характерный линейный размер h используемой сетки как

$$\|B_\epsilon^{-1}\| \simeq h^{-2}.$$

Это обстоятельство позволяет применить формулу Неймана к задаче (9) после её дискретизации. В результате получится, что

$$B_\epsilon \left(\frac{1}{k^2} A_{\frac{1}{\mu}} - B_\epsilon \right)^{-1} B_\epsilon = -B_\epsilon \left(B_\epsilon^{-1} + \frac{1}{k^2} B_\epsilon^{-1} A_{\frac{1}{\mu}} B_\epsilon^{-1} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^4} \right) \right) B_\epsilon$$

и

$$A_\epsilon \tilde{u}_e = \frac{\gamma^2}{k^2} \left(A_{\frac{1}{\mu}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{k^2} \right) \right) \tilde{u}_e.$$

Если обозначить собственные значения пучка $A_\epsilon - \beta^2 A_{\frac{1}{\mu}}$ как β_n , $n = 1, 2, \dots$, то собственные значения задачи (9) асимптотически равны

$$\gamma_n = \beta_n k + \dots$$

Таким образом, нормальные моды имеют вид

$$\vec{E}(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}, \quad \vec{H}(x, y) e^{ik\beta_n z - i\omega t}.$$

Условие применимости формулы Неймана состоит в том, что $h^{-2} k^{-2} \ll 1$, т. е. шаг сети h , должен быть меньше длины волны в вакууме. Мы полагаем, что найденная формула может быть полезна для управления величиной отношения γ/k волноводных мод путём изменения заполнения волновода.

5. Заключение

В настоящей статье мы хотели показать, что теоретические и численные исследования электромагнитных полей в закрытых волноводах, заполнения которых описываются кусочно-постоянными функциями ϵ и μ , возможно вести в стандартных пространствах Соболева и при помощи обычных конечных элементов. От разрывных компонент полей мы предлагаем перейти к четырём непрерывным скалярным функциям — потенциалам. Этот приём позволяет в теории легко обосновать базисность системы нормальных мод такого волновода, а на практике предложить способ приближенного вычисления нормальных мод, использующий стандартные средства численного анализа, разработанные для скалярных краевых задач математической физики. Для подтверждения этого проделаны численные эксперименты в среде FreeFem++.

Благодарности

Автор признателен профессору А. Н. Боголюбову (МГУ), профессору Л. А. Севастьянову (РУДН) и доценту К. П. Ловецкому (РУДН) за обсуждение работы и весьма интересные замечания.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при частичной поддержке грантов РФФИ №№ 18-07-00567 и 18-51-18005.

Литература

1. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. Zhang K., Li D. Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. — 2 edition. — Berlin: Springer, 2008.

3. *Могилевский И. Е., Свешников А. Г.* Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010.
4. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г.* О полноте системы собственных и присоединённых функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891–1899.
5. *Делицын А. Л.* Об одном подходе к вопросу о полноте нормальных волн волновода с магнитоэлектрическим заполнением // Дифференциальные уравнения. — 2000. — Т. 36, № 5. — С. 629–633.
6. *Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д.* О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126–129.
7. *Делицын А. Л.* О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 10. — С. 1883–1888.
8. *Делицын А. Л.* О проблеме применения метода конечных элементов к задаче вычисления мод волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 2. — С. 315–322.
9. *Делицын А. Л., Круглов С. И.* Применение метода смешанных конечных элементов для вычисления мод цилиндрических волноводов с переменным показателем преломления // Журнал радиоэлектроники. — 2012. — № 4.
10. *Lezar E., Davidson D. B.* Electromagnetic Waveguide Analysis // Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method. — The FEniCS Project, 2011. — Pp. 629–643.
11. *Coffey V. C.* Novel Fibers Use Space to Extend Capacity Limits // Photonics Spectra. — 2013. — Vol. 4, No 7.
12. Моделирование распространения поляризованного света в тонкоплёночной волноводной линзе / Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов и др. // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 56–68.
13. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2018. — Vol. 32, No 7. — Pp. 886–898.
14. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48.
15. *Тютюнник А. А.* О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129–139.
16. *Hecht F.* New Development in FreeFem++ // J. Numer. Math. — 2012. — Vol. 20, No 3–4. — Pp. 251–265. — ISSN 1570-2820.
17. *Hecht F.*, 2018. — Freefem++. — Laboratoire Jacques-Louis Lions, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 3 edition. — www.freefem.org.
18. *Ляв Д.* Теория упругости. — Москва, Ленинград: ГТТИ, 1939.
19. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. — Москва: Наука, 1980.
20. *Stummel F.* Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen. — Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1969.
21. *Chew W. C.* Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides. — 2012. — <http://wcc Chew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll20121211.pdf>.
22. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — Москва: Наука, 1972.

UDC 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330

On Normal Modes of the Closed Waveguide with Discontinuous Filling

Mikhail D. Malykh

*Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

We consider a waveguide of a constant cross-section S with ideally conducting walls. We assume that the filling of waveguide doesn't change along its axis and is described by the piecewise continuous functions ϵ and μ defined on waveguide cross-section. We show that it is possible to make substitution which allows to work only with continuous functions.

Instead of noncontinuous cross-components of an electromagnetic field \vec{E} and \vec{H} we offer to use four potentials u_e, u_h and v_e, v_h . We can prove as the generalization of Tikhonov–Samarskii theorem that any field in the waveguide allows representation in such form if we consider the potentials u_e, u_h as elements of Sobolev space $\overset{\circ}{W}_2^1(S)$ and the potentials v_e, v_h as elements of Sobolev space $W_2^1(S)$.

If ϵ and μ are the piecewise constant functions then Maxwell's equations written in four potentials reduce to a pair of independent systems. This statement give us new approach to the investigation of spectral properties of waveguides. First, we can prove the completeness of the system of the normal waves in closed waveguides using standard functional spaces. Secondly, we can offer new technique for calculation of the normal waves using standard finite elements. FreeFem++ program for calculation of disperse lines of waveguides is presented. The question of calculation of modes at great values of $k = \omega/c$ is also considered.

Key words and phrases: waveguide, Maxwell's equations, Sobolev's spaces, finite element method, normal modes

References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, Technical Physics. The Russian Journal of Applied Physics [Zhurnal tekhnicheskoy fiziki] 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. K. Zhang, D. Li, Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. 2nd ed., Springer, Berlin, 2008.
3. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, Mathematical Problems of the Theory of Diffraction, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
4. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, A. G. Sveshnikov, On the problem of the Excitation of a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, Computational Mathematics and Mathematical Physics 38 (11) (1999) 1815–1823.
5. A. L. Delicyn, On One Approach to the Question of the Completeness of Normal Waves of a Waveguide with a Magnetodielectric Filling, Differentsialnye Uravneniya 36 (5) (2000) 629–633, in Russian.
6. A. N. Bogolyubov, A. L. Delicyn, M. D. Malykh, On the Root Vectors of a Cylindrical Waveguide, Computational Mathematics and Mathematical Physics 41 (1) (2001) 121–124, in Russian.
7. A. L. Delicyn, On the Completeness of the System of Eigenvectors of Electromagnetic Waveguides, Computational Mathematics and Mathematical Physics 51 (10) (2011) 1771–1776.
8. A. L. Delicyn, Application of the Finite Element Method to the Calculation of Modes of Dielectric Waveguides, Computational Mathematics and Mathematical Physics 39 (2) (1999) 298–304, in Russian.
9. A. L. Delicyn, S. I. Kruglov, Application of a Method of the Mixed Finite Elements for Calculation of Modes of Cylindrical Waveguides with Variable Index of Refraction, Journal of radio electronics (4), in Russian.

10. E. Lezar, D. B. Davidson, Electromagnetic Waveguide Analysis, in: Automated solution of differential equations by the finite element method, The FEniCS Project, 2011, pp. 629–643, in Russian.
11. V. C. Coffey, Novel Fibers Use Space to Extend Capacity Limits, Photonics Spectra 4 (7), in Russian.
12. D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (1) (2017) 56–68, in Russian.
13. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, Journal of Electromagnetic Waves and Applications 32 (7) (2018) 886–898.
14. M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 39–48, in Russian.
15. A. A. Tyutyunnik, On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 129–139, in Russian.
16. F. Hecht, New Development in FreeFem++, J. Numer. Math. 20 (3–4) (2012) 251–265.
17. J. Love, Theory of Elasticity, GTTI, 1939, in Russian.
18. G. Duvaut, J.-L. Lions, Les inéquations en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.
19. F. Stummel, Rand- und Eigenwertaufgaben in Sobolewschen Räumen, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.
20. W. C. Chew, Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides (2012).
URL <http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwAll120121211.pdf>
21. V. M. Babich, V. S. Buldyrev, Short-Wavelength Diffraction Theory: Asymptotic Methods, Springer, Berlin, 1991.

© Малых М. Д., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Малых М. Д. О нормальных модах закрытого волновода с разрывным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 321–330. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330.

For citation:

Malykh M. D. On Normal Modes of the Closed Waveguide with Discontinuous Filling, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 321–330. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-321-330. In Russian.

Сведения об авторах:

Малых Михаил Дмитриевич — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykh-md@rudn.ru, тел.: +7(495)9522572)

Information about the authors:

Malykh Mikhail D. — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: malykh-md@rudn.ru, phone: +7(495)9522572)



UDC 519.683.8:519.6
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-331-342

Influence of Noise on the DTW Metric Value in Object Shape Recognition

Ivan M. Gostev*, Leonid A. Sevastianov†

* *Department of Management Information Systems and Digital Infrastructure
National Research University “Higher School of Economics”
20, Myasnitskaya str., Moscow, 101000, Russian Federation*

† *Department of Applied Probability and Informatics
Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

The paper sets out one of the methodologies on image processing and recognition of the form of graphic objects. In it, at the first stage preliminary processing of the image with the purpose of extracting of characteristic attributes of the form of objects is made. Contours of objects are used as such attributes. For transformation of 2D contours of objects to one-dimensional contour function ArcHeight method has been used. The algorithm for identification contour functions based on metrics DTW is developed. Definition of the identification function based on this method is introduced. Features of application of metrics DTW are stated at identification of the form of objects. Matrices of distances of combinations of the sample-sample and the sample-not sample are presented. Results of calculations of metrics DTW on a plenty of real data are analyzed. It is shown, that the developed algorithm allows to identify the form of objects independently of their position and an angle of turn on the image. Influence of the noise imposed on the image of object, on value of the metrics is investigated. Theoretical and practical results of such dependence are received; it shows that in a wide range (up to the ratio a signal/noise 10 dB) value of the metrics practically does not change. The positive parties and lacks of the offered algorithm are noted at identification of the form of object.

Key words and phrases: image processing, pattern recognition, metric, DTW, noises

1. Introduction

At identification of graphic objects there is a number of problems that need to be investigated first. One of such problems is the influence of noises on the quality of recognition. The use of methodology described in Refs. [1,2] is oriented on multiple stages of preliminary image processing aimed at extracting primary image features, such as contours, angles, texture, etc. [3,4]. At the final stage, the object properties are compared with the sample object properties basing on a certain metric that allows the classification of objects. The object contour is known to be one of the most informative features of the object shape [5,6]. Although the issues of contour receiving and mathematical description attract much attention, a significant role here is played by the recognition methods using signature analysis [7,8]. It is based on the calculation of one-dimensional contour function from the two-dimensional array of the contour points with the use of the center of gravity of the studied object or, in some cases, without it. The process of identifying such one-dimensional contour function is identical to the analysis and comparison of time series data, since such contour function can be considered as an example of time series.

Time series data are widely used in many scientific and practical areas, such as recognition of speech and music, hand-written text, electrocardiograms, stock exchange quotations, in bioinformatics, etc. The use of Euclidean metric (as well as the L_p metrics) for their classification often leads to large errors.

In the present paper in order to identify the object shape after the preliminary processing of the image we use the algorithm ArcHeight, one of the signature analysis algorithms, by using which one gets a contour function considered further as a time series. We briefly present the principles of the classical algorithm DTW that underlies the comparison of

time series data. The influence of noises on the value of DTW metric is theoretically analyzed. The results of simulations confirm the theoretical conclusion that the metric value is independent of noise values in a wide range of interval. Examples that show the area of applicability of the present method are presented. In the discussion, the advantages and disadvantage of the presented approach to the identification of contour functions are summarized. In conclusion, the direction of further studies in the field and the perspective of application are outlined.

2. Contour Function

Let us define a contour function as the result of a certain transformation of the 2d form (contour) object into a 1d function of the boundary representation. Most methods of constructing such functions are based on the signature analysis that uses the representation of the contour function with respect to the center of gravity [9]. There are also methods that use contours, but do not use the center of gravity, which can be also considered as signature methods, e.g., the algorithms by Chetverikov [10], Rosenfeld [11], Mokhtarian [12] or the arc-chord distance method [13, 14], later referred to as ArcHeight [15].

In the present paper the contour function of the object is obtained using the classical algorithm ArcHeight. This algorithm is based on calculating the length of the perpendicular from the middle of some segment of the curve (the object perimeter) to the chord connecting the end points of the segment. This perpendicular is calculated using the formula

$$d_i = \sqrt{\frac{((x_i - x_a)(y_b - y_a) - (y_i - y_a)(x_b - x_a))^2}{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}} \quad (1)$$

and is proportional to the value of curvature of the segment at the considered point [16].

The sequential tracing of the contour yields a certain tabulated function that characterizes the shape of the object. An example of such function for the silhouette of the aircraft JetCommander1121 is shown in Fig. 1.

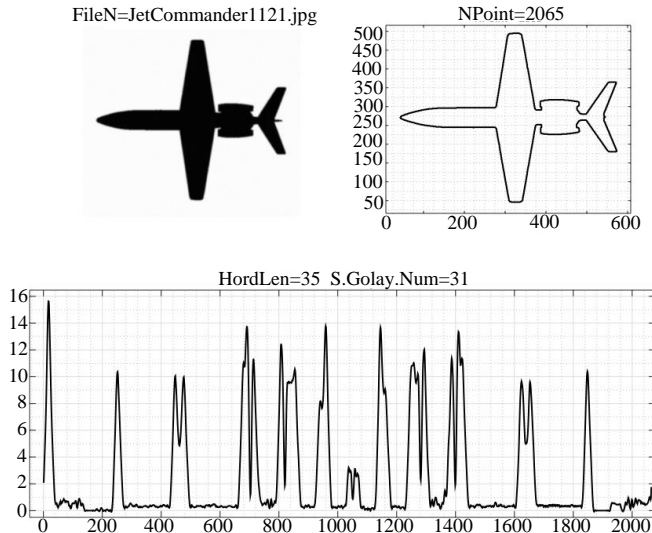


Figure 1. Silhouette of the aircraft JetCommander1121 with introduced noise at the level of 40 dB, its contour and its contour function calculated using the method ArcHeight. The number of contour points is 2064, the chord length is 35, the Savitzky-Golay filter length is 31 point

In the left upper corner of Fig. 1 the silhouette is shown, the right upper corner shows the contour of this, and at the bottom the resulting contour function, obtained using the ArcHeight method is presented. To obtain the contour function we used the following sequence of operations: image loading, filtering, conversion into binary black-and-white image, morphological cleaning of the residual noise, contour receiving, using of the algorithm ArcHeight for the contour function calculation, and its smoothing using Savitzky-Golay method.

Since the size of the objects on the image can be different when applying the ArcHeight method, we used the technique of dynamical setting of the curve segment size to eliminate the size influence. Experiments have shown that the optimal value of the chord is $L = K/100 + 14$, where L is the segment length and K is the total length of the contour in pixels.

Remark. To enhance the noise immunity of the method for large objects it is possible to use averaged values of coordinates of a few adjacent points rather than a single point as the end coordinates of the chord.

3. The Idea of DTW

Let us denote the contour functions of the object and the sample as the sequences of values $Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ and $C = c_1, c_2, \dots, c_i, \dots, c_m$, respectively, generally with $n \neq m$, and let us consider these functions to be time series data, so that the adjacent values of each series have similar time shifts. For comparing these sequences in the classical DTW method the matrix of distances (deformations) $D(i, j)$ with the dimensions $m \times n$ is constructed, where each element (i, j) of the matrix represents a certain distance $d(q, c)$ between two points q_i and c_i . Commonly this distance is calculated as a Euclidean one, i.e.,

$$d(q_i, c_i) = (q_i^2 - c_i^2)^{1/2}, \quad (2)$$

but it can be calculated as the norm $d(q_i, c_i) = |q_i - c_i|$ as well. Each element of the matrix corresponds to the flattened section between the points q_i and c_i . The purpose of the DTW algorithm is to construct a certain path $W = w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_K$, such that $\max(m, n) \leq K < m + n + 1$, obeying the following conditions:

- the boundary condition: for the initial and final points of the matrix diagonal $w_1 = (1, 1)$ and $w_K = (m, n)$;
- the continuity condition: for the adjacent points $w_k = (a, b)$ and $w_k = (a', b')$ it is necessary that $(a - a') \leq 1$ and $(b - b') \leq 1$;
- the monotonicity condition: for the adjacent points and it is necessary that $(a - a') \geq 0$ and $(b - b') \geq 0$.

From the theoretical variety of possible paths, the following one is chosen:

$$DWT(Q, C) = \min \left(\sqrt{\sum_{k=1}^K w_k / K} \right). \quad (3)$$

In Eq.(3), the divisor K is used to normalize the metric at different dimensions of the sequences Q and C . This path is found basing on dynamical programming by means of the formula

$$\gamma(i, j) = d(q_i, c_j) + \min\{\gamma(i - 1, j - 1), \gamma(i - 1, j), \gamma(i, j - 1)\}, \quad (4)$$

where $\gamma(i, j)$ is the accumulated path length and $d(q_i, c_j)$ is the path length from the starting point to the point (i, j) . As a result, a certain number is obtained characterizing the distance between the sequences Q and C , which will be denoted by ρ_{dtw} .

Figure 2 presents three matrices of distance.

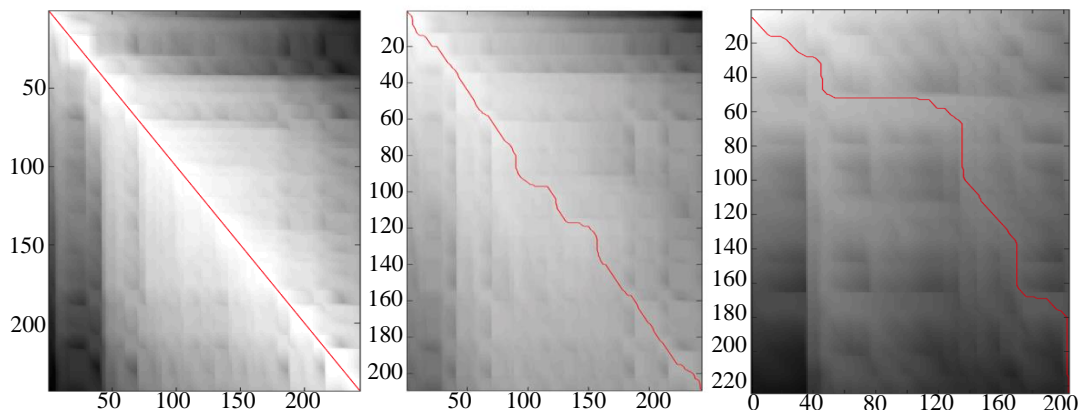


Figure 2. Three matrices of distance and the calculated paths for comparison of objects: EE (left); EE with distortion of one of the objects (middle), EN (right)

The left-hand one results from the comparison of two identical sequences SS (Sample-Sample), the middle one is obtained for a certain variation of one sequence with respect to another, and the right-hand one is obtained for different sequences SN (Sample-Non-Sample). The diagonal top-bottom line corresponds to the optimal path. The smaller is the deviation of this line from the diagonal, the smaller is the difference between the sequences.

Let us consider the problem of whether the minimal DTW path satisfies the definition of metric. For this aim, let us check the fulfilment of the metric requirements:

- the axiom of identity $d(x, y) \geq 0$, the equality to zero corresponding to $x = y$. Since the elements of the matrix of distances are calculated in an Euclidean space, it is obvious that each element of the matrix will be positive and, therefore, the condition is satisfied. When the sequences coincide, the distance along the principal diagonal will equal 0, since the Euclidean metric, calculated for each element of the diagonal, will be equal to zero;
- the axiom of symmetry $d(x, y) = d(y, x)$. This condition is also obviously valid, since the permutation of positions in the metric means the transposition of the matrix of distances;
- the triangle inequality $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$. Automatically follows from 1 and 2 being presented as $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

Thus, the use of the term “DTW metric” is fully justified.

Let us define the identification function, based on the DTW method, as

$$\lambda = \begin{cases} 1, & \rho_{dtw} < \varepsilon, \\ 0, & \rho_{dtw} \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (5)$$

where ρ_{dtw} is the DTW metric, and ε is the classification tolerance (CT) for the considered method.

Let us analyze some results of DTW metric calculations for realistic data. As an example, consider the contour functions of aircraft silhouettes presented in Fig. 3¹.

¹Such objects were chosen on purpose, since the silhouettes of the planes do not differ strongly, so it is interesting to classify such objects (i.e., to divide them into classes).

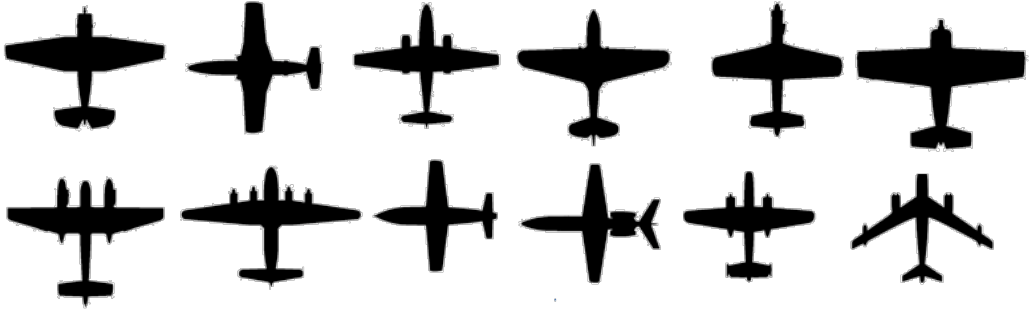


Figure 3. Silhouettes of aircrafts¹ (from top to bottom, from left to right) Grumman TBF-1, Aero L-29, Arado Ar 234B, Curtiss P-40F, Dornier DO-335A, Grumman F4F-3, Arado Ar 240, Avro 668, Bell-X1, Jet Commander 1121, Mitchell-D-25C, Boeing B-47E (strongly reduce)

Table 1 presents the values of metrics calculated for all combinations of aircraft silhouettes in Fig. 3. At the principal diagonal, the values of DTW metric calculated for the aircrafts of the same name are located. For combinations of different planes (SN) we get the mean value $\mu = 0.639$ and the variance $\sigma = 0.045$, which allows the conclusion that the mean value for sample-sample combinations is essentially smaller than for sample-non-sample combinations. This is an evidence of DTW metric efficiency in the object shape recognition.

One more issue of importance is the type of metric distribution under different distortions of the contour function. The simulation has shown that the distribution of the DTW metric value under the influence of noise occurs in accordance with the normal law. Thus, e.g., Fig. 4 presents a histogram of the metric values and the distribution density function calculated on its base for the Avro668 plane SS combinations. The metric value is different from zero, since in the process of investigation a noise was added on the plane silhouette that distorted the shape of the object and, finally, the contour function.

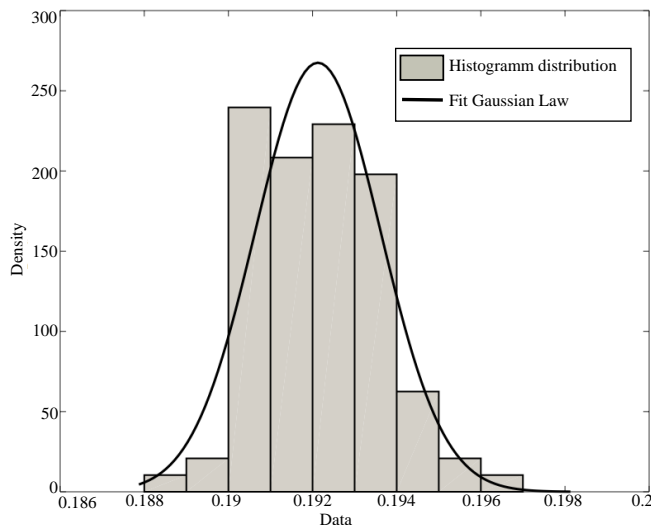


Figure 4. Histogram and metric distribution density function for the Avro668 plane SS combinations

Table 1

DTW Metric Values

-	Grumman TBF-1	Aero L-29	Arado Ar234B	Arado Ar240	Avro 668	Bell-X1	Boeing B47E	Curtiss P-40F	Dornier DO335A	Grumman F4F-3	JetCom-mander-1121	Mitchell-D-25C
Grumman TBF-1	0.000	0.533	1.116	0.927	0.342	0.504	0.480	0.480	0.526	0.509	0.556	0.923
Aero L-29	0.533	0.000	0.804	0.741	0.431	0.531	0.590	0.467	0.488	0.565	0.544	0.727
Arado Ar234B	1.116	0.804	0.000	0.688	0.998	0.794	1.214	0.941	0.777	0.765	0.953	0.559
Arado Ar240	0.927	0.741	0.688	0.000	0.864	0.700	1.026	0.944	0.789	0.780	0.843	0.698
Avro 668	0.342	0.431	0.998	0.864	0.000	0.418	0.361	0.313	0.388	0.321	0.475	0.764
Bell-X1	0.504	0.531	0.794	0.700	0.418	0.000	0.563	0.485	0.429	0.495	0.568	0.641
Boeing B47E	0.480	0.590	1.214	1.026	0.361	0.563	0.000	0.479	0.475	0.507	0.586	0.972
Curtiss P-40F	0.480	0.467	0.941	0.944	0.313	0.485	0.479	0.000	0.344	0.410	0.607	0.778
Dornier DO335A	0.526	0.488	0.777	0.789	0.388	0.429	0.475	0.344	0.000	0.355	0.588	0.655
Grumman F4F-3	0.509	0.565	0.765	0.780	0.321	0.495	0.507	0.410	0.355	0.000	0.569	0.628
Jet Com-mander-1121	0.556	0.544	0.953	0.843	0.475	0.568	0.586	0.607	0.588	0.569	0.000	0.882
Mitchell-D-25C	0.923	0.727	0.559	0.698	0.764	0.641	0.972	0.778	0.655	0.628	0.882	0.000

The verification of the hypothesis of normal distribution has shown high accuracy of agreement with the parameters $\mu = 0.192127$; $\sigma = 0.001491$. Multiple experiments with other silhouettes also confirm the normal distribution law for the values of metrics under the effect of noise.

4. Specific Features of DTW Metric Application

Under process identification real objects, their size and position with respect to the sample are not known in advance. Therefore, it is necessary to use some algorithmic method for correct matching of contour functions in the process of recognition.

Moreover, even for the rotation of a single object, the contour function shifts by a certain number of points corresponding to the rotation angle. An example of such contour functions with the cyclic shift by nearly 640 points for the silhouette of BoeingB47E is shown in Fig. 5.

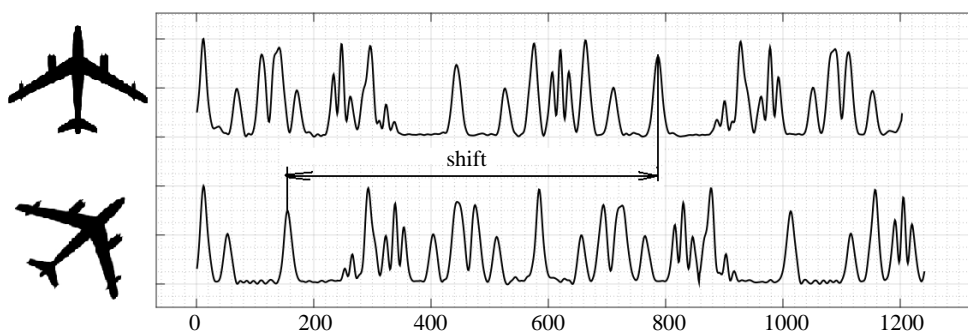


Figure 5. BoeingB47E aircraft silhouettes (reduce) with different angle of rotation and their contour functions with cyclic shift

Calculating the DTW metric for cyclically shifted contour functions from Fig. 6, we get the value $\rho_{dtw} = 0.7174$, which corresponds to the SN combination for the compared contour functions. Since the orientation of the object silhouette, i.e., the shift of one contour function with respect to another is not known a priori, some operations are to be performed to resolve the problem. First, assume that the number of points of the sample exceeds that of the object to be recognized, i.e., $m > n$. Otherwise, we change the object for the sample and vice versa. Second, it is necessary to augment the sample from the right by the number of points, corresponding to the object, i.e., $C^* = c_1, c_2, \dots, c_m, c_1, c_2, \dots, c_n$. Third, it is needed to organize the sequential comparison of the object with the fragment of the augmented sample. In other words, we calculate the DTW as a function of the object position on the augmented function C^p of the sample in the form $FDTW(Q, C^p(i)) = \min \left(\sqrt{\sum_{k=1}^K w_k / K} \right)$, where $C^p(i) = C^*(c_i, c_{i+1}, \dots, c_{i+n-1})$, $i = \overline{1, n}$. Here C^p at a certain i determines the value of shift of the window moved along the sample, in which the values of the DTW metric is calculated. The metric value will be calculated as $\rho_{dtw} = \min_i (FDTW(Q, C^p(i)))$.

5. Noise Resistance

In the development of new methods for identification of the object shape one has to take the influence of different factors into account [17]. One of them is the permanent presence of noises in the real image, which finally distorts the contour function. Let us estimate the influence of noises on the DTW metric value.

Let the contour function be presented as $Q = q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_n$ for the object and as $C = q_i + \xi_i, i = \overline{1, n}$ for the sample, where ξ_i is a certain value of the noise component distributed according to the normal law and added to each value of the numerical sequence. Let us substitute the values of C into Eq. (2) and calculate the distance for each value of i :

$$d(q_i - c_i) = (q_i - (q_i - \xi_i))^2, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

In fact, the result of the calculation means that under the influence of noises the value of metric converges to the χ^2 law [18]¹. According to the central limit theorem, when i converges to infinity for a large number of degrees of freedom k , the distribution of the random variable $Y \rightarrow \chi^2(k)$ can be approximated by the normal distribution, with parameters $Y = N(k, 2k)$, with $k \rightarrow \infty$ (more exactly, $\frac{Y-k}{\sqrt{2k}} \rightarrow N(0, 1)$). Therefore, the value of metric in the sum of Eq. (6) for a large number point of sequence must tend to zero. Hence, the value of metric should not change under the addition of noises to the contour function in a wide range of the values, determining the shape of objects.

Let us verify this statement by simulation using the Matlab software. We impose random noise on the contour function (series), e.g., the one obtained from the silhouette of the AeroL29 aircraft, using the built-in function *awgn* that allows the addition of noises to an array of points with the level expressed in dB². Let us calculate the values of metric using Eq. (4) with Eq. (6) taken into account, starting from the signal-to-noise ratio 100 dB and gradually reducing it to 3 dB with the step of 1 dB. The simulation results for three silhouettes of AeroL29, JetCommander1121, and MitchellD25C shown in Fig. 6 demonstrate that the metric remains unchanged practically until the noise level becomes comparable with the signal level.

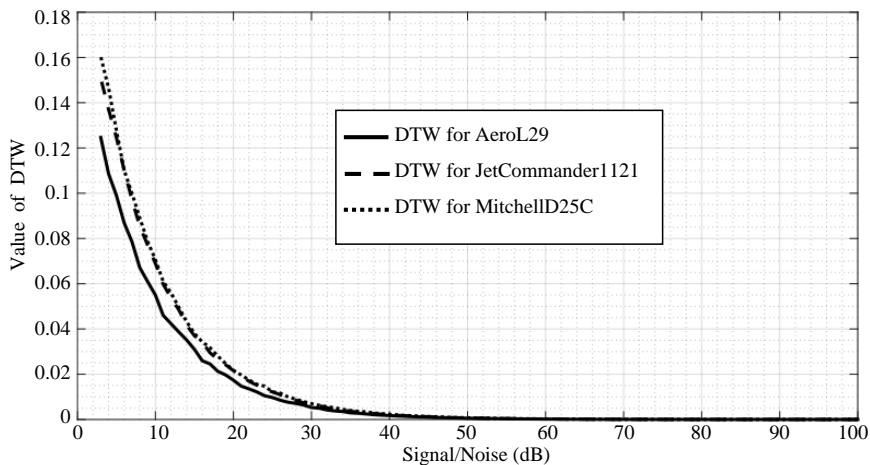


Figure 6. Metric values versus the noise level for AeroL29 (solid line), JetCommander1121 (dashed line), and MitchellD25C (dash-dotted line)

Basing on the considerations presented above, we conclude that the DTW metric is persistent against the noise in a wide range of values of noise.

¹In this paper it is shown that the image noises always lead to the normal law of distribution for metric.

²Due to the normal distribution of the noise component, the addition of noise to the contour function is equivalent to the addition of noise to the image with its subsequent processing and generation of contour function.

6. Discussion and Conclusion

The DTW metric offers wide possibilities of object shape recognition. The disadvantage of the algorithm include high computation complexity of calculating the metric $O(mn)$ and, as a consequence, essential increase of the computation time for sequences of high dimensions.

High potentialities are related to the application of DTW metric to the recognition of graphical objects shape. The capabilities of DTW allow the identification of objects, for which the description is based on the nonlinear variation of the contour function step that occurs in the case of object shape distortion. In these cases, the metrics of the L_p type are inapplicable. The analysis of the DTW metrics demonstrates its resistance against the noise, which significantly extends the area of its application. Besides the identification of the object shapes, this metric is widely used in speech recognition, in medicine, bioinformatics, and economics in the analysis of trends, where the parasitic noise level can be very high, etc.

Acknowledgments

The work was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No. 16-07-00556.

References

1. M. Seul, L. O’Gorman, M. Sammon, Practical Algorithms for Image Analysis, Cambridge University Press, 2000.
2. W. K. Pratt, Digital Image Processing (Fourth edition), Wiley, 2007.
3. R. O. Duda, P. E. Hart, Pattern Classification and Scene Analysis, Wiley, 1973.
4. R. Gonzalez, R. Woods, Digital Image Processing, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1992.
5. D. Marr, Vision: A Computational Investigation Into the Human Representation and Processing of Visual Information, Published March 15th 1983 by W. H. Freeman, 1983.
6. R. Klette, Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Image Analysis Usa, Morgan Kaufmann, 2004.
7. K. William, Pratt Digital image processing, Wiley publication, 1978.
8. S. Mark, S. Nixon Alberto, Aguado Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision Third edition, Elsevier, 2012.
9. D. H. Ballard, C. M. Brown, Computer Vision, Prentice-Hall. Inc., 1982.
10. D. Chetverikov, A Simple and Efficient Algorithm for Detection of High Curvature Points in Planar Curves, Vol. 2756, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003, pp. 746–753. doi:10.1007/978-3-540-45179-2_91.
11. A. Rosenfeld, E. Johnston, Angle Detection on Digital Curves, IEEE Transactions on Computers C-22 (1973) 875–878. doi:10.1109/TC.1973.5009188.
12. F. Mokhtarian, A. K. Mackworth, A Theory of Multiscale, Curvature-Based Shape Representation for Planar Curves, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 14 (1992) 789–805. doi:10.1109/34.149591.
13. U. Ramer, An Iterative Procedure for the Polygonal Approximation of Plane Closed Curves, Computer Graphics Image Processing 1 (1972) 244–256. doi:10.1016/S0146-664X(72)80017-0.
14. T. Y. Phillips, A. Rosenfeld, A Method for Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance, Pattern Recognition Letters 5 (1987) 285–288. doi:10.1016/0167-8655(87)90059-6.
15. Y. Lin, J. Dou, H. Wang, Contour Shape Description Based on an Arch Height Function, Journal Pattern Recognition 25 (1992) 17–23. doi:10.1016/0031-3203(92)90003-2.

16. J. H. Han, T. Poston, Chord-to-Point Distance Accumulation and Planar Curvature: a New Approach to Discrete Curvature, *Pattern Recognition Letters* 22 (2001) 1133–1144. doi:10.1016/S0167-8655(01)00063-0.
17. H. Ding, G. Trajcevski, P. Scheuermann, X. Wang, E. J. Keogh, Querying and mining of time series data: experimental comparison of representations and distance measures, *PVLDB* 1 (2008) 1542–1552. doi:10.14778/1454159.1454226.
18. I. M. Gostev, About Modelling and Estimation of Classification Tolerance, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Applied and Computer Mathematics* 3 (1) (2004) 85–92, in Russian.

УДК 519.683.8:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-331-342

О влиянии шумов на значение метрики DTW при идентификации формы объектов

И. М. Гостев*, Л. А. Севастьянов†

* *Кафедра управления информационными системами и цифровой инфраструктурой
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
ул. Мясницкая, д. 20, Москва, Россия, 101000*

† *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе изложена одна из методологий по обработке изображений и распознавания формы графических объектов. В ней на первом этапе производится предварительная обработка изображения с целью выделения характерных признаков формы объектов. В качестве таких признаков были использованы контуры. Для преобразования 2D контуров объектов в одномерную контурную функцию был использован метод ArcHeight. Для идентификации контурных функций разработан алгоритм на основе метрики DTW. Введено определение идентификационной функции, основанной на этом методе. Изложены особенности применения метрики DTW при идентификации формы объектов. Приведены матрицы расстояний комбинаций эталон–эталон и эталон–неэталон. Проанализированы результаты вычислений метрики DTW на большом количестве реальных данных. Показано, что разработанный алгоритм позволяет идентифицировать форму объектов независимо от их положения и угла поворота на изображении. Исследовано влияние шумов, наложенных на изображение объекта, на значение метрики. Получены теоретические и практические результаты такой зависимости, которые показывают, что в широком диапазоне (до отношения сигнал/шум 10 дБ) значение метрики практически не изменяется. Отмечены положительные стороны и недостатки предложенного алгоритма при идентификации формы объекта.

Ключевые слова: обработка изображений, распознавание образов, метрики, DTW, шумы

Литература

1. *Seul M., O’Gorman L., Sammon M. Practical Algorithms for Image Analysis.* — Cambridge University Press, 2000. — 295 p.
2. *Pratt W. K. Digital Image Processing (Fourth edition).* — Wiley, 2007. — 807 p.
3. *Duda R. O., Hart P. E. Pattern Classification and Scene Analysis.* — Wiley, 1973.
4. *Gonzalez R., Woods R. Digital Image Processing.* — Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1992. — 191 p.
5. *Marr D. Vision: A Computational Investigation Into the Human Representation and Processing of Visual Information.* — Published March 15th 1983 by W. H. Freeman, 1983. — 397 p.
6. *Klette R. Digital Geometry: Geometric Methods for Digital Image Analysis Usa.* — Morgan Kaufmann, 2004.

7. *William K. Pratt* Digital image processing. — Wiley publication, 1978. — 750 p.
8. *Mark S., Nixon Alberto S. Aguado* Feature Extraction & Image Processing for Computer Vision Third edition. — Elsevier, 2012. — 622 p.
9. *Ballard D. H., Brown C. M.* Computer Vision. — Prentice-Hall. Inc., 1982. — 548 p.
10. *Chetverikov D.* A Simple and Efficient Algorithm for Detection of High Curvature Points in Planar Curves // Computer Analysis of Images and Patterns. CAIP 2003. Lecture Notes in Computer Science / Ed. by N. Petkov, M. A. Westenberg. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. — Vol. 2756. — Pp. 746–753. — DOI: 10.1007/978-3-540-45179-2_91.
11. *Rosenfeld A., Johnston E.* Angle Detection on Digital Curves // IEEE Transactions on Computers. — 1973. — Vol. C-22, issue 9. — Pp. 875–878. — DOI: 10.1109/TC.1973.5009188.
12. *Mokhtarian F., Mackworth A. K.* A Theory of Multiscale, Curvature-Based Shape Representation for Planar Curves // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 1992. — Vol. 14, issue 8. — Pp. 789–805. — DOI: 10.1109/34.149591.
13. *Ramer U.* An Iterative Procedure for the Polygonal Approximation of Plane Closed Curves // Computer Graphics Image Processing. — 1972. — Vol. 1, issue 3. — Pp. 244–256. — DOI: 10.1016/S0146-664X(72)80017-0.
14. *Phillips T. Y., Rosenfeld A.* A Method for Curve Partitioning Using Arc-Chord Distance // Pattern Recognition Letters. — 1987. — Vol. 5, issue 4. — Pp. 285–288. — DOI: 10.1016/0167-8655(87)90059-6.
15. *Lin Y., Dou J., Wang H.* Contour Shape Description Based on an Arch Height Function // Journal Pattern Recognition. — 1992. — Vol. 25, issue 1. — Pp. 17–23. — DOI: 10.1016/0031-3203(92)90003-2.
16. *Han J. H., Poston T.* Chord-to-Point Distance Accumulation and Planar Curvature: a New Approach to Discrete Curvature // Pattern Recognition Letters. — 2001. — Vol. 22, issue 10. — Pp. 1133–1144. — DOI: 10.1016/S0167-8655(01)00063-0.
17. Querying and mining of time series data: experimental comparison of representations and distance measures / H. Ding, G. Trajcevski, P. Scheuermann et al. // PVLDB. — 2008. — Vol. 1, issue 2. — Pp. 1542–1552. — DOI: 10.14778/1454159.1454226.
18. *Гостев И. М.* О моделировании и оценке классификационного допуска // Вестник РУДН. Серия: Прикладная и компьютерная математика. — 2004. — Т. 3, № 1. — С. 85–92.

© Gostev Ivan M., Sevastianov Leonid A., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Gostev I. M., Sevastianov L. A. Influence of Noise on the DTW Metric Value in Object Shape Recognition // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 4. — Pp. 331–342. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-331-342.

For citation:

Gostev I. M., Sevastianov L. A. Influence of Noise on the DTW Metric Value in Object Shape Recognition, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 331–342. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-331-342.

Сведения об авторах:

Гостев Иван Михайлович — доктор технических наук, профессор кафедры управления информационными системами и цифровой инфраструктурой Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (e-mail: igostev@hse.ru, тел.: +7(495)7729590)

Севастьянов Леонид Антонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevastianov-la@rudn.ru, тел.: +7(495)9522572)

Information about the authors:

Gostev Ivan M. — Doctor of Technical Sciences, professor of Department of Information Systems and Digital Infrastructure Management of National Research University “Higher School of Economics” (e-mail: igostev@hse.ru, phone: +7(495)7729590)

Sevastianov Leonid A. — Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: sevastianov-la@rudn.ru, phone: +7(495)9522572)

UDC 539.17

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-343-356

MAPLE program for modelling hydrogen-like atoms in quantum mechanics with non-negative distribution function

Alexander V. Zorin*, Nikolay P. Tretyakov^{†‡}

* Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation

[†] Department of Applied Information Technologies
The Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration
Prospect Vernadskogo, 82, Moscow 119571, Russian Federation

[‡] Department of Mathematics and Information Technologies
Russian State Social University
Wilhelm Pieck str., 4-1, Moscow, 119571, Russian Federation

The program is proposed for a realization of the symbolic algorithm based on the quantum mechanics with non-negative probability distribution function (QDF) and for calculations of energy levels for hydrogen-like atoms. The program is written up in the language MAPLE. In the framework of the algorithm an original Maple package for calculations of necessary functions, such as hydrogen wave functions, Sturmian functions and their Fourier-transforms, Clebsch–Gordan coefficients, etc. is proposed. Operators of observables are calculated on the basis of the QDF quantization rule. According to the Ritz method, eigenvalues of Ritz matrices represent spectral values of the quantity under investigation, i.e. energy. As an example, energy levels of hydrogen-like atoms are calculated and compared with experimental data retrieved from the NIST Atomic Spectra Database Levels Data. It turns out that this theory seems to be equivalent to the traditional quantum mechanics in regard to predictions of experimental values. However, the existence of a phase-space probabilistic quantum theory may be an important advance towards the explanation and interpretation of quantum mechanics.

Key words and phrases: quantum mechanics, transition probability, computer algebra, non-negative quantum distribution function

1. Introduction

In [1] several computational techniques for investigation of characteristics of atomic structures were proposed. This method goes far beyond the techniques described in [2]. A deficiency of the single-configurational approximation was noted in [3]. D. Layzer [4] suggested the use of multi-configurational approximation restricting to the case of configurations belonging to the same complex (i.e. with the same parities and the same principal quantum numbers). By contrast, Eissner and Nussbaumer [1] consider interactions of configurations belonging to different complexes. Nussbaumer [5] introduced some refinement of the technique for calculation of radial functions as compared with variational approaches (for instance, Thomas–Fermi method). In particular, the procedure includes an effective charge z (as compared with the real one Z):

$$Z - N_1 < z < Z$$

which had been introduced in [4]. Calculations of radial functions were used in calculations of oscillator strengths and transitional probabilities. It is worth noting that the convergence of calculational results to experimental data while more and more complexes are taken into account was strictly demonstrated in [5].

The electron correlation effects on the oscillator strengths for resonance transitions in alkaline earth atoms have been studied by many authors. The conventional approach

consists in improving Hartree–Fock-like wavefunctions by introducing configuration interaction (CI) while using the usual dipole operator for the oscillator strength. This approach was used by Burke et al. [6] for Be, Zare [7] and Weis [8] for Mg, and Friedrich and Trefftz [9] for Ca and Ba.

An alternative approach was adopted in [10], which uses an effective operator in addition to the common dipole operator and in so doing keeps a rather simple structure of corresponding wave functions. This method had been previously proposed by Hameed [11, 12] and it works well with alkaline metals and provides slightly worse results when applied to alkaline earth elements. However, the modification of the method proposed in [10], works very well for alkaline earths as well. Relativistic corrections introduced in [13, 14] were included in the extension [15] of the package [5].

It is worth noting that the whole cycle of the above-mentioned investigations has been elaborated in detail by Russian authors as well. The books [16–18] present a good introduction and an excellent review of the problem. Among other things they suggest that radial one-particle functions obtained using semi-empirical potentials, are best suited for calculations of transitional probabilities.

Quantum mechanics with non-negative distribution function (QDF) is an alternative physical theory with a developed theoretical formalism [19–28]. However, the weak point in this theory lays in the fact that until the present time no truly extensive investigations of properties of real quantum systems have been conducted. This is due to the much more complex structure of the QDF theory as compared with traditional quantum mechanics. Generations of operators of observables include calculations of complex multi-dimensional integrals. Furthermore, this leads to rather cumbersome expressions for operators, resulting in the absence of analytical approaches to calculations of spectra. For purposes of effective computer calculations, it is necessary to combine analytical and numerical methods, i.e. creation of a package of programs mating with each other. The evidence for the capacity of the QDF theory to obtain the same results as conventional quantum mechanics would mean an important advance in the interpretation of quantum mechanics as a statistical theory.

The present work solves the analytical part of the above-mentioned problem. The MAPLE package is used to generate necessary functions, their Fourier-transforms, to calculate integrals, operators and matrices according to formulae of QDF. Besides, numerical potentialities of MAPLE are exploited as well in calculations of eigenvalues of Ritz matrices. This program has been being developed for several years by us and co-authors, starting with [27].

The computation time raises as the dimension of Ritz matrices does. On the other hand, for small dimensions of matrices, the accuracy of the computations is insufficient. The hardware (processor and memory, for example) available for the computation may restrict either the degree of accuracy or the computation time. As a result of comparisons and tests of various program variants, we came to the conclusion that the dimension of the matrices 91×91 is optimal. Thus, this article sums up the many years of work on the creation of a package of programs and poses challenges for future research.

2. Quantum Mechanics with Non-Negative Distribution Function

Operators in quantum mechanics with non-negative QDF are defined up to an arbitrary set of integrable functions of configuration space and time $\phi_k(q, t)$, normalized by the condition:

$$\sum_k \int |\phi_k(q, t)|^2 dq = 1. \quad (1)$$

By virtue of square integrability the functions ϕ_k allow the Fourier transformation

$$O(A)U(q, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \phi(q - \xi, p - \eta) e^{\frac{i}{\hbar}(q-q')p} A(\xi, \eta, t) U(q', t) d\xi d\eta dp dq', \quad (2)$$

where \hbar is an arbitrary action-dimensional constant. In what follows it is convenient to introduce a new function of phase space and time, constructed on the basic set (1) in the following manner:

$$\phi(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}qp} \sum_k \phi_k(q, t) \tilde{\phi}_k^*(p, t). \quad (3)$$

Then the rule for construction of quantum-mechanical operators with non-negative QDF may be formulated as follows: a classical function $A(q, p, t)$ corresponds to a linear operator $O(A)$, which acts on a generic Fourier-transformable function $u(q, t)$ in the following way:

$$O(A)U(q, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \int \phi(q - \xi, p - \eta) e^{\frac{i}{\hbar}(q-q')p} A(\xi, \eta, t) u(q', t) d\xi d\eta dp dq'. \quad (4)$$

It follows that the formulae for calculation of means are in fact equivalent:

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(q, t) O(A) \psi(q, t) dq \quad (5)$$

and

$$\langle A \rangle_\rho = \int A(q, p, t) F_\rho(q, p, t) dq dp, \quad (6)$$

where the expression

$$F_\psi(q, p, t) = (2\pi\hbar)^{-N} \sum_k \left| \int \phi_k^*(q - \zeta, t) \phi(\zeta, t) e^{-\frac{i}{\hbar}(\zeta,p)} \right|^2 \quad (7)$$

defines the relation between wave functions and phase space probability densities.

In this work we use the so called sturmian functions as auxiliary functions 1. The sturmian functions satisfy the equation [29]

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} + a_{nl}V(r) - E_0 \right) S_{nl}(r) = 0, \quad (8)$$

with the Coulomb potential $V(r) = -2/r$ and with boundary conditions $S_{nl}(0) = 0, S_{nl}(\infty) = 0$. Here $n = 1, 2, 3, \dots; l = 0, 1, \dots, n - 1; E_0 < 0; a_{nl} = kn; k = \sqrt{-E_0}$. The solution of the equation (8) may be expressed in terms of the associated Laguerre polynomials:

$$S_{nl}(r) = N_{nl} e^{-kr} (2kr)^{l+1} L_{n+l}^{2l+1}(2kr),$$

where $k = \sqrt{-E_0}$ and the normalization constant are:

$$N_{nl}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3} \right\}.$$

In our package SourceFunction we use sturmian functions divided by r and normalized to 1. In the case of $n = 1, l = 0$, sturmian and usual Coulomb wave functions coincide

exactly, but as n grows, the amplitude and number of harmonics of sturmian functions differ from the Coulomb ones.

In the course of calculations some formulae are very useful, such as products of spherical harmonics

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) = \sum_{L, M} \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2L + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{L 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{L M} Y_{L M}(\theta, \phi), \quad (9)$$

as well as the formula for the integral of the triple product of spherical functions

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) Y_{l_3 m_3}^*(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l_3 + 1)}} C_{l_1 0 l_2 0}^{l_3 0} C_{l_1 m_1 l_2 m_2}^{l_3 m_3} Y_{L M}(\theta, \phi) \quad (10)$$

and the expansion:

$$\frac{1}{|\vec{q} - \vec{s}|} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l + 1} \frac{r_-^l}{r_+^{l+1}} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta_q, \phi_q) Y_{lm}^*(\theta_s, \phi_s), \quad (11)$$

where $r_- = \min(|\vec{q}|, |\vec{s}|)$, $r_+ = \max(|\vec{q}|, |\vec{s}|)$.

The main goal of the program is a numerical calculation of the spectrum of hydrogen and some alkali metals, using the Ritz method with 91×91 matrices. This corresponds to the use of the basis of functions with the values of the principal quantum number $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. The obtained values are then compared with experimental data to find the optimal parameters that provide the best fit for the data. In addition, an algorithm was developed for the numerical calculation of transition probabilities for hydrogen-like atoms and a procedure for comparing these data with those obtained experimentally.

According to the second theorem of Kato, if $V(r) \rightarrow 0$ for $|\vec{r}| \rightarrow \infty$, then the essential spectrum of the operator \hat{H} coincides with the essential spectrum of the operator \hat{H}_0 , namely, it is half-line $R^+ = [0, \infty)$.

The essential spectrum of an operator consists of all points of the spectrum, with the exception of isolated eigenvalues of finite multiplicity. Thus, the spectrum consists of two disjoint sets: eigenvalues of finite multiplicity and the essential spectrum.

The Hamilton operator of a hydrogen-like atom in a quantum mechanics with non-negative distribution function is $\hat{H} = \hat{H}_0 + c\hat{I} + V(\vec{r})$. The function $V(\vec{r})$ satisfies the conditions of the second Kato theorem. Therefore, the discrete spectrum of finite multiplicity lies below the essential spectrum and belongs to the interval $[c - 1, c)$. Consequently, for the Hamilton operator $O(H)$, we apply the minimax Rayleigh-Ritz method, and the eigenvalues λ_j^n for N -dimensional Ritz matrices converge to the eigenvalues $\lambda_j^\infty = \lambda_j$ of this operator.

The Hamiltonian operator $O(H)$ of a hydrogen-like atom in quantum mechanics with nonnegative quantum distribution function is defined by the relations

$$O_{\{\phi_k\}}(H) = \hat{H} + C_{\{\phi_k\}} \hat{I} + V_{\{\phi_k\}}(\vec{r})$$

for a set of valid functions $\{\phi_k \in L_2(R^3)\}$. The operator $O(H)$ is self-adjoint and bounded below by a constant $(C - 1)$. The constant C depends on the choice of auxiliary functions.

In view of the nonorthogonality of the used system of coordinate functions, to find the spectrum, it is necessary to solve a generalized eigenvalue problem

$$M\vec{x} = \lambda B\vec{x}, \quad (12)$$

where M is the Ritz matrix $O(H)$, and B is the matrix of scalar products of coordinate functions. The elements of the Ritz matrix are calculated by the formula:

$$M_{kl}^j = \int \psi_k^{E_0}(\vec{r}) \left[O_j \left(\frac{\vec{p}^2}{2\mu} \right) + O_j \left(-\frac{Z_{\text{eff}} e^2}{r} \right) \right] \psi_l^{E_0} d\vec{r}. \quad (13)$$

The result is a matrix that depends on the parameters E_0, b_j, a_j and Z_{eff} . These parameters were used to find the spectrum that best fits the experimental data. The calculations were carried out using the Ritz matrices of dimensions 55 and 91, which correspond to the first five or six principal quantum numbers n . Nevertheless, even for such limited dimensions, it was possible to obtain a spectrum of hydrogen and some alkali metals with high accuracy. To assess the quality of the model, we used the function of the quadratic discrepancy

$$F_\Omega = \sum_{k \in \Omega} (\lambda_k - E_k^{\text{exp}})^2 / (E_k^{\text{exp}})^2. \quad (14)$$

As shown in our works [22,24,25,27,28], for a hydrogen atom, the first 30 spectral values may be obtained with high accuracy. Moreover, the only sensitive parameter was the value E_0 . For parameters b_j in the case of a hydrogen atom, the optimal value regardless of the number of spectral values in the residual is the value $b_j = 0$. As to the coefficients a_j , only $a_1 = 1$, and the remaining coefficients in the optimization turned to zero.

In contrast to the hydrogen atom, in the case of alkali metals it is impossible to build a single effective potential capable of describing the energy levels for different quantum numbers n, l . This occurs due to the interaction of the external electron with internal electrons, and the nature of this interaction is fundamentally different for different values of the orbital number l .

To verify the quality of the model and the correctness of the choice of auxiliary functions, transition probabilities may be calculated. In the described program, the transition probabilities are calculated by the Galerkin method with the Sturm functions of the hydrogen atom as coordinate functions, which allows us to reduce the calculations to algebraic operations with matrix elements that are calculated analytically.

3. The Program

The program is written up in the language MAPLE according to the algorithm described above. Figure 1 presents the general scheme of the program.

It consists of nine stages. The first stage represents the original package for calculations of necessary functions. The second stage is devoted to calculations of potential energy operators. The third stage is devoted to calculations of kinetic energy operators. The fourth stage is devoted to calculations of Ritz matrices. The fifth stage is devoted to generation of codes for Ritz matrices for later use in other programs. The sixth stage is devoted to calculation of spectra of the Hamilton operator for an electron in hydrogen-like atoms. The seventh stage is devoted to optimization of parameters of the model for hydrogen. The final stage is devoted to optimization of parameters of the model for alkaline metals. Finally, the ninth part is the calculation of transition probabilities for model verification. The structures of the parts of the software package are shown in more detail: for calculating auxiliary functions (Figure 2), for calculating matrices and energy levels (Figure 3), and for calculating transition probabilities (Figure 4).

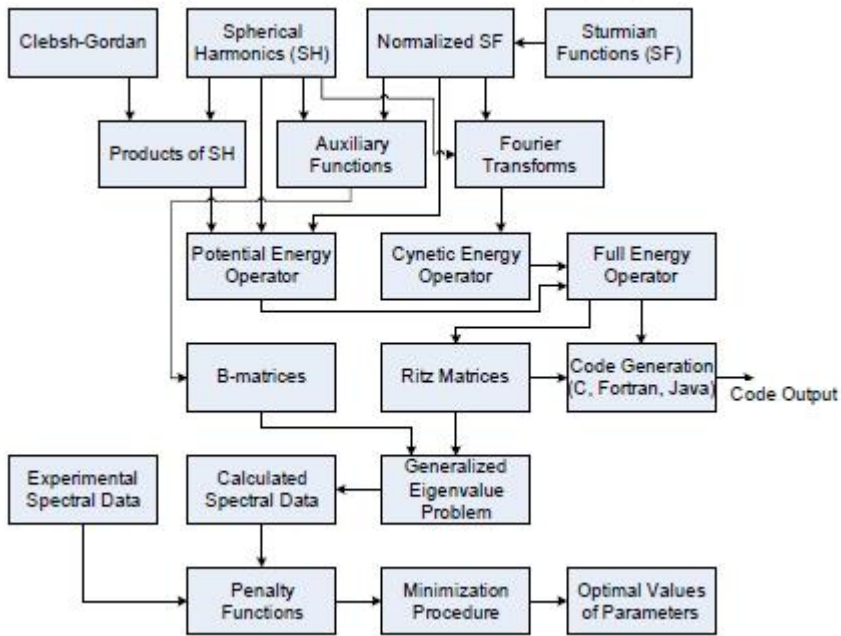


Figure 1. The global structure of the program, QDF01

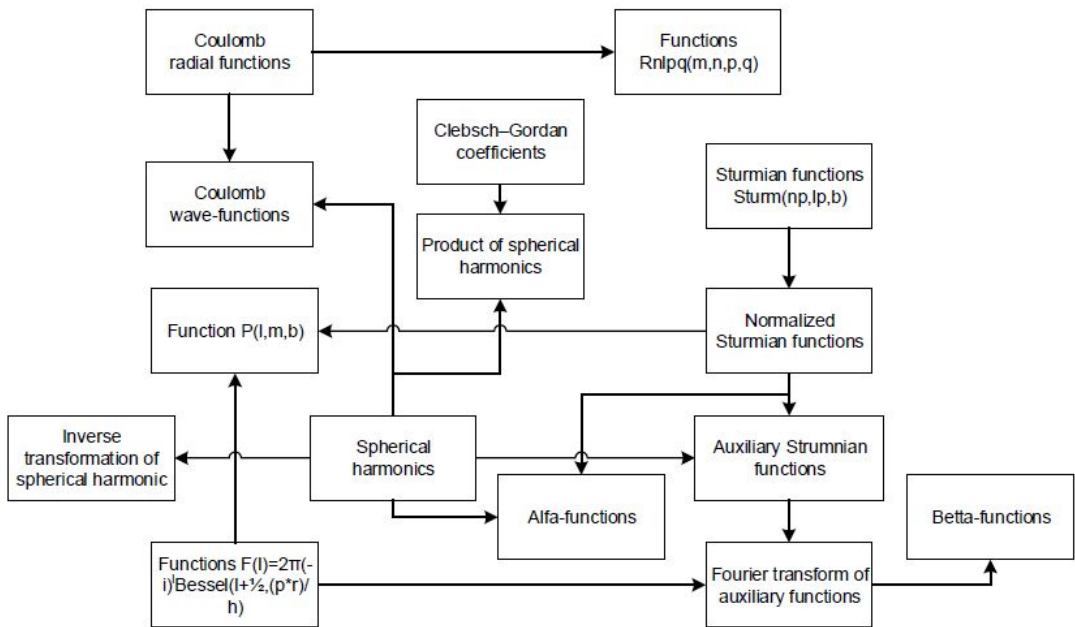


Figure 2. The structure of the part of the program for calculating auxiliary functions

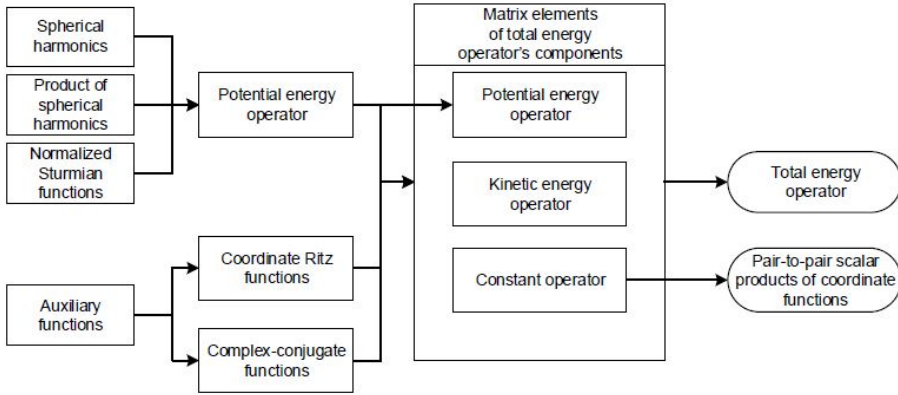


Figure 3. The structure of the part of the program for calculating matrices and energy levels

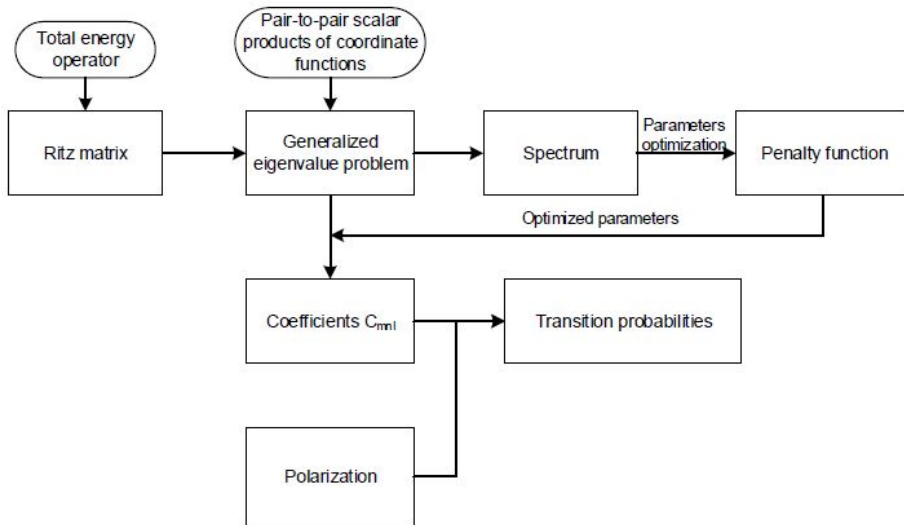


Figure 4. The structure of the part of the program for calculating transition probabilities

The subpackage “SourceFunctions” consists of the following parts. Calculation of spherical harmonics according to well-known formulae. The Legendre polynomials are generated using the Rodrigues formula. Calculations of sturmian functions, further these functions are normalized. Then follow calculations of auxiliary QDF functions (as products of sturmian functions and spherical harmonics) and calculations of fourier transforms of auxiliary functions. Let us note that all integrals are calculated analitically.

Then follow calculation of Clebsh–Gordan $SO(3)$ coefficients according to common well-known formulae. We do not intend to carry out extensive calculations and investigations in this field, since there exist excellent Racah and Bethe packages and their extensions [30–33]. Calculations of products of spherical harmonics according to (9) etc.

Matrix elements of Ritz matrices (13) are computed and written to external files. According to the Ritz method, eigenvalues of Ritz matrices represent spectral values of

the quantity under investigation, i.e. energy. As stated above, the algorithm consists in solving the generalized eigenvalues problem $M\vec{x} = \lambda B\vec{x}$ where M is a Ritz matrix and B is the matrix of pair-to-pair scalar products of coordinate functions. The program allows calculating of Ritz matrices of arbitrary dimension. However, there exist apparatus restrictions due to the degree of the dimension. Currently, calculations with dimensions 55 and 91 are available.

The parameter E_0 is adjustable. For example, Figure 5 shows the dependence of the residual on E_0 for the lithium atom and $n + l = 5$.

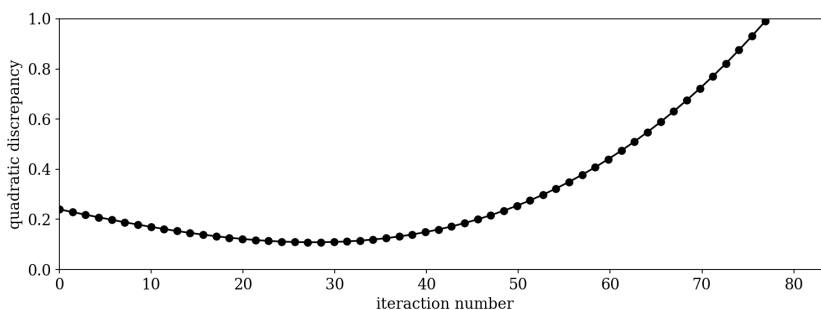


Figure 5. Graph of the quadratic discrepancy on the parameter E_0 in the case of the group of atomic levels of the lithium atom with $N + L = 5$. The minimum is equal to 0.088 and corresponds to $E_0 = -0.01414$. Other options are $b_1 = 3.33; b_2 = 0.001 = b_3 = b_4 = 0.001; Z_{\text{eff}} = 1; m_e = 1$

Residuals for smaller numbers of levels have similar deep minimax. But for alkali metal atoms, unlike a hydrogen atom, it is impossible to construct a unique effective potential capable of describing energy levels for different quantum numbers n, l [27]. One of the ways for describing energy levels in atoms of alkali metals is the so-called quantum defect model [16]. In this model, in a hydrogen-like spectrum, either the effective principal quantum number or, which is equivalent, the effective nucleus charge Z_{eff} (which differs from the true charge because of the screening by the inner electrons) is used.

Figure 6 shows the dependence of the residual on the effective charge Z_{eff} for the lithium atom and $N + L = 5$. It is also possible to vary the effective electron mass. Figure 7 shows the dependence of the residual on the effective mass m_e for the lithium atom and $n + l = 5$.

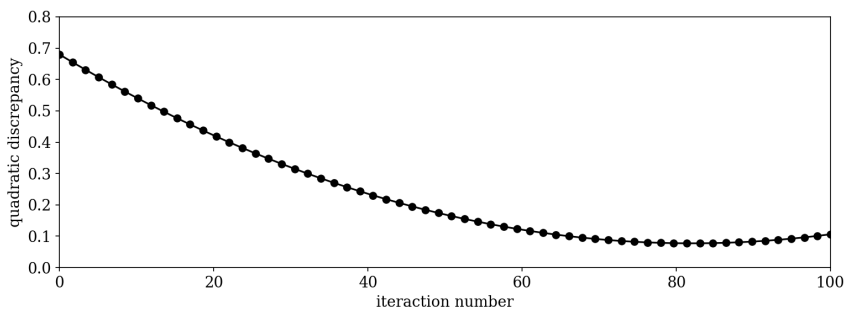


Figure 6. Graph of the quadratic discrepancy on the parameter Z_{eff} in the case of the group of atomic levels of the lithium atom with $N + L = 5$. The minimum is equal to 0.085 and corresponds to $Z_{\text{eff}} = -1.242$. Other options are $b_1 = 3.33; b_2 = 0.001 = b_3 = b_4 = 0.001; E_0 = -0.1414; m_e = 1$

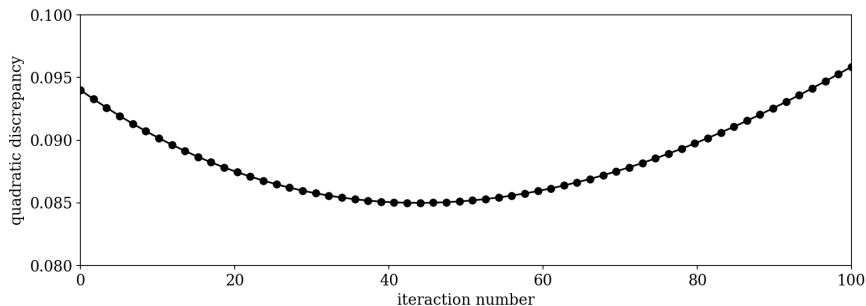


Figure 7. Graph of the quadratic discrepancy on the parameter m_e in the case of the group of atomic levels of the lithium atom with $N + L = 5$. The minimum is equal to 0.085 and corresponds to $m_e = 0.99$. Other options are $b_1 = 3.33$; $b_2 = 0.001 = b_3 = b_4 = 0.001$; $E_0 = -0.1414$; $Z_{\text{eff}} = 1.242$

4. Conclusion

Quantum mechanics with a non-negative distribution function ceases to be an exotic theory and becomes a real design scheme that has its advantages. This happened after formulating it as a theory of quantum measurements. The used fitting parameters have a clear physical meaning and allow one to take into account and describe real phenomena, for example, the screening of the nuclear field by internal electrons and the interaction of an external electron with them. The proposed program allows one to effectively carry out such calculations, and also permits generalization to other quantum systems.

Acknowledgments

The publication has been prepared with the support of the “RUDN University Program 5-100” and funded by Russian Foundation for Basic Research (RFBR) according to the research project No 16-07-00556.

References

1. W. Eissner, H. Nussbaumer, Resonances in Cross Sections for Excitation of Forbidden Lines in O_2^+ , *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 2 (3) (1969) 1028–1043. doi:10.1088/0022-3700/2/3/305.
2. J. C. Slater, Atomic Shielding Constants, *Physical Review* 36 (1930) 57–64. doi:10.1103/PhysRev.36.57.
3. G. H. S. E. U. Condon, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
4. D. Layzer, On a Screening Theory of Atomic Spectra, *Annals of Physics* 8 (1959) 271–296. doi:10.1016/0003-4916(59)90023-5.
5. H. Nussbaumer, Improved Bound Wave Functions for Complex Atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 5 (10) (1972) 1837–1843. doi:10.1088/0022-3700/5/10/012.
6. P. G. Burke, A. Hibbert, W. D. Robb, Wavefunctions and Oscillator Strengths of the Beryllium Iso-Electronic Sequence, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 5 (1) (1972) 37–43. doi:10.1088/0022-3700/5/1/013.
7. R. N. Zare, Correlation Effects in Complex Spectra. II. Transition Probabilities for the Magnesium Isoelectronic Sequence, *Journal of Chemical Physics* 47 (1967) 3561–72. doi:10.1063/1.1712423.

8. A. W. Weiss, Theoretical multiplet strengths for Mg I, Al II, and Si III, *Journal of Chemical Physics* 47 (1967) 3573–3578. doi:10.1063/1.1712424.
9. H. Friedrich, E. Trefftz, Configuration Mixing and Oscillator Strengths for Some Two-Electron Spectra (Ca I, Ba I, and Others), *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* 9 (1969) 333–359. doi:10.1016/0022-4073(69)90030-2.
10. Y.-K. Kim, P. S. Bagus, Oscillator Strengths for the Resonance Transitions in Alkaline Earth Atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 5 (10) (1972) L193–L195. doi:10.1088/0022-3700/5/10/001.
11. S. Hameed, A. Herzenberg, M. G. James, Core Polarization Corrections to Oscillator Strengths in the Alkali Atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 1 (5) (1968) 822–830. doi:10.1088/0022-3700/1/5/308.
12. S. Hameed, Core Polarization Corrections to Oscillator Strengths and Singlet-Triplet Splittings in Alkaline Earth Atoms, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 9 (4) (1972) 746–760. doi:10.1088/0022-3700/5/4/009.
13. M. Jones, Relativistic Corrections to Atomic Energy Levels, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 3 (12) (1972) 1571–1592. doi:10.1088/0022-3700/3/12/003.
14. M. Jones, Mutual Spin-Orbit and Spin-Spin Interactions in Atomic Structure Calculations, *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 4 (11) (1971) 1422–1439. doi:10.1088/0022-3700/4/11/006.
15. W. Eissner, M. Jones, H. Nussbaumer, Techniques for the Calculation of Atomic Structures and Radiative Data Including Relativistic Corrections, *Computer Physics Communications* 8 (1974) 270–306. doi:10.1016/0010-4655(74)90019-8.
16. S. E. Frisch, *Optical Atomic Spectra*, Fizmatgiz, Moscow, 1963, in Russian.
17. M. G. Veselov, L. N. Labzovski, *Theory of Atom. Structure of Electron Scells*, Nauka, Moscow, 1986, in Russian.
18. I. I. Sobelman, *Atomic Spectra and Radiative Transitions*, 2nd Edition, Springer, Berlin, 1996.
19. A. V. Zorin, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, Application of the Noncommutative Theory of Statistical Decisions to the Modeling of Quantum Communication Channels, *IEEE*, 2017, pp. 26–31. doi:10.1109/ICUMT.2017.8255195.
20. V. V. Kuryshkin, La mécanique quantique avec une fonction nonnégative de distribution dans l'espace des phases, *Annales de l'I.H.P. Physique théorique* 17 (1972) 81–95.
21. V. V. Kuryshkin, Some Problems of Quantum Mechanics Possessing a Non-Negative Phase-Space Distribution Function, *International Journal of Theoretical Physics* 7 (1973) 451–466. doi:10.1007/BF00713247.
22. A. V. Gorbachev, L. A. Sevastianov, A. V. Zorin, Kuryshkin–Wodkiewicz Model of Quantum Measurements for Atoms and Ions with One Valence Electron, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* 2 (2016) 44–52.
23. A. V. Zorin, V. V. Kuryshkin, L. A. Sevastianov, Description of the Spectrum of a Hydrogen-Like Atom, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Physics* 6 (1998) 62–66, in Russian.
24. A. V. Zorin, L. A. Sevastianov, Hydrogen-Like Atom with Nonnegative Quantum Distribution Function, *Physics of Atomic Nuclei* 70 (2007) 792–799. doi:10.1134/S1063778807040229.
25. L. Sevastianov, A. Zorin, A. Gorbachev, Pseudo-Differential Operators in the Operational Model of a Quantum Measurement of Observables, *Lecture Notes in Computer Science* 7152 (2012) 174–181. doi:10.1007/978-3-642-28212-6_17.
26. A. V. Zorin, The Operational Model of Quantum Measurement of Kuryshkin–Wodkiewicz, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* 2 (2012) 42–54, in Russian.

27. A. V. Zorin, L. A. Sevastianov, N. P. Tretyakov, Computer Modelling of Hydrogen-Like Atoms in Quantum Mechanics with Nonnegative Distribution Function, Programming and Computer Software 33 (2007) 94–104. doi:10.1134/S0361768807020077.
28. L. A. Sevastianov, A. V. Zorin, The Computer-Based Model of Quantum Measurement, Physics of Atomic Nuclei 80 (2017) 774–780. doi:10.1134/S1063778817040238.
29. M. Rotenberg, Theory and Application of Sturmiann Functions, Advances in Atomic and Molecular Physics 6 (1970) 233–268. doi:10.1016/S0065-2199(08)60206-7.
30. K. Rykhlinskaya, S. Fritzsche, Use of Group Theory for the Analysis of Vibrational Spectra, Computer Physics Communications 162 (2004) 124–142. doi:10.1016/j.cpc.2004.06.088.
31. K. Rykhlinskaya, S. Fritzsche, Generation of Molecular Symmetry Orbitals for the Point and Double Groups, Computer Physics Communications 171 (2005) 119–132. doi:10.1016/j.cpc.2005.03.112.
32. K. Rykhlinskaya, S. Fritzsche, Generation of Clebsch–Gordan Coefficients for the Point and Double Groups, Computer Physics Communications 174 (2006) 903–913. doi:10.1016/j.cpc.2006.01.001.
33. O. Gaigalas, O. Scharf, S. Fritzsche, Maple Procedures for the Coupling of Angular Momenta. VIII. Spin-Angular Coefficients for Single-Shell Configurations, Computer Physics Communications 166 (2005) 141–169. doi:10.1016/j.cpc.2004.11.003.

УДК 539.17

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-343-356

MAPLE программа для моделирования водородоподобных атомов в квантовой механике с неотрицательной функцией распределения

А. В. Зорин*, Н. П. Третьяков^{†‡}

** Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

*† Кафедра прикладных информационных технологий
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте
Российской Федерации*

Проспект Вернадского, д. 82, Москва, Россия, 119571

*‡ Кафедра математики и информатики
Российский государственный социальный университет
ул. Вильгельма Пика, д. 4-1, Москва, Россия, 119571*

Предложена программа для реализации алгоритма аналитических вычислений, основанного на квантовой механике с неотрицательной функцией распределения вероятностей и для расчётов уровней энергии для водородоподобных атомов. Программа написана на языке MAPLE. В рамках алгоритма осуществляются вычисления необходимых функций, таких как волновые функции атома водорода, штурмовские функции и их фурье-преобразования, коэффициенты Клебша–Гордана и т. д. Операторы наблюдаемых вычисляются на основе правила квантования квантовой механики с неотрицательной функцией распределения. Согласно методу Ритца, собственные значения матриц Ритца представляют собой спектральные значения исследуемой величины, т. е. энергии. В качестве примера вычисляются энергетические уровни водородоподобных атомов и сравниваются с экспериментальными значениями, полученными из данных уровней базы данных NIST Atomic Spectra. Используемая теория, по-видимому, эквивалентна традиционной квантовой механике в отношении предсказаний экспериментальных значений. Однако существование вероятностной квантовой теории фазового пространства может быть важным шагом вперёд к объяснению и интерпретации квантовой механики.

Ключевые слова: квантовая механика, вероятность перехода, компьютерная алгебра, неотрицательная квантовая функция распределения

Литература

1. *Eissner W., Nussbaumer H.* Resonances in Cross Sections for Excitation of Forbidden Lines in O²⁺ // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1969. — Vol. 2, No 3. — Pp. 1028–1043. — DOI: 10.1088/0022-3700/2/3/305.
2. *Slater J. C.* Atomic Shielding Constants // *Physical Review.* — 1930. — Vol. 36. — Pp. 57–64. — DOI: 10.1103/PhysRev.36.57.
3. *E. U. Condon G. H. S.* The Theory of Atomic Spectra. — Cambridge: Cambridge University Press, 1970.
4. *Layzer D.* On a Screening Theory of Atomic Spectra // *Annals of Physics.* — 1959. — Vol. 8, issue 2. — Pp. 271–296. — DOI: 10.1016/0003-4916(59)90023-5.
5. *Nussbaumer H.* Improved Bound Wave Functions for Complex Atoms // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1972. — Vol. 5, No 10. — Pp. 1837–1843. — DOI: 10.1088/0022-3700/5/10/012.
6. *Burke P. G., Hibbert A., Robb W. D.* Wavefunctions and Oscillator Strengths of the Beryllium Iso-Electronic Sequence // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1972. — Vol. 5, No 1. — Pp. 37–43. — DOI: 10.1088/0022-3700/5/1/013.
7. *Zare R. N.* Correlation Effects in Complex Spectra. II. Transition Probabilities for the Magnesium Isoelectronic Sequence // *Journal of Chemical Physics.* — 1967. — Vol. 47, issue 9. — Pp. 3561–72. — DOI: 10.1063/1.1712423.
8. *Weiss A. W.* Theoretical multiplet strengths for Mg I, Al II, and Si III // *Journal of Chemical Physics.* — 1967. — Vol. 47, issue 9. — Pp. 3573–3578. — DOI: 10.1063/1.1712424.
9. *Friedrich H., Trefftz E.* Configuration Mixing and Oscillator Strengths for Some Two-Electron Spectra (Ca I, Ba I, and Others) // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer.* — 1969. — Vol. 9, issue 3. — Pp. 333–359. — DOI: 10.1016/0022-4073(69)90030-2.
10. *Kim Y.-K., Bagus P. S.* Oscillator Strengths for the Resonance Transitions in Alkaline Earth Atoms // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1972. — Vol. 5, No 10. — Pp. L193–L195. — DOI: 10.1088/0022-3700/5/10/001.
11. *Hameed S., Herzenberg A., James M. G.* Core Polarization Corrections to Oscillator Strengths in the Alkali Atoms // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1968. — Vol. 1, No 5. — Pp. 822–830. — DOI: 10.1088/0022-3700/1/5/308.
12. *Hameed S.* Core Polarization Corrections to Oscillator Strengths and Singlet-Triplet Splittings in Alkaline Earth Atoms // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1972. — Vol. 9, No 4. — Pp. 746–760. — DOI: 10.1088/0022-3700/5/4/009.
13. *Jones M.* Relativistic Corrections to Atomic Energy Levels // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1972. — Vol. 3, No 12. — Pp. 1571–1592. — DOI: 10.1088/0022-3700/3/12/003.
14. *Jones M.* Mutual Spin-Orbit and Spin-Spin Interactions in Atomic Structure Calculations // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* — 1971. — Vol. 4, No 11. — Pp. 1422–1439. — DOI: 10.1088/0022-3700/4/11/006.
15. *Eissner W., Jones M., Nussbaumer H.* Techniques for the Calculation of Atomic Structures and Radiative Data Including Relativistic Corrections // *Computer Physics Communications.* — 1974. — Vol. 8, issue 4. — Pp. 270–306. — DOI: 10.1016/0010-4655(74)90019-8.
16. *Фрум С. Э.* Оптические спектры атомов. — М.: Физматгиз, 1963.
17. *Веселов М. Г., Лабзовский Л. Н.* Теория атома. Структура электронных оболочек. — М.: Наука, 1986.
18. *Sobelman I. I.* Atomic Spectra and Radiative Transitions. — 2nd edition. — Berlin: Springer, 1996.

19. Zorin A. V., Sevastianov A. L., Sevastianov L. A. Application of the Noncommutative Theory of Statistical Decisions to the Modeling of Quantum Communication Channels // 9th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE, 2017. — Pp. 26–31. — DOI: 10.1109/ICUMT.2017.8255195.
20. Kuryshkin V. V. La mécanique quantique avec une fonction nonnégative de distribution dans l'espace des phases // Annales de l'I.H.P. Physique théorique. — 1972. — Vol. 17. — Pp. 81–95.
21. Kuryshkin V. V. Some Problems of Quantum Mechanics Possessing a Non-Negative Phase-Space Distribution Function // International Journal of Theoretical Physics. — 1973. — Vol. 7, issue 6. — Pp. 451–466. — DOI: 10.1007/BF00713247.
22. Gorbachev A. V., Sevastianov L. A., Zorin A. V. Kuryshkin–Wodkiewicz Model of Quantum Measurements for Atoms and Ions with One Valence Electron // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics. — 2016. — Vol. 2. — Pp. 44–52.
23. Зорин А. В., Курьшикин В. В., Севастьянов Л. А. Описание спектра водородоподобного атома // Вестник РУДН. Серия: Физика. — 1998. — Т. 6. — С. 62–66.
24. Zorin A. V., Sevastianov L. A. Hydrogen-Like Atom with Nonnegative Quantum Distribution Function // Physics of Atomic Nuclei. — 2007. — Vol. 70. — Pp. 792–799. — DOI: 10.1134/S1063778807040229.
25. Sevastianov L., Zorin A., Gorbachev A. Pseudo-Differential Operators in the Operational Model of a Quantum Measurement of Observables // Lecture Notes in Computer Science. — 2012. — Vol. 7152. — Pp. 174–181. — DOI: 10.1007/978-3-642-28212-6_17.
26. Зорин А. В. Операционная модель квантовых измерений Курьшикина–Вудкевича // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2012. — Т. 2. — С. 42–54.
27. Zorin A. V., Sevastianov L. A., Tretyakov N. P. Computer Modelling of Hydrogen-Like Atoms in Quantum Mechanics with Nonnegative Distribution Function // Programming and Computer Software. — 2007. — Vol. 33, issue 2. — Pp. 94–104. — DOI: 10.1134/S0361768807020077.
28. Sevastianov L. A., Zorin A. V. The Computer-Based Model of Quantum Measurement // Physics of Atomic Nuclei. — 2017. — Vol. 80, issue 4. — Pp. 774–780. — DOI: 10.1134/S1063778817040238.
29. Rotenberg M. Theory and Application of Sturmian Functions // Advances in Atomic and Molecular Physics. — 1970. — Vol. 6. — Pp. 233–268. — DOI: 10.1016/S0065-2199(08)60206-7.
30. Rykhlynskaya K., Fritzsche S. Use of Group Theory for the Analysis of Vibrational Spectra // Computer Physics Communications. — 2004. — Vol. 162, issue 2. — Pp. 124–142. — DOI: 10.1016/j.cpc.2004.06.088.
31. Rykhlynskaya K., Fritzsche S. Generation of Molecular Symmetry Orbitals for the Point and Double Groups // Computer Physics Communications. — 2005. — Vol. 171, issue 2. — Pp. 119–132. — DOI: 10.1016/j.cpc.2005.03.112.
32. Rykhlynskaya K., Fritzsche S. Generation of Clebsch–Gordan Coefficients for the Point and Double Groups // Computer Physics Communications. — 2006. — Vol. 174, issue 11. — Pp. 903–913. — DOI: 10.1016/j.cpc.2006.01.001.
33. Gaigalas O., Scharf O., Fritzsche S. Maple Procedures for the Coupling of Angular Momenta. VIII. Spin-Angular Coefficients for Single-Shell Configurations // Computer Physics Communications. — 2005. — Vol. 166, issue 2. — Pp. 141–169. — DOI: 10.1016/j.cpc.2004.11.003.



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Zorin A. V., Tretyakov N. P. MAPLE program for modelling hydrogen-like atoms in quantum mechanics with non-negative distribution function // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 4. — Pp. 343–356. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-343-356.

For citation:

Zorin A. V., Tretyakov N. P. MAPLE program for modelling hydrogen-like atoms in quantum mechanics with non-negative distribution function, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 343–356. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-343-356.

Сведения об авторах:

Зорин Александр Валерьевич — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент РУДН (e-mail: zorin@mx.rudn.ru, тел.: +7(495)9522572)

Третьяков Николай Павлович — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и информатики РГСУ (e-mail: trn11@rambler.ru, тел.: +7(495)9522572)

Information about the authors:

Zorin, Alexander V. — Associate Professor, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: zorin@mx.rudn.ru, phone: +7(495)9522572)

Tretyakov, N. P. — Associate Professor, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Mathematics and Information Technologies of Russian State Social University (e-mail: trn11@rambler.ru, phone: +7(495)9522572)

Информатика и вычислительная техника

УДК 004.77

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-357-370

Управление потоками в гетерогенных мобильных сетях радиодоступа с соединениями устройство – устройство

С. Д. Андреев*, К. Е. Самуйлов†, А. М. Тюрликов‡

† *Институт прикладной математики и телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*‡ *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*‡ *Кафедра инфокоммуникационных систем
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
ул. Б. Морская, д. 67, Санкт-Петербург, Россия, 190000*

В перспективных мобильных сетях пятого поколения все более актуальной становится задача повышения ёмкости системы связи, а также качества пользовательского соединения. Для этих целей возможно применять новый способ прямого соединения пользователей, построенный на взаимодействии устройство-устройство (device-to-device, D2D). Такое гетерогенное взаимодействие позволяет выгружать потоки данных из сотовой сети в систему D2D, которая может функционировать на нелицензированных частотах. Однако при этом возникает ряд особенностей, связанных с учётом интерференции и распределением ресурсов радиоканала. В данной статье рассматривается модель системы прямых соединений D2D с сотовой поддержкой, обслуживающей потоки пользовательских данных (сессии), а также предлагается алгоритм управления выгрузкой трафика из сотовой сети на соединения D2D. Приводятся результаты аналитического и имитационного моделирования, позволяющие провести исследование гетерогенной системы связи с возможностью взаимодействия устройство-устройство.

Ключевые слова: Сети пятого поколения, прямое соединение пользователей (device-to-device, D2D), связь устройство-устройство с сотовой поддержкой, управление выгрузкой трафика

1. Введение

Ожидается, что мобильные сети следующего поколения позволят значительно увеличить пиковые скорости передачи данных, спектральную и энергетическую эффективность, а также обеспечить единообразное обслуживание в любое время, в любом месте и для любых услуг. Ориентированные на системы связи пятого поколения (fifth generation, 5G) научные исследования приобрели особую актуальность в недавнее время, и при этом возникло понимание того, что ни одна из имеющихся технологий радиодоступа не сможет удовлетворить все многообразие требований таких сетей, в том числе по их производительности, характеристикам качества обслуживания и качества восприятия услуги [1]. В этой связи сверхплотные гетерогенные сети становятся одним из типовых решений для целевого повышения ёмкости [2], но они являются крайне дорогостоящими в развёртывании и, следовательно, не смогут удовлетворить требования 5G повсеместно.

Действительно, при увеличении плотности беспроводной сети с ростом её пропускной способности также повышаются расходы на сетевую инфраструктуру, располагающуюся теперь в непосредственной близости от пользователя. Поскольку плотность данной инфраструктуры не может возрастать безгранично, среди множества предложений для систем 5G появились и такие, в которых для целей

уплотнения сети рассматривалась не сотовая архитектура. В первую очередь, это относится к взаимодействию устройство–устройство (device-to-device, D2D), которое становится одним из наиболее перспективных направлений развития сетей связи в последние годы. Использование прямых соединений D2D становится, таким образом, новым компонентом в дополнение к сотовой архитектуре. Особенно важным является то, что технология D2D предполагает взаимодействие абонентов сотовой сети без использования централизованной инфраструктуры, снижая нагрузку на неё.

Теоретически система D2D предоставляет для связи более короткие соединения, повышенную энергетическую эффективность и более естественную организацию потоков трафика. Как следствие, за прошедшие несколько лет D2D-взаимодействие привлекло существенное внимание как производителей телекоммуникационного оборудования, так и исследовательских организаций, которые направили значительные усилия на практическую реализацию данной концепции. На практике соединения D2D имеют целый ряд специфических особенностей, связанных прежде всего с управлением интерференцией, и потенциальное использование ресурсов нелицензированного спектра выглядит в данном контексте наиболее привлекательным. Как было многократно показано в литературе [3], данное направление развития технологии D2D представляет собой простой и надёжный способ повышения пропускной способности перспективных сотовых систем без необходимости переработки их структуры.

В составе архитектуры 5G использование связи D2D в первую очередь направлено на увеличение ёмкости сети. Предполагается, что различные технологии D2D станут неотъемлемой частью будущих сетевых сервисов, предоставляемых пользователю по умолчанию. С точки зрения оператора, D2D-взаимодействие может быть предложено в качестве новой функции для большинства пользовательских приложений с целью повышения качества обслуживания и качества восприятия услуги, а также при передаче контекстной информации. Связь D2D можно использовать для оперативной организации прямых соединений с низкой задержкой или высокоскоростных соединений в приложениях, которые нуждаются в дополнительной пропускной способности, в то время как обычные услуги могут по-прежнему предоставляться сотовой сетью.

Потенциальные приложения технологии D2D в сотовых сетях 5G активно обсуждаются вплоть до настоящего времени [4]. Рассматриваются как услуги по передаче мультимедиа (видеозвонки между соседними абонентами), так и прочие сервисы для близко расположенных пользователей, например, поиск контента, многопользовательские игры, управление промышленными системами и обеспечение общественной безопасности [5]. Таким образом, под термином устройство помимо традиционных мобильных телефонов и планшетов можно более широко подразумевать всевозможное автономное оборудование. В будущем связь D2D с сетевой поддержкой сможет использоваться как для приложений, ориентированных на человека, так и для различных машинно-ориентированных услуг [6].

Поддержка прямых соединений D2D вероятнее всего станет частью перспективного набора услуг операторов 5G, дополняя тем самым сверхплотные гетерогенные сети, технологии межмашинного взаимодействия и множество других сервисов, которые предполагаются к предоставлению в сетях 5G. Сегодня непросто определить, будет ли практическая система D2D выглядеть в точности как в имеющейся исследовательской литературе: несмотря на сложность управления интерференцией, технология D2D может мигрировать в лицензированные полосы частот, а также использовать связь на крайне высоких частотах. Далее рассматривается современная интерпретация системы прямых соединений с сотовой поддержкой, в которой связь D2D предназначена для обслуживания пользовательских сессий, а также предлагается соответствующая модель системы и алгоритм управления потоками данных.

2. Метод управления потоками данных в сети радиодоступа

Для задач оптимизации работы сетей D2D актуальным является получение аналитического решения с учётом как пространственного расположения пользователей,

так и характеристик возникающих у них потоков данных. Следовательно, важно сформулировать аналитическую модель, объединяющую эти свойства в единую систему допущений. Ниже предлагается общий подход, который позволяет строить аналитические модели для совмещённых сотовых и D2D-систем, обслуживающих сессии по передаче трафика от одного пользователя к другому. Предложенный подход является достаточно гибким для описания различных сценариев выгрузки трафика из сотовой сети на D2D-соединения, а также альтернативных технологий радиодоступа. Соответствующий анализ ориентирован, в основном, на расчёт блокировок, возникающих, когда поток данных (сессия) не может получить допуск к сети D2D, сотовой сети или к ним обеим.

2.1. Особенности выгрузки трафика на соединения устройство–устройство

Опишем далее основные допущения для проведения аналитического моделирования. Будем рассматривать пользователей, равномерно распределённых в некоторой области. Эта область может быть представлена как отдельной сотой, так и сетью в целом. Все пользователи могут инициировать друг с другом сессии, которые являются потоками передачи данных. При этом важно знать не только информацию о том, когда сессия начинается, но и какие из пользователей вовлечены. Тогда естественным инструментом для описания подобных построений становится стохастическая геометрия. Рассмотрим модель, в которой сессии инициируются в соответствии с пуассоновским точечным процессом (Poisson point process, PPP). Простейшим практическим примером является применение пользователями своих терминалов при запросе случайного контента в случайном месте и в случайный момент времени.

Такие процессы широко использовались для моделирования совместного функционирования сотовых и мобильных ad-hoc сетей [7], для анализа процесса обнаружения устройств в технологии FlashLinQ [8], для оценки эффективности многоуровневых гетерогенных сотовых систем [9], а также при управлении мощностью передачи и значением SINR в сетях D2D [10]. Применение стохастической геометрии облегчает моделирование пространственной случайности при возникновении пользовательских сессий с учётом зависимых от расстояния параметров, таких как SINR. При этом в настоящее время большая часть известных работ по анализу беспроводных сетей не затрагивает взаимодействие нескольких сетей (например, сотовой и D2D), стремящихся обслужить общее множество активных пользователей, что является основной особенностью аналитических моделей, разработанных в рамках предлагаемого подхода.

Далее рассмотрим одну соту сети доступа, где R – её радиус. Пользовательский трафик представлен сессиями с постоянной скоростью передачи r . При этом предполагается, что продолжительность сессии распределена по экспоненциальному закону со средним $\frac{1}{\mu}$. Для каждой сессии i будем различать источник данных T_i (передающий терминал, Tx) и получатель данных R_i (принимающий терминал, Rx). Сессии по передаче данных в двух сетях (сотовой и D2D) не влияют друг на друга из-за неперекрывающихся частотных диапазонов. Далее предположим, что каждый терминал пользователя T_i может отправлять свои данные к R_i через сотовую сеть (инфраструктурный канал) или через сеть D2D (прямой канал), как это показано на рис. 1. Для упрощения опустим любые сообщения, которые не направлены на конкретного партнера D2D, а также сигнальный трафик.

Для того, чтобы учесть распределение пользователей, будем рассматривать трёхмерное пространство, включающее в себя временную ось и двумерное местоположение терминалов на плоскости. Интенсивность такого процесса принимается равной нулю вне целевой области моделирования. Местоположение каждого пользователя задаёт ассоциированную с ним соту в рассматриваемой области. При этом поток сессий на ось времени является пуассоновским с интенсивностью λ . Для каждого

передающего терминала одновременно определяется соответствующий ему принимающий терминал, а его местоположение выбирается равномерно в пределах области моделирования.

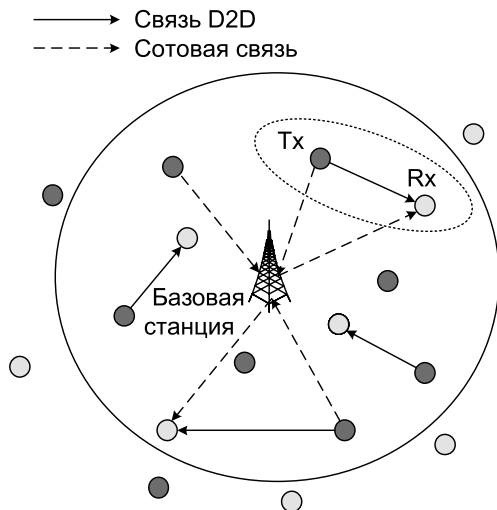


Рис. 1. Выгрузка сотового трафика на прямые соединения

2.2. Особенности моделирования сотовой сети

Рассмотрим изолированную соту беспроводной сети, которая не подвержена влиянию межсотовой интерференции. На практике это допущение оказывается достаточно близко к сетям с повторным использованием спектра или с координацией межсотовой интерференции. Такая формулировка позволяет избежать зависимости между отдельными сессиями пользователей в соседних сотах. Модель канала выбирается в соответствии с рекомендациями Международного Союза Электросвязи и предполагается, что для сессии i отношение сигнал/шум на единицу мощности γ_i определяется как:

$$\gamma_i = \frac{G^k}{d_i^k}, \quad (1)$$

где d_i – расстояние между базовой станцией и передающим терминалом, T_i , а k и G – параметры затухания сигнала. Учитывая число схем модуляции и кодирования, доступных сотовым сетям, аппроксимируем далее скорость передачи данных как непрерывную функцию SINR. При этом соотношение мощность–скорость определяется известной формулой К. Шеннона. В результате мощность передачи p_i пользователя i и соответствующая скорость передачи r_i определяются для свободных от интерференции условий следующим образом:

$$r_i = w \log(1 + \gamma_i p_i), \quad (2)$$

где p_i – выходная мощность терминала, γ_i – отношение сигнал/шум на единицу мощности в (1), а w – эффективная полоса пропускания. Данная модель представляется разумным приближением к существующим беспроводным сетям. Далее рассмотрим несколько дополнительных ограничений, налагаемых практическими схемами модуляции и кодирования. В частности, при передаче пользователя не допускается превышать некоторую максимально допустимую скорость передачи данных r_{\max} , что реализуется введением ограничения на максимальное наблюдаемое значение

SNR на принимающей стороне:

$$r_{\max} = w \log(1 + \text{SNR}_{\max}). \tag{3}$$

Следовательно, γ_i и $\gamma_{i,j}$ не могут возрастать безгранично при $d_i \rightarrow 0$, где $\gamma_{\max} = \frac{1}{p_{\max}} (e^{\frac{r_{\max}}{w}} - 1)$.

Сотовая базовая станция управляет сетью, применяя различные *политики передачи*. Каждая такая политика определяет доступ пользователей в сеть, мощность их передачи и планирование ресурсов канала. Когда терминал допускается в сеть, он занимает часть ресурсов радиоканала и устанавливает свою мощность в соответствии с требованиями базовой станции для достижения требуемой скорости передачи данных (2). Базовая станция при этом принимает новое решение о распределении ресурсов и назначении мощности передачи для всех активных терминалов при каждом новом поступлении пользователя или по завершении обслуживания некоторой сессии, когда пользователь покидает систему.

При работе простейшей политики передачи система принимает вновь поступающие сессии до тех пор, пока имеются свободные ресурсы для их обслуживания. Другими словами, каждая новая сессия i занимает в точности долю r/r_i^{\max} продолжительности временного кадра, поэтому для всех сессий данное условие выглядит следующим образом:

$$\sum_{\text{all sessions}} \left(\frac{r}{r_i^{\max}} \right) \leq 1. \tag{4}$$

При применении политики максимальной скорости (MR), допускающей наибольшую возможную скорость передачи, время работы системы используется не полностью в том смысле, что всегда существует часть ресурса временного кадра, которая не востребована активными сессиями. Противоположная ей по смыслу политика полного использования (FU) обеспечивает такое функционирование системы, при котором её время всегда используется целиком. Более точно, $\frac{r}{r_i} = \frac{1}{n}$, и терминалы настраивают свою передачу так, чтобы соответствовать требуемой целевой скорости. Очевидно, что в случае n активных сессий имеется следующее:

$$\frac{r}{r_i} = \frac{1}{n}, \quad r_i = rn, \quad \forall i = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Поэтому, чтобы принять на обслуживание новую сессию, базовая станция должна увеличить мощность передачи уже обслуживаемых ею терминалов, чтобы они затребовали меньше ресурсов. Если это невозможно хотя бы для одной активной сессии (или же новой сессии), что описывается выражением $r_i^{\max} = w \log(1 + \gamma_i p_{\max}) < (n + 1)r$, то система не может принять эту новую сессию. В противном случае системное время перераспределяется в том числе на сессию $n + 1$, а пользователи применяют другие (более высокие) уровни мощности передачи:

$$p_i = \frac{1}{\gamma_i} \left(e^{(n+1)r/w} - 1 \right). \tag{6}$$

В заключение отметим, что политики MR и FU представляют собой выбор между большей ёмкостью системы и более эффективным использованием сетевых ресурсов. Рассматривая эти политики как альтернативные, можно показать, что учитываются различные режимы работы планировщика базовой станции.

2.3. Особенности моделирования связи устройство–устройство

Поскольку сеть D2D функционирует в нелицензированном диапазоне частот, различные сессии могут интерферировать друг с другом. Поэтому сеть D2D по своей сути является системой, работа которой ограничивается интерференцией, и последняя должна обязательно учитываться при проведении анализа. В отличие от модели сотовой сети здесь соотношение мощность–скорость должно также включать в себя уровень интерференции, например, следующим образом:

$$r_i = w \log(1 + \text{SINR}_i) = w \log\left(1 + \frac{p_i \gamma_{i,i}}{N_0 + I}\right), \quad (7)$$

где p_i — выходная мощность терминала, $\gamma_{i,i}$ — характеристика канала между передатчиком и приёмником для сессии i , w — полоса пропускания, N_0 — уровень шума в канале и I — кумулятивный уровень интерференции от всех активных сессий. При планировании соединений D2D в идеальных условиях уровень мощности для каждой передачи можно было бы выбрать индивидуально, чтобы повысить, например, общую пропускную способность сети. Однако фактически такое планирование неприменимо в практической сети из-за значительных накладных расходов на передачу служебной информации.

Поскольку технология WiFi не специфицирует политику управления мощностью передачи, последнюю можно считать фиксированной с максимальным значением p_{\max} . Для протокола WiFi следует дополнительно заметить, что уровень шума и интерференции не может превышать некоторый порог $N_0 + I \leq KN_0$ для сети в целом, который будет пояснён ниже. Действительно, каждый раз, когда это условие не выполняется на любом конце соединения или не поддерживается на одном из соседних приёмников, терминалы отказываются от передачи и их сессии покидают систему D2D. Данная процедура соответствует механизму прослушивания несущей, характерному для семейства стандартов IEEE 802.11.

Такое условие гарантирует, что интерференция на любом из приёмников, вызванная конкретной передачей, никогда не будет превышать заданного порога. Однако это не гарантирует, что сумма значений интерференции от всех активных передач не превысит данного порога. Для учёта кумулятивной интерференции вводится резерв K , отражающий дополнительный ресурс канала связи. Фактическое значение K можно выразить через максимальное количество потенциально интерферирующих соседей в непосредственной близости от приёмника. Далее его предлагается выбирать как $K = 6$, что соответствует пессимистической оценке кумулятивной фоновой интерференции.

Основываясь на вышеизложенном, здесь рассматривается модель, в которой сеть D2D с $n - 1$ активными терминалами допускает новую сессию n , если для множества $\{T_j\}_{j=1}^n$ передатчиков на каждом из приёмников R_i , $i = \overline{1, n}$, выполняются следующие условия:

$$\frac{p_{\max} \gamma_{i,i}}{KN_0} \geq e^{\frac{r}{w}} - 1 \text{ и } p_{\max} \gamma_{j,i} \leq N_0, \quad \forall j, i \neq j. \quad (8)$$

Эти условия означают, что требуемая скорость передачи r может быть достигнута для каждой сессии i , и при этом интерференция на R_i , возникающая со стороны T_j , не превысит заданного порога N_0 .

2.4. Алгоритм управления выгрузкой трафика

Когда в рассматриваемую систему поступает новая сессия данных, предполагается выполнение следующего алгоритма управления выгрузкой.

Шаг 1. Сотовая сеть пытается выгрузить вновь прибывшую сессию в сеть D2D с использованием соответствующей процедуры допуска в сеть (8).

Шаг 2. В случае, если сессия принята, она обслуживается сетью D2D без прерываний до тех пор, пока соответствующий пользователь не покинет систему (поскольку

в предложенной здесь модели система контролируется в момент поступления данных и не отбрасывает допущенные сессии).

Шаг 3. В противном случае сотовая сеть пытается обслужить эту сессию с учётом текущей политики передачи.

Шаг 4. Если сессия не может быть принята даже сотовой сетью, то она считается заблокированной и покидает систему.

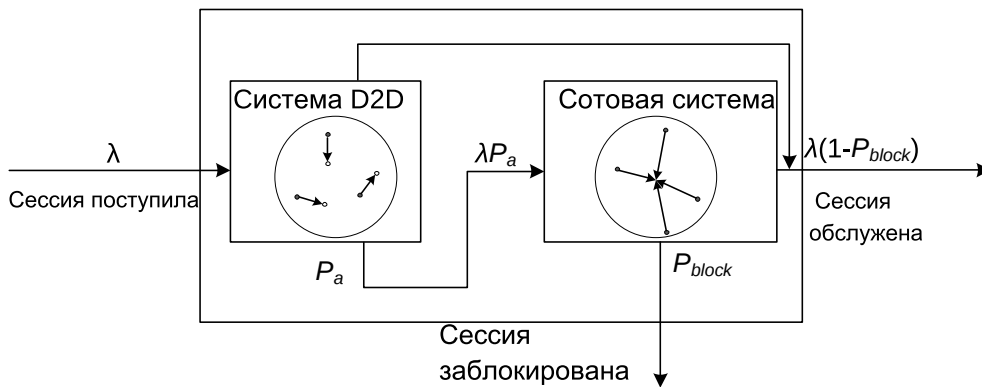


Рис. 2. Анализ функционирования системы

Функционирование описанного алгоритма управления выгрузкой трафика показано на рис. 2. При этом основные принципы предложенной модели являются достаточно общими и могут быть расширены на случай функционирования сетей D2D на лицензированных частотах. Более подробное анализ данной системы проведён в работе [11].

3. Анализ числа сессий и вероятности блокировки при выгрузке

Далее рассмотрим типовой сценарий, который предполагает выгрузку пользовательских сессий из сотовой сети в сеть WiFi Direct с поддержкой со стороны 3GPP LTE. В данном сценарии представляет интерес определённая область моделирования, внутри которой расположены сотовая сеть и сеть D2D (например, торговый зал, бизнес-центр и т.д.). При этом пользователи обмениваются небольшими мультимедийными фрагментами с весьма строгими требованиями по качеству обслуживания. Такой сценарий выбран в первую очередь потому, что он может быть как описан аналитически, так и рассчитан имитационным моделированием с одними и теми же параметрами. В качестве примера в сети LTE используется политика передачи MR, когда все пользователи передают свои данные на максимальном уровне мощности. Остальные параметры приведены в таблице 1.

Следуя описанию функционирования системы, используется методика имитационного моделирования из работы [12] и анализа из работы [11]. В частности, была разработана модель системы, представленная на рис. 2, а также проведено сравнение эффективности работы такой сети с базовой сотовой сетью без поддержки соединений D2D. Аналитические результаты и результаты имитационного моделирования приведены далее для одного и того же набора параметров.

Одним из основных показателей, представляющих интерес для исследования рассматриваемой системы, является число сессий, которые могут обслуживаться одновременно. На рис. 3 предложено сравнение базовой сети 3GPP LTE с сетью, использующей технологию D2D. Подтверждены существенные преимущества, обеспечиваемые за счёт D2D-соединений. Непрерывные линии иллюстрируют данные

моделирования (И), а символы соответствуют аналитическим значениям (А). Очевидно, что общая тенденция – увеличение ожидаемого количества обслуживаемых сессий вплоть до точки насыщения, которая зависит от параметров сети, её планирования и методов управления ею.

Таблица 1

Параметры имитационного моделирования

Обозначение	Сотовая сеть	Сеть D2D
R , м	100	100
r , Мбит/с	4.8	4.8
μ^{-1} , с	3	3
k	5	6.5
G	197.43	2.4
w , МГц	10	20
η	0.5	0.5
N_0 , дБ	-60	-70
r_{\max} , Мбит/с	60	56

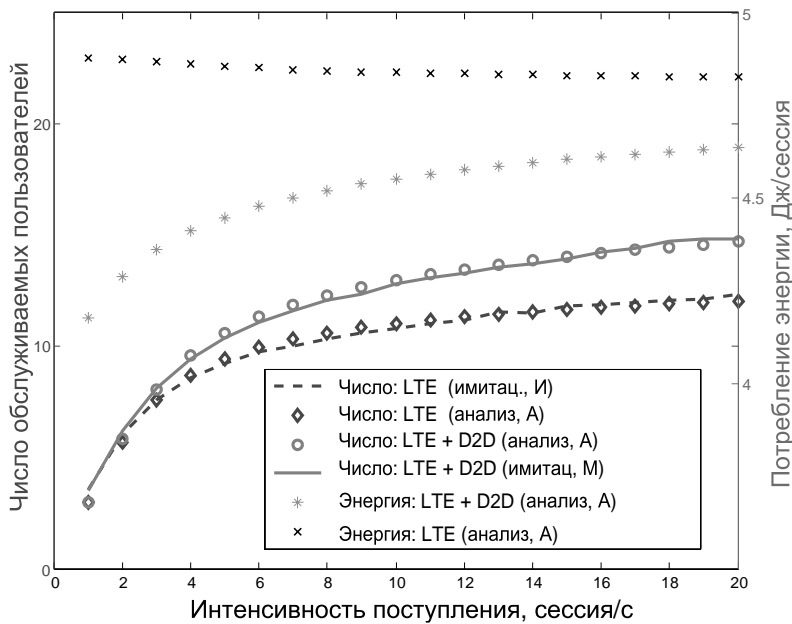


Рис. 3. Производительность системы (в числе сессий) и потребление мощности терминалами

Также можно изучить потребление мощности терминалами пользователей в сотовой (LTE) и интегрированной (LTE + D2D) сетях, что показано на рис. 3. Как видно, при относительно низких интенсивностях поступления сессий соединения D2D оказывают очень сильное влияние на энергетическую эффективность системы. Однако, когда система сильно загружена, связь D2D не может принять на себя существенную долю трафика, и экономия энергии становится менее существенной. Разумеется, потребление мощности в значительной степени зависит от конкретных параметров терминала.

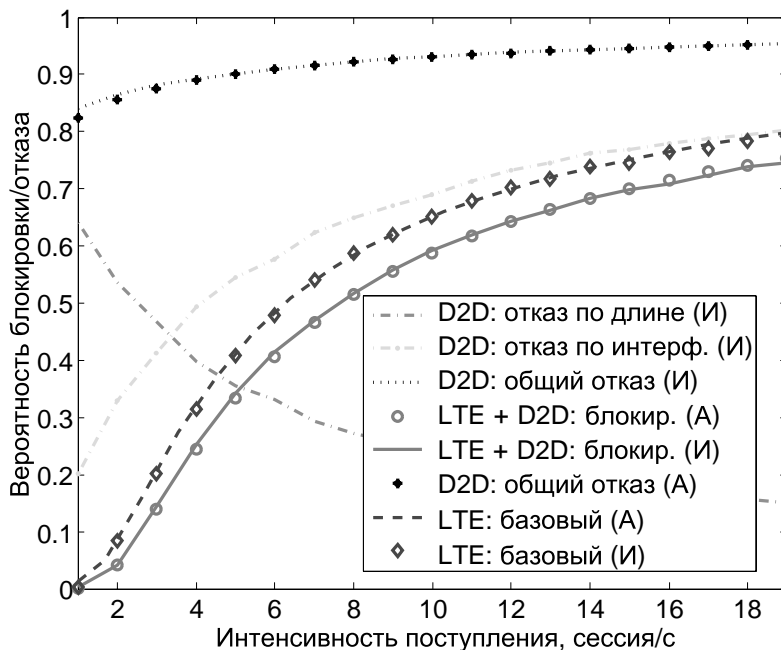


Рис. 4. Вероятности блокировки сессии и отказа

В тесной связи с пропускной способностью находится вероятность блокировки (см. рис. 4), выражающая долю запросов на обслуживание, которые не могут быть приняты сетью. Можно наблюдать, что вероятность блокировки в системе в целом, вероятность блокировки в сети D2D и вероятность блокировки в сети LTE растут с увеличением нагрузки на сеть. Однако этот эффект принципиально различен для двух исследуемых систем. Сотовая сессия блокируется, если для неё нет места в расписании на момент поступления, тогда как в сети D2D имеется две причины для блокировки сессий:

1. высокая интерференция со стороны существующих соединений,
2. чрезмерная длина соединения для поддержания требуемой скорости передачи (предполагая, что ограничение по интерференции отсутствует).

Важно понять структуру процессов блокировки в обоих случаях. В системе D2D при относительно низких нагрузках блокировка, в основном, вызвана длиной соединения, тогда как при увеличении нагрузки вероятность блокировки из-за интерференции превалирует.

В системе 3GPP LTE блокировка не имеет жёсткой отсечки, как можно было бы ожидать от централизованно планируемой системы. Фактически сотовая сеть не достигает 100%-й блокировки. Этот факт объясняется тем, что вместо отказа всем соединениям принимаются те сессии, которые все ещё помещаются в расписание. Тем самым с ростом нагрузки отдаётся приоритет соединениям с большей скоростью передачи (см. рис. 5).

В качестве пояснения стоит обратить внимание на характеристики соединений в исследуемой системе. Когда сотовая система не загружена, она может позволить себе допуск всех сессий, независимо от качества соединений. В таких условиях характеристики поступающих и принятых потоков схожи, а отказы практически отсутствуют (см. рис. 6, слева). Однако когда сотовая система сильно загружена, она допускает только сессии с относительно короткими соединениями (между близлежащими пользователями), поскольку они имеют значительно более высокую вероятность уместиться в имеющемся расписании (см. рис. 6, справа).

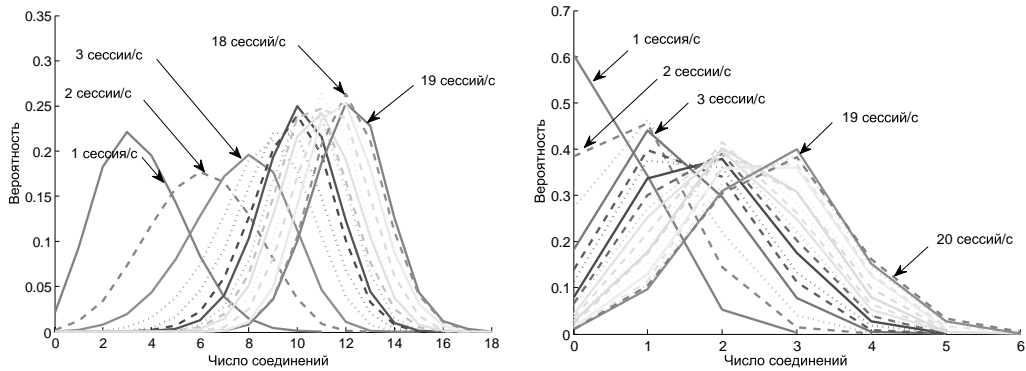


Рис. 5. Распределение числа соединений в сети LTE (слева) и D2D (справа)

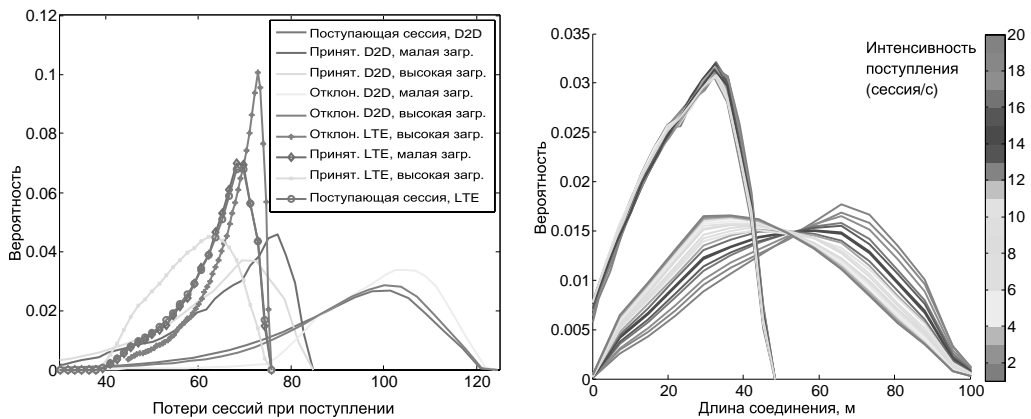


Рис. 6. Качество соединений (слева) и распределение их длины (справа)

В ненагруженной системе D2D ситуация обстоит иначе: качество соединений в целом гораздо ниже. Можно заметить, что независимо от интенсивности поступления сессий система D2D является весьма избирательной по отношению к принятым соединениям с точки зрения их длины. Это выражается в практически идентичном распределении как для мало загруженной системы, так и для условий перегрузки. Причина такого поведения заключается в том, что существование D2D-соединений при высоких нагрузках изначально определяется уровнем интерференции. Действительно, более короткие соединения бывают заблокированы реже, но в сочетании с другими практическими эффектами это мало отражается на итоговой производительности.

4. Выводы

Основываясь на полученных сведениях, можно заключить, что системы D2D с поддержкой со стороны сотовых сетей возможно моделировать аналитически, получая при этом результаты, близкие по точности к имитационным. С другой стороны, соответствующий анализ имеет некоторые ограничения с точки зрения сотовой сети, связанные с рассмотрением в рамках модели только одной соты. Кроме того, при исследовании сети D2D сделаны весьма строгие ограничивающие предположения относительно интерференции и протокола управления прямыми соединениями.

Однако данные имитационного моделирования позволяют дополнить опорные аналитические исследования, углубляя понимание принципов работы технологий D2D с сетевой поддержкой.

Объединяя результаты аналитического и имитационного моделирования, можно сделать итоговый вывод о том, что выгрузка трафика 3GPP LTE на D2D-соединения WiFi Direct может существенно снизить вероятность блокировки сессии, а также повысить энергетическую эффективность беспроводных терминалов. На практике число пользователей, заинтересованных в использовании связи D2D, может варьироваться, что будет соответствующим образом влиять на величину достижимого выигрыша. Например, при кооперативном обмене данными следует ожидать значительного эффекта от выгрузки трафика. В то же время, в случае работы социальных сетей, доля D2D-трафика существенно зависит от типа контента, что может потребовать дополнительных исследований.

Литература

1. What Will 5G Be? / J. G. Andrews, S. Buzzi, W. Choi et al. // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. — 2014. — Vol. 32, No 6. — Pp. 1065–1082. — ISSN 0733-8716. — DOI: 10.1109/JSAC.2014.2328098.
2. Five Disruptive Technology Directions for 5G / F. Boccardi, R. W. Heath, A. Lozano et al. // *IEEE Communications Magazine*. — 2014. — Vol. 52, No 2. — Pp. 74–80. — ISSN 0163-6804. — DOI: 10.1109/MCOM.2014.6736746.
3. *Asadi A., Wang Q., Mancuso V.* A Survey on Device-to-Device Communication in Cellular Networks // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. — 2014. — Vol. 16, No 4. — Pp. 1801–1819. — ISSN 1553-877X. — DOI: 10.1109/COMST.2014.2319555.
4. Security and Privacy in Device-to-Device (D2D) Communication: a Review / M. Haus, M. Waqas, A. Y. Ding et al. // *IEEE Communications Surveys & Tutorials*. — 2017. — Vol. 19, No 2. — Pp. 1054–1079. — ISSN 1553-877X. — DOI: 10.1109/COMST.2017.2649687.
5. A Unifying Perspective on Proximity-Based Cellular-Assisted Mobile Social Networking / S. Andreev, J. Hosek, T. Olsson et al. // *IEEE Communications Magazine*. — 2016. — Vol. 54, No 4. — Pp. 108–116. — ISSN 0163-6804. — DOI: 10.1109/MCOM.2016.7452274.
6. Effects of Heterogeneous Mobility on D2D- and Drone-Assisted Mission-Critical MTC in 5G / A. Orsino, A. Ometov, G. Fodor et al. // *IEEE Communications Magazine*. — 2017. — Vol. 55, No 2. — Pp. 79–87. — ISSN 0163-6804. — DOI: 10.1109/MCOM.2017.1600443CM.
7. *Huang K., Lau V. K. N., Chen Y.* Spectrum Sharing between Cellular and Mobile Ad Hoc Networks: Transmission-Capacity Trade-Off // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. — 2009. — Vol. 27, No 7. — Pp. 1256–1267. — ISSN 0733-8716. — DOI: 10.1109/JSAC.2009.090921.
8. On the Design of Device-to-Device Autonomous Discovery / F. Baccelli, N. Khude, R. Laroia et al. // *2012 Fourth International Conference on Communication Systems and Networks (COMSNETS 2012)*. — 2012. — Pp. 1–9. — DOI: 10.1109/COMSNETS.2012.6151335.
9. Modeling and Analysis of K-Tier Downlink Heterogeneous Cellular Networks / H. S. Dhillon, R. K. Ganti, F. Baccelli, J. G. Andrews // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. — 2012. — Vol. 30, No 3. — Pp. 550–560. — ISSN 0733-8716. — DOI: 10.1109/JSAC.2012.120405.
10. Distributions of Transmit Power and SINR in Device-to-Device Networks / M. C. Er-turk, S. Mukherjee, H. Ishii, H. Arslan // *IEEE Communications Letters*. — 2013. — Vol. 17, No 2. — Pp. 273–276. — ISSN 1089-7798. — DOI: 10.1109/LCOMM.2012.122012.121632.

11. Analyzing Assisted Offloading of Cellular User Sessions onto D2D Links in Unlicensed Bands / S. Andreev, O. Galinina, A. Pyattaev et al. // *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*. — 2015. — Vol. 33, No 1. — Pp. 67–80. — ISSN 0733-8716. — DOI: 10.1109/JSAC.2014.2369616.
12. Cellular Traffic Offloading onto Network-Assisted Device-to-Device Connections / S. Andreev, A. Pyattaev, K. Johnsson et al. // *IEEE Communications Magazine*. — 2014. — Vol. 52, No 4. — Pp. 20–31. — ISSN 0163-6804. — DOI: 10.1109/MCOM.2014.6807943.

UDC 004.77

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-357-370

Session-level control in heterogeneous mobile radio networks with device-to-device connections

Sergey D. Andreev*, Konstantin E. Samouylov[†], Andrey M. Tyurlikov[‡]

** Institute of Applied Mathematics and Communications Technology
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

*[†] Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

*[‡] Department of Infocommunication Systems
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
67, B. Morskaya str., Saint-Petersburg, 190000, Russian Federation*

In the emerging fifth-generation mobile networks, the challenge of system capacity and user connection quality boosting becomes increasingly important. To this aim, it is possible to apply a novel direct communication technique that is built upon device-to-device (D2D) connectivity. Such heterogeneous interactions allow to offload data flows from a cellular network into the D2D system, which may operate in unlicensed frequencies. However, there emerge several problems with interference coordination and radio resource allocation. This work considers a model of the direct communication system with cellular assistance, which serves user-initiated data flows (sessions), as well as proposes an algorithm to control traffic offloading from a cellular network onto the D2D connections. Analytical and simulation results are offered to investigate this heterogeneous system with D2D communication capabilities.

Key words and phrases: Fifth-generation networks, direct connectivity, device-to-device (D2D) communication with cellular assistance, traffic offloading control

References

1. J. G. Andrews, S. Buzzi, W. Choi, S. V. Hanly, A. Lozano, A. C. K. Soong, J. C. Zhang, What Will 5G Be?, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 32 (6) (2014) 1065–1082. doi:10.1109/JSAC.2014.2328098.
2. F. Boccardi, R. W. Heath, A. Lozano, T. L. Marzetta, P. Popovski, Five Disruptive Technology Directions for 5G, *IEEE Communications Magazine* 52 (2) (2014) 74–80. doi:10.1109/MCOM.2014.6736746.
3. A. Asadi, Q. Wang, V. Mancuso, A Survey on Device-to-Device Communication in Cellular Networks, *IEEE Communications Surveys & Tutorials* 16 (4) (2014) 1801–1819. doi:10.1109/COMST.2014.2319555.
4. M. Haus, M. Waqas, A. Y. Ding, Y. Li, S. Tarkoma, J. Ott, Security and Privacy in Device-to-Device (D2D) Communication: a Review, *IEEE Communications Surveys & Tutorials* 19 (2) (2017) 1054–1079. doi:10.1109/COMST.2017.2649687.

5. S. Andreev, J. Hoesek, T. Olsson, K. Johnsson, A. Pyattaev, A. Ometov, E. Olshannikova, M. Gerasimenko, P. Masek, Y. Koucheryavy, T. Mikkonen, A Unifying Perspective on Proximity-Based Cellular-Assisted Mobile Social Networking, *IEEE Communications Magazine* 54 (4) (2016) 108–116. doi:10.1109/MCOM.2016.7452274.
6. A. Orsino, A. Ometov, G. Fodor, D. Moltchanov, L. Militano, S. Andreev, O. N. C. Yilmaz, T. Tirronen, J. Torsner, G. Araniti, A. Iera, M. Dohler, Y. Koucheryavy, Effects of Heterogeneous Mobility on D2D - and Drone-Assisted Mission-Critical MTC in 5G, *IEEE Communications Magazine* 55 (2) (2017) 79–87. doi:10.1109/MCOM.2017.1600443CM.
7. K. Huang, V. K. N. Lau, Y. Chen, Spectrum Sharing between Cellular and Mobile Ad Hoc Networks: Transmission-Capacity Trade-Off, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 27 (7) (2009) 1256–1267. doi:10.1109/JSAC.2009.090921.
8. F. Baccelli, N. Khude, R. Laroia, J. Li, T. Richardson, S. Shakkottai, S. Tavildar, X. Wu, On the Design of Device-to-Device Autonomous Discovery, in: 2012 Fourth International Conference on Communication Systems and Networks (COMSNETS 2012), 2012, pp. 1–9. doi:10.1109/COMSNETS.2012.6151335.
9. H. S. Dhillon, R. K. Ganti, F. Baccelli, J. G. Andrews, Modeling and Analysis of K-Tier Downlink Heterogeneous Cellular Networks, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 30 (3) (2012) 550–560. doi:10.1109/JSAC.2012.120405.
10. M. C. Erturk, S. Mukherjee, H. Ishii, H. Arslan, Distributions of Transmit Power and SINR in Device-to-Device Networks, *IEEE Communications Letters* 17 (2) (2013) 273–276. doi:10.1109/LCOMM.2012.122012.121632.
11. S. Andreev, O. Galinina, A. Pyattaev, K. Johnsson, Y. Koucheryavy, Analyzing Assisted Offloading of Cellular User Sessions onto D2D Links in Unlicensed Bands, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications* 33 (1) (2015) 67–80. doi:10.1109/JSAC.2014.2369616.
12. S. Andreev, A. Pyattaev, K. Johnsson, O. Galinina, Y. Koucheryavy, Cellular Traffic Offloading onto Network-Assisted Device-to-Device Connections, *IEEE Communications Magazine* 52 (4) (2014) 20–31. doi:10.1109/MCOM.2014.6807943.

© Андреев С. Д., Самуйлов К. Е., Тюрликов А. М., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Андреев С. Д., Самуйлов К. Е., Тюрликов А. М. Управление потоками в гетерогенных мобильных сетях радиодоступа с соединениями устройство – устройство // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 357–370. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-357-370.

For citation:

Andreev S. D., Samouylov K. E., Tyurlikov A. M. Session-level control in heterogeneous mobile radio networks with device-to-device connections, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (4) (2018) 357–370. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-357-370. In Russian.

Сведения об авторах:

Андреев Сергей Дмитриевич — доцент, кандидат технических наук, директор научного центра моделирования беспроводных сетей 5G Института прикладной математики и телекоммуникаций РУДН (e-mail: andreev-sd@rudn.ru, тел.: +7 (921) 6314077)

Самуйлов Константин Евгеньевич — профессор, доктор технических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей (e-mail: samuylov-ke@rudn.ru, тел.: +7 (903) 7402982)

Тюрликов Андрей Михайлович — профессор, доктор технических наук, профессор кафедры инфокоммуникационных систем (e-mail: turlikov@vu.spb.ru, тел.: +7 (911) 9164071)

Information about the authors:

Andreev Sergey D. — Candidate of Technical Sciences, Director, Scientific Center for Modeling Wireless Networks 5G, Institute of Applied Mathematics and Telecommunications, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: andreev-sd@rudn.ru, phone: +7 (921) 6314077)

Samouylov Konstantin E. — Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: samuylov-ke@rudn.ru, phone: +7 (903) 7402982)

Tyurlikov Andrey M. — Professor, Doctor of Technical Sciences, Professor of Department of Infocommunication Systems of Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (e-mail: turlikov@vu.spb.ru, phone: +7 (911) 9164071)

УДК 004.021:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-371-382

Вычислительная и имитационная модели системы с управлением на Modelica

А. М. Ю. Апреутесей*, А. В. Завозина*,
А. В. Королькова*, Д. С. Кулябов*†

* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
ул. Жолио-Кюри, д. 6, г. Дубна, Московская область, Россия, 141980*

При моделировании сетевых протоколов является проблемой выбор модельного подхода и средства программной реализации. Специфика данной предметной области состоит в том, что для описания протоколов обычно используют дискретно-событийный подход. Однако дискретный модельный подход имеет ряд недостатков. Он плохо масштабируем, недостаточно хорошо подходит для описания динамических систем. Как альтернативу дискретному подходу обычно рассматривают непрерывный подход. Но при моделировании дискретных событий непрерывное описание становится излишне сложным и тяжеловесным. События принимают форму некоторых ограничений на непрерывную систему, которые зачастую не входят явно в непрерывную модель, а имеют форму дополнительных семантических описаний. Авторы предлагают использовать при моделировании подобных систем гибридный (непрерывно-дискретный) подход. В рамках гибридного подхода дискретная система записывается в непрерывном виде, а события принимают вид присущих подходу дискретных переходов. Кроме того, если брать за основу именно описание событий, на основе гибридного подхода можно получить и имитационную модель.

В работе демонстрируется применение гибридного подхода для описания системы с управлением на примере взаимодействия протокола TCP и алгоритма RED. Демонстрируется простота создания как вычислительной, так и имитационных моделей системы. В качестве языка реализации используется язык Modelica.

Ключевые слова: активное управление трафиком, имитационное моделирование, гибридное моделирование, Modelica, Random Early Detection (RED)

1. Введение

При моделировании сложных систем возникает проблема выбора модельного подхода. Приведём следующий пример.

Пусть имеется система управления посредством алгоритма случайного раннего обнаружения (Random Early Detection, RED) [1] потоком трафика, передаваемого по протоколу TCP (Transmission Control Protocol). В такой системе можно выделить следующие особенности.

Во-первых, модель передачи данных по протоколу TCP можно описывать как в дискретно-событийной парадигме (как это реализовано в эталонном средстве имитационного моделирования сетевых протоколов ns-2 [2, 3], но в этом случае возникает проблема масштабируемости системы), так и с использованием непрерывного подхода (представление потока данных как потока жидкости [4, 5], в этом случае усложняется математическая модель системы).

Во-вторых, модель модуля активного управления TCP-подобным трафиком может быть представлена особого вида функцией, зависящей от типа RED-алгоритма

(функция может быть кусочно непрерывной с разрывами первого рода, иметь различные параметры, влияющие на её вид и т.п.) [1, 6–8], т.е. тоже встаёт вопрос о выборе способа моделирования.

В-третьих, модель взаимодействия входящего TCP-потока и маршрутизатора, обрабатывающего поток по алгоритму типа RED, может иметь ряд ограничений, затрудняющих её исследование в рамках только одного подхода — непрерывного или дискретного.

Таким образом, встаёт проблема моделирования как протокола TCP и управляющего модуля по отдельности, так и их взаимодействия. Кроме того, необходимо выбрать адекватную методику моделирования [9–11].

Для решения проблемы дискретного и непрерывного подходов при моделировании сложных систем предлагается использовать гибридный подход [12–17]. В качестве программного средства моделирования предлагается использовать язык Modelica [18, 19], а конкретно его реализацию OpenModelica. Язык Modelica [18, 19] разработан некоммерческой организацией Modelica. Также эта ассоциация разрабатывает свободную стандартную библиотеку для этого языка. Modelica поддерживает непрерывную и гибридную (непрерывно-дискретную) парадигмы. Впрочем, чисто дискретные элементы в языке тоже присутствуют.

Структура работы следующая. В разделе 2 приводятся аргументы в пользу применения гибридного подхода к моделированию сложных систем. Затем в разделе 3 рассматривается идеология построения имитационной модели функционирования протокола TCP на языке Modelica. Показано, что по описанию в соответствии со стандартом можно получить имитационную модель функционирования данного протокола на языке Modelica. В следующем разделе 4 продемонстрированы возможности языка Modelica для численного моделирования гибридной по структуре системы взаимодействия входящего TCP-потока и маршрутизатора, обрабатывающего поток по алгоритму типа RED. В заключении делается вывод о применимости гибридного подхода к задачам моделирования сетевых протоколов.

2. Гибридный подход к моделированию

Гибридный подход к моделированию систем [12–16] позволяет учесть как непрерывный, так и дискретный аспекты поведения моделируемого объекта.

Гибридность поведения моделируемой системы может проявляться по-разному:

- взаимодействие объекта, описываемого непрерывной моделью, с объектом, описываемым дискретной моделью (пример — система автоматического управления, в которой модель объекта управления является непрерывной, а модель устройства управления — дискретной);
- изменение состава моделируемой системы (пример — системы с переменным числом компонентов);
- скачкообразные качественные изменения состояний непрерывной модели объекта (в качестве дискретных событий выступают моменты качественного изменения поведения непрерывной модели).

При гибридном подходе к моделированию акцент можно делать или на дискретности исходной системы и учитывать длительность входных и выходных действий, или на непрерывности исходной системы с допущением наличия мгновенных событий наряду с длительными по времени.

Рассмотрим второй случай и будем добавлять к существующей динамической модели дискретные элементы. В качестве таких элементов могут выступать:

- начальные условия или скачкообразное изменение параметров системы в правой части дифференциального уравнения;
- число уравнений, описывающих поведение динамической системы;
- форма правых частей дифференциальных уравнений.

В рамках гибридной модели естественным образом можно представить как индикаторные функции, так и дифференциальные включения, так как скачкообразное

изменение параметров можно представить как изменение начальных условий в модифицированной системе дифференциальных уравнений. Этот приём позволяет заменить систему с изменяющейся правой частью на систему с постоянной правой частью, но изменяющимися начальными условиями.

Например, система

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \pi), \quad \pi = \begin{cases} \psi_1, & x \in \mathfrak{X}_1, \\ \psi_2, & x \in \mathfrak{X}_2, \end{cases} \quad (1)$$

в которой π — кусочно-постоянный параметр, может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, t, \pi), \\ \frac{d\pi}{dt} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \pi(0) = \psi_1, & x \in \mathfrak{X}_1, \\ \pi(0) = \psi_2, & x \in \mathfrak{X}_2. \end{cases} \quad (3)$$

Такой приём возможно применить при моделировании поведения протокола TCP и механизма RED в разных состояниях.

3. Имитационное моделирование функционирования протокола TCP на языке Modelica

Обычно функционирование сетевых протоколов формулируется в форме дискретно-событийного описания. Рассмотрим идеологию построения имитационной модели функционирования протокола TCP на языке Modelica.

Есть несколько стандартов протокола TCP, отличающихся реализацией механизма скользящего окна, применяемого для управления перегрузками в сетях передачи данных. В данной работе будем моделировать протокол TCP Reno [20, 21], поскольку именно на нём базировалась оригинальная модель [22–25], используемая в наших исследованиях в качестве базовой.

Особенностью протокола TCP Reno является зависимость изменения размера окна перегрузки (Congestion Window, CWND) от той или иной фазы механизма управления перегрузками. Всего таких фаз четыре: медленный старт, предотвращение перегрузок, быстрое восстановление, тайм-аут. Работа алгоритма предотвращения перегрузок в TCP описывается в RFC 5681 [21].

В фазе медленного старта окно перегрузки растёт линейно $cwnd = cwnd + 1$ в случае прихода на источник сообщения, что оповещенный пакет доставлен (Acknowledge, ACK). Первоначальный размер окна перегрузки (Minimum Segment Size, MSS) может принимать значение 1, 2 или 10 сегментов. Сообщения о доставке отправляются приёмником для каждого пакета. Для упрощения можно предположить, что по истечении времени двойного оборота (Round-Trip Time, RTT) источник получает сразу все подтверждения о доставке отправленных пакетов. В этом случае можно считать, что по истечении времени двойного оборота происходит удвоение размера окна перегрузки.

Переход в фазу предотвращения перегрузки происходит при достижении размером окна TCP определённого размера. Меняется и схема изменения размера окна — для каждого подтверждения ACK окно перегрузки увеличивается на величину $1/cwnd$. Это эквивалентно увеличению окна на один пакет за время двойного оборота.

Переход в фазу быстрого восстановления происходит при получении сообщения типа тройного дублирования подтверждения (Triple Duplicate ACK, TD ACK). В этой фазе размер окна уменьшается в 2 раза $cwnd \rightarrow cwnd/2$.

Фаза тайм-аут (Timeout, TO) возникает, когда источник не получает подтверждения о доставке пакета в течение заданного времени. В этом случае размер окна перегрузки устанавливается в начальное значение и протокол переходит в фазу медленного старта.

Важную роль в работе протокола TCP играет *таймер повторной передачи* (Retransmission timer). Значение этого таймера инициализируется при отправке сегмента данных. Подтверждение о доставке отправленного сегмента должно быть получено до срабатывания таймера. Иначе отправка сегмента данных должна быть повторена. При этом значение таймера остаётся постоянным в фазах медленного старта и избегания перегрузок, а в фазах быстрого восстановления и тайм-аута таймер будет линейно уменьшаться с течением времени.

Опишем переходы между состояниями TCP.

Переменная *ssth* используется для перехода от первоначальной фазы медленного старта протокола TCP к фазе предотвращения перегрузки. Инициализация этой переменной происходит при открытии соединения протокола TCP путём задания максимально возможного размера окна передачи. Собственно переход от фазы медленного старта к фазе предотвращения перегрузок происходит при достижении *cwnd* заданного размера *ssth*.

При потере пакетов происходит переход либо в состояние быстрого восстановления, либо в состояние тайм-аута. Данный переход мы моделируем эмпирически в зависимости от порогового размера окна (*timeout_th*) [26].

Аналогично из состояния избегания перегрузки можно перейти либо в состояние быстрого восстановления, либо в состояние тайм-аута.

По истечении времени повторной передачи из состояния быстрого восстановления мы переходим в состояние избегания перегрузок, а из состояния тайм-аута в состояние медленного старта.

На основе описания переходов между фазами протокола TCP можно построить UML-диаграмму (рис. 1).

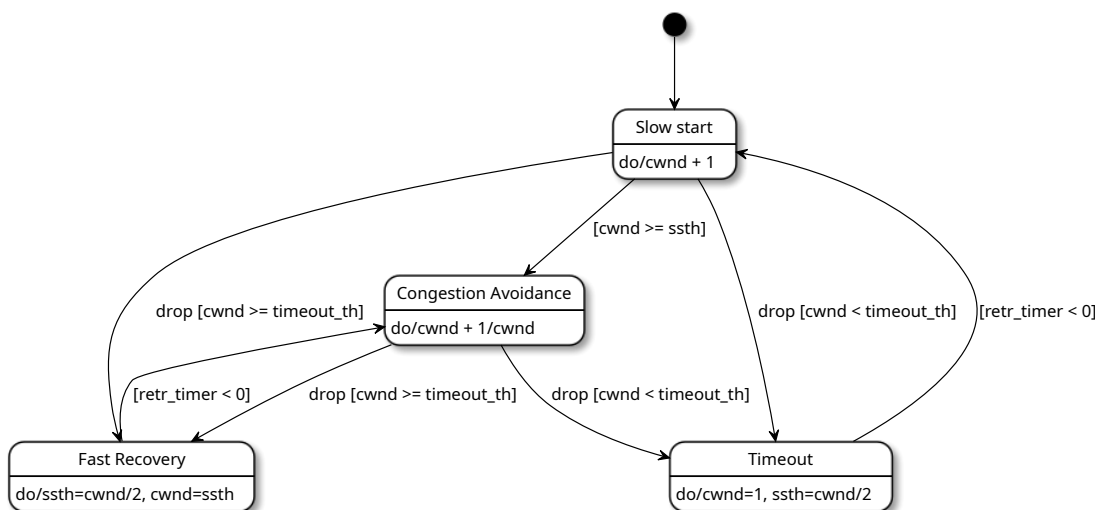


Рис. 1. Диаграмма состояний TCP

Полученную диаграмму можно преобразовать в программу на языке Modelica. Приведём фрагмент листинга (листинг 1), полностью соответствующий описанию в стандарте переходов между фазами протокола TCP.

Листинг 1: Алгоритм перехода состояний для протокола TCP

```
algorithm
state := TCPState.slowStart;
when edge(drop_delay) and w >= timeout_th and (state ==
  TCPState.slowStart or state == TCPState.congestAvoid)
  then
    state := TCPState.fastRecov;
  elseif w >= ssth and state == TCPState.slowStart then
    state := TCPState.congestAvoid;
  elseif edge(drop_delay) and w < timeout_th and (state
    == TCPState.slowStart or state ==
    TCPState.congestAvoid) then
    state := TCPState.timeOut;
  elseif retr_timer < 0 and state == TCPState.fastRecov
    then
    state := TCPState.congestAvoid;
  elseif retr_timer < 0 and state == TCPState.timeOut
    then
    state := TCPState.slowStart;
  end when;
```

Также на языке Modelica запишем уравнения изменения размера окна передачи протокола TCP (также в соответствии с описанием, приведённом в стандарте) (листинг 2).

Листинг 2: Изменение окна в протоколе TCP

```
// Fast Recovery
when (pre(state) == TCPState.slowStart or pre(state) ==
  TCPState.congestAvoid) and state == TCPState.fastRecov
  then
    reinit(retr_timer, o.RTT);
    reinit(ssth, w / 2);
    reinit(w, w / 2);
  end when;
// Timeout
when (pre(state) == TCPState.slowStart or pre(state) ==
  TCPState.congestAvoid) and state == TCPState.timeOut
  then
    reinit(retr_timer, RT0);
    reinit(ssth, w / 2);
    reinit(w, 1);
  end when;
```

Таким образом, мы продемонстрировали возможности языка Modelica по моделированию дискретных моделей. Фактически, дословно следуя тексту стандарта, описывающего функционирование протокола TCP, мы получили имитационную модель протокола.

4. Численное моделирование системы с управлением средствами языка Modelica

В работах [23, 24] в формализме стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновским процессом построена модель взаимодействия входящего TCP-потока и маршрутизатора, обрабатывающего поток по алгоритму типа RED. Модель имеет вид системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Фактически на эту систему накладывается ряд ограничений, которые затрудняют исследование данной модели в рамках непрерывного подхода, однако эти ограничения вполне укладываются в гибридный подход.

Математически систему процесса передачи трафика с регулируемой алгоритмом типа RED динамической интенсивностью потока можно представить в виде следующих трёх уравнений:

$$\begin{cases} \dot{W}(t) = \frac{1}{T(t)} \vartheta(W_{\max} - W) - \frac{W(t)}{2} \frac{W(t - T(t))}{T(t - T(t))} p(t - T(t)), \\ \dot{Q}(t) = \begin{cases} \frac{N(t)W(t)}{T(t)} - C, & Q(t) > 0, \\ \max\left(\frac{N(t)W(t)}{T(t)} - C, 0\right), & Q(t) = 0, \end{cases} \\ \dot{\hat{Q}}(t) = w_q C \hat{Q}(t) + w_q C Q(t). \end{cases} \quad (4)$$

В этой системе $W(t)$ обозначает среднее значение размера TCP окна (измеряется в пакетах), через $Q(t)$ обозначено среднее значение длины очереди (также измеряется в пакетах), через $\hat{Q}(t)$ — экспоненциально взвешенное скользящее среднее значение длины очереди. Кроме того, введены параметры системы: C — интенсивность обработки пакетов в очереди маршрутизатора, $N(t)$ — число TCP-сессий, $T(t)$ — время двойного оборота (Round Trip Time, сек). Элемент $\vartheta(W_{\max} - W)$ является функцией Хэвисайда и ограничивает рост окна (см. листинг 3).

Листинг 3: Ограничение роста окна

```
function wAdd
  input Real wIn;
  input Real wmax;
  input Real T;
  output Real wOut;
algorithm
  wOut := if noEvent(wIn > wmax) then 0 else 1 / T;
end wAdd;
```

Тогда уравнение для изменения окна запишется в следующем виде (листинг 4).

Листинг 4: Уравнение для изменения окна

```
equation
  der(w) = wAdd(w, wmax, T) - w * delay(w, T) / (2 * delay(T, T) * delay(p, T);
```

Оператор `der` задаёт производную по времени, а оператор `delay` задаёт запаздывание. При этом заметим, что моделирование запаздывания (особенно функционального) при непрерывном подходе представляет крайне нетривиальную задачу.

Алгоритм изменения мгновенной длины очереди представлен в листинге 5.

Листинг 5: Алгоритм изменения мгновенной длины очереди

```
algorithm
  q1 := N * w / T - C;
  qOut := if noEvent(q + q1 > 0) then q1 else -q;
```

Тогда дифференциальное уравнение для мгновенной длины очереди имеет крайне простой вид (листинг 6).

Листинг 6: Уравнение для изменения мгновенной длины очереди

```
equation
  der(q) = qAdd(pre(q), w, T, C, N);
```

Непосредственно за управление по алгоритму RED [1] отвечает функция сброса пакета p , значения которой лежат в интервале $[0, 1]$:

$$p = \begin{cases} 0, & 0 \leq \hat{Q} < Q_{\min}, \\ \frac{\hat{Q} - Q_{\min}}{Q_{\max} - Q_{\min}} p_{\max}, & Q_{\min} \leq \hat{Q} \leq Q_{\max}, \\ 1, & \hat{Q} > Q_{\max}. \end{cases} \quad (5)$$

Как мы видим, функция сброса — кусочная и разрывная. Всё это также затрудняет использование непрерывного подхода. В гибридном подходе функция сброса задаётся единственным атомарным оператором (см. листинг 7).

Листинг 7: Функция сброса RED

```
p = if ( q_avg < thmin*R ) then 0.0 elseif ( q_avg > thmax*
  R ) then 1.0 else (q_avg - thmin*R) * pmax / (thmax*R -
  thmin*R);
```

Здесь через R обозначен размер буфера, поскольку значения порогов нормированы на единицу.

Получившаяся программа компактна и имеет крайне простой вид. В чисто непрерывном подходе результирующая программа была излишне громоздкой.

Результаты вычислений можно представить в виде графиков. Как пример, приведём график поведения мгновенной длины очереди (рис. 2) и соответствующий фазовый портрет (в координатах w и q) (рис. 3)

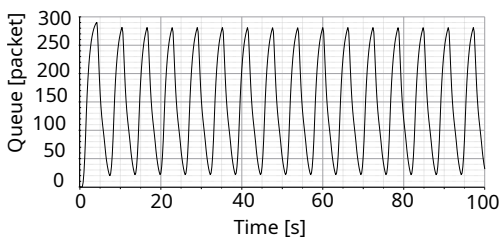


Рис. 2. График мгновенной длины очереди

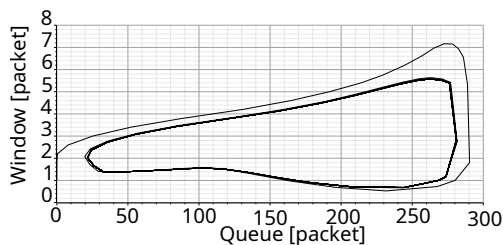


Рис. 3. Фазовый портрет mbox

5. Заключение

Авторы преследовали своей целью продемонстрировать применимость гибридного подхода для задач моделирования сетевых протоколов. Сетевые протоколы обычно описываются на основе дискретно-событийного подхода. Однако использование дискретного подхода при моделировании зачастую приводит к недостаточной масштабируемости модели. В то же время применение непрерывного подхода приводит к излишнему усложнению модели. Причём большое количество ограничений при непрерывном подходе не входят непосредственно в математическое описание модели, а присутствует в виде дополнительного семантического материала.

Кроме того, гибридный подход может применяться как при аналитическом, так и при имитационном моделировании. Впрочем, как можно видеть из листингов, дискретный подход в рамках гибридного подхода носит всё-таки подчинённый характер. Поэтому и код для имитационной модели (где превалирует дискретное описание) выглядит более громоздким, чем код для вычислительной модели (где превалирует непрерывный подход, а дискретный подход носит вспомогательный характер).

Таким образом, рассмотренный в статье гибридный (непрерывно-дискретный) подход к моделированию представляется нам на данном этапе наиболее адекватным для решения задач моделирования сетевых протоколов. К сожалению, данный подход недостаточно активно применяется исследователями, хотя и реализован в ряде систем компьютерного моделирования.

Благодарности

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-07-00556.

Литература

1. *Floyd S., Jacobson V.* Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1993. — Vol. 1, No 4. — Pp. 397–413. — DOI: 10.1109/90.251892.
2. *Altman E., Jiménez T.* NS Simulator for Beginners // Synthesis Lectures on Communication Networks. — 2012. — Vol. 5, No 1. — Pp. 1–184. — DOI: 10.2200/S00397ED1V01Y201112CNT010.
3. *Issariyakul T., Hossain E.* Introduction to Network Simulator NS2. — Boston, MA: Springer US, 2012. — P. 510. — DOI: 10.1007/978-1-4614-1406-3.
4. The Method of Constructing Models of Peer to Peer Protocols / A. V. Demidova, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — Pp. 557–562. — DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002162.
5. One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package / E. G. Eferina, A. V. Korolkova, M. N. Gevorkyan et al. // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2014. — No 3. — Pp. 46–59.
6. Congestion Control Scheme Performance Analysis Based on Nonlinear RED / C.-W. Feng, L.-F. Huang, C. Xu, Y.-C. Chang // IEEE Systems Journal. — 2015. — Pp. 1–8. — DOI: 10.1109/JSYST.2014.2375314.
7. *Lautenschlaeger W., Francini A.* Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links // Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015. — Budapest, Hungary: 2015.
8. *Karmeshu, Patel S., Bhatnagar S.* Adaptive Mean Queue Size and Its Rate of Change: Queue Management with Random Dropping. — 2016. — Pp. 1–17.

9. *Paxson V., Floyd S.* Why We Don't Know How to Simulate the Internet // Proceedings of the 29th conference on Winter simulation - WSC '97. — New York, USA: ACM Press, 1997. — Pp. 1037–1044. — DOI: 10.1145/268437.268737.
10. *Paxson V., Floyd S.* Wide Area Traffic: the Failure of Poisson Modeling // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1995. — Vol. 3, No 3. — Pp. 226–244. — DOI: 10.1109/90.392383.
11. On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version) / W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson // IEEE/ACM Transactions on Networking. — 1994. — Vol. 2, No 1. — Pp. 1–15. — DOI: 10.1109/90.282603.
12. *Maler O.* Hybrid Systems and Real-World Computations // Workshop on Theory of Hybrid Systems. — Lyndby, Denmark: Springer-Verlag, 1992.
13. *Maler O.* Control from Computer Science // Annual Reviews in Control. — 2002. — Vol. 26, No 2. — Pp. 175–187. — DOI: 10.1016/S1367-5788(02)00030-5.
14. Hybrid Modeling of Communication Networks Using Modelica / D. Färnqvist, K. Strandemar, K. H. Johansson, J. P. Hespanha // The 2nd International Modelica Conference. — 2002. — Pp. 209–213.
15. Hybrid Modeling of TCP Congestion Control / J. P. Hespanha, S. Bohacek, K. Obraczka, J. Lee // Lncs. — 2001. — 2034. — Pp. 291–304. — DOI: 10.1007/3-540-45351-2.25.
16. *Bohacek S., Lee J.* Analysis of a TCP Hybrid Model // Proc. of the 39th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. — 2001. — Pp. 1–10.
17. Hybrid Simulation Of Active Traffic Management / A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev et al. // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — 2016. — Pp. 685–691. — DOI: 10.7148/2016-0685.
18. *Fritzson P.* Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1. — Wiley-IEEE Press, 2003. — P. 939.
19. *Fritzson P.* Introduction to Modeling and Simulation of Technical and Physical Systems with Modelica. — Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2011. — DOI: 10.1002/9781118094259.
20. *Fall K., Floyd S.* Simulation-Based Comparisons of Tahoe, Reno and SACK TCP // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 1996. — Vol. 26, No 3. — Pp. 5–21. — DOI: 10.1145/235160.235162.
21. *Allman M., Paxson V., Blanton E.* TCP Congestion Control. — 2009. — DOI: 10.17487/rfc5681.
22. *Brockett R.* Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems // Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304). — Vol. 3. — IEEE, 1999. — Pp. 3077–3082. — DOI: 10.1109/CDC.1999.831407.
23. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-WindowSize Behavior // Proceedings of PERFORMANCE. — 1999. — Vol. 99.
24. *Misra V., Gong W.-B., Towsley D.* Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 2000. — Vol. 30, No 4. — Pp. 151–160. — DOI: 10.1145/347057.347421.
25. *Velieva T. R., Korolkova A. V., Kulyabov D. S.* Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3 // 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT). — IEEE Computer Society, 2015. — Pp. 570–577. — DOI: 10.1109/ICUMT.2014.7002164.
26. Modeling TCP Throughput / J. Padhye, V. Firoiu, D. Towsley, J. Kurose // ACM SIGCOMM Computer Communication Review. — 1998. — Vol. 28, No 4. — Pp. 303–314. — DOI: 10.1145/285243.285291.

UDC 004.021:519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-371-382

Computational and Simulation Models of the Control System on Modelica

Anne Marie Yu. Apreutesey*, Anna V. Zavozina*, Anna V. Korolkova*,
Dmitry S. Kulyabov*[†]

* *Department of Applied Probability and Informatics
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

[†] *Laboratory of Information Technologies
Joint Institute for Nuclear Research
6 Joliot-Curie, Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

When modeling network protocols, the choice of a model approach and a software implementation tool is a problem. The specificity of this subject area is that for the description of protocols usually the discrete-event approach is used. However, the discrete model approach has several disadvantages. It is poorly scalable, not well suited for describing dynamic systems. As an alternative to the discrete approach, a continuous approach is usually considered. But when modeling discrete events, continuous description becomes unnecessarily complicated and heavy. Events take the form of some restrictions on the continuous system, which are often not explicitly included in the continuous model, but have the form of additional semantic descriptions. The authors propose to use a hybrid (continuous-discrete) approach when modeling such systems. In the framework of the hybrid approach, the discrete system is recorded in a continuous form, and the events take the form of discrete transitions inherent in the approach. In addition, if it is based on the description of events, a simulation model can be obtained on the basis of a hybrid approach.

This paper demonstrates the use of a hybrid approach to describe systems with control by the example of the interaction of the TCP protocol and the RED algorithm. The simplicity of creating both computational and simulation models of the system is demonstrated. The Modelica language is used as the implementation language.

Key words and phrases: active queue management, simulation, hybrid modeling, Modelica, Random Early Detection (RED)

References

1. S. Floyd, V. Jacobson, Random Early Detection Gateways for Congestion Avoidance, *IEEE/ACM Transactions on Networking* 1 (4) (1993) 397–413. doi:10.1109/90.251892.
2. E. Altman, T. Jiménez, NS Simulator for Beginners, *Synthesis Lectures on Communication Networks* 5 (1) (2012) 1–184. doi:10.2200/S00397ED1V01Y201112CNT010.
3. T. Issariyakul, E. Hossain, *Introduction to Network Simulator NS2*, Springer US, Boston, MA, 2012. doi:10.1007/978-1-4614-1406-3.
4. A. V. Demidova, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, The Method of Constructing Models of Peer to Peer Protocols, in: 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), IEEE Computer Society, 2015, pp. 557–562. arXiv:1504.00576, doi:10.1109/ICUMT.2014.7002162.
5. E. G. Eferina, A. V. Korolkova, M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics"* (3) (2014) 46–59. arXiv:1503.07342.
6. C.-W. Feng, L.-F. Huang, C. Xu, Y.-C. Chang, Congestion Control Scheme Performance Analysis Based on Nonlinear RED, *IEEE Systems Journal* (2015) 1–8 doi:10.1109/JSYST.2014.2375314.

7. W. Lautenschlaeger, A. Francini, Global Synchronization Protection for Bandwidth Sharing TCP Flows in High-Speed Links, in: Proc. 16-th International Conference on High Performance Switching and Routing, IEEE HPSR 2015, Budapest, Hungary, 2015. arXiv:1602.05333.
8. Karmeshu, S. Patel, S. Bhatnagar, Adaptive Mean Queue Size and Its Rate of Change: Queue Management with Random Dropping (2016) 1–17 arXiv:1602.02241.
9. V. Paxson, S. Floyd, Why We Don't Know How to Simulate the Internet, in: Proceedings of the 29th conference on Winter simulation - WSC '97, ACM Press, New York, USA, 1997, pp. 1037–1044. doi:10.1145/268437.268737.
10. V. Paxson, S. Floyd, Wide Area Traffic: the Failure of Poisson Modeling, IEEE/ACM Transactions on Networking 3 (3) (1995) 226–244. doi:10.1109/90.392383.
11. W. E. Leland, M. S. Taqqu, W. Willinger, D. V. Wilson, On the Self-Similar Nature of Ethernet Traffic (Extended Version), IEEE/ACM Transactions on Networking 2 (1) (1994) 1–15. doi:10.1109/90.282603.
12. O. Maler, Hybrid Systems and Real-World Computations, in: Workshop on Theory of Hybrid Systems, Springer-Verlag, Lyndby, Denmark, 1992.
13. O. Maler, Control from Computer Science, Annual Reviews in Control 26 (2) (2002) 175–187. doi:10.1016/S1367-5788(02)00030-5.
14. D. Färnqvist, K. Strandemar, K. H. Johansson, J. P. Hespanha, Hybrid Modeling of Communication Networks Using Modelica, in: The 2nd International Modelica Conference, 2002, pp. 209–213.
15. J. P. Hespanha, S. Bohacek, K. Obraczka, J. Lee, Hybrid Modeling of TCP Congestion Control, in: Lncs, no. 2034, 2001, pp. 291–304. doi:10.1007/3-540-45351-2_25.
16. S. Bohacek, J. Lee, Analysis of a TCP Hybrid Model, in: Proc. of the 39th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, 2001, pp. 1–10.
17. A. V. Korolkova, T. R. Velieva, P. A. Abaev, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, Hybrid Simulation Of Active Traffic Management, Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation (2016) 685–691 doi:10.7148/2016-0685.
18. P. Fritzson, Principles of Object-Oriented Modeling and Simulation with Modelica 2.1, Wiley-IEEE Press, 2003.
19. P. Fritzson, Introduction to Modeling and Simulation of Technical and Physical Systems with Modelica, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2011. doi:10.1002/9781118094259.
20. K. Fall, S. Floyd, Simulation-Based Comparisons of Tahoe, Reno and SACK TCP, ACM SIGCOMM Computer Communication Review 26 (3) (1996) 5–21. doi:10.1145/235160.235162.
21. M. Allman, V. Paxson, E. Blanton, TCP Congestion Control (sep 2009). doi:10.17487/rfc5681.
22. R. Brockett, Stochastic Analysis for Fluid Queueing Systems, in: Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.99CH36304), Vol. 3, IEEE, 1999, pp. 3077–3082. doi:10.1109/CDC.1999.831407.
23. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Stochastic Differential Equation Modeling and Analysis of TCP-Window Size Behavior, Proceedings of PERFORMANCE 99.
24. V. Misra, W.-B. Gong, D. Towsley, Fluid-Based Analysis of a Network of AQM Routers Supporting TCP Flows with an Application to RED, ACM SIGCOMM Computer Communication Review 30 (4) (2000) 151–160. doi:10.1145/347057.347421.
25. T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, Designing Installations for Verification of the Model of Active Queue Management Discipline RED in the GNS3, in: 6th International Congress on Ultra Modern Telecommunications and Control Systems and Workshops (ICUMT), IEEE Computer Society, 2015, pp. 570–577. arXiv:1504.02324, doi:10.1109/ICUMT.2014.7002164.
26. J. Padhye, V. Firoiu, D. Towsley, J. Kurose, Modeling TCP Throughput, ACM SIGCOMM Computer Communication Review 28 (4) (1998) 303–314. doi:10.1145/285243.285291.

© Апреутесей А. М. Ю., Завозина А. В., Королькова А. В., Кулябов Д. С., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Апреутесей А. Ю., Завозина А. В., Королькова А. В., Кулябов Д. С. Вычислительная и имитационная модели системы с управлением на Modelica // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 371–382. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-371-382.

For citation:

Apreutesey A. Y., Zavozina A. V., Korolkova A. V., Kulyabov D. S. Computational and Simulation Models of the Control System on Modelica, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (4) (2018) 371–382. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-371-382. In Russian.

Сведения об авторах:

Апреутесей Анна Мария Юрьевна — студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (тел.: +7(495) 952-02-50)

Завозина Анна Васильевна — студент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (тел.: +7(495) 952-02-50)

Королькова Анна Владиславовна — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (тел.: +7(495) 952-02-50)

Кулябов Дмитрий Сергеевич — доцент, доктор физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (тел.: +7 (495) 952-02-50)

Information about the authors:

Anne-Marie Yu. Apreutesey — student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (phone: +7(495) 952-02-50)

Anna V. Zavozina — student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (phone: +7(495) 952-02-50)

Korolkova, Anna V. — Associate Professor, Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (phone: +7(495) 952-02-50)

Kulyabov, Dmitry S. — Associate Professor, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Associate Professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (phone: +7 (495) 952-02-50)

UDC 004.6:004.8:519.711:519.217
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-383-392

Semantics of Big Data in Corporate Management Systems

G. M. Novikova, E. J. Azofeifa

*Department of Information Technologies
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)
6, Miklukho-Maklaya Str., Moscow, 117198, Russian Federation*

The modern development of engineering, telecommunications, information and computer technologies allows for collecting, processing and storing huge volumes of data today. Among the first applications of Big Data there was the creation of corporate repositories that use gathered information for analysis and strategic decision-making. However, an unsystematic collection of information leads to the storage and processing of a large amount of non-essential data, while important information falls out of the analysts' view. An important point is the analysis of the semantics and purpose of data collection, which define both the collection technology and infrastructure and the direction of subsequent processing and use of Big Data with the help of metrics that reduce data volume, leaving only essential information to process. As a first step towards this goal, we present a formalization approach of corporate Big Data using a partially observable Markov decision process (POMDP), and we show that it naturally aligns itself with the corporate governance system.

Key words and phrases: big data, corporate management systems, control object, control task, entropy, ontology, semantic object, semantic context, POMDP

1. Background

The term Big Data is used today in reference to large volumes and a wide variety of structured and unstructured data. One of the first applications of Big Data was the creation of corporate repositories that use the collected information for analysis and strategic decision-making in Business Intelligence class systems. Today, there are technological opportunities not only to store, process and analyze huge amounts of data, but also to generate and transmit them with the help of technical and telecommunication tools. Various technical devices are sources of data that are used in projects such as the creation of digital cities, digital governments and smart homes. On the other hand, Industry 4.0 is a single concept of industrial production based on product life-cycle management [1] and smart production strategy, which involves the use of the Internet of Things, cloud computing and cybernetic systems. Its creation, as well as the development of technical means of data generation and transmission, expand the use of Big Data in activities of artificially created objects [2], primarily in the creation of new mechanisms that improve the governance system of corporations.

However, the increasing amount of information raises the problem of choosing essential, reliable and consistent information. Today, Big Data can not only reduce entropy and improve the quality of the control system, but also contribute to increase the entropy of a system if the system does not have the mechanisms to combat noise that distorts information. When working with information, it is necessary to understand for what purpose Big Data is collected and processed, what is the source of Big Data, how to weed out information that is not essential for a given subject area or a given class of tasks. It is obvious that when working with Big Data, one cannot limit oneself to the statistical theory of information proposed by Shannon. The actual problem is the identification of the semantics of information for purposeful and systematic data collecting and processing, as well as the creation of a particular infrastructure and set of metrics for Big Data. This task is of particular practical importance in the creation and operation of cybernetic systems to which a corporation belongs.

2. Contextual semantics of Big Data

Semantics, broadly speaking, is the relationship between language expressions and the world, real or imagined. Semantics is connected with pragmatics, and in some cases the semantics of the concept is identical to its pragmatics. Today, it is necessary to give a more precise definition of the concept of “semantics”, replacing units of language with units of information and considering different types of information: colors, sounds, images, linguistic and numerical symbols, and even emotional (tonal) signs, since any information type of the above can be compared to a digital analog. In particular, there already exist such fields of knowledge as phonosemantics — direction in linguistics, suggesting that vocal sounds (phonemes) can carry meaning in themselves, — psychology (semantics) of color, personal semantics, semantics of the artistic image, among others.

Another important clarification in the definition of semantics is the presence of the context, without which the semantics of a concept cannot be determined accurately. Montague [3] postulates that there are no words whose identification would be possible and correct in the absence of an environment or context.

When defining semantics, it is necessary to determine the semantic object (a symbol, a number, a set of letters, a sentence . . .), its source (corporate business processes and systems, corporate mail and websites, media, social networks . . .), its atoms (elementary semantic objects with uniquely determined semantics), its context (semantic fragment necessary for determining the meaning of individual atoms) and other characteristics that establish relationships between semantic objects and contexts (classification signs, movement of resources, internal and external state of objects . . .).

A semantic object has no semantics, is not a semantic atom, or is not a set of semantic atoms, if in a given context there is not an interpretation that has a true meaning. The exact meaning of the semantic object cannot be determined if: a) the context or its meaningful parts are missing, b) the semantic object is not a semantic atom, or c) there is no semantic characteristic given.

3. Enterprise management system as an area of context formation

What can be the context for Big Data in a corporate management system (CMS)? First of all, the context is the subject area itself (the type of activity of the company), together with entities such as objects, relationships, properties, activities, object states, and complex entities representing clusters such as situations in enterprise and environment management. Depending on the context, Big Data represents characteristics of the listed entities, as well as the presence or absence of these entities and their properties. However, there is a universal semantic context specific to corporate governance as a type of activity, which can be applied on management in any subject area.

Considering the CMS as a field of formation of Big Data context, a corporation is a complex dynamic system destined to achieve long-term profit with sustainable development. Management of such a system involves the presence of different contours, goals and objectives of management which can be granular in essence [3]. The objectives of managing a dynamic system such as a corporation are shown in Fig. 1.

The corresponding management systems underpinning the achievement of these goals are shown in Table 1.

It is important to understand that, in addition to the development of a corporate system (product line development, new activities and markets, technologies and resources), it is necessary to improve the management system itself. Therefore, Quality management systems (QMS), whose goal is TQM (Total quality management, which includes not only the quality of products and services, technologies and resources, but also the quality of the integrated management system), occupies an important place in an integrated corporate management system (ICMS) (see Fig. 2).

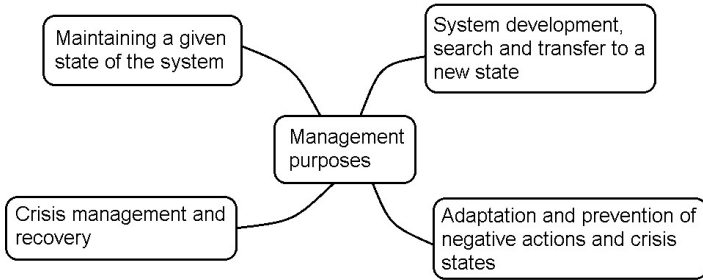


Figure 1. Purposes of dynamic system control

Table 1

Management purposes in the control system

Control system (control cycle)	Purpose of management
Operational (regular) management system	Stable operation of the system
System of strategic management	System development
System of crisis management	Adaptation and prevention of negative impacts and crisis states
System of situational management	Exit from crisis situations



Figure 2. Integrated corporate management system

In addition to the control cycle, other indicators guide the splitting of ICMS into subsystems or control objects. Subsystems can be selected according to their associated type of control object in the strategic management system, and are distinguished in the operational management system: human resources management system, customer relationship management system, production management system, equipment maintenance and repair management system, etc.

In addition to the type of production activity, the control cycle and the control object, the context of Big Data semantics is determined by the task that arises in the management process. Many tasks are defined by a management cycle, but the tasks that make up the Deming cycle (Plan-Do-Check-Analyze-Act) are solved in each cycle: planning, accounting, control, analysis and decision-making [4]. Tasks like prediction, modeling goal-setting are also solved in the strategic management cycle. Other tasks are added in the contour of crisis management: diagnostics of the control object state, and recognition of objects, characteristics and situations. The QMS, on the other hand, solves tasks regarding the development of corrective and preventive actions, and is associated to subsystems such as the investment planning system, analysis and forecasting subsystems, and check and monitoring systems.

Requirements to the solution of control problems are becoming more strict, and force a continual change in the management's priorities for defining objectives. Therefore, the first task is to adapt to internal and external changes in the environment [5] that affect both the properties of the system itself, including the control system, and the product range along with its properties, production technologies, business types and their integration [6], etc. Under these conditions, the need for Big Data analysis and processing is seen not only in the strategic management area, but also in the operational and crisis management areas, especially since the processing of Big Data nowadays can take place in real time [7].

4. Ontological approach to semantics of Big Data

Beer compares isomorphism between corporations to a biological (living) system as the human being [8]. Living organisms in the process of life continually increase their entropy and thus approach the dangerous state of maximum entropy representing death. They remain alive by constantly extracting negative entropy from their environment, which is otherwise called negentropy [9]: negative entropy, what the body feeds on. The means by which the organism maintains itself constantly at a sufficiently high level of order (equal to a sufficiently low level of entropy), in fact, consists in the continuous extraction of order from its environment. By analogy with a living organism, with the growing uncertainty of the external and internal environment, the system expands the size of the information search space, increasing entropy and the probability of making wrong decisions. Big Data can both increase and decrease entropy in the system. On the one hand, it is an increasing information flow of structured and unstructured data, which has non-factors that need to be processed and analyzed in decision-making. On the other hand, the solution of such tasks as classification and clustering on the basis of identifying the semantics of the data, is the means by which the organism maintains itself permanently at a fairly high level of order.

So, the complexity of the environment and the control object generates entropy, which can be reduced by means of Big Data processing tools. What is the condition, in which Big Data processing reduces entropy in the system, increases the growth of negentropy, contributing to order increase? The most important factor is a meaningful, ordered collection of Big Data, based on its semantics and in accordance with the selected context [10].

Big Data can also indicate the presence of [11]:

- relationships, characteristics, states, situations that develop between the object and in the environment, the appearance of objects with new properties, of new elements and systems states, as well as the emergence of new laws and standards,
- change and emergence of new trends in the field of sales, technologies and management, the presence of elements whose properties and purposes contradict the goals and properties of the corporate system,
- identification of preferences of users and consumers of products, as well as the compliance or non-compliance of consumer properties of products with declared properties,

- violation of the laws of management and operation, mismatch of the degree of diversity between the control system and the control object and the accumulation of facts contradicting the legislative basis of both corporate and branch level.

The list is not complete, but it shows how diverse Big Data semantics can be. At the same time, the uncertainty space is reduced when Big Data is projected onto contours, objects, and control tasks. On the other hand, domain ontology and ontology of the ICMS are situated in the core of the definition of Big Data semantics. Ontology combines data into a single system, which in turn completes, verifies, and updates the system [12]. Contextual semantics based, on the ontology of the ICMS and the corresponding subject area, is a method of reducing the diversity of data and the resulting entropy. Ontology gives form to the context, which is the basis for determining the semantics of Big Data, and is also the key to its sorting and transformation (saturation, updating) at the stages of preprocessing and standardization in architecture collection (see Fig. 3).

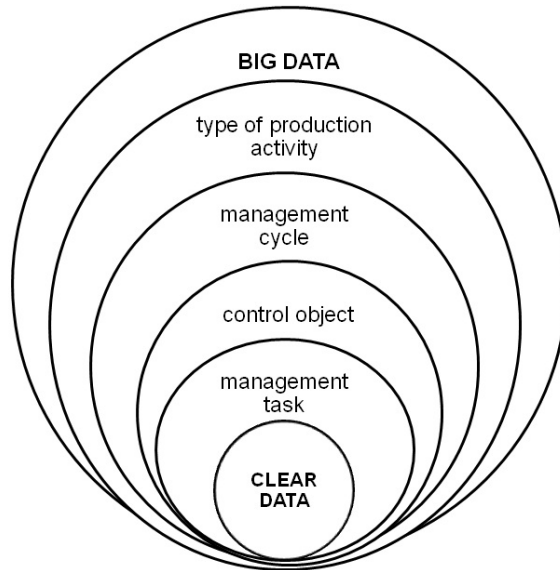


Figure 3. Moving from Big Data to Clear Data

A set of threshold values can be established around collected information in ontologies, by means of features such as materiality (significance), context, which is defined by metadata (type of production activity, business task, management cycle, goal, object and task of management), and completeness and sufficiency (necessary to minimize redundancy and duplication of information). Concrete examples of ontology applications can be seen in the artificial intelligence approach to education, where ontologies can serve as mindtools for tutoring systems [13]. On the other hand, fuzzy ontologies can be used to tackle complicated and heterogeneous control tasks with granular properties, and can also function as a linguistic basis to enable effective communication between cognitive agents [14].

5. Characterization of Big Data in a corporation

Laney [15] described the kind of information that we now refer to as Big Data as consisting of three main characteristics: the 3 v's, or volume (large numbers of records), velocity (the frequency of generation and/or the frequency of handling, recording, and publishing), and variety (structured, semi-structured and unstructured data types). Since

then, authors have added factors such as veracity (the level to which the data contains noise, uncertainty and error), value (the level to which insights can be extracted and the data can be repurposed), and several other characteristics gathered in [16].

Concretely, measures have been added concerning exhaustivity (the possibility of a system to capture the entire population within its data generation, rather than a sample); resolution (presentation of the minimal elements instead of aggregates), which can be coarse or fine-grained; indexicality (accompanying metadata that uniquely identifies the device, site and time/date of generation, along with other characteristics); relationality (the possibility to link data that share some common fields and to identify relationships between datasets); extensionality (adaptability, flexibility of data generation), and scalability (the extent to which a system can cope with varying data flow).

6. A POMDP quality model for Big Data environments

We proceed to apply a formalization of the quality management system considering the Big Data characterizations present in the literature. In order to correctly portray the various sources of uncertainty in real-world corporations, we model the system using an appropriate probabilistic framework, namely a partially observable Markov decision process (POMDP) [17]. We therefore incorporate the Big Data characteristics as possible sources of uncertainty regarding the obtainment of ideal information from a set of states.

Let F be defined as a set of fields and T as a set of data types. Thus, $tp : F \rightarrow T$ corresponds to a function assigning a data type to each field. On the other hand, we define H as a set of headers, and $h \in F^{|F|}$ as a header. Representing I as a set of indexes and R as a set of logs or records, a database — our main information destination — can be obtained by applying the relation $d : I \times H \rightarrow R^{|I| \times |H|}$, which corresponds to the association between headers, indexes and records. In this regard, $D = \{d_0, d_1, \dots, d_k\}$ represents a set of databases.

Roughly speaking, a POMDP consists in a normal Markov Decision Process regarding an agent in the presence of certain states, whose actions result in a probabilistic state transition and a corresponding reward. However, it presupposes an impossibility to directly read a true state of the system; rather, the POMDP generates an observation with an associated probability distribution over a set of states, which is known as a belief state. In the present study, we associate the generation of such belief states in a corporation to the level in which Big Data characteristics are present in its databases. For this purpose, we assigned a symbol to each Big Data characteristic studied: ϕ_g for volume, β_v for velocity, α_v for variety, α_b for veracity, α_e for exhaustivity, ϕ_r for resolution, θ_i for indexicality, α_l for relationality, β_b for value, β_e for extensionality, and β_s for scalability.

Defining S as a (finite) set of states, we consider an individual state to be derived from database records. This gives rise to an association between database logs and states in the form of the function $ss : D^{|D|} \times I^{|I|} \rightarrow S$. From the point of view of an agent with incomplete knowledge, such a set S can be ordered to display perceived similarities between states, so that agents' observations result in sets of similar states. We consider that such a similarity depends on the contingent configuration of the Big Data factors. Thus, we define a partial order of the states in a state space S as the result of a function $ord : [0, 1]^4 \rightarrow S^{|S|}$, which takes as inputs the values α_v , α_b , α_e and α_l as characteristics directly concerning the way data is structured in a certain domain. Following this definition, we present some helper functions; namely, $ix : S \times S^{|S|} \rightarrow \mathbb{N}$, a function returning the index of a state in a state space; $off : [0, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$, an observation offset from a real state in a state space poset, depending on θ_i ; and $ng : [0, 1]^4 \rightarrow \mathbb{N}$, a state neighborhood radius depending on ϕ_g and ϕ_r . This gives rise to a major equation

in the Big Data POMDP.

$$obs* = (D*, I*) = \bigcup_{j=k-off(\theta_i)}^{k+off(\theta_i)} s_j, \quad k = ix(ss(D*, I*), S*), \quad (1)$$

where $s_j \in S^*$ and $S^* = ord(\alpha_v, \alpha_b, \alpha_e, \alpha_l)$. Equation 1 corresponds to a function returning an observation or belief state, i.e. a set of states believed to contain the true state, and is further detailed by a function $po : S^{|S|} \rightarrow [0, 1]^{|S|}$, returning a probability distribution over a set of states.

Having formalized the basic functioning of the Big Data POMDP, it follows to define a set A of actions, which give rise to a set of conditional transition probabilities between states with the function $pc : S \times A \times S \rightarrow [0, 1]$. Considering the corporation (concretely, the QMS) as an agent, it is subject to a reward function $rw : S \times A \times [0, 1]^4 \rightarrow \mathbb{R}$; which depends on the current state, the action taken, and the coefficients $\beta_v, \beta_e, \beta_b$ and β_s . The latter are closely related to the capabilities of the corporation's information systems to promptly react to the significant flow of information in Big Data environments. Finally, we introduce $\delta \in [0, 1]$: the discount factor. Its functioning is portrayed in the main equation (Eq. 2) of the Big Data POMDP.

$$X = E \left[\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t * w_t \right], \quad (2)$$

where $w_t = rw(fs(t), a, \beta_v, \beta_e, \beta_b, \beta_s)$, $a \in A$ is the reward at time step t , and $fs : \mathbb{N} \rightarrow S$ is a function associating a time step to its corresponding state. Equation 2 corresponds to the expected future discounted reward (X): the goal of the system is to perform actions at each time step in order to maximize X . When the discount factor (δ) is close to zero, the system focuses only on immediate rewards; on the other hand, when its value approaches one, the system dedicates its actions to increase future rewards.

In the QMS, the discount factor represents the balance between the strategic and crisis management system, on the one hand, and the operational and situational management system on the other hand: a value of would mean an equivalent ratio of operational decisions over strategic ones. The difference between strategic and crisis management, and equivalently between operational and situational management, radicates on the set A of actions: the set can be partitioned beforehand according to each system.

7. Conclusion

The development of means for formation and transmission of Big Data expands the scope of its use in the activities of corporations, especially in the creation of new mechanisms that improve the corporate governance system. However, if we approach the collection and processing of Big Data without analyzing its semantics, believing that we can solve the variety of problems arising in the management process by identifying structured data and knowledge from the information chaos, we will get an increasing entropy due to non-factors: incompleteness, unreliability, inconsistency. There is a need for a systematic approach to the collection and processing of Big Data, and we consider it to be a new generation of sensors based on data semantics. Semantics, in turn, is determined by the context in which the data is generated and used.

In this regard, we performed the first step to the formalization of Big Data in ICMS as an architecture of data collection and a processing procedure. Based on the literature, we described several characteristics that Big Data needs to fulfill, and we constructed a decision model based on them. Concretely, we proposed a partially observable Markov decision process (POMDP) to translate uncertainty in the data to probabilistic observations of

states. With the corporation as an agent, we defined a method of parameterization of the model into strategic (crisis) management or operational (situational) management, and a method of differentiation between the actions corresponding to each of those systems.

Acknowledgments

The publication was prepared with the support of the “RUDN University Program 5-100”.

References

1. V. B. Tarasov, Life-Cycle Management of Products and Enterprises: a Key Aspect of Grid Enterprises Engineering, in: Proceedings of the XVIIth Scientific and Practical Conference IP & UZ-2014, MESI, Enterprise engineering and knowledge management, Moscow, 2014, pp. 245–255, in Russian.
2. R. M. Yusupov, B. V. Sokolov, A. I. Ptushkin, A. V. Ikonnikova, S. A. Posturyaev, E. G. Tsvirko, Analysis of the State of Research on the Problems of Life Cycle Management of Artificially Created Objects, in: Proceedings of SPIIRAN 2011, Vol. 16, 2011, pp. 37–109, in Russian.
3. R. Montague, Pragmatics and Intensional Logic, Semantics of Modal and Intensional Logic (1981) 223–253.
4. V. G. Eliferov, V. V. Repin, Process Approach to Management: Business Process Modeling, Mann Ivanov Ferber, Moscow, 2013, in Russian.
5. G. Novikova, Intellectual Technology in Corporate Management Systems, Engine 4 (2012) 58–59, in Russian.
6. S. L. Nimmagadda, T. Reiners, L. C. Wood, On Big Data-Guided Upstream Business Research and its Knowledge Management, Journal of Business Research 89 (2018) 143–158.
7. X. Zheng, Z. Cai, Real-Time Big Data Delivery in Wireless Networks: A Case Study on Video Delivery, IEEE Transactions on Industrial Informatics 13 (4) (2017) 2048–2057.
8. S. Beer, Brain of the Firm, ISBNM 978-5-397-00156-4, Librokom, 2009.
9. Z. Li, J. Jiang, Entropy Model of Dissipative Structure on Corporate Social Responsibility, IOP Conference Series: Earth and Environmental Science 69 (1) (2017) 012126.
10. A. Wahyudi, G. Kuk, M. Janssen, A Process Pattern Model for Tackling and Improving Big Data Quality, Information Systems Frontiers 20 (2018) 457.
11. G. Novikova, E. Azofeifa, Domain Theory Verification Using Multi-Agent Systems, Procedia Computer Science 103 (2017) 120–125.
12. A. Gladun, J. Rogushina, Ontologies in enterprise systems, Corporate system 1, in Russian.
13. T. A. Gavrilova, I. A. Leshcheva, D. V. Leshchev, Use of Ontologies as a Didactic Means, Artificial Intelligence 3 (2000) 34–39, in Russian.
14. V. B. Tarasov, A. P. Kalutskaya, M. N. Svyatkina, Granular, Fuzzy and Linguistic Ontologies for Providing Mutual Understanding between Cognitive Agents, Open Semantic Technologies for Intelligent Systems (OSTIS-2012) (2012) 267–278 In Russian.
15. D. Laney, 3-D Data Management: Controlling Data Volume, Velocity and Variety, Application Delivery Strategies by META Group Inc.
16. R. Kitchin, G. McArdle, What Makes Big Data, Big Data? Exploring the Ontological Characteristics of 26 Datasets, Big Data & Society 3 (1) (2016) 1–10.
17. G. Monahan, State of the Art—A Survey of Partially Observable Markov Decision Processes: Theory, Models, and Algorithms, Management Science 28 (1) (1982) 1–16.

УДК 004.6:004.8:519.711:519.217

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-383-392

Семантика больших данных в корпоративных системах управления

Г. М. Новикова, Э. Х. Азофейфа

*Кафедра информационных технологий
Российский университет дружбы народов
ул. Мичуко-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Современное развитие техники, телекоммуникационных, информационных и компьютерных технологий позволяет сегодня собирать, обрабатывать и хранить огромные объемы данных. Одним из первых применений больших данных (Big Data) стало создание корпоративных хранилищ, использующих собранную информацию для анализа и принятия стратегических решений. Однако бессистемный сбор информации приводит к хранению и обработке большого объема несущественных данных, в то время как важная информация выпадает из поля зрения аналитиков. Важным моментом является анализ семантики и цели сбора данных, которые определяют как инфраструктуру и технологию сбора, так и направление последующей обработки и использования больших данных с помощью метрик, сокращающих объем данных, оставляя для обработки только необходимую информацию. В статье рассматривается использование онтологии корпоративного менеджмента для определения контекстной семантики больших данных и уменьшения разнообразия данных и итоговой энтропии в системе управления, а также описано применение частично наблюдаемого Марковского процесса принятия решений (POMDP) для формализации функционирования корпоративной системы управления в среде больших данных.

Ключевые слова: большие данные, корпоративная система управления, объект управления, задача управления, энтропия, онтология, семантический объект, семантический контекст, частично наблюдаемый Марковский процесс

Литература

1. *Тарасов В. Б.* Управление жизненными циклами продукции и предприятия – ключевой аспект инжиниринга сетевых предприятий // Сборник научных трудов XVII-й научно-практической конференции (ИП&УЗ-2014, Москва. МЭСИ, 24–25 апреля 2014г.) / МЭСИ. — М.: Инжиниринг предприятий и управление знаниями, 2014. — С. 245–255.
2. Анализ состояния исследований проблем управления жизненным циклом искусственно созданных объектов / Р. М. Юсупов, Б. В. Соколов, А. И. Птушкин и др. // Труды СПИИРАН. 2011. — Т. 16. — 2011. — С. 37–109.
3. *Montague R.* Pragmatics and Intensional Logic // *Semantics of Modal and Intensional Logic*. — 1981. — Pp. 223–253.
4. *Елиферов В. Г., Репин В. В.* Процессный подход к управлению: моделирование бизнес-процессов. — М.: Манн, Иванов, Фербер, 2013.
5. *Новикова Г. М.* Интеллектуальные технологии в корпоративных системах управления // *Двигатель*. — 2012. — Т. 4. — С. 58–59.
6. *Nimmagadda S. L., Reiners T., Wood L. C.* On Big Data-Guided Upstream Business Research and its Knowledge Management // *Journal of Business Research*. — 2018. — Vol. 89. — Pp. 143–158.
7. *Zheng X., Cai Z.* Real-Time Big Data Delivery in Wireless Networks: A Case Study on Video Delivery // *IEEE Transactions on Industrial Informatics*. — 2017. — Vol. 13, No 4. — Pp. 2048–2057.
8. *Beer S.* Brain of the Firm. ISBNM 978-5-397-00156-4. — Librokom, 2009.
9. *Li Z., Jiang J.* Entropy Model of Dissipative Structure on Corporate Social Responsibility // *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*. — 2017. — Vol. 69, No 1. — P. 012126.

10. *Wahyudi A., Kuk G., Janssen M.* A Process Pattern Model for Tackling and Improving Big Data Quality // *Information Systems Frontiers*. — 2018. — Vol. 20. — P. 457.
11. *Novikova G., Azofeifa E.* Domain Theory Verification Using Multi-Agent Systems // *Procedia Computer Science*. — 2017. — Vol. 103. — Pp. 120–125.
12. *Гладун А. Я., Рогушина Ю. В.* Онтологии в корпоративных системах // *Корпоративные системы*. — 2006. — Т. 1.
13. *Гаврилова Т. А., Лещева И. А., Лещев Д. В.* Использование онтологий в качестве дидактического средства // *Искусственный интеллект*. — 2000. — Т. 3. — С. 34–39.
14. *Тарасов В. Б., Калуцкая А. П., Святкина М. Н.* Гранулярные, нечеткие и лингвистические онтологии для обеспечения взаимопонимания между когнитивными агентами // *Открытые семантические технологии проектирования интеллектуальных систем (OSTIS-2012)*. — 2012. — С. 267–278.
15. *Laney D.* 3-D Data Management: Controlling Data Volume, Velocity and Variety // *Application Delivery Strategies by META Group Inc.* — 2001.
16. *Kitchin R., McArdle G.* What Makes Big Data, Big Data? Exploring the Ontological Characteristics of 26 Datasets // *Big Data & Society*. — 2016. — Vol. 3, No 1. — Pp. 1–10.
17. *Monahan G.* State of the Art—A Survey of Partially Observable Markov Decision Processes: Theory, Models, and Algorithms // *Management Science*. — 1982. — Vol. 28, No 1. — Pp. 1–16.

© Novikova G. M., Azofeifa E. J., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Novikova G. M., Azofeifa E. J. Semantics of Big Data in Corporate Management Systems // *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. — 2018. — Vol. 26, No 4. — Pp. 383–392. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-383-392.

For citation:

Novikova G. M., Azofeifa E. J. Semantics of Big Data in Corporate Management Systems, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (4) (2018) 383–392. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-383-392.

Сведения об авторах:

Новикова Галина Михайловна — доцент, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: novikova_gm@mail.ru, тел.: +7(495)9550795)

Азофейфа Эстебан Х. Гомез (Коста Рика) — аспирант кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: esteban.azofeifa@gmail.com, тел.: +7(495)9550795)

Information about the authors:

Novikova Galina M. — Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Department of Information Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: novikova_gm@mail.ru, phone: +7(495)9550795)

Azofeifa Esteban J. (Costa Rica) — post-graduate student of Information Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: esteban.azofeifa@gmail.com, phone: +7(495)9550795)

Космологические модели

УДК 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398

Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина

Д. М. Янишевский

*Кафедра высшей математики**Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, Россия, 614990*

В рамках общей теории относительности построены соответствующие космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки. Известно, что тёмная энергия может моделироваться различными видами тензора энергии-импульса, поэтому в данной работе источниками гравитации являются в первом случае анизотропная жидкость, одна из компонент давления которой имеет уравнение состояния газа Чаплыгина, и идеальная жидкость, а во втором случае — анизотропная жидкость, газ Чаплыгина и космологический член. Показано, что модель, при рассмотрении расширения от планковских масштабов до современного размера наблюдаемой Вселенной, даёт удовлетворительную величину порядка угловой скорости её вращения. Полученные решения могут быть применены к изучению эффектов, имеющих место в современную эпоху, а также во время инфляционной стадии.

Ключевые слова: космологическое расширение, газ Чаплыгина, анизотропия Вселенной, ускоренное расширение, метрика VIII типа Бьянки

1. Введение

Обращение к анизотропной космологии обусловлено наблюдательными фактами [1–3], демонстрирующими возможность крупномасштабных отклонений от изотропии в наблюдаемой Вселенной, при этом глобальная анизотропия Вселенной может быть связана в том числе и с космологическим вращением. С другой стороны, в нынешнюю эпоху Вселенная расширяется с ускорением, причиной которого является, по-видимому, тёмная энергия. В работах [4, 5] авторами были получены результаты для метрики рассматриваемого типа, но с другими материальными источниками. В данной работе в рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta, \quad (1)$$

где $\eta_{\alpha\beta}$ — элементы лоренцевой матрицы, $\alpha, \beta = \{0, 1, 2, 3\}$, θ^α — ортонормированные 1-формы, выражающиеся через масштабный фактор R следующим образом:

$$\theta^0 = dt - R\nu_A e^A, \quad \theta^A = dt - RK_A e^A,$$

при этом $\nu_A = \{0, 0, 1\}$, $K_A = \{a, a, b\}$, $A = \{1, 2, 3\}$.

1-формы e^A имеют следующий вид:

$$e^1 = \operatorname{ch} y \cos z dx - \sin z dy, \quad e^2 = \operatorname{ch} y \sin z dx + \cos z dy, \quad e^3 = \operatorname{sh} y dx + dz. \quad (2)$$

Источниками гравитации в первой модели являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся тёмную энергию, и идеальная жидкость, описывающая

барионную материю. Во второй модели — анизотропная жидкость и космологическая постоянная, описывающие вращающуюся тёмную энергию, и газ Чаплыгина, описывающий некую экзотическую материю. Построенные космологические модели отличны от ранее найденных космологических решений для метрики (1) с базисными 1-формами (2). Расчёты, связанные с решением уравнений Эйнштейна, проведены с использованием тетрадного формализма в естественно возникающем базисе лоренцевой тетрады.

2. Космологическая модель с анизотропной жидкостью и пылевидной материей

Будем искать для метрики (1) космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

$$G_{00} = \frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1^2)\dot{R}^2 - 8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \mu(1 + v_3^2) + \rho,$$

$$G_{11} = \frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2} = p, \quad (4)$$

$$G_{33} = \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - b^2)\dot{R}^2 - 8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \pi + \mu v_3^2,$$

$$G_{03} = \frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4bR^2} = \mu v_3 \sqrt{1 + v_3^2}.$$

У нас используется такая система единиц, что скорость света и гравитационная постоянная, умноженная на 8π , равны единице. При этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{\alpha\beta}^{(1)} = (p + \rho) u_\alpha u_\beta + (\pi - p)\chi_\alpha \chi_\beta - p\eta_{\alpha\beta}, \quad (5)$$

где ρ , π — давления анизотропной жидкости в трёх направлениях, определяемых тетрадой, ρ — плотность энергии идеальной жидкости, $u^i = \delta_0^i$ — вектор 4-скорости сопутствующей анизотропной жидкости в проекции на тетраду, — вектор анизотропии в проекции на тетраду. В координатном представлении $\chi = \{0, 0, 0, 1\}$ — вектор анизотропии в проекции на тетраду. В координатном представлении

$$\chi_i = e_i^{(\alpha)} \chi_\alpha = e_i^{(3)} \chi_3 = \{0, bR \operatorname{sh}(y), 0, bR\}.$$

Тензор энергии-импульса идеальной пылевидной жидкости имеет вид:

$$T_{ik}^{(2)} = \mu v_i v_k, \quad (6)$$

где $v = \{v_0, 0, 0, v_3\}$, μ — плотность жидкости.

В итоге суммарный тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} = (p + \rho) u_i u_k + (\pi - p)\chi_i \chi_k - p\eta_{ik} + \mu v_i v_k. \quad (7)$$

Пусть давление p удовлетворяет уравнению состояния газа Чаплыгина

$$p = -\alpha/\rho. \quad (8)$$

Выражая из (4) с учётом (8) параметры материи, имеем плотность энергии анизотропной жидкости

$$\rho = \frac{4a^4 b^2 R^2 \alpha}{(b^2 - 1)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}, \quad (9)$$

её давления

$$p = \alpha \frac{(1 - b^2)(b^2 - 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2 \alpha}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - b^2)\dot{R}^2 - 8a^4 b^2 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2} - \\ & - \frac{\left(\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 b R^2}\right)^2 \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right)}{\left(\frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1^2)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2}\right) \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right) + \alpha}, \quad (11) \end{aligned}$$

плотность изотропной пылевидной жидкости

$$\begin{aligned} \mu = & \frac{\left(\frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1^2)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2}\right) \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right) + \alpha}{\left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right)} - \\ & - \frac{\left(\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 b R^2}\right)^2 \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right)}{\left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right) \left(\frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1^2)\dot{R}^2 - 8a^4 R\ddot{R}}{4a^4 b^2 R^2}\right) + \alpha}, \quad (12) \end{aligned}$$

и квадрат её скорости

$$v_3^2 = \frac{\left(\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 b R^2}\right)^2 \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right)^2}{\left((f + \alpha)^2 - \left(\frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4 b R^2}\right)^2 \left(\frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 b^2 R^2}\right)^2\right)}. \quad (13)$$

Поскольку число уравнений превышает число неизвестных, наложим дополнительное условие

$$p = \left(\left(\frac{3\ddot{R}}{R}\right) + \frac{l}{R^2}\right) \left(\frac{1 - b^2}{b^2}\right), \quad (14)$$

которое влечёт за собой уравнение, определяющее масштабный фактор:

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \quad (15)$$

где введено обозначение $L = l - b^2/4a^4$. Его общее решение даётся комбинацией экспонент, выбором постоянных интегрирования, всегда приводящихся к одному

из следующих выражений:

$$R = (\sqrt{L}/H) \operatorname{sh}(Ht), \quad L > 0, \quad (16)$$

$$R = (\sqrt{-L}/H) \operatorname{ch}(Ht), \quad L < 0, \quad (17)$$

$$R = R_0 e^{Ht}, \quad L = 0. \quad (18)$$

Данными зависимостями можно моделировать как современную стадию ускоренного расширения, так и обе стадии инфляции. Кинематические параметры вращающейся анизотропной жидкости имеют следующий вид:

- параметр расширения: $\Theta = 3\dot{R}/R$,
- ускорение: $A = \dot{R}/bR$,
- параметр вращения: $\omega = 1/2a^2R$,
- сдвиг отсутствует.

3. Космологическая модель с анизотропной жидкостью, газом Чаплыгина и Λ -членом

Рассмотрим ситуацию, когда источниками гравитации являются сопутствующая анизотропная жидкость, идеальная жидкость с уравнением состояния газа Чаплыгина и лямбда-член. Введя обозначения: ρ — плотность сопутствующей анизотропной жидкости, π , σ — её давления, ϵ — плотность газа Чаплыгина, p — его давление, и учтя Λ -член, получим следующий тензор энергии-импульса:

$$T_{ik} = (\rho + \pi) u_i u_k - \pi \eta_{ik} + (\epsilon + p) v_i v_k - p \eta_{ik} + \Lambda \eta_{ik}. \quad (19)$$

Примем $v_i = \{1, 0, 0, 0\}$, а также запишем уравнения состояния идеальной жидкости $\pi = \beta\rho$, $p = -\alpha/\epsilon$. Тогда уравнения Эйнштейна (3) примут следующий вид:

$$G_{00} = \frac{b^2(3 - b^2 - 4a^2) + 4a^4(3b^2 - 1)\dot{R}^2 - 8a^4R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = \rho + \epsilon + \Lambda, \quad (20)$$

$$G_{11} = \frac{(1 - b^2)(b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4b^2R^2} = p + \pi - \Lambda, \quad (21)$$

$$G_{33} = \frac{b^2(4a^2 + 3b^2 - 1) + 4a^4(3 - b^2)\dot{R}^2 - 8a^4b^2R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} = p + \sigma - \Lambda, \quad (22)$$

$$G_{03} = \frac{b^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4bR^2} = 0. \quad (23)$$

Решение уравнений (20)–(23) даёт масштабный фактор

$$R = (b/2a^2H) \operatorname{ch}(Ht), \quad (24)$$

и, с учётом уравнений состояния, $\epsilon = (\varsigma + \sqrt{\varsigma^2 - 4\alpha})/2$, где

$$\begin{aligned} \varsigma = & \frac{\beta b^2(3 - b^2 - 4a^2) + b^2(b^2 - 1) + 4a^4(\beta(3b^2 - 1) + b^2 - 1)\dot{R}^2}{4a^4b^2R^2} + \\ & + \frac{8a^4(b^2 - 1 - \beta)R\ddot{R}}{4a^4b^2R^2} - \Lambda(\beta + 1). \end{aligned} \quad (25)$$

Плотность энергии всегда положительна при условиях

$$b > \sqrt{1 + \beta}, \quad a^2 < \frac{1}{4}(3 - b^2), \quad \beta < \frac{2H^3(b^2 - 1) + b^2}{2H^3 + \Lambda b^2}. \quad (26)$$

Отметим, что кинематические параметры этой модели аналогичны величинам, рассмотренным в предыдущем случае. При этом вращение затухает, но анизотропная жидкость, в отличие от ситуации, имеющей место в отсутствие газа Чаплыгина, не изотропизируется. Качественное рассмотрение первой стадии инфляции при расширении Вселенной от планковского масштаба до современного размера наблюдаемой Вселенной 10^{28} см, даёт порядок угловой скорости вращения 10^{-11} рад/год.

Литература

1. *Land K., Magueijo J. a.* Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // *Physical Review Letters*. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 071301–071304. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.071301.
2. *Payez A., Cudell J. R., Hutsemékers D.* New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2012. — Vol. 2012, No 07. — P. 041. — DOI: 10.1088/1475-7516/2012/07/041.
3. *Liddle A. R., Cortes M.* Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111. — P. 111302. — DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.111302.
4. *Bradley G. M., Sviestins E.* Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow // *GRG*. — 1984. — Vol. 16, issue 12. — Pp. 1119–1133. — DOI: 10.1007/BF00760236.
5. *Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy / E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, O. V. Sandakova // Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Vol. 20, issue 2. — Pp. 141–143. — DOI: 10.1134/S0202289314020078.

UDC 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398

Bianchi Type VIII Cosmological Models Described with Chaplygin Gas Equation of State Fluid Sources

D. M. Yanishevskiy

*Department of Higher Mathematics
Perm State University
15, Bukireva str., Perm, 614990, Russian Federation*

Within the general theory of relativity the Bianchi type VIII cosmological models with rotation and expansion have been built. It's known that dark energy can be simulated by different kinds of energy-stress tensor, therefore the sources of gravitation in present article are an anisotropic fluid, with a pressure component satisfying to Chaplygin gas equation of state and a perfect fluid in the first case and an anisotropic fluid, Chaplygin gas and cosmological constant in the second case. It has been proved that the model, when expanding from Plank scale to the modern size gives satisfactory value of the angular velocity value. The found solutions can be used for effects taking place nowadays and at the inflationary stage.

Key words and phrases: cosmological expansion, Chaplygin gas, anisotropy of the Universe, accelerated expansion, type VIII Bianchi metric

References

1. K. Land, J. ao Magueijo, Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy, *Physical Review Letters* 95 (2005) 071301–071304. doi:10.1103/PhysRevLett.95.071301.
2. A. Payez, J. R. Cudell, D. Hutsemékers, New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2012 (07) (2012) 041. doi:10.1088/1475-7516/2012/07/041.
3. A. R. Liddle, M. Cortes, Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe, *Physical Review Letters* 111 (2013) 111302. doi:10.1103/PhysRevLett.111.111302.
4. G. M. Bradley, E. Sviestins, Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow, *GRG* 16 (1984) 1119–1133. doi:10.1007/BF00760236.
5. E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy, *Gravitation and Cosmology* 20 (2014) 141–143. doi:10.1134/S0202289314020078.

© Янишевский Д. М., 2018



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Для цитирования:

Янишевский Д. М. Космологические модели типа VIII по Бьянки с жидкостью, описываемой уравнением состояния газа Чаплыгина // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 4. — С. 393–398. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398.

For citation:

Yanishevskiy D. M. Bianchi Type VIII Cosmological Models Described with Caplygin Gas Equation of State Fluid Sources, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (4) (2018) 393–398. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-4-393-398. In Russian.

Сведения об авторах:

Янишевский Даниил Михайлович — соискатель кафедры высшей математики ПГНИУ (e-mail: ydm86@yandex.ru, тел.: +7 (922) 6465325)

Information about the authors:

Yanishevskiy Daniil M. — competitor of Department of Higher Mathematics, Perm State University (e-mail: ydm86@yandex.ru, phone: +7 (922) 6465325)

Правила оформления статей

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе \LaTeX (используется версия $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$, для набора формул используется макропакет $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, представляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитируемую литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS, \TeX ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе \BibTeX и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректра для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям: оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

18235

(индекс издания)

ВЕСТНИК РУДН
Серия «Математика.
Информатика. Физика»

Количество
комплектов:

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА

на журнал

18235

(индекс издания)

ПВ	место	литер

ВЕСТНИК РУДН

Серия «Математика. Информатика. Физика»

Стои- мость	подписки	руб. __ коп.	Количество комплектов:	
	переадресовки	руб. __ коп.		

на 20__ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)