



**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ДРУЖБЫ НАРОДОВ**

**СЕРИЯ:**

**МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.  
ФИЗИКА**

**Том 26 № 2 (2018)**

**Научный журнал  
Издается с 1993 г.**

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Свидетельство о регистрации** ПИ № ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

**Учредитель:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

**RUDN JOURNAL OF  
MATHEMATICS,  
INFORMATION SCIENCES  
AND PHYSICS**

**Volume 26 Number 2 (2018)**

**Founded in 1993  
Founder: RUDN University**

**DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2**

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

### Цель и тематика

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски Журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) [elibrary.ru](http://elibrary.ru).

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru)

---

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year.

Languages: Russian, English.

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>.

### Aim and Scope

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).

© Российский университет дружбы народов, 2018

© Peoples' Friendship University of Russia, 2018

# РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

## Главный редактор

**Рыбаков Юрий Петрович** —  
Заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор института  
физических исследований и технологий,  
РУДН, Россия,  
rybakov\_yur@rudn.university

## Заместитель главного редактора

**Севастьянов Леонид Антонович** —  
доктор физико-математических наук,  
профессор, профессор кафедры  
прикладной информатики и теории  
вероятностей, РУДН, Россия,  
sevastianov\_la@rudn.university

## Члены редколлегии

**Гайдамака Юлия Васильевна** (Москва, Россия) — доктор физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

**Ильгисонис Виктор Игоревич** (Москва, Россия) — доктор физико-математических наук, профессор, директор института физических исследований и технологий РУДН, директор направления научно-технических исследований и разработок Госкорпорации «Росатом»

**Самуйлов Константин Евгеньевич** (Москва, Россия) — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

**Гнатич Михал** (Словакия) — DrSc., профессор, профессор университета им. П.Й. Шафарика, г. Кошице

**Датта Гупта Субхашини** (Индия) — PhD, профессор Хайдерабадского университета

**Мартикайнен Олли Эрки** (Финляндия) — PhD., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

**Медведев Михаил Викторович** (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

**Рамирез Инестрозо Рафаэль Орландо** (Испания) — PhD, профессор университета Ровира и Вирхилий, Таррагона, Каталония, Испания

**Саха Биджан** (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

**Чулуунбаатар Очбадрах** (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

---

**Литературный редактор:** *К. В. Зенкин*

**Компьютерная вёрстка:** *А. В. Королькова*

**Адрес редакции:**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

**Адрес редакционной коллегии**

**серии «Математика. Информатика. Физика»:**

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419

тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Подписано в печать 12.04.2018. Выход в свет 22.04.2018. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 11,68 Тираж 500 экз. Заказ № 439. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,

тел. (495) 952-04-41, e-mail: ipk@rudn.university

# EDITORIAL BOARD

## Editor-in-Chief

**Rybakov Yu. P.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Honored Scientist of Russia, professor of the Institute of Physical Research & Technologies, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russian Federation, rybakov\_yup@rudn.university

## Vice Editor-in-Chief

**Sevastianov L. A.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Russian Federation, sevastianov\_la@rudn.university

## Members of the editorial board

**Gaidamaka Yu. V.** (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of the Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

**Il'gisonis V. I.** (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor, Head of the Institute of Physical Research & Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Head of the direction of scientific and technical research and development of the State Atomic Energy Corporation ROSATOM

**Samouylov K. E.** (Moscow, Russian Federation) — Doctor of Engineering Sciences, professor, Head of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

**Hnatic Mikhal** (Slovakia) – DrSc., professor of Pavol Jozef Safarik University in Kosice

**Datta Gupta Subhashish** (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

**Martikainen Olli Erkki** (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

**Medvedev M. V.** (USA) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Kansas University

**Ramirez Inostroza Raphael Orlando** (Spain) — PhD professor of Rovira i Virgili University (Universitat Rovira i Virgili), Spain

**Saha Bijan** (Bangladesh) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, Russian Federation)

**Chuluunbaatar Ochbadrah** (Mongolia) — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher in the Institute of Mathematics, State University of Mongolia, Head of the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna, Russian Federation)

---

**Review Editor:** *K. V. Zenkin*

**Computer Design:** *A. V. Korolkova*

**Address of editorial board:**

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

**Address of editorial board**

**“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:**

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “RUDN University”

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university



## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой . . . . . 103

### Математическое моделирование

Бикеев О. Н., Ловецкий К. П., Севастьянов А. Л. Собственные волны плоского симметричного анизотропного волновода . . . . . 119

Тютюнник А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением . . . . . 129

Коптев А. В. Невязкий аналог задачи Пуазейля . . . . . 140

Васильев С. А., Харун Хасан Салех Построение математической модели ценообразования на телекоммуникационные услуги с учётом перегрузок в сетях 155

Васильев С. А., Царева Г. О. Исследование систем массового обслуживания с бесконечным числом приборов и малым параметром . . . . . 167

Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Суетин Н. В. Устройство для периодической модуляции лазерного излучения . . . . . 176

### Междисциплинарные исследования

Суходолов А. П., Кузнецова И. А. Коррупция: механизмы развития, способы профилактики (опыт компьютерного моделирования с применением численных методов) . . . . . 183

Правила оформления статей . . . . . 194



## CONTENTS

### Mathematics

**Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung** The Solvability of the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup . . . . . 103

### Mathematical Modeling

**Bikeev O. N., Lovetskiy K. P., Sevastianov A. L.** Eigen Waves of a Plane Symmetric Anisotropic Waveguide . . . . . 119

**Tyutyunnik A. A.** On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling . . . . . 129

**Koptev A. V.** An Inviscid Analogue of the Poiseuille Problem . . . . . 140

**Vasilyev S. A., Haroun Hassan Salih** Construction of the Mathematical Model of Pricing for Telecommunication Services with Allowance for Congestion in Networks 155

**Vasilyev S. A., Tsareva G. O.** Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter . . . . . 167

**Komotskii V. A., Sokolov Yu. M., Suetin N. V.** Device for Periodic Modulation of Laser Radiation . . . . . 176

### Interdisciplinary Research

**Sukhodolov A. P., Kuznetsova I. A.** Corruption: Development Mechanisms, Ways of Prevention (Experience of Computer Modeling with Application of Numerical Methods) . . . . . 183

**Guidelines for Authors** . . . . . 194

# Математика

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118

## Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой

И. В. Тихонов\*, Ву Нгуен Шон Тунг†

*\* Кафедра математической физики  
МГУ имени М. В. Ломоносова**Ленинские горы, ГСП-1, Москва, Россия, 119991**† Кафедра математического анализа  
Московский педагогический государственный университет  
ул. Краснопрудная, д. 14, Москва, Россия, 107140*

Для эволюционного уравнения в банаховом пространстве изучается линейная обратная задача о нахождении «источника». Требуется восстановить неизвестное неоднородное слагаемое при помощи дополнительного нелокального условия, выраженного в виде интеграла Римана–Стилтьеса. Основное предположение связано с суперустойчивостью (квазинильпотентностью) эволюционной полугруппы. Точнее, предполагается, что эволюционная полугруппа, ассоциированная с абстрактным дифференциальным уравнением, имеет бесконечный отрицательный экспоненциальный тип. Без других ограничений установлена теорема об однозначной разрешимости обратной задачи. Показано, что решение представимо сходящимся рядом Неймана. Предъявлены точные условия, при которых бесконечный ряд обращается в конечную сумму. Здесь алгоритм вычисления решения становится финитным. Разобраны модельные примеры, в том числе — важный пример обратной задачи с финальным переопределением. Перечисленные результаты могут найти применение в специальных разделах математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса. Как принято, наше исследование проходит «в случае общего положения» — при выборе комплексного поля скаляров, но основные факты справедливы также и в вещественном случае. Созданная теория допускает перенос на нелокальные задачи для эволюционных уравнений, когда для нахождения решения вместо традиционного начального условия используются специальные усреднения по времени.

**Ключевые слова:** эволюционное уравнение, обратная задача, суперустойчивая полугруппа, операторное уравнение, ряд Неймана, теорема существования и единственности решения

### 1. Введение

В банаховом пространстве  $E$  при фиксированном значении  $T > 0$  рассмотрим абстрактную задачу Коши для эволюционного уравнения специального вида:

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \varphi(t)g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (1)$$

Предполагаем, что  $A$  — линейный замкнутый оператор в  $E$  с плотной областью определения  $D(A) \subset E$ , причём  $A$  порождает в  $E$  полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$  (подробнее см. [1–5]). Элемент  $u_0$  задан в  $D(A)$ . Скалярная функция  $\varphi(t) \not\equiv 0$  непрерывна на отрезке  $[0, T]$ . Считаем также, что  $\varphi(t)$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, T]$ , т. е.  $\varphi \in BV[0, T]$ .

Тогда при любом выборе элемента  $g \in E$  стандартная формула

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)\varphi(s)g \, ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

даёт классическое решение задачи (1), такое, что  $u \in C^1([0, T]; E)$  и  $u(t) \in D(A)$  при всех  $t \in [0, T]$  (см. [6]). Формула (2) однозначно восстанавливает нужное решение: иные решения, отличные от (2), в задаче Коши (1) отсутствуют (см. [4, с. 105–106]).

Допустим теперь, что элемент  $g \in E$  неизвестен. Для его нахождения добавим к (1) специальное *нелокальное условие* (переопределение) вида

$$\int_0^T u(t) \, d\mu(t) = u_1. \quad (3)$$

Элемент  $u_1$  задан в  $D(A)$ . Интеграл в условии (3) есть стандартный векторный интеграл Римана–Стилтьеса (см. [1, гл. III]). Скалярная функция  $\mu \in BV[0, T]$  предполагается непрерывной справа в любой точке  $t \in [0, T)$  и отличной от тождественной константы на  $[0, T]$ . В частности, всегда

$$\mu(0) = \mu(0+) \equiv \lim_{t \rightarrow 0+} \mu(t). \quad (4)$$

Отсутствие скачка у функции  $\mu(t)$  при  $t = 0$  не есть ограничение общности, поскольку такой (возможный) скачок можно легко убрать из (3) с помощью заданного начального условия  $u(0) = u_0$ .

Итак, требуется подобрать элемент  $g \in E$ , при котором векторная функция  $u(t)$  из формулы (2) удовлетворяет дополнительному условию (3). Поставленная задача (1), (3) для нахождения пары  $(u(t), g)$  называется *линейной обратной задачей* (с нелокальным условием). Общая теория подобных обратных задач была разработана в [6, 7] в рамках известного направления [8]. Наше настоящее исследование (кратко изложенное в заметке [9]) проходит при дополнительном предположении, что полугруппа  $U(t)$ , порождённая оператором  $A$ , является квазинильпотентной или суперустойчивой. Этот вырожденный класс специальных полугрупп привлёк внимание специалистов в последние десятилетия [10–15].

## 2. Квазинильпотентные операторы и полугруппы

Напомним нужные сведения из спектральной теории [1, 2]. Исходную норму в пространстве  $E$  обозначим через  $\|\cdot\|$ , а единичный оператор — через  $I$ . Как известно, линейный ограниченный оператор  $B: E \rightarrow E$  называют *квазинильпотентным* или *вольтерровым*, если его спектральный радиус равен нулю:

$$r(B) \equiv \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\|B^k\|} = 0. \quad (5)$$

Соотношение (5) эквивалентно тому, что  $\sigma(B) = \{0\}$ , т. е. спектр квазинильпотентного оператора  $B$  состоит лишь из нуля. При этом резольвентный ряд

$$(\lambda I - B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} B^n \quad (6)$$



сходится по операторной норме всюду на множестве  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Использование разложений типа (6) без всяких ограничений на значение  $\lambda \neq 0$  составляет главное преимущество квазинильпотентных операторов.

При проверке квазинильпотентности непосредственное обращение к формуле (5) часто бывает затруднительным из-за сложной структуры изучаемого оператора  $B$ . Здесь может пригодиться такой критерий (ср. с [16, с. 14–16]).

**Лемма 1.** Пусть  $B: E \rightarrow E$  — линейный ограниченный оператор. Следующие утверждения эквивалентны

- 1) оператор  $B$  квазинильпотентен;
- 2) для  $\forall \varepsilon > 0$  существует эквивалентная норма  $\|\cdot\|_{(\varepsilon)}$  в  $E$ , такая, что

$$\|B\|_{(\varepsilon)} \leq \varepsilon. \quad (7)$$

**Доказательство.** Пусть  $B$  квазинильпотентен, т. е.  $r(B) = 0$ . При любом фиксированном выборе  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{\|\varepsilon^{-k} B^k\|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \varepsilon^{-1} \sqrt[k]{\|B^k\|} = \varepsilon^{-1} r(B) = 0.$$

В частности, последовательность  $\|\varepsilon^{-k} B^k\|$  будет заведомо ограниченной, и найдётся число  $M > 0$ , такое, что  $\|\varepsilon^{-k} B^k\| \leq M$  при всех  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Положим теперь

$$\|f\|_{(\varepsilon)} \equiv \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\varepsilon^{-k} B^k f\|, \quad f \in E. \quad (8)$$

Свойства нормы для (8) проверяются непосредственно. Поскольку

$$\|f\| = \|\varepsilon^{-k} B^k f\|_{k=0} \leq \|f\|_{(\varepsilon)} \leq \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\varepsilon^{-k} B^k\| \|f\| \leq M \|f\|, \quad f \in E,$$

то норма (8) эквивалентна исходной норме  $\|\cdot\|$ . При этом

$$\begin{aligned} \|Bf\|_{(\varepsilon)} &= \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\varepsilon^{-k} B^{k+1} f\| = \sup_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \varepsilon \|\varepsilon^{-(k+1)} B^{k+1} f\| = \\ &= \varepsilon \sup_{m \in \mathbb{N}} \|\varepsilon^{-m} B^m f\| \leq \varepsilon \sup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \|\varepsilon^{-m} B^m f\| = \varepsilon \|f\|_{(\varepsilon)}, \quad f \in E, \end{aligned}$$

т. е. для нормы (8) выполнена требуемая оценка (7). Итак, из 1) следует 2).

Обратная импликация почти очевидна. Действительно, пусть выполнено 2). В силу оценки (7) спектр  $\sigma(B)$  принадлежит множеству  $D_\varepsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \varepsilon\}$ . Поскольку значение  $\varepsilon > 0$  является произвольным, то  $\sigma(B) = \{0\}$ . Тем самым оператор  $B$  квазинильпотентен. В результате 1) и 2) эквивалентны. Лемма доказана.  $\square$

Более тонкие обстоятельства, связанные с квазинильпотентными операторами, для нас сейчас несущественны. Для полноты картины отметим два сравнительно недавних исследования по теме [17, 18], а также ряд работ [19–21], где указаны специальные условия, при которых обобщённые интегральные операторы являются квазинильпотентными.

Перейдём к полугруппам. Напомним, что *экспоненциальным типом* операторной полугруппы  $U(t)$  класса  $C_0$  называется величина

$$\omega_0 \equiv \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|U(t)\|}{t}.$$

Указанный предел заведомо существует со значением в промежутке  $[-\infty, +\infty)$ .

В случае, когда  $\omega_0 = -\infty$ , полугруппа  $U(t)$  называется *квазинильпотентной* или ещё *суперустойчивой*. Мы будем использовать в основном второй термин, говоря именно про «суперустойчивость» полугруппы по аналогии с английским “superstability”, принятым в современной западной литературе (см. [10–15]). Данное название вполне оправдано, поскольку требование  $\omega_0 = -\infty$  эквивалентно тому, что при любом выборе числа  $\alpha > 0$  найдётся константа  $M = M_\alpha \geq 1$ , для которой

$$\|U(t)\| \leq M e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (9)$$

Оценка (9) допускает дополнительную коррекцию при подходящем изменении нормы.

**Лемма 2.** Пусть  $U(t)$  — суперустойчивая полугруппа класса  $C_0$ . Тогда при любом выборе числа  $\alpha > 0$  найдётся эквивалентная норма  $\|\cdot\|_\alpha$  в пространстве  $E$ , такая, что

$$\|U(t)\|_\alpha \leq e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (10)$$

**Доказательство.** Воспользуемся известным приёмом [1, с. 376]. Зафиксируем число  $\alpha > 0$  и запишем оценку (9) с соответствующей константой  $M = M_\alpha \geq 1$ . Положим

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\tau \geq 0} \|e^{\alpha\tau} U(\tau) f\|, \quad f \in E. \quad (11)$$

Учитывая (9), получаем, что  $\|f\| \leq \|f\|_\alpha \leq M \|f\|$  для любого  $f \in E$ . Свойства нормы для  $\|\cdot\|_\alpha$  проверяются непосредственно. Итак, формула (11) действительно корректно определяет эквивалентную норму в  $E$ . Кроме того, если  $t \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} \|U(t)f\|_\alpha &= \sup_{\tau \geq 0} \|e^{\alpha\tau} U(\tau+t)f\| = \sup_{\tau \geq 0} e^{-\alpha t} \|e^{\alpha(\tau+t)} U(\tau+t)f\| = \\ &= e^{-\alpha t} \sup_{s \geq t} \|e^{\alpha s} U(s)f\| \leq e^{-\alpha t} \sup_{s \geq 0} \|e^{\alpha s} U(s)f\| = e^{-\alpha t} \|f\|_\alpha, \quad f \in E, \end{aligned}$$

откуда и следует нужная оценка (10). Лемма доказана.  $\square$

Суперустойчивая полугруппа  $U(t)$  называется также квазинильпотентной, поскольку все её операторы  $U(t)$ , взятые при  $t > 0$ , являются квазинильпотентными в пространстве  $E$ . При этом спектр  $\sigma(A)$  порождающего оператора  $A$  будет пустым, а резольвентное множество  $\rho(A)$  заполнит всю комплексную плоскость. В частности, заведомо существует ограниченный обратный оператор  $A^{-1}: E \rightarrow E$ , что несколько упрощает формулы при изучении поставленной задачи (1), (3) (см. [6]).

Особым примером суперустойчивой (квазинильпотентной) полугруппы  $U(t)$  служит *нильпотентная полугруппа*, когда

$$U(t) = 0, \quad \forall t \geq t_0 > 0, \quad (12)$$

с некоторым фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Нильпотентные полугруппы естественно возникают при рассмотрении процессов простого переноса в той или иной ограниченной области (см. [1, с. 552] или [5, с. 363–364]).

### 3. Формулировка основных результатов

Вернёмся к рассмотрению обратной задачи (1), (3). Из теории, развитой в [6], следует такое утверждение (см. [6, с. 112]).

**Теорема 1.** Пусть линейный замкнутый оператор  $A$  порождает суперустойчивую полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ . Пусть  $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$  и  $\mu \in BV[0, T]$  с выполненным условием (4). Пусть также

$$\beta \equiv \int_0^T \varphi(t) d\mu(t) \neq 0. \quad (13)$$

Тогда обратная задача (1), (3) имеет и притом единственное решение  $(u(t), g)$  при любом выборе элементов  $u_0, u_1 \in D(A)$ .

Метод доказательства теоремы 1, предложенный в [6], носил неконструктивный характер и базировался на теории Гельфанда коммутативных банаховых алгебр, точнее, на специальной версии этой теории, разработанной в трактате [1] для описания спектров интегралов от полугрупп. Дополнительный анализ показывает, что можно избежать обращения к таким сложным концепциям и получить теорему 1 элементарным конструктивным методом.

В предположениях теоремы 1 рассмотрим операторное уравнение на неизвестный элемент  $g \in E$ . Согласно схеме [6] уравнение допускает запись

$$\beta g - Bg = f \quad (14)$$

со значением  $\beta \neq 0$  из формулы (13), линейным ограниченным оператором

$$B = \int_0^T \varphi(0)U(t) d\mu(t) + \int_0^T d\mu(t) \int_0^t U(t-s) d\varphi(s) \quad (15)$$

и заданным элементом  $f \in E$  вида

$$f = A \left( \int_0^T U(t)u_0 d\mu(t) - u_1 \right). \quad (16)$$

Здесь и в дальнейшем все операторные интегралы типа (15) понимаются в сильной операторной топологии — со сходимостью на произвольном элементе  $h \in E$ . Используя структуру выражения (15) и экспоненциальную оценку (10) с подходящим выбором значения  $\alpha > 0$ , можно оценить оператор  $B$  в эквивалентной норме (11) и показать его квазинильпотентность. Наша цель — установить прямым методом следующий принципиальный факт.

**Теорема 2.** Пусть выполнены предположения теоремы 1. Тогда оператор  $B$  из формулы (15) является квазинильпотентным в пространстве  $E$ . При этом решение однозначно разрешимого операторного уравнения (14) со значением  $\beta \neq 0$  представимо рядом Неймана

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad (17)$$

сходящимся по норме пространства  $E$ . Если элемент  $f \in E$  взят в виде (16), а комплексное число  $\beta \neq 0$  — в виде (13), то элемент  $g$  из формулы (17) даёт второй компонент решения  $(u(t), g)$  поставленной обратной задачи (1), (3). При этом первый компонент решения — функция  $u(t)$  — выражается формулой (2).

Теорема 2 есть главный результат нашей работы. Она обосновывает итерационный алгоритм для поиска решения обратной задачи (1), (3) при помощи ряда Неймана (17). Алгоритм приобретает законченный вид в специальном случае нильпотентной полугруппы  $U(t)$ . Тогда, при некоторых дополнительных ограничениях на функции  $\varphi(t), \mu(t)$ , можно доказать такое утверждение.

**Теорема 3.** Пусть выполнены предположения теоремы 1. Пусть, дополнительно, полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной, удовлетворяя соотношению (12) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Предположим также, что функция  $\mu(t)$  является постоянной на некотором промежутке  $[0, a] \subset [0, T]$ , а функция  $\varphi(t)$  является постоянной на некотором промежутке  $[T - b, T] \subset (0, T]$ , причём

$$a + b > T. \quad (18)$$

Тогда оператор  $B$  из формулы (15) является нильпотентным и

$$B^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq \frac{t_0}{a + b - T}. \quad (19)$$

Соответственно, решение операторного уравнения (14) представимо в виде конечной суммы

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad N_0 \equiv \left[ \frac{t_0}{a + b - T} \right] - 1, \quad (20)$$

замещающей бесконечный ряд Неймана (17).

Здесь через  $[c]$  обозначен *потолок* числа  $c \in \mathbb{R}$ , т. е. наименьшее целое число, большее или равное  $c$  (см. [22, с. 88]). Теоремы 2 и 3 различны по характеру, и доказывать их удобно раздельно.

#### 4. Доказательство основной теоремы 2

По поводу теории интеграла Стильтьеса см. [1, 23]. Без всяких пояснений используем стандартные оценки типа

$$\left\| \int_0^T v(t) d\mu(t) \right\| \leq \max_{0 \leq t \leq T} \|v(t)\| \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T,$$

верные при любом выборе  $v \in C([0, T], E)$  и  $\mu \in BV[0, T]$ . Особо отметим следующий полезный факт.

**Лемма 3.** Пусть  $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$ . Тогда для любого заданного числа  $\delta > 0$  можно подобрать такое значение  $\tau = \tau(\varphi, \delta) > 0$ , что при всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , удовлетворяющих условию  $0 < t_2 - t_1 \leq \tau$ , выполняется соотношение

$$\text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_{t_1}^{t_2} \leq \frac{\delta}{2}. \quad (21)$$

**Доказательство.** Определим функцию

$$\psi(t) \equiv \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

монотонно возрастающую на  $[0, T]$ . Поскольку по условию  $\varphi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$ , то также и  $\psi \in C[0, T] \cap BV[0, T]$  (см. [23, с. 210]). По теореме Кантора функция  $\psi(t)$  будет равномерно непрерывной на  $[0, T]$ , т. е. для любого  $\delta > 0$  найдётся такое значение  $\tau > 0$ , что при всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , удовлетворяющих условию  $0 < t_2 - t_1 \leq \tau$ , выполнено соотношение

$$|\psi(t_2) - \psi(t_1)| = \psi(t_2) - \psi(t_1) = \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_{t_1}^{t_2} \leq \frac{\delta}{2}.$$

Но это и утверждается в (21). Лемма доказана.  $\square$

Оценим теперь отдельные слагаемые в основном операторе  $B$  из формулы (15). Все предположения теоремы 1, а, значит, и теоремы 2, относительно полугруппы  $U(t)$  и функций  $\varphi(t)$ ,  $\mu(t)$  считаем выполненными. Напомним, что операторные интегралы рассматриваются (и оцениваются) в сильной операторной топологии — на произвольном элементе  $h \in E$ , который для краткости исключаем из записей.

**Лемма 4.** Пусть оператор  $B_1$  определён формулой

$$B_1 = \int_0^T U(t) d\mu(t). \quad (22)$$

Тогда для любого  $\delta > 0$  найдётся такое  $\alpha_1 > 0$ , что при всех  $\alpha > \alpha_1$  верна оценка

$$\|B_1\|_\alpha < \delta. \quad (23)$$

Здесь  $\|\cdot\|_\alpha$  — эквивалентная норма, заданная в пространстве  $E$  по формуле (11).

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное  $\delta > 0$ . В силу предположения (4) найдётся такое  $\gamma \in (0, T]$ , что

$$\text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^\gamma < \frac{\delta}{2}. \quad (24)$$

При этом, если  $\gamma = T$ , то оценка (23) выполняется при любом значении  $\alpha > 0$ , так как, согласно (10), имеем

$$\|B_1\|_\alpha \leq \max_{0 \leq t \leq T} e^{-\alpha t} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T = \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^\gamma < \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Итак, при  $\gamma = T$  значение  $\alpha_1 > 0$  можно выбирать произвольно.

Если же  $\gamma \in (0, T)$ , запишем оператор  $B_1$  в виде

$$B_1 = \int_0^\gamma U(t) d\mu(t) + \int_\gamma^T U(t) d\mu(t) = \int_0^\gamma U(t) d\mu(t) + U(\gamma) \int_\gamma^T U(t - \gamma) d\mu(t). \quad (25)$$

Оценивая (25) с учётом (10) и (24), получаем

$$\begin{aligned} \|B_1\|_\alpha &\leq \max_{0 \leq t \leq \gamma} e^{-\alpha t} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^\gamma + e^{-\alpha \gamma} \cdot \max_{\gamma \leq t \leq T} e^{-\alpha(t-\gamma)} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_\gamma^T = \\ &= \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^\gamma + e^{-\alpha \gamma} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_\gamma^T < \frac{\delta}{2} + e^{-\alpha \gamma} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T. \end{aligned} \quad (26)$$

Выберем теперь  $\alpha_1 > 0$  так, чтобы при всех  $\alpha > \alpha_1$  действовало соотношение

$$e^{-\alpha\gamma} \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T < \frac{\delta}{2}. \quad (27)$$

Комбинируя (26) и (27), получаем нужную оценку (23). Лемма доказана.  $\square$

Для оценки второго слагаемого в операторе (15) требуется следующий предварительный результат.

**Лемма 5.** Пусть операторная функция  $F(t)$  определена формулой

$$F(t) = \int_0^t U(t-s) d\varphi(s), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (28)$$

Тогда для любого  $\delta > 0$  найдётся такое  $\alpha_2 > 0$ , что при всех  $\alpha > \alpha_2$  верна оценка

$$\|F(t)\|_\alpha < \delta, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (29)$$

Здесь  $\|\cdot\|_\alpha$  — эквивалентная норма, заданная в пространстве  $E$  по формуле (11).

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное  $\delta > 0$ . Выберем значение  $\tau > 0$  как в лемме 3, чтобы соотношение (21) выполнялось при всех  $t_1, t_2 \in [0, T]$ , удовлетворяющих условию  $0 < t_2 - t_1 \leq \tau$ . При  $\alpha > 0$  и  $0 \leq t \leq \tau$ , используя (10) и (21), получаем

$$\|F(t)\|_\alpha \leq \max_{0 \leq s \leq t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^t = \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^t \leq \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Тем самым оценка (29) выполнена при любом  $\alpha > 0$  и  $0 \leq t \leq \tau$ . Возможно, конечно, что  $\tau = T$ , и тогда все доказано с произвольным выбором значения  $\alpha_2 > 0$ .

При  $0 < \tau < T$  и  $\tau < t \leq T$  перепишем  $F(t)$  в виде

$$F(t) = \int_0^{t-\tau} U(t-s) d\varphi(s) + \int_{t-\tau}^t U(t-s) d\varphi(s), \quad \tau < t \leq T. \quad (30)$$

Пусть снова  $\alpha > 0$ . Оценивая (30) с учётом (10) и (21), получаем

$$\begin{aligned} \|F(t)\|_\alpha &\leq \max_{0 \leq s \leq t-\tau} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^{t-\tau} + \max_{t-\tau \leq s \leq t} e^{-\alpha(t-s)} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_{t-\tau}^t = \\ &= e^{-\alpha\tau} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^{t-\tau} + \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_{t-\tau}^t \leq e^{-\alpha\tau} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^T + \frac{\delta}{2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Выберем теперь  $\alpha_2 > 0$  так, чтобы при всех  $\alpha > \alpha_2$  действовало соотношение

$$e^{-\alpha\tau} \cdot \text{Var}\{\varphi(s)\} \Big|_0^T < \frac{\delta}{2}. \quad (32)$$

Комбинируя (31) и (32), получаем оценку (29) при  $\tau < t \leq T$ . В итоге с указанным выбором  $\tau > 0$  и  $\alpha_2 > 0$  нужный результат обоснован на всем отрезке  $[0, T]$ . Лемма доказана.  $\square$

Отметим, что, если  $\varphi \in C^1[0, T]$ , то доказательство леммы 5 сильно упрощается. Действительно, обозначив  $K \equiv \max_{0 \leq s \leq T} |\varphi'(s)|$ , для функции (28) имеем оценку

$$\|F(t)\|_\alpha \leq \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} |\varphi'(s)| ds \leq K \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds < \frac{K}{\alpha} < \delta, \quad 0 \leq t \leq T,$$

верную при  $\alpha > \alpha_2 \equiv K/\delta$  с произвольным фиксированным  $\delta > 0$ .

Приступим к доказательству самой теоремы 2. Оценим основной оператор  $B$  из формулы (15). Заметим, что  $B = \varphi(0)B_1 + B_2$ , где оператор  $B_1$  определён формулой (22), а оператор  $B_2$  имеет вид

$$B_2 = \int_0^T d\mu(t) \int_0^t U(t-s) d\varphi(s) = \int_0^T F(t) d\mu(t) \quad (33)$$

с функцией  $F(t)$  из формулы (28).

Возьмём какое-то значение  $\delta > 0$ . Принимая во внимание предыдущие леммы 4 и 5 с их выбором  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , положим  $\alpha_0 = \max(\alpha_1, \alpha_2)$ . Тогда при всех  $\alpha > \alpha_0$  в эквивалентной норме  $\|\cdot\|_\alpha$ , заданной по формуле (11), получим, что

$$\|B\|_\alpha < |\varphi(0)| \cdot \delta + \delta \cdot \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T = \left( |\varphi(0)| + \text{Var}\{\mu(t)\} \Big|_0^T \right) \delta.$$

Зафиксируем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Ясно, что при достаточно малых  $\delta > 0$  имеем оценку  $\|B\|_\alpha \leq \varepsilon$ , верную при всех  $\alpha > \alpha_0$  с соответствующим значением  $\alpha_0 > 0$ . По лемме 1 это гарантирует квазинильпотентность оператора  $B$ . Но тогда операторное уравнение (14) при любом выборе числа  $\beta \neq 0$  будет однозначно разрешимым, и его решение  $g \in E$  представимо рядом Неймана (17).

То, что уравнение (14) с оператором (15) и заданным элементом (16) эквивалентно исходной обратной задаче (1), (3), следует из прежних результатов [6]. Теорема 2 полностью доказана.

## 5. Доказательство теоремы 3

Пусть функции  $\varphi(t)$ ,  $\mu(t)$  удовлетворяют условиям теоремы 3, включая специальное требование (18). Тогда для операторов  $B_1$ ,  $B_2$  из формул (22), (33) возможны представления

$$B_1 = \int_a^T U(t) d\mu(t) = U(a+b-T)U(T-b) \int_a^T U(t-a) d\mu(t),$$

$$B_2 = \int_a^T d\mu(t) \int_0^{T-b} U(t-s) d\varphi(s) = U(a+b-T) \int_a^T d\mu(t) \int_0^{T-b} U(t-a+T-b-s) d\varphi(s).$$

Следовательно, основной оператор  $B$  из формулы (15) выражается в виде

$$B = \varphi(0)B_1 + B_2 = U(a+b-T)Q, \quad (34)$$

где

$$Q = \varphi(0)U(T-b) \int_a^T U(t-a) d\mu(t) + \int_a^T d\mu(t) \int_0^{T-b} U(t-a+T-b-s) d\varphi(s). \quad (35)$$

Оператор  $U(a+b-T)$  коммутирует с оператором  $Q$ . По предположению теоремы 3 полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной в пространстве  $E$  и удовлетворяет соотношению (12) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Поэтому

$$B^k = U(k(a+b-T))Q^k = 0, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k(a+b-T) \geq t_0,$$

что и даёт формулу (19). Итак, нильпотентность оператора  $B$  установлена. В силу (19) ряд Неймана (17) переходит в конечную сумму (20). Теорема доказана.

Как видим, ключевую роль в доказательстве теоремы 3 сыграло специальное разложение (34) с оператором  $Q$  из формулы (35). Корректность конструкции обусловлена требованием (18). Отметим примеры, когда такая конструкция сильно упрощается.

## 6. Модельные примеры

Всюду в данном пункте считаем, что полугруппа  $U(t)$  является нильпотентной в пространстве  $E$ , удовлетворяя условию (12) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ .

Пусть  $\varphi(t) \equiv 1$  на  $[0, T]$ . Этот особый случай часто возникает на практике. Поскольку функция  $\varphi(t)$  является постоянной на любом промежутке  $[T-b, T] \subset (0, T]$ , то для применения теоремы 3 достаточно требовать, чтобы функция  $\mu(t)$  была постоянной на промежутке  $[0, a] \subset [0, T]$  с неким (хоть каким-то) значением  $a \in (0, T)$ . В ответ можно всегда подобрать такое  $b \in (0, T)$ , что требование (18) окажется выполненным. Впрочем, здесь нет смысла прибегать к теореме 3, поскольку прямое исследование гораздо нагляднее.

Действительно, зафиксируем значение  $a \in (0, T)$  и рассмотрим обратную задачу

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \int_a^T u(t) d\mu(t) = u_1. \end{cases} \quad (36)$$

Стандартное требование (13) переходит в условие

$$\beta \equiv \mu(T) - \mu(a) \neq 0. \quad (37)$$

Оператор (15) приобретает вид

$$B = \int_a^T U(t) d\mu(t) = U(a) \int_a^T U(t-a) d\mu(t). \quad (38)$$

Поскольку  $U(ka) = 0$  при  $k \geq t_0/a$ , то  $B^k = 0$  при любом натуральном  $k \geq t_0/a$ , т. е. оператор (38) гарантированно является нильпотентным. Формула (17) для неизвестного элемента  $g \in E$  сводится к конечной сумме



$$g = \sum_{k=0}^{N_0} \frac{1}{\beta^{k+1}} B^k f, \quad N_0 \equiv \left[ \frac{t_0}{a} \right] - 1, \quad (39)$$

с константой  $\beta \neq 0$  из формулы (37), оператором  $B$  из формулы (38), и элементом

$$f = A \left( U(a) \int_a^T U(t-a) u_0 d\mu(t) - u_1 \right). \quad (40)$$

В случае, когда  $a \geq t_0$  (а такое вполне возможно), формулы (38)–(40) радикально упрощаются, и элемент  $g$  выражается одним слагаемым

$$g = -\frac{1}{\mu(T) - \mu(a)} Au_1. \quad (41)$$

Любопытно, что такой ответ (41) зависит не от выбора той или иной конкретной функции  $\mu(t)$ , а лишь от значения  $\beta \equiv \mu(T) - \mu(a) \neq 0$ .

Подведём итог: именно соотношения (37)–(41) и надо использовать для нахождения решения обратной задачи (36) с оператором  $A$ , порождающим нильпотентную полугруппу  $U(t)$ .

Специальный интерес представляет частный случай обратной задачи (36), когда  $\mu(t)$  есть функция скачков, локализованных в промежутке  $[a, T] \subset (0, T]$ . Общее нелокальное условие (3) заменяется *многоточечным условием*, и обратная задача принимает вид

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & \sum_k \alpha_k u(\tau_k) = u_1. \end{cases} \quad (42)$$

Здесь  $\{\tau_k\}$  — конечный или счётный набор различных точек из  $[a, T]$ , занумерованных натуральным индексом  $k$ . Все числовые коэффициенты  $\alpha_k$  считаются отличными от нуля и такими, что  $\sum |\alpha_k| < \infty$ . Требование (13) переходит в условие

$$\beta \equiv \sum_k \alpha_k \neq 0. \quad (43)$$

Элемент  $g \in E$  в обратной задаче (42) выражается прежней конечной суммой (39), где

$$B = \sum_k \alpha_k U(\tau_k), \quad f = A \left( \sum_k \alpha_k U(\tau_k) u_0 - u_1 \right), \quad (44)$$

а значение  $\beta$  вычисляется через (43). Окончательное упрощение формул (43), (44) происходит в случае обратной задачи с финальным переопределением.

Действительно, пусть  $\varphi(t) \equiv 1$  на  $[0, T]$ , а  $\mu(t)$  есть функция единичного скачка в финальной точке  $t = T$ . Тогда исходная обратная задача (1), (3) принимает вид

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + g, & 0 \leq t \leq T, \\ u(0) = u_0, & u(T) = u_1. \end{cases} \quad (45)$$

Это и есть *модельная обратная задача с финальным переопределением* (см. [8]). Ввиду особой важности примера (45) разберём его более подробно.

Следуя общим формулам (13), (15), (16), получаем

$$\beta = 1, \quad B = U(T), \quad f = A(U(T)u_0 - u_1). \quad (46)$$

Поскольку  $B^k = U(kT) = 0$  при любом натуральном  $k \geq t_0/T$ , то общая разрешающая формула (17) вновь сводится к конечной сумме, имеющей в данном случае особенно простой вид

$$g = \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f, \quad N_0 \equiv \left[ \frac{t_0}{T} \right] - 1, \quad (47)$$

с элементом  $f$  из (46). Возможно, конечно, что  $T \geq t_0$ , и тогда  $N_0 \equiv [t_0/T] - 1 = 0$ . При этом также  $U(T) = 0$  и  $f = -Au_1$ . В результате общий шаблон (47) даёт ответ

$$g = -Au_1.$$

С другой стороны, возможно, что  $T < t_0$ . Тогда, принимая во внимание представление (46) для элемента  $f$  и проводя элементарные преобразования, имеем

$$\begin{aligned} g &= \sum_{k=0}^{N_0} U(kT)f = f + U(T)f + U(2T)f + \dots + U(N_0T)f = \\ &= A(U(T)u_0 + U(2T)u_0 + U(3T)u_0 + \dots + U((N_0 + 1)T)u_0) - \\ &\quad - A(u_1 + U(T)u_1 + U(2T)u_1 + \dots + U(N_0T)u_1) = \\ &= -Au_1 + A \sum_{k=1}^{N_0} U(kT)(u_0 - u_1), \quad N_0 \equiv \left[ \frac{t_0}{T} \right] - 1. \end{aligned}$$

Слагаемое  $U((N_0 + 1)T)u_0$  пропадает, ибо  $(N_0 + 1)T \geq t_0$  и  $U((N_0 + 1)T) = 0$ .

В итоге формулу (47) для второго компонента  $g$  решения обратной задачи (45) можно записать в виде

$$g = \begin{cases} -Au_1, & 0 < t_0 \leq T, \\ -Au_1 + A \sum_{k=1}^{N_0} U(kT)(u_0 - u_1), & t_0 > T > 0, \end{cases} \quad (48)$$

где  $N_0 \equiv [t_0/T] - 1$ . Выражение (48) удобно на практике. Для последующих применений данного результата зафиксируем точное утверждение.

**Теорема 4.** Пусть линейный замкнутый оператор  $A$  порождает нильпотентную полугруппу  $U(t)$  класса  $C_0$ , удовлетворяющую условию (12) с фиксированным значением  $t_0 > 0$ . Тогда при любом выборе  $u_0, u_1 \in D(A)$  элемент  $g \in E$ , разрешающий обратную задачу (45), находится по формуле (48).

При этом функция  $u(t)$  восстанавливается по формуле

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(s)g ds, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (49)$$

непосредственно следующей из (2) в случае, когда  $\varphi(t) \equiv 1$ . Формула (49) используется также в обратных задачах (36) и (42).

## 7. Заключение

Итак, теория линейной обратной задачи (1), (3) с оператором  $A$ , порождающим суперустойчивую полугруппу, оказывается в основном завершённой. Полученные результаты представляют интерес для некоторых специальных разделов математической физики, связанных с теорией упругости и задачами линейного переноса. Например, на основе формул, установленных нами в п. 6, можно разработать конкретные алгоритмы решения обратных задач типа (36) для многомерного уравнения переноса, взятого в среде без столкновений, но с возможным поглощением частиц. Этот материал полезно опубликовать отдельно.

## Литература

1. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
2. Данфорд Н., Шварц Д. Линейные операторы. Т. 1. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
4. Pazy A. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer Verlag, 1983.
5. Engel K.-J., Nagel R. One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations. — N.Y.: Springer, 2000.
6. Тихонов И. В., Эйдельман Ю. С. Вопросы корректности прямых и обратных задач для эволюционного уравнения специального вида // Математические заметки. — 1994. — Т. 56, вып. 2. — С. 99–113.
7. Прилепко А. И., Тихонов И. В. Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Известия РАН. Сер. матем. — 1994. — Т. 58, вып. 2. — С. 167–188.
8. Prilepko A. I., Orlovsky D. G., Vasin I. A. Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics. — N.Y.: Basel, 2000.
9. Тихонов И. В., Тунг В. Н. III. Метод решения обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — Вып. 2. — С. 51–58.
10. Balakrishnan A. V. On Superstability of Semigroups // Systems modelling and optimization. Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization. CRC Research Notes in Mathematics / Ed. by M. P. Polis et al. — 1999. — Pp. 12–19.
11. Balakrishnan A. V. Smart Structures and Super Stability // Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics / Ed. by G. Lumer, L. Weis. — Vol. 215. — 2001. — Pp. 43–53.
12. Balakrishnan A. V. Superstability of Systems // Applied Mathematics and Computation. — 2005. — Vol. 164, issue 2. — Pp. 321–326.
13. Creutz D., Mazo M., Preda C. Superstability and Finite Time Extinction for  $C_0$ -Semigroups // arXiv:0907.4812. Submitted. — 2013. — Pp. 1–12.
14. Chen J.-H., Lu W.-Y. Perturbation of Nilpotent Semigroups and Application to Heat Exchanger Equations // Applied Mathematics Letters. — 2011. — Vol. 24. — Pp. 1698–1701.
15. Kmit I., Lyul'ko N. Perturbations of Superstable Linear Hyperbolic Systems // arXiv:1605.04703. Submitted. — 2017. — Pp. 1–26.
16. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др. — М.: Наука, 1969.

17. *Malinen J., Nevanlinna O., Zemánek J.* Microspectral Analysis of Quasinilpotent Operators // arXiv:1211.4790v1. Submitted. — 2012. — Pp. 1–25.
18. *Eskandari R., Mirzapour F.* Hyperinvariant Subspaces and Quasinilpotent Operators // Bulletin of the Iranian Mathematical Society. — 2015. — Vol. 41, issue 4. — Pp. 805–813.
19. *Забре́йко П. П.* О спектральном радиусе интегральных операторов Вольтерра // Литовский математический сборник. — 1967. — Т. 7, вып. 2. — С. 281–287.
20. *Жуковский Е. С.* К теории уравнений Вольтерра // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25, вып. 9. — С. 1599–1605.
21. *Сумин В. И., Чернов А. В.* Операторы в пространствах измеримых функций: вольтерровость и квазинильпотентность // Дифференциальные уравнения. — 1998. — Т. 34, вып. 10. — С. 1402–1411.
22. *Грехэм Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998.
23. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118

## The Solvability of the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup

I. V. Tikhonov\*, Vu Nguyen Son Tung†

\* *Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics  
Lomonosov Moscow State University  
Leninskyie Gori, Moscow, 119991, Russian Federation*

† *Mathematical Analysis Department  
Moscow State University of Education  
14 Krasnoprudnaya Str., Moscow, 107140, Russian Federation*

For the evolution equation in a Banach space, the linear inverse source problem is studied. It is required to recover an unknown nonhomogeneous term by means of an additional nonlocal condition written in the form of a Riemann–Stieltjes integral. The main assumption is related to the superstability (quasinilpotency) of the evolution semigroup. More precisely, it is assumed that the evolutionary semigroup associated with the abstract differential equation has an infinite negative exponential type. Without other restrictions, a theorem on the solvability of the inverse problem is obtained. It is shown that the solution can be represented by a convergent Neumann series. Exact conditions under which an infinite series becomes a finite sum are found. Here, the algorithm for calculating the solution becomes finite. Model examples are considered, including an important example of the inverse problem with final overdetermination. The above results can be applied in special parts of mathematical physics related to the theory of elasticity and the linear transport theory. As is customary, our research takes place in the general case with a choice of the complex scalar field, but the main facts are also true in the real case. The created theory allows transfer to nonlocal problems for evolution equations, when instead of the traditional initial condition special time averaging is used to find the solution.

**Key words and phrases:** evolution equation, inverse problem, superstable semigroup, operator equation, Neumann series, existence and uniqueness theorem of the solution

## References

1. E. Hille, R. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, IL, Moscow, 1962, in Russian.
2. N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators. P. 1. General Theory*, IL, Moscow, 1962, in Russian.
3. S. G. Krein, *Linear Differential Equations in Banach Space*, Nauka, Moscow, 1967, in Russian.

4. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer Verlag, N.Y., 1983.
5. K.-J. Engel, R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, N.Y., 2000.
6. I. V. Tikhonov, Yu. S. Eidelman, Problems on Correctness of Ordinary and Inverse Problems for Evolutionary Equations of a Special Form, *Math. Notes* 56 (1994) 830–839, in Russian.
7. A. I. Prilepko, I. V. Tikhonov, Recovery of the Nonhomogeneous Term in an Abstract Evolution Equation, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.* 58 (1994) 167–188, in Russian.
8. A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Basel, N.Y., 2000.
9. I. V. Tikhonov, V. N. S. Tung, A Method of Solving the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup, *Journal Differential Equations and Control Processes* (2) (2017) 51–58, in Russian.
10. A. V. Balakrishnan, On Superstability of Semigroups, in: M. P. Polis, et al. (Eds.), *Systems Modelling and Optimization*, Proceedings of the 18th IFIP Conference on System Modelling and Optimization, CRC Research Notes in Mathematics, Chapman and Hall, 1999, pp. 12–19.
11. A. V. Balakrishnan, Smart Structures and Super Stability, in: G. Lumer, L. Weis (Eds.), *Evolution Equations and Their Applications in Physical and Life Sciences. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 215, 2001, pp. 43–53.
12. A. V. Balakrishnan, Superstability of Systems, *Applied Mathematics and Computation* 164 (2005) 321–326.
13. D. Creutz, M. Mazo, C. Preda, Superstability and Finite Time Extinction for  $C_0$ -Semigroups, arXiv:0907.4812. Submitted (2013) 1–12.
14. J.-H. Chen, W.-Y. Lu, Perturbation of Nilpotent Semigroups and Application to Heat Exchanger Equations, *Applied Mathematics Letters* 24 (2011) 1698–1701.
15. I. Kmit, N. Lyul'ko, Perturbations of Superstable Linear Hyperbolic Systems, arXiv:1605.04703. Submitted (2017) 1–26.
16. M. A. Krasnoselsky, G. M. Vainikko, P. P. Zabreiko, Y. B. Rutitsky, V. Y. Stetsenko, *Approximate Solution of Operator Equations*, Nauka, Moscow, 1969, in Russian.
17. J. Malinen, O. Nevanlinna, J. Zemánek, Microspectral analysis of quasinilpotent operators, arXiv:1211.4790v1. Submitted (2012) 1–25.
18. R. Eskandari, F. Mirzapour, Hyperinvariant Subspaces and Quasinilpotent Operators, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society* 41 (2015) 805–813.
19. P. P. Zabreiko, On the Spectral Radius of Volterra Integral Operators, *Lithuanian Math. Collection* 7 (1967) 281–287, in Russian.
20. E. S. Zhukovskii, On the Theory of Volterra Equations, *Differential Equations* 25 (1989) 1132–1137, in Russian.
21. V. I. Sumin, A. V. Chernov, Operators in the Spaces of Measurable Functions: the Volterra Property and Quasinilpotency, *Differential Equations* 34 (1998) 1403–1411, in Russian.
22. R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Mir, Moscow, 1998, in Russian.
23. I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Nauka, Moscow, 1974, in Russian.

© Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг, 2018

**Для цитирования:**

Тихонов И. В., Ву Нгуен Шон Тунг Разрешимость линейной обратной задачи для эволюционного уравнения с суперустойчивой полугруппой // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 103–118. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118.

**For citation:**

Tikhonov I. V., Vu Nguyen Son Tung The Solvability of the Inverse Problem for the Evolution Equation with a Superstable Semigroup, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 103–118. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-103-118. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Тихонов Иван Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической физики факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова (e-mail: [ivtikh@mail.ru](mailto:ivtikh@mail.ru), тел.: +7 9162963261)

**Ву Нгуен Шон Тунг** — аспирант кафедры математического анализа Московского педагогического государственного университета (e-mail: [vnsontung@mail.ru](mailto:vnsontung@mail.ru), тел.: +7 9169735556)

**Information about the authors:**

**Tikhonov I. V.** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Mathematical Physics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (e-mail: [ivtikh@mail.ru](mailto:ivtikh@mail.ru), phone: +7 9162963261)

**Vu Nguyen Son Tung** — Postgraduate Student of Mathematical Analysis Department, Moscow State University of Education (e-mail: [vnsontung@mail.ru](mailto:vnsontung@mail.ru), phone: +7 9169735556)



# Математическое моделирование

УДК 535.012.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-119-128

## Собственные волны плоского симметричного анизотропного волновода

О. Н. Бикеев\*, К. П. Ловецкий†, А. Л. Севастьянов†

\* *Институт физических исследований и технологий  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

† *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Получены точные дисперсионные уравнения для плоского симметричного диэлектрического анизотропного волновода, в котором изотропным является волноведущий слой, а обрамляющие среды предполагаются анизотропными одноосными средами. Тензоры диэлектрической проницаемости обрамляющих сред при этом не предполагаются диагональными, а именно — у одной из них этот тензор образован путём поворота диагонального тензора на некоторый угол между оптической осью анизотропной среды и направлением распространения электромагнитной волны. Тензор диэлектрической проницаемости другой анизотропной среды повернут на такой же угол, но в противоположном направлении, при этом оптические оси обеих обрамляющих сред лежат в плоскости, параллельной границам волноведущей структуры. Таким образом, в обрамляющих средах поддерживается существование шестикомпонентных электромагнитных волн.

В дисперсионных свойствах такого волновода наблюдаются некоторые особенности, по сравнению со случаем, когда обрамляющие среды предполагаются изотропными.

Обнаружено, что первая симметричная мода такого волновода имеет конечное замедление при нулевой толщине изотропного слоя, что говорит о возможности возникновения поверхностных электромагнитных волн (так называемых волн Дьяконова) на границах этого изотропного слоя. Отмечено, что переход антисимметричной моды в Дьяконовскую волну происходит при конечной толщине волноведущего слоя. Приведены зависимости величины замедления элементарной (симметричной) моды от угла поворота оптической оси анизотропных сред относительно направления распространения направляемой волны волноводной структуры.

Кроме дисперсионных свойств такого волновода исследованы поперечные распределения полей направляемой электромагнитной волны, приведены точные аналитические выражения для амплитуд полей этой волны.

**Ключевые слова:** поверхностная электромагнитная волна, анизотропная среда, тензор диэлектрической проницаемости, волноводные моды, поперечное распределение амплитуд, направляемые волны

## 1. Введение

Интерес исследователей к свойствам волн Дьяконова является постоянным на протяжении нескольких десятков лет. За это время изучены многие особенности таких волн, возникающих на границах анизотропных сред в различных геометриях. Наиболее важной особенностью волн Дьяконова является (в отличие от плазмонов) отсутствие потерь энергии по мере их распространения вдоль границы анизотропной среды.

Основные результаты исследования свойств таких волн достаточно подробно изложены в обзорах [1, 2]. Следует отметить, что за столь долгий период исследования

Статья поступила в редакцию 9 января 2018 г.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» и при частичной поддержке гранта РФФИ 18-07-00567.

волн Дьяконова экспериментальных работ проведено очень мало [3], что обусловлено, может быть, специфическими условиями существования этих волн.

Многие авторы считают, что для их наблюдения можно использовать свойства тонкоплёночных оптических волноводов, волноведущий слой которых либо является анизотропным, либо окружающие среды являются анизотропными. Показано [4, 5], что при некоторых условиях удаётся выделить случай, когда перенос энергии по волноведущей структуре осуществляется только за счёт волн Дьяконова.

Настоящая работа ставит своей целью выбор такой анизотропной волноводной структуры, которая бы допускала распространение в ней волн Дьяконова и, с другой стороны, позволяла бы провести экспериментальную проверку полученных результатов.

## 2. Выбор волноведущей структуры

В качестве материала для волноведущего слоя возьмём изотропную среду, диэлектрическая проницаемость которой равна  $\varepsilon_s$ , а обрамляющие среды будем считать анизотропными с диэлектрической проницаемостью  $\hat{\varepsilon}_{1,2}$ . Используемая система координат приведена на рис. 1. Предположим, что электромагнитные волны распространяются вдоль оси Z, а по оси Y структура не ограничена. Все три среды являются немагнитными и непоглощающими.

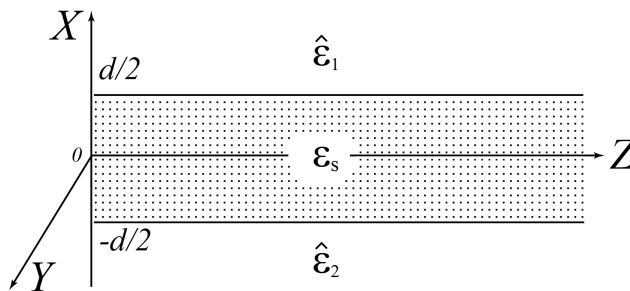


Рис. 1. Система координат и исследуемая волноводная структура

Тензоры диэлектрической проницаемости обрамляющих сред определяются следующим образом. Исходный тензор в диагональном виде выглядит как:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_o & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_e \end{bmatrix}.$$

Оптическая ось направлена вдоль OZ. При повороте по часовой стрелке на угол  $\phi$  вокруг оси OX компоненты тензора преобразуются в соответствии с матрицами поворота  $C_1(\phi)$  и  $C_2(\phi)$  [6]

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad C_2(\phi) = C_1(-\phi).$$

Результирующие тензоры диэлектрической проницаемости  $\hat{\varepsilon}_1$  и  $\hat{\varepsilon}_2$  обрамляющих сред вычисляются по формулам



$$\varepsilon_1 = \mathbf{C}_1 \varepsilon \mathbf{C}_1^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_o & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22}(\phi) & \varepsilon_{23}(\phi) \\ 0 & \varepsilon_{23}(\phi) & \varepsilon_{33}(\phi) \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_2(\phi) = \varepsilon_1(-\phi).$$

Таким образом, для среды при  $X > d/2$  элементы тензора вычисляются по формулам

$$\varepsilon_{22}(\phi) = \varepsilon_o \cos^2 \phi + \varepsilon_e \sin^2 \phi, \quad \varepsilon_{33}(\phi) = \varepsilon_o \sin^2 \phi + \varepsilon_e \cos^2 \phi, \\ \varepsilon_{23}(\phi) = \varepsilon_{32}(\phi) = -\sin \phi \cos \phi (\varepsilon_e - \varepsilon_o),$$

а для среды при  $X < -d/2$  по формулам с учётом изменения знака угла поворота на обратный

$$\varepsilon_{22}(\phi) = \varepsilon_o \cos^2 \phi + \varepsilon_e \sin^2 \phi, \quad \varepsilon_{33}(\phi) = \varepsilon_o \sin^2 \phi + \varepsilon_e \cos^2 \phi, \\ \varepsilon_{23}(\phi) = \varepsilon_{32}(\phi) = \sin \phi \cos \phi (\varepsilon_e - \varepsilon_o).$$

В сформированной таким образом анизотропной структуре будем искать решение уравнений Максвелла для направляемых (волноводных) электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси  $OZ$ , которая является биссектрисой угла между оптическими осями верхней и нижней анизотропных сред. Пусть зависимость полей электромагнитных волн от времени и координат имеет вид  $\exp\{-i[\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)]\}$ , где  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)^T$  — волновой вектор.

Для каждой из этих волн должно выполняться волновое уравнение (в гауссовой системе), полученное из уравнений Максвелла в векторной форме:

$$\left[ \vec{k} \times \vec{H} \right] = -k_0 \vec{D}, \quad \left[ \vec{k} \times \vec{E} \right] = k_0 \vec{H}, \quad \left( \vec{k} \cdot \vec{H} \right) = 0, \quad \left( \vec{k} \cdot \vec{E} \right) \neq 0.$$

Это уравнение имеет вид:  $\left[ \vec{k} \times \left[ \vec{k} \times \vec{E} \right] \right] + k_0^2 \cdot \vec{D} = \vec{0}$ , где  $k_0 = \frac{\omega}{c}$ ,  $\vec{D} = \varepsilon(\phi) \cdot \vec{E}$ .

Не теряя общности, можно предположить, что решением этого волнового уравнения является набор плоских волн с фазовыми фронтами параллельными оси  $OY$ , или  $\partial/\partial y = 0$ , а с ним и  $k_y = 0$ .

### 3. Дисперсионные уравнения для направляемых мод

Имея в виду эти предварительные замечания, представим поля в волноводе слое ( $\varepsilon_s$ ) в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ- волн, поскольку в обрамляющих анизотропных средах предполагается наличие шестикомпонентных волн. Пусть ТЕ-волна с положительным поперечным волновым числом  $k_x$  имеет амплитуду  $A$ ,  $B$  — амплитуда ТМ-волны с положительным  $k_x$ . Для ТЕ- и ТМ-волн, имеющих отрицательный  $k_x$ , обозначим амплитуды через  $C$  и  $D$  соответственно. Тогда суммарные поля в изотропном слое можно записать следующим образом:

$$\vec{E}_s(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{k_x} \cdot B \cdot e^{ik_x x} + \frac{\gamma}{k_x} \cdot D \cdot e^{-ik_x x} \\ \frac{1}{k_x} \cdot A \cdot e^{ik_x x} - \frac{1}{k_x} \cdot C \cdot e^{-ik_x x} \\ B \cdot e^{ik_x x} + D \cdot e^{-ik_x x} \end{pmatrix} \cdot e^{i\gamma z} \cdot e^{-i\omega t}, \\ \vec{H}_s(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{k_x} \cdot A \cdot e^{ik_x x} + \frac{\gamma}{k_x} \cdot C \cdot e^{-ik_x x} \\ -\frac{\varepsilon_s}{k_x} \cdot B \cdot e^{ik_x x} + \frac{\varepsilon_s}{k_x} \cdot D \cdot e^{-ik_x x} \\ A \cdot e^{ik_x x} + C \cdot e^{-ik_x x} \end{pmatrix} \cdot e^{i\gamma z} \cdot e^{-i\omega t}. \quad (1)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $\gamma$  — продольное волновое число, нормированное на  $k_0$ ,  $k_x$  — поперечное волновое число волноведущего слоя, также нормированное на  $k_0$ .  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — неизвестные амплитуды,  $x$  — поперечная координата,  $z$  — продольная координата. Множитель  $e^{-i\omega t}$  в дальнейшем будем подразумевать, не указывая в явном виде.

Для записи амплитуд напряжённостей полей в окружающих средах необходимо решить задачу на собственные значения и собственные волны выведенного в предыдущем разделе волнового уравнения, что подробно сделано в работах [7, 8]. Здесь же приведём окончательные выражения.

В верхней среде (см. рис. 1) эти поля состоят из линейной комбинации обыкновенной и необыкновенной волн с различными амплитудами ( $F$  и  $E$ ):

$$\begin{aligned} \vec{E}_t(x) &= \begin{vmatrix} i\gamma \left[ E \frac{T_e}{T_o^2} e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} + F \frac{1}{T_o} e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \right] \\ -\frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} E e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} - \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} F e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \\ E e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} + F e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \end{vmatrix} \cdot e^{i\gamma z}, \\ \vec{H}_t(x) &= \begin{vmatrix} \gamma \cdot \left[ \frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} E e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} F e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \right] \\ i\varepsilon_o \cdot \left[ \frac{T_e}{T_o^2} E e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} + \frac{1}{T_o} F e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \right] \\ -i \cdot \left[ T_e \frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} E e^{-T_e(x-\frac{d}{2})} + T_o \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} F e^{-T_o(x-\frac{d}{2})} \right] \end{vmatrix} \cdot e^{i\gamma z}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обозначения здесь следующие:  $T_o$  — мнимая часть поперечного волнового числа обыкновенной волны, нормированная на  $k_0$ ,  $T_o = \sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_o}$ ;  $T_e$  — мнимая часть поперечного волнового числа необыкновенной волны (нормировано на  $k_0$ ),  $T_e = \sqrt{\gamma^2 \left(1 + \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon_o} \cos^2 \varphi\right) - \varepsilon_e}$ ,  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_e - \varepsilon_o$ ,  $\varphi$  — угол поворота осей симметрии верхней анизотропной среды (положительный);  $E$  и  $F$  — неизвестные амплитуды необыкновенной и обыкновенной волн в верхней анизотропной среде.

В нижней анизотропной среде поля записываются аналогичным образом, но поперечные волновые числа должны быть отрицательными (что приведёт к экспоненциальному убыванию всех амплитуд при удалении от волноводного слоя), отрицательным должен быть и угол поворота  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \vec{E}_d(x) &= \begin{vmatrix} -i\gamma \left[ G \frac{T_e}{T_o^2} e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + H \frac{1}{T_o} e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \right] \\ \frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} G e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} H e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \\ G e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + H e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \end{vmatrix} \cdot e^{i\gamma z}, \\ \vec{H}_d(x) &= \begin{vmatrix} -\gamma \cdot \left[ \frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} G e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} H e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \right] \\ -i\varepsilon_o \cdot \left[ \frac{T_e}{T_o^2} G e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + \frac{1}{T_o} H e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \right] \\ -i \cdot \left[ T_e \frac{\varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi}{T_o^2} G e^{T_e(x+\frac{d}{2})} + T_o \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} H e^{T_o(x+\frac{d}{2})} \right] \end{vmatrix} \cdot e^{i\gamma z}, \end{aligned} \quad (3)$$

$G$  и  $H$  — амплитуды необыкновенной и обыкновенной волн в нижней анизотропной среде.

Сшивая тангенциальные компоненты полей на границах волноведущего слоя  $\pm d/2$ , получим уравнение вида:

$$\mathbf{M}(A, B, \dots, H)^T = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{M}[\varepsilon_o, \varepsilon_e, \pm d/2, \pm \phi]$  — квадратная матрица размером  $8 \times 8$ , а  $(A, B, \dots, H)^T$  — вектор неизвестных амплитуд.

Требую равенства нулю определителя матрицы  $\mathbf{M}$ , получим дисперсионные уравнения. Поскольку исследуемая волноведущая структура симметрична, то, как и следовало ожидать, дисперсионных уравнений будет два, одно из них для симметричных мод структуры, другое — для антисимметричных. Каждое из этих уравнений является квадратным, поэтому даёт два корня. Итак, для симметричных мод:

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \frac{M(T_o \varepsilon_s + T_e \varepsilon_o) \mp \sqrt{M^2(T_o \varepsilon_s + T_e \varepsilon_o)^2 - 4NL T_o^2 \varepsilon_s \varepsilon_o}}{2k_x N \varepsilon_o}, \quad (5)$$

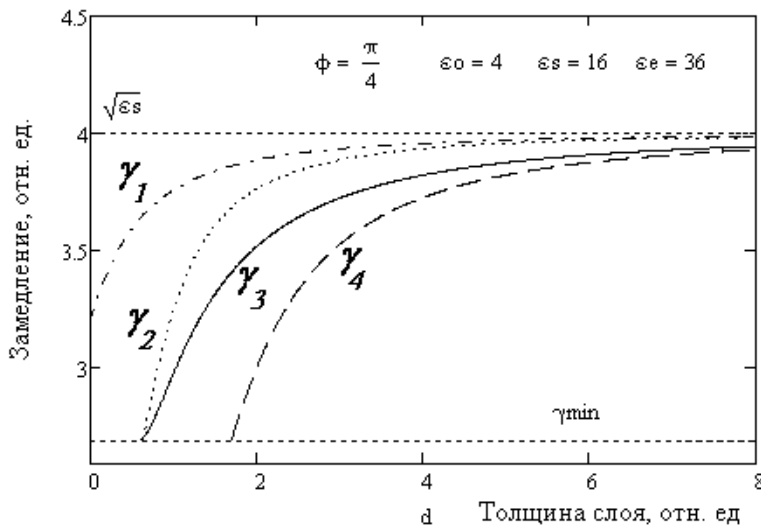
где для краткости введены обозначения:

$$M = (T_o^2 - \varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi^2), \quad N = (T_e T_o - \varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi^2), \quad L = \left( T_o^2 - \frac{T_e}{T_o} \varepsilon_o \operatorname{tg} \varphi^2 \right).$$

Для антисимметричных мод:

$$\operatorname{ctg} \psi_{3,4} = -\frac{M(T_o \varepsilon_s + T_e \varepsilon_o) \mp \sqrt{M^2(T_o \varepsilon_s + T_e \varepsilon_o)^2 - 4NL \varepsilon_s \varepsilon_o}}{2k_x N \varepsilon_o}, \quad \psi = \frac{k_x d}{2}. \quad (6)$$

Графически зависимости замедлений этих мод от толщины изотропного слоя выглядят следующим образом:

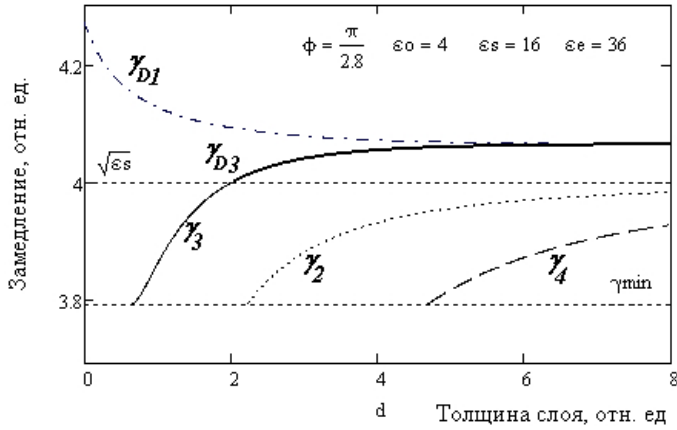


**Рис. 2.** Зависимость замедления от толщины изотропного слоя:  $\gamma_{1,2}$  — симметричные моды,  $\gamma_{3,4}$  — антисимметричные

Уровень  $\gamma_{\min} = \sqrt{\varepsilon_e / (1 + (\Delta\varepsilon/\varepsilon_o) \cos \varphi^2)}$  получается из условия  $T_e = 0$ , при  $\gamma < \gamma_{\min}$  исследуемая структура переходит в режим излучения в окружающие анизотропные среды, так как  $T_e$  становится мнимой величиной.

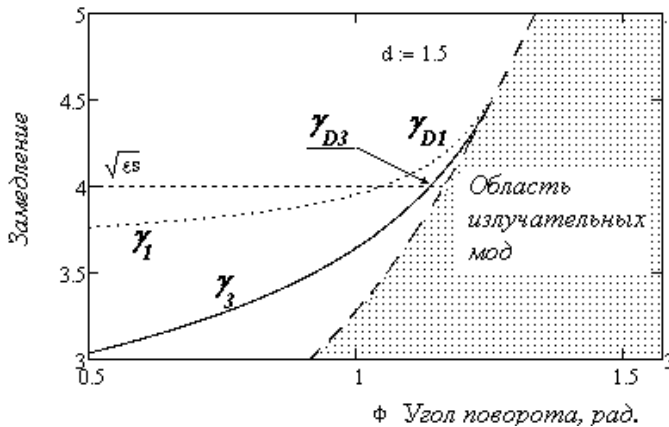
Отметим одну интересную особенность на рис. 2, а именно — простейшая симметричная мода волноводной структуры  $\gamma_1$  при нулевой толщине изотропного слоя имеет замедление, превышающее  $\gamma_{\min}$ . Как было показано в [8–10], вдоль границы раздела анизотропных сред в этом случае может распространяться поверхностная (Дьяконовская [11]) электромагнитная волна, замедление которой зависит от угла поворота  $\varphi$ .

Но и в исследуемой нами волноводной структуре простейшая мода  $\gamma_1$  может трансформироваться при определённых условиях в поверхностную, Дьяконовскую, моду. Для этого необходимо лишь подобрать соответствующий угол поворота, что иллюстрирует рис. 3.



**Рис. 3. Совокупность поверхностных ( $\gamma_{D1}, \gamma_{D3}$ ) и волноводных мод ( $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ ) исследуемой структуры**

Естественно, что при вычислении  $\gamma_{D1,3}$  по дисперсионным уравнениям (5) и (6) использована подстановка  $k_x = i\sqrt{\gamma^2 - \epsilon_0} = iK_x$ ,  $\psi = i\Psi$ ,  $\Psi = K_x d/2$ , позволяющая вычислять Дьяконовские моды. Как видно из рис. 3, в поверхностные моды переходят первая симметричная и первая антисимметричная волноводные моды. Отметим, что диапазон углов поворота, при которых существуют поверхностные моды довольно узкий, в чём можно убедиться, построив зависимость замедлений по (5) и (6) от угла поворота при фиксированной толщине изотропного слоя  $d$  (рис. 4).



**Рис. 4. Зависимость замедления от угла поворота для простейших симметричной и антисимметричной мод. Переход в поверхностные моды происходит, когда замедление превышает  $\sqrt{\epsilon_s}$ . Пунктирная линия соответствует условию  $T_e = 0$**

#### 4. Собственные поля направляемых мод

Выяснив в основном дисперсионные свойства исследуемой структуры, перейдём теперь к вычислению амплитуд полей собственных электромагнитных волн для каждой из четырёх мод, описываемых вектором  $A, B, \dots, H)^T$ . Поскольку уже известны все собственные числа для матрицы  $\mathbf{M}[\varepsilon_o, \varepsilon_e, \pm d/2, \pm \phi]$  в (4), то не составляет труда вычислить и неизвестные амплитуды из уравнения (4). В результате имеем:

Для симметричных мод (5):

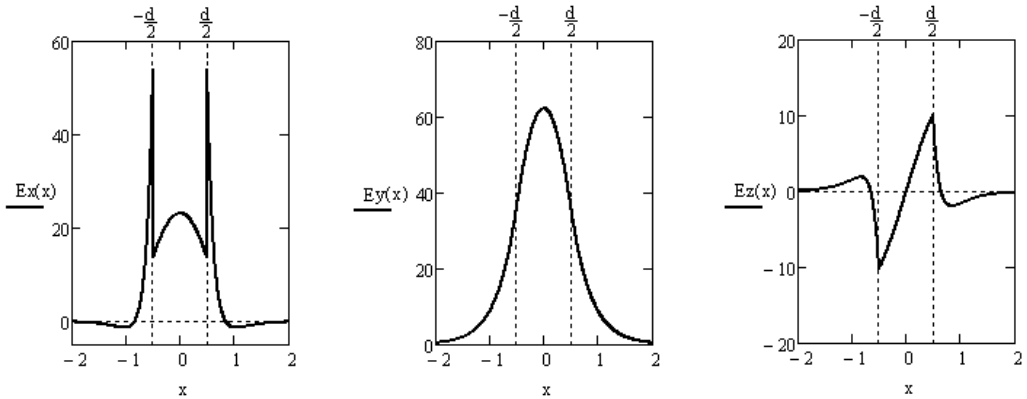
$$\begin{aligned} A_s &= \frac{T_o^2 \varepsilon_s \cos \psi L - T_e k_x \varepsilon_o \sin \psi M}{T_o^2 k_x \operatorname{tg} \varphi}, & B_s &= -i \varepsilon_o \sin \psi \frac{T_e - T_o}{T_o}, \\ E_s &= 2 \sin \psi \frac{T_o \varepsilon_s \cos \psi - k_x \varepsilon_o \sin \psi}{k_x}, & F_s &= -2 \sin \psi \frac{T_o^2 \varepsilon_s \cos \psi - T_e k_x \varepsilon_o \sin \psi}{T_o k_x}, \\ C_s &= A_s, & D_s &= -B_s, & G_s &= -E_s, & H_s &= -F_s. \end{aligned} \quad (7)$$

Для антисимметричных мод (6):

$$\begin{aligned} A_{as} &= i \frac{T_o^2 \varepsilon_s \sin \psi L + T_e k_x \varepsilon_o \cos \psi M}{T_o^2 k_x \operatorname{tg} \psi}, & B_{as} &= -\varepsilon_o \cos \psi \frac{T_e - T_o}{T_o}, \\ E_{as} &= 2 \cos \psi \frac{T_o \varepsilon_s \sin \psi + k_x \varepsilon_o \cos \psi}{k_x}, & F_{as} &= -2 \cos \psi \frac{T_o^2 \varepsilon_s \sin \psi + T_e k_x \varepsilon_o \cos \psi}{T_o k_x}, \\ C_{as} &= A_{as}, & D_{as} &= B_{as}, & G_{as} &= E_{as}, & H_{as} &= F_{as}. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь, напомним,  $\psi = k_x d/2$ .

Теперь, воспользовавшись выражениями (1), (2) и (3), можно вычислить компоненты всех полей для любой из выводных мод рассматриваемой структуры. В качестве примера на рис. 5 приведены графики поперечного распределения компонент напряжённости электрического поля простейшей симметричной моды при следующих параметрах волноведущей структуры:  $\varphi = 0,203$  рад,  $\varepsilon_s = 16$ ,  $\varepsilon_e = 36$ ,  $\varepsilon_o = 4$ .



**Рис. 5.** Поперечные распределения компонент электрического поля для простейшей симметричной моды. Все величины выражены в относительных единицах,  $d$  — толщина изотропного слоя (в единицах длины волны)

Аналогичные зависимости для режима Дьяконовских мод можно получить с учётом указанной выше замены:  $k_x = i\sqrt{\gamma^2 - \varepsilon_o} = iK_x$ ,  $\psi = i\Psi$ . Эти зависимости

количественно будут подобны указанным на рис. 5, с той лишь разницей, что все тригонометрические функции станут гиперболическими.

## 5. Заключение

Таким образом, нам удалось показать, что в исследуемой волноведущей структуре возможна реализация двух типов распространения направляемых волн — обычное волноводное распространение и смешанный тип, когда наряду с обычными волноводными присутствуют и поверхностные волны Дьяконовского типа. Переключение между указанными режимами можно обеспечить путём подбора угла между оптическими осями обрамляющих сред и направлением фазовой скорости волноводной волны. Наряду с этим получены точные аналитические выражения как для фазовых скоростей, так и для компонент напряжённостей полей направляемых волн различных типов. Отмечено, что даже при нулевой толщине изотропного слоя структура сохраняет способность поддерживать направляемую волну, которая в этом случае является поверхностной волной. Рассмотренная конструкция этой структуры, по мнению авторов, может быть реализована в эксперименте, причём в качестве изотропного слоя можно использовать жидкость с соответствующей диэлектрической проницаемостью. Последнее позволит плавно менять углы  $\varphi$  оптических осей анизотропных сред относительно оси OZ.

## Литература

1. Dyakonov Surface Waves: a Review / O. Takayama, L.-C. Crasovan, S. Johansen et al. // *Electromagnetics*. — 2008. — Vol. 28. — Pp. 126–145.
2. Polo Jr. J. A., Lakhtakia A. A Surface Electromagnetic Waves: a Review // *Laser & Photonics Reviews*. — 2011. — Vol. 5. — Pp. 234–246.
3. Observation of Dyakonov Surface Waves / O. Takayama, L. Crasovan, D. Artigas, L. Torner // *Physical Review Letters*. — 2009. — Vol. 102. — P. 043903.
4. New Waveguide Modes in Anisotropic Structures / L. Torner, C. Santos, J. P. Torres, D. Mihalache // *Fiber and Integrated Optics*. — 1993. — Vol. 13. — Pp. 271–280.
5. Boroujeni M. A., Shahabadi M. Modal Analysis of Multilayer Planar Lossy Anisotropic Optical Waveguides // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. — 2006. — Vol. 8. — Pp. 856–863.
6. Kweon G., Hwang-bo S., Kim C. Eigenmode of Anisotropic Planar Waveguide // *Journal of the Optical Society of Korea*. — 2004. — Vol. 8, No 3. — Pp. 137–146.
7. Lekner J. Reflection and Refraction by Uniaxial Crystals // *Journal of Physics: Condensed Matter*. — 1991. — Vol. 3. — Pp. 6121–6133.
8. Букеев О. Н., Севастьянов Л. А. Поверхностные электромагнитные волны на границе анизотропных сред // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 141–148. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148.
9. Nelatury S. R., Polo J. A., Lakhtakia Jr. A. Surface Waves with Simple Exponential Transverse Decay at a Biaxial Bicrystalline Interface: Errata // *Journal of the Optical Society of America A*. — 2007. — Vol. 24. — Pp. 2102–2102.
10. Walker D. B., Glytsis E. N., Gaylord T. K. Surface Mode at Isotropic–Uniaxial and Isotropic–Biaxial Interfaces // *Journal of the Optical Society of America A*. — 1998. — Vol. 15, No 1. — Pp. 248–260.
11. Аверкиев Н. С., Дьяконов М. И. Электромагнитные волны, локализованные на границе раздела прозрачных анизотропных сред // *Оптика и спектроскопия*. — 1990. — Т. 68, № 5. — С. 1118–1121.

UDC 535.012.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-119-128

## Eigen Waves of a Plane Symmetric Anisotropic Waveguide

O. N. Bikeev\*, K. P. Lovetskiy†, A. L. Sevastianov†

\* *Institute of Physical Researches and Technologies  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)  
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

† *Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)  
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

Precise dispersion equations for a plane symmetric dielectric anisotropic waveguide are obtained, in which the waveguide layer is isotropic, and the framing media are assumed to be anisotropic uniaxial media. The tensors of the dielectric permittivity of the framing media are not assumed to be diagonal, namely, in one of them this tensor is formed by rotating the diagonal tensor by some angle between the optical axis of the anisotropic medium and the direction of propagation of the electromagnetic wave. The tensor of dielectric permittivity of another anisotropic medium is rotated by the same angle, but in the opposite direction, with the optical axes of both framing media lying in a plane parallel to the boundaries of the waveguiding structure. Thus, in framing media, the existence of six-component electromagnetic waves is maintained.

In the dispersion properties of such a waveguide, certain features are observed in comparison with the case when the framing media are assumed to be isotropic.

It is found that the first symmetric mode of such a waveguide has a finite deceleration with zero thickness of the isotropic layer, which indicates the possibility of the appearance of surface electromagnetic waves (the so-called Dyakonov waves) at the boundaries of this isotropic layer. It is noted that the transition of the antisymmetric mode to the Dyakonov wave occurs with a finite thickness of the waveguiding layer. Dependencies of the deceleration of the elementary (symmetric) mode on the angle of rotation of the optical axis of anisotropic media relative to the direction of propagation of the guided wave of the waveguide structure are given.

**Key words and phrases:** surface electromagnetic wave, anisotropic medium, permittivity tensor, waveguide modes, transverse amplitude distribution, guided waves

## References

1. O. Takayma, L.-C. Crasovan, S. Johansen, D. Mihalache, D. Artigas, L. Torner, Dyakonov Surface Waves: A Review, *Electromagnetics* 28 (2008) 126–145.
2. J. A. Polo Jr., L. A., A Surface Electromagnetic Waves: a Review, *Laser & Photonics Reviews* 5 (2011) 234–246.
3. O. Takayama, L. Crasovan, D. Artigas, L. Torner, Observation of Dyakonov Surface Waves, *Physical Review Letters* 102 (2009) 043903.
4. L. Torner, C. Santos, J. P. Torres, D. Mihalache, New Waveguide Modes in Anisotropic Structures, *Fiber and Integrated Optics* 13 (1993) 271–280.
5. M. A. Boroujeni, M. Shahabadi, Modal Analysis of Multilayer Planar Lossy Anisotropic Optical Waveguides, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* 8 (2006) 856–863.
6. G. Kweon, S. Hwang-bo, C. Kim, Eigenmode of Anisotropic Planar Waveguide, *Journal of the Optical Society of Korea* 8 (3) (2004) 137–146.
7. J. Lekner, Reflection and Refraction by Uniaxial Crystals, *Journal of Physics: Condensed Matter* 3 (1991) 6121–6133.
8. O. N. Bikeev, L. A. Sevastianov, Surface Electromagnetic Waves at the Interface of Two Anisotropic Media, *RUDN Journal of Mathematics, Informational Sciences and Physics* 25 (2) (2017) 141–148, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-2-141-148.
9. S. R. Nelatury, J. A. Polo, A. Lakhtakia Jr., Surface Waves with Simple Exponential Transverse Decay at a Biaxial Bicrystalline Interface: Errata, *Journal of the Optical Society of America A* 24 (2007) 2102–2102.

10. D. B. Walker, E. N. Glytsis, T. K. Gaylord, Surface Mode at Isotropic-Uniaxial and Isotropic-Biaxial Interfaces, *Journal of the Optical Society of America A* 15 (1) (1998) 248–260.
11. N. S. Averkiev, M. I. Dyakonov, Electromagnetic Waves Localized at the Boundary of Transparent Anisotropic Media, *Optics and Spectroscopy* 68 (5) (1990) 1118–1121.

© Бикеев О. Н., Ловецкий К. П., Севастьянов А. Л., 2018

**Для цитирования:**

*Бикеев О. Н., Ловецкий К. П., Севастьянов А. Л. Собственные волны плоского симметричного анизотропного волновода // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 119–128. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-119-128.*

**For citation:**

Bikeev O. N., Lovetskiy K. P., Sevastianov A. L. Eigen Waves of a Plane Symmetric Anisotropic Waveguide, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (2) (2018) 119–128. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-119-128. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Бикеев Олег Николаевич** — заведующий лабораторией Института физических исследований и технологий РУДН (e-mail: [bickejev@gmail.com](mailto:bickejev@gmail.com), тел.: +7 (905) 7458125)

**Ловецкий Константин Петрович** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [lovetskiy\\_kp@rudn.university](mailto:lovetskiy_kp@rudn.university), тел.: +7(495)9522572)

**Севастьянов Антон Леонидович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [sevastianov\\_al@rudn.university](mailto:sevastianov_al@rudn.university), тел.: +7(495)9522572)

**Information about the authors:**

**Bikeev O. N.** — Head of Laboratory of Institute of Physical Researches and Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university) (e-mail: [bickejev@gmail.com](mailto:bickejev@gmail.com), phone: +7 (905) 7458125)

**Lovetskiy K. P.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [lovetskiy\\_kp@rudn.university](mailto:lovetskiy_kp@rudn.university), phone: +7(495)9522572)

**Sevastianov A. L.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [sevastianov\\_al@rudn.university](mailto:sevastianov_al@rudn.university), phone: +7(495)9522572)





УДК 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139

## О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением

А. А. Тютюнник

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В статье исследуются волноводы постоянного сечения с идеально проводящими стенками и произвольным заполнением. Поставлена и дискретизирована задача об отыскании нормальных мод волновода в полной векторной постановке. В рамках численных экспериментов для нескольких вариантов заполнений вычислены направляемые и эванесцентные моды волновода. Поставлена и дискретизирована задача дифракции нормальной волновой моды, подающей на стык двух волноводов, сечения которых совпадают, а заполнение на стыке меняется скачком, приведены результаты численных экспериментов для конкретных конфигураций волноводных стыков и вычислены коэффициенты прохождения и отражения направляемых мод.

В основу решения системы уравнений Максвелла положена декомпозиция полей при помощи четырёх потенциалов, и в рамках настоящей работы предложен символьно-численный метод, реализующий этот подход. Представленные в работе численные эксперименты показывают, что предложенный подход и метод на его основе позволяют эффективно вычислять различные характеристики волноведущих систем. Об адекватности используемого подхода свидетельствует также результат сравнения полученных результатов с результатами В.В. Шевченко для задачи дифракции на стыке двух открытых волноводов.

Символьно-численный метод, используемый в работе, реализован в системе компьютерной алгебры Maple, в частности расчёты матричных элементов в рамках неполного метода Галёркина проведены в символьном виде для ускорения дальнейших расчётов с использованием численных методов.

**Ключевые слова:** волновод, уравнения Максвелла, нормальные моды, парциальные условия излучения, неполный метод Галёркина, метод Канторовича, Maple, Sage, Sagemath

### 1. Введение

Распространение электромагнитных волн в полых волноводах было описано в символьном виде в ставшей уже классической работе [1]. Исследование закрытых волноводов со сложным заполнением  $\epsilon$  и  $\mu$  требует применения численных методов [2]. В работах [3, 4] был предложен метод исследования задачи волноводного распространения излучения, основанный на декомпозиции полей по четырём потенциалам. Этот подход может быть применён и к исследованию открытых волноведущих систем путём введения виртуальных стенок [5, 6].

В настоящей работе предложенный подход применяется к 1) расчёту нормальных мод для модельных задач и 2) расчёту коэффициентов отражения и прохождения волноводных мод на стыке двух волноводов. Результаты численных экспериментов верифицировались в работе путём сравнения результатов расчёта модельных примеров в рамках двух независимых реализаций метода четырёх потенциалов, первая реализация разработана в системе компьютерной алгебры Sage, вторая — в Maple. Данные, полученные в рамках численных экспериментов по расчёту прохождения излучения через стык волноводов, сравнивались с результатами расчётов аналогичной конфигурации методом поперечных сечений, полученных в работе Шевченко [7].

---

Статья поступила в редакцию 2 марта 2018 г.

Автор благодарен Севастьянову Л. А. и Малых М. Д. за полезные обсуждения, а также Дивакову Д. В. за конструктивные советы по реализации символьно-численного метода.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».

Вычисления проводились в системах компьютерной алгебры Maple, Sage: матричные коэффициенты задачи на собственные значения вычислялись символьно, задача на собственные значения решалась численно с использованием встроенных в систему компьютерной алгебры численных методов.

## 2. Описание поля в волноводе при помощи четырёх потенциалов

Рассмотрим волновод постоянного односвязного сечения  $S$  с идеально проводящими стенками; относительно заполнения  $\varepsilon, \mu$  которого не будем делать пока никаких предположений. Ось  $Oz$  направим по оси цилиндра, нормаль к  $S$  будем обозначать как  $\vec{n}$ , касательный вектор, перпендикулярный к  $\vec{e}_z$  как  $\vec{\tau}$ . Положим

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T, \quad \nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T.$$

Декомпозиция Гельмгольца [4, теоремы 1 и 2] позволяет искать решение системы уравнений Максвелла в виде

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \nabla' u_h. \quad (1)$$

Введённые здесь четыре скалярные функции будем называть потенциалами и всегда предполагать, что они удовлетворяют граничным условиям

$$u_e = u_h = n \cdot \nabla v_e = n \cdot \nabla v_h|_{\partial S} = 0 \quad (2)$$

на границе волновода. При этом автоматически выполняются граничные условия идеальной проводимости, а сами уравнения Максвелла можно записать в следующем виде [3, 4]

$$\begin{cases} \nabla' \left( \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0, \\ \nabla' \left( \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  являются постоянными, эта система распадается на пару уравнений Гельмгольца, данный подход был предложен в работах [3, 4]. Мы воспользуемся некоторыми теоретическими результатами из этих работ, чтобы в данной статье привести результаты компьютерных экспериментов, содержащих символьные и численные расчёты в системе компьютерной алгебры Maple.

## 3. Дискретизация уравнений Максвелла

Рассмотрим вначале однородный вдоль оси  $z$  волновод квадратного сечения  $S = \{x \in [0; 1], y \in [0; 1]\}$ . Пусть на некотором отрезке  $a < z < b$  заполнение  $\varepsilon, \mu$  не меняется вдоль оси. Дискретизацию по пространству будем проводить, используя стандартный базис метода Галёркина [8, 9]. Раскладывая приближенное решение будем по конечному числу функций, удовлетворяющих граничным условиям. В качестве базиса в данном случае подходит базис  $\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$ , составленный из собственных функций оператора Лапласа с условиями Дирихле и условиями Неймана, а именно:

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{N^2-1} = (\cos(\pi nx) \cos(\pi my), 0, 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (4)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=N^2-1}^{2N^2-2} = (0, \cos(\pi nx) \cos(\pi my), 0, 0)^T, \quad m, n = 0, \dots, N-1, m+n > 0, \quad (5)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=2N^2-2}^{3N^2-2} = (0, 0, \sin(\pi nx) \sin(\pi my), 0)^T, \quad m, n = 1, \dots, N, \quad (6)$$

$$\{\vec{\varphi}_j\}_{j=3N^2-2}^{4N^2-2} = (0, 0, 0, \sin(\pi nx) \sin(\pi my))^T, \quad m, n = 1, \dots, N. \quad (7)$$

Приближенное решение системы (3) будем строить по аналогии с неполным методом Галёркина [2, 9] в виде разложения

$$(v_h, v_e, u_e, u_h)^T = \sum_{j=1}^{4N^2-2} w_j(z) \vec{\varphi}_j(x, y). \quad (8)$$

После подстановки приближенного решения в уравнения системы и применения проекционной схемы метода Галёркина получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора искомых коэффициентных функций  $\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_{4N^2-2})^T$ :

$$B \frac{d\vec{w}}{dz} + ikA\vec{w} + \frac{1}{ik}C\vec{w} = \vec{0}, \quad (9)$$

где  $A, B$  и  $C$  — квадратные матрицы, элементы которых представляют собой двойные интегралы по сечению волновода  $S$ :

$$a_{ij} = \iint_S \varepsilon (\nabla' \varphi_{j2} + \nabla \varphi_{j3}) \cdot (\nabla' \varphi_{i1} - \nabla \varphi_{i4}) dx dy + \\ + \iint_S \mu (\nabla' \varphi_{j4} + \nabla \varphi_{j1}) \cdot (\nabla' \varphi_{i2} - \nabla \varphi_{i3}) dx dy, \quad (10)$$

$$b_{ij} = \iint_S (\nabla' \varphi_{j1} \cdot \nabla' \varphi_{i1} + \nabla' \varphi_{j3} \cdot \nabla' \varphi_{i3} + \nabla \varphi_{j2} \cdot \nabla \varphi_{i2} + \nabla \varphi_{j4} \cdot \nabla \varphi_{i4}) dx dy, \quad (11)$$

$$c_{ij} = \iint_S \left( \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i1}}{\mu} - \frac{\Delta \varphi_{j2} \Delta \varphi_{i3}}{\varepsilon} \right) dx dy, \quad (12)$$

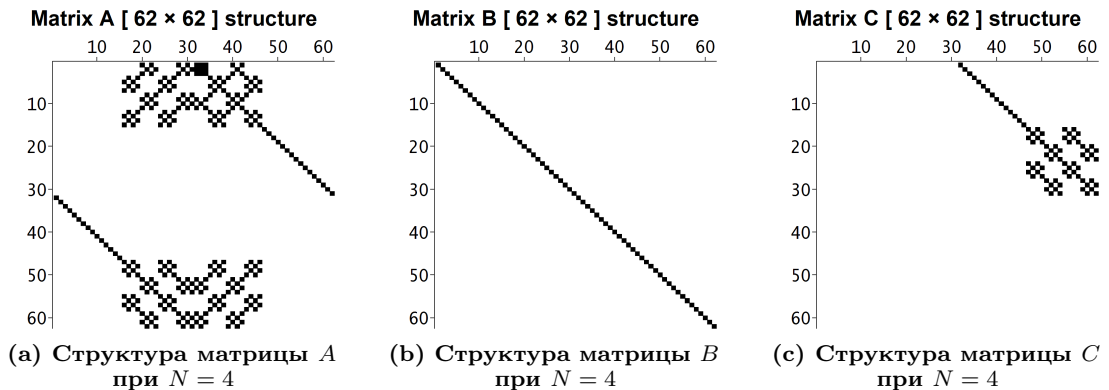
где  $\varphi_{jn}$ ,  $n = 1, \dots, 4$  —  $n$ -я компонента  $j$ -й вектор-функции  $\vec{\varphi}_j$ .

#### 4. Волновод с прямоугольной вставкой

Широкий класс волноводов — это волноводы с кусочно-постоянным заполнением  $\varepsilon$  и  $\mu$ . В этом случае интегралы (10)–(12), определяющие матричные элементы, можно вычислить в символьном виде. Если  $\varepsilon$  полином, то вычислить интеграл (12) в символьном виде невозможно в силу теоремы Лиувилля [10].

Рассмотрим структуру матриц  $A, B$  и  $C$ , полученных символьно методом четырёх потенциалов для квадратного волновода с произвольной прямоугольной вставкой.

На приведённом рис. 1 чёрными квадратами обозначены символьные выражения, тождественно не равные нулю, белыми квадратами — символьные нули. Структура матрицы  $A$  разреженная, причём ненулевые символьные элементы матрицы расположены в блочно-шахматном порядке. Матрица  $C$  обладает также разреженной структурой с блочно-шахматным расположением ненулевых элементов. Матрица  $B$  обладает более простой — диагональной структурой в рамках выбранного базиса.

Рис. 1. Структура матриц  $A$ ,  $B$ ,  $C$ 

Вычисление матричных элементов осуществлялось символично в Maple с помощью встроенной функции `int`.

Далее полученные выражения использовались для численных расчётов. Этот приём позволил избежать многократного повторения трудоёмкой процедуры численного интегрирования.

## 5. Нормальные моды

Однородная система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) допускает решения, которые зависят от  $z$  как  $e^{ik\beta z}$ , такие решения называют нормальными модами волновода. Подставляя вид решения  $\vec{w}(z) = \vec{\psi}e^{ik\beta z}$  в (9) и сокращая ненулевые множители, получим задачу на собственные значения и собственные векторы квадратной матрицы  $K$

$$K\vec{\psi} = \beta\vec{\psi},$$

где матрица  $K$  выражается через матрицы  $A$ ,  $B$  и  $C$  следующим образом:

$$K = B^{-1} \left( A - \frac{1}{k^2} C \right).$$

Величина  $\beta$ , входящая в степень экспоненты, называется коэффициентом фазового замедления моды, он определяет характер распространения моды. Моды с вещественным  $\beta > 0$  представляют собой волны, бегущие вдоль оси волновода в положительном направлении, моды с  $\beta < 0$  — в отрицательном направлении, их называют распространяющимися. Моды с мнимым  $\beta$  экспоненциально убывают в одном из направлений, их называют эванесцентными.

Вычисление собственных мод требует решения задачи на собственные значения и собственные векторы матрицы  $K$ . Благодаря диагональной структуре матрицы  $B$  в выбранном базисе матрицу  $K$  также можно вычислить символично. Вид разреженной вычисленной символично матрицы  $K$  аналогичен виду матриц  $A$  и  $C$  и приведён на рис. 2.

Приведём далее результаты численных расчётов коэффициентов фазового замедления для квадратного волновода из материала с  $\varepsilon_1 = 1$  единичной ширины и высоты с квадратной вставкой  $p_x = p_y = p$  из материала с  $\varepsilon_2 = 2$  (см. рис. 3).

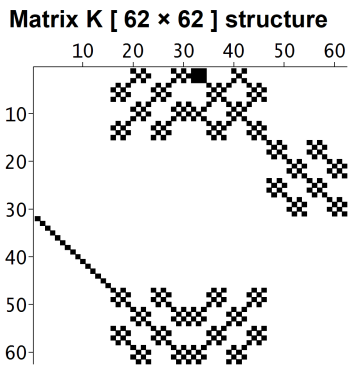


Рис. 2. Структура матрицы  $K$  при  $N = 4$

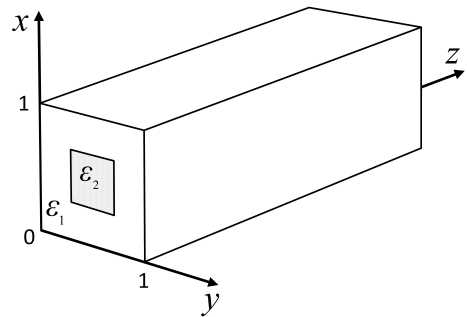


Рис. 3. Квадратный волновод с квадратной вставкой ширины  $p$

С увеличением толщины или изменением диэлектрической проницаемости вставки мнимые собственные значения трансформируются в действительные (см. [3]), что соответствует появлению новой распространяющейся моды. Проиллюстрируем описанное поведение собственных значений при изменении толщины диэлектрической вставки с  $p = 0,668$  до  $p = 0,670$ , которые приведены на рис. 4. Ось абсцисс соответствует действительной части собственных значений, ось ординат — мнимой. Собственные значения  $\beta_j$ , лежащие на оси абсцисс соответствуют направляемым модам, причём моды, бегущие в положительном направлении оси  $z$ , имеют  $\beta_j > 0$ , а бегущие в отрицательном направлении —  $\beta_j < 0$ . На мнимой оси расположены  $\beta_j$ , отвечающие эванесцентным модам.

При толщине  $p = 0,668$  (левый график на рис. 4) в волноводе имеется три направляемые моды, бегущие в положительном направлении  $z$ , и три — бегущие в отрицательном. Квадратиком на рис. 4 обозначено мнимое собственное значение, которое при толщине  $p = 0,668$  приближается к нулю и при толщине  $p = 0,670$  (правый график на рис. 4) оно переходит на действительную ось, что соответствует появлению новой направляемой моды волновода.

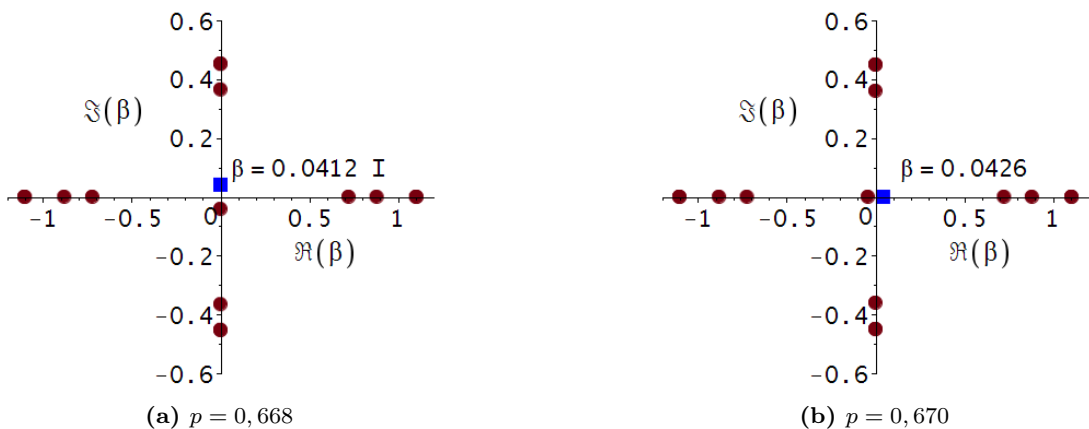


Рис. 4. Собственные значения

Случаю  $p = 0$  соответствует полый волновод, собственные значения для которого известны аналитически. В результате сравнения с численными результатами, полученными описанным методом, относительная погрешность при вычислении собственных значений в этом случае составила  $\delta < 2 \cdot 10^{-10}$ .

Численный расчёт собственных значений производится средствами системы компьютерной алгебры Maple. С помощью функции `ImportMatrix` производится загрузка матрицы  $K$ , предварительно вычисленной символично. Чтобы получить численные значения элементов матрицы, необходимо в этом случае в символьные выражения, зависящие от параметров вставки, подставить численные значения этих параметров, используя функцию `subs`. Для полученной матрицы  $K$  можно далее вычислить собственные значения, используя встроенную функцию `Eigenvalues`. Для матрицы  $K$  интересующей нас размерности  $194 \times 194$  вычисления собственных значений и собственных векторов на современном компьютере с конфигурацией Intel(R) Core(TM) i7-6500U 2.50 ГГц, 8.00 ГБ ОЗУ занимают менее чем 0.5 сек.

Описанный подход позволяет всесторонне исследовать спектральные характеристики волноведущих систем с кусочно-постоянным заполнением за приемлемое время.

## 6. Задача рассеяния на стыке двух волноводов

Предложенный подход к представлению уравнений Максвелла через вспомогательные потенциалы с последующей дискретизацией позволяет достаточно просто в конструктивном виде сформулировать задачу волноводной дифракции. В качестве примера рассмотрим простейшую в рамках нашего подхода задачу из этого класса — задачу о дифракции волны на стыке двух волноводов.

Пусть имеются два волновода, имеющие одинаковые сечения, но различное заполнение, и пусть они стыкуются при  $z = 0$ . Иными словами, пусть

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1(x, y), & z < 0, \\ \varepsilon_2(x, y), & z > 0, \end{cases} \quad \mu = \begin{cases} \mu_1(x, y), & z < 0, \\ \mu_2(x, y), & z > 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать случай дифракции волноводной моды, налетающей из левого ( $z < 0$ ) волновода на правый ( $z > 0$ ). Поле в левом и правом волноводах может быть представлено в виде суперпозиции нормальных мод, приближенное вычисление которых осуществляется методом четырёх потенциалов. При  $z < 0$  задача отыскания нормальных мод редуцируется к задаче на собственные значения и собственные векторы матрицы  $K^{(1)}$

$$K^{(1)} \vec{\psi}^{(1)} = \beta^{(1)} \vec{\psi}^{(1)}, \quad (13)$$

а при  $z > 0$  — к задаче

$$K^{(2)} \vec{\psi}^{(2)} = \beta^{(2)} \vec{\psi}^{(2)}. \quad (14)$$

Поле в левом волноводе состоит из падающей на стык моды с  $\text{Re}(\beta_1^{(1)}) > 0$  и амплитудным коэффициентом  $A$  и отражённых мод с  $\text{Re}(\beta_j^{(1)}) < 0$  и амплитудными коэффициентами отражения  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ . Поле в правом волноводе состоит из прошедших мод с  $\text{Re}(\beta_j^{(2)}) > 0$ , характеризующихся амплитудными коэффициентами прохождения  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ .

Задача дифракции такой волны на стыке состоит в отыскании поля, равного

$$w = Aw^{(1)}(x, y)e^{ik\beta_1^{(1)}z} + \sum_{\text{Re}\{\beta_j^{(1)}\} < 0} R_j w_j^{(1)}(x, y)e^{ik\beta_j^{(1)}z}$$

при  $z < 0$  и

$$w = \sum_{\operatorname{Re} \beta_j^{(2)} > 0} T_j w_j^{(2)}(x, y) e^{ik\beta_j^{(2)}z}$$

при  $z > 0$ , где  $w_j^{(1)}(x, y)$  и  $w_j^{(2)}(x, y)$  определяет поперечное распределение  $j$ -й нормальной моды левого и правого волноводов соответственно. Они определены как

$$w_j^{(1)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(1)} \vec{\varphi}_m(x, y), \quad w_j^{(2)}(x, y) = \sum_{m=1}^{4N^2-2} \psi_{mj}^{(2)} \vec{\varphi}_m(x, y), \quad (15)$$

где  $\psi_{mj}^{(1)}$  и  $\psi_{mj}^{(2)}$  — это  $m$ -я компонента  $j$ -го собственного вектора задачи (13) и (14) соответственно. На границе должно выполняться условие непрерывности тангенциальных составляющих полей:

$$[\vec{E}_\perp] = 0, \quad [\vec{H}_\perp] = 0.$$

В силу единственности (с точностью до аддитивной константы) представления полей через потенциалы [3, 4], это условие выполняется, если потенциалы непрерывны. Таким образом, условие сопряжения полей ведёт к легко выписываемому условию на коэффициенты  $R_j, T_j$

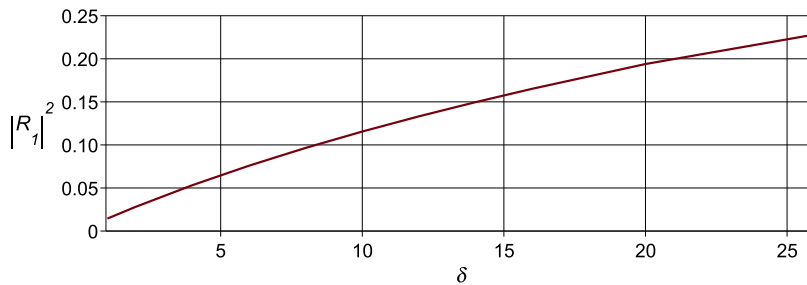
$$Aw^{(1)}(x, y) + \sum_{\operatorname{Re}\{\beta_j\}^{(1)} < 0} R_j w_j^{(1)}(x, y) = \sum_{\operatorname{Re}\{\beta_j\}^{(2)} > 0} T_j w_j^{(2)}(x, y). \quad (16)$$

Поскольку и  $w_j^{(1)}(x, y)$  и  $w_j^{(2)}(x, y)$  согласно (15) раскладываются по системе функций  $\{\vec{\varphi}_j\}_{j=1}^{4N^2-2}$  для выполнения (16) коэффициенты при каждой функции  $\vec{\varphi}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4N^2 - 2$ , должны быть равны между собой. Приравнивая коэффициенты при каждой  $\vec{\varphi}_j$ ,  $j = 1, \dots, 4N^2 - 2$ , в которые входят линейные комбинации  $R_j, T_j$ , получим систему из  $4N^2 - 2$  линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов отражения  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$  и прохождения  $T_j$ ,  $j = 1, \dots, 2N^2 - 1$ . Число неизвестных  $R_j, T_j$  в точности равно числу уравнений, поэтому полученная система имеет и притом единственное решение.

Описанная процедура получения системы линейных алгебраических уравнений реализовывалась в системах компьютерной алгебры Maple и Sage для сравнения результатов расчётов модельного стыка, речь о котором пойдёт ниже.

## 7. Численное решение задачи дифракции на стыке закрытых волноводов

Рассмотрим стык полого волновода  $\varepsilon_1 = 1$ ,  $\mu_1 = 1$  с волноводом градиентным, которому соответствует  $\varepsilon_2 = 1 + \delta xy(1-x)(1-y)$ ,  $\mu_2 = 1$ . Значение безразмерного параметра  $\delta$  определяет, насколько сильно различаются материалы левого и правого волноводов. Рассмотрим случай, когда из полого волновода на волновод градиентный налетает одна направляемая мода с  $\beta \simeq 0,778$  и единичной амплитудой  $A = 1$ . Будем численно оценивать её коэффициент отражения от стыка  $|R_1(\delta)|^2$  для  $\delta \in [1; 26]$  при  $N = 2$ .



**Рис. 5. Коэффициент отражения первой моды от стыка при  $N = 2$ , (а) результаты, полученные в работе В.В. Шевченко, (б) результаты, полученные в данной работе.**

Отражение при малых значениях параметра  $\delta$  незначительно. Увеличение параметра  $\delta$  влечёт большее отражение волноводной моды от стыка, что физически соответствует поведению моды на стыке волноводов из различных материалов.

Сравнение реализаций символьно-численного метода расчёта коэффициентов отражения и прохождения в Maple и Sage для рассматриваемого случая показывает, что  $|R_1^{\text{Maple}}(1) - R_1^{\text{Sage}}(1)| < 0,002$ . Точность совпадения обусловлена различными реализациями символьно-численного метода, а также различной точностью численного расчёта интегралов в системах Maple и Sage.

## 8. Численное решение задачи дифракции на стыке открытых планарных волноводов

Рассмотрим теперь второй пример, сделав предварительное замечание. Одним из первых методов исследования закрытых нерегулярных волноводов был разработан Б. З. Каценеленбаумом [11] — метод поперечных сечений, который был обобщён на открытые волноводы В. В. Шевченко [12]. Попытки обосновать метод поперечных сечений для открытых волноводов привели к серьёзным теоретическим трудностям, связанным с наличием непрерывного спектра задачи, описывающего излучательные моды открытого волновода. Волноводная задача для закрытого нерегулярного волновода тем временем имеет корректную постановку.

В работе [5] было показано, что расчёт открытого волновода можно проводить в рамках модели так называемого «ящика Дирихле». Предложенная модель содержит предположение о возможности поместить открытый волновод в объемлющий полый закрытый волновод, границы которого удалены от реальных границ волноводного слоя и поставить корректную математическую задачу. В этом случае поведение направляемых и излучательных мод открытого волновода будет адекватно описываться в рамках предложенной приближенной модели, что подтверждается численными экспериментами, приведёнными в [5] и настоящей работе.

В рамках модели «ящика Дирихле» будем проводить расчёт стыка открытых планарных волноводов, который подробно исследовался в работе В. В. Шевченко [7]. Рассмотрим аналогичную структуру, помещённую в ящик, и применим для расчёта предложенный в настоящей работе метод. В работе [7] рассматривается стык волноводов одинаковой толщины с различными диэлектрическими проницаемостями: из левого планарного волновода с  $\varepsilon_0 = 2$ ,  $\mu_0 = 1$  толщины  $d$  падает первая направляемая мода на правый планарный волновод  $\varepsilon_1 = s \cdot \varepsilon_0$ ,  $\mu_1 = 1$  такой же толщины, причём длина волны связана с толщиной соотношением  $d/\lambda = 0,4$ . Покровная среда для обоих волноводов — воздух  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . В рамках модели «ящика Дирихле» единичной ширины и высоты толщина волноводного слоя была принята  $d = 0,01$ , чтобы



высота «ящика» была много больше толщины волноводного слоя. Ниже приведён график зависимости коэффициента прохождения направляемой моды в зависимости от безразмерного параметра  $s = \varepsilon_1/\varepsilon_0$  при  $N = 7$  (рис. 6 (b)).

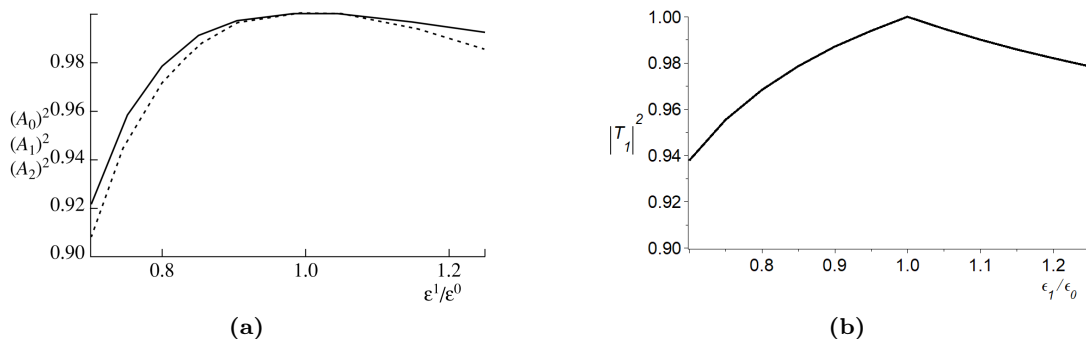


Рис. 6. Коэффициент прохождения первой моды через стык при  $N = 7$

Приведённая на графике зависимость демонстрирует качественную согласованность с результатами работы В. В. Шевченко [7] (рис. 6 (a)). Численные значения также имеют одинаковый порядок, что говорит об адекватности предложенного метода, в том числе для исследования открытых волноводов, помещённых в «ящик Дирихле».

## 9. Заключение

Рассмотренные численные примеры показывают, что предложенная в первой части статьи схема сведения системы уравнений Максвелла в волноводе к системе двух связанных уравнений Гельмгольца, записанных в «гамильтоновой форме», приводит в рамках неполного метода Галёркина к очень удобной для численно-аналитического анализа системе обыкновенных дифференциальных уравнений. За рамками статьи осталось обсуждение возможностей, которые открывает указанный в статье произвол в выборе и упорядочении базиса. Можно полагать, что этот подход позволит создать простые в использовании для прикладных исследований комплексы программ для исследования волноводного распространения электромагнитных волн.

## Литература

1. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010. — 197 с.
3. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2018. — Vol. 32, issue 7. — Pp. 886–898. — DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
4. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца / М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.

5. Моделирование распространения поляризованного света в тонкопленочной волноводной линзе / Д. В. Диваков, М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 1. — С. 56–68. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68.
6. Диваков Д. В. Численное решение задач волноводного распространения поляризованного света в интегрально-оптическом волноводе: автореферат дис. ... канд. физ.-мат. наук. Российский университет дружбы народов, Москва. — 2017.
7. Иванов А. А., Шевченко В. В. Плоскопоперечный стык двух планарных волноводов // Радиотехника и электроника. — 2009. — Т. 54, № 1. — С. 68–77.
8. Свешников А. Г. Неполный метод Галеркина // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236, № 5. — С. 1076–1079.
9. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е. Векторная модель волновода с входящими ребрами // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). — 2012. — № 2.
10. Bronstein M. Symbolic Integration I. — Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997. — 303 p.
11. Каценеленбаум Б. З. Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. — Москва: АН СССР, 1961. — 216 с.
12. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах. — Москва: Наука, 1969. — 191 с.

UDC 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139

## On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling

A. A. Tyutyunnik

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The paper investigates waveguides of constant cross-section with ideally conducting walls and arbitrary filling. The problem of finding the normal modes of a waveguide in a full vector formulation has been set and discretized. In the framework of numerical experiments, the guiding and evanescent modes of the waveguide are calculated for several variants of the fillings. The problem of diffraction of the normal waveguide mode incident on the joint of two waveguides, the cross-sections of which coincide, and the filling at the junction varies abruptly, is set and discretized. The results of numerical experiments for specific configurations of waveguide joints are presented, and the transmission and reflection coefficients of the guided modes are calculated.

The solution of the Maxwell equations system is based on the decomposition of fields with the help of four potentials, and in the present work a symbolic-numerical method is realized that uses this approach. The numerical experiments presented in this paper show that the proposed approach and the method on its basis allow the effective calculation of various characteristics of waveguide systems. The adequacy of the approach used is also evidenced by comparing the results obtained with the results of V.V. Shevchenko for the diffraction problem at the junction of two open waveguides

The symbolic-numerical method used in the work is implemented in the computer algebra system Maple, in particular, the calculations of matrix elements in the framework of the incomplete Galerkin method are carried out in symbolic form to accelerate further calculations using numerical methods.

**Key words and phrases:** waveguide, Maxwell's equations, normal modes, partial radiation conditions, incomplete Galerkin method, Kantorovich method, Sage, Sagemath

## References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, *Mathematical Problems of the Theory of Diffraction*, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
3. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* 32 (7) (2018) 886–898.
4. M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik, On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (1) (2018) 39–48, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.
5. D. V. Divakov, M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, Simulation of Polarized Light Propagation in the Thin-Film Waveguide Lens, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (1) (2017) 56–68, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-1-56-68.
6. D. V. Divakov, Numerical Solution of Waveguide Propagation Problem of Polarized Light in an Integrated Optical Waveguide, abstract of PhD thesis. Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow. in Russian (2017).
7. A. A. Ivanov, V. V. Shevchenko, A Planar Transversal Junction of Two Planar Waveguides, *Journal of Communications Technology and Electronics* 54 (1) (2009) 63–72.
8. A. G. Sveshnikov, Incomplete Galerkin Method, *DAN USSR* 236 (5) (1977) 1076–1079, in Russian.
9. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky, Vector Waveguide Model with Incoming Edges, *Zhurnal radioelektroniki (electronic journal)* (2), in Russian.
10. M. Bronstein, *Symbolic Integration I*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 1997.
11. B. Z. Katzenelenbaum, *The Theory of Irregular Waveguides with Slowly Varying Parameters*, AN USSR, Moscow, 1961, in Russian.
12. V. V. Shevchenko, *Smooth Transitions in Open Waveguides*, Nauka, Moscow, 1969, in Russian.

© Тютюнник А. А., 2018

### Для цитирования:

*Тютюнник А. А. О вычислении электромагнитных полей в закрытых волноводах с неоднородным заполнением // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 129–139. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139.*

### For citation:

Tyutyunnik A. A. On the Calculation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides with Inhomogeneous Filling, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (2) (2018) 129–139. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-129-139. In Russian.

### Сведения об авторах:

**Тютюнник Анастасия Александровна** — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, тел.: +7 (495)9522572)

### Information about the authors:

**Tyutyunnik A. A.** — assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, phone: +7 (495)9522572)



УДК 532.51:517.95

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154

## Невязкий аналог задачи Пуазейля

А. В. Коптев

*Кафедра математики  
Институт водного транспорта  
Государственный университет морского и речного флота  
имени адмирала С. О. Макарова  
ул. Двинская, д. 5/7, г. Санкт-Петербург, Россия, 198035*

Рассмотрена плоская задача об установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости в канале между двумя параллельными плоскостями под действием заданного перепада давления. Задача рассматривается в декартовых координатах.

Постановка аналогична известной задаче Пуазейля с той лишь разницей, что вместо вязкой жидкости рассматривается идеальная. В качестве граничных условий на стенках канала задаётся условие непротекания, так что вектор скорости параллелен ограничивающим поверхностям. Перепад давления задаётся, как некоторая положительная величина.

Для решения задачи предложен подход, основанный на использовании первого интеграла уравнений Эйлера при сохранении нелинейных членов. Для случая 2D установившегося движения несжимаемой жидкости представлен вывод определяющих соотношений. Решения уравнений для основных гидродинамических характеристик найдены аналитически в виде разложения по степеням декартовых координат. Для определения коэффициентов разложения при некоторых значениях определяющих параметров использованы стандартные программы пакета Maple.

В результате получены выражения для основных гидродинамических характеристик и исследованы их особенности. В частности, выявлены зоны возвратных движений и зоны интенсивного вихревого движения.

**Ключевые слова:** установившееся движение, идеальная несжимаемая жидкость, перепад давления, уравнения Эйлера, интеграл, разложение по степеням

### 1. Введение

Задача о движении жидкости в канале является одной из важных задач теоретической гидромеханики. Эта задача имеет не только теоретическое, но и прикладное значение, так как в основе лежит важный практический вопрос — каков закон движения жидкости в канале при заданных условиях на границах [1–3]. В прикладной гидромеханике движения такого типа получили названия напорных течений. Необходимость рассмотрения такого типа течений возникает при расчётах агрегатов и механизмов на трубопроводном транспорте, в машиностроении, энергетике, гидротехнике. На сегодняшний день многие вопросы, связанные с задачами такого типа, прояснены не до конца и требуют дополнительного изучения. Например, не ясно, по какому закону происходит падение давления вдоль оси канала, каков характер рассеяния энергии потока, при каких условиях одномерное движение разрушается и заменяется на более сложное двумерное с наличием выраженных вихревых зон, каковы закономерности перехода от ламинарного режима движения к турбулентному [4, 5].

Простейшая постановка предполагает рассмотрение плоской задачи и основывается на модели идеальной несжимаемой жидкости, движение которой описывается уравнениями Эйлера. Для случая 2D установившегося движения и в предположении об отсутствии внешних массовых сил, уравнения Эйлера имеют вид [1–3]

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

где  $p$ ,  $u$ ,  $v$  обозначают основные неизвестные — давление и компоненты вектора скорости, соответственно продольной и поперечной;  $\rho$  есть плотность жидкости, которая в рамках модели несжимаемой среды неизменна и представляет заданный положительный параметр. Каждая из величин  $p$ ,  $u$ ,  $v$ , является некоторой неизвестной функцией координат  $x$ ,  $y$ . Основная задача состоит в определении этих неизвестных.

Важнейшей особенностью уравнений (1)–(3) является наличие нелинейных членов, которые присутствуют в левых частях первых двух уравнений. Эти члены уравнений создают основные сложности при исследовании и решении. Но именно эти члены являются неотъемлемой частью уравнений Эйлера и должны быть учтены при решении по возможности более строго.

Ранее было обнаружено, что уравнения (1)–(3) допускают простое одномерное решение. Действительно, если предположить, что течение имеет лишь одну ненулевую компоненту скорости вдоль оси  $OX$ , тогда

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

В результате получаем  $p = \text{const}$  и  $u = u_0(y)$ . То есть давление не изменяется и профиль продольной скорости, который был во входном сечении канала, будет сохраняться без каких-либо изменений и при движении вдоль всего канала. Решение (4), которое соответствует такому простейшему движению, можно назвать тривиальным.

Однако экспериментальные результаты и простые визуальные наблюдения говорят о том, что, как правило, существуют зоны течения, где движение заведомо не одномерно и  $v \neq 0$ . Кроме того, в реальных течениях всегда существует некоторый ненулевой перепад давления, который является основной причиной движения.

Все это заставляет вновь обращаться к этой известной задаче теоретической гидромеханики и сосредоточиться на поиске нетривиальных решений, которые соответствуют наблюдаемым на практике заведомо не одномерным движениям.

## 2. Постановка задачи

Будем считать, что движение жидкости происходит в канале между двумя параллельными плоскостями, расположенными на расстоянии  $2H$  друг от друга. Выберем систему координат так, что ось  $OY$  перпендикулярна ограничивающим поверхностям, а ось  $OX$  им параллельна и отстоит от каждой из поверхностей на расстояние  $H$ . Ограничимся рассмотрением плоской задачи, считая, что движение одинаково во всех плоскостях, перпендикулярных ограничивающим поверхностям и параллельных оси  $OX$ . Считаем, что канал имеет конечную протяжённость вдоль оси  $OX$ . Пусть для простоты  $-L < x < L$ , где величину  $L$  полагаем положительной и изначально заданной. Будем считать, что на концах канала при  $x = \pm L$  создаётся перепад давления  $\Delta p$ , который и является основной причиной движения.

Таким образом, постановка задачи аналогична известной задаче Пуазейля для движения вязкой жидкости в канале [1–4] с тем лишь различием, что вместо вязкой жидкости в нашем случае рассматривается идеальная и канал представляет не цилиндрическую трубу, как обычно предполагается в задаче Пуазейля, а имеет более простую конфигурацию. Основной вопрос состоит в том, чтобы определить гидродинамические характеристики потока при заданном перепаде давления на концах канала.

В данной работе предлагается подход, основная идея которого состоит в том, чтобы строить решение задачи основываясь не на уравнениях Эйлера (1)–(3) непосредственно, а на основе первого интеграла этих уравнений. Первый интеграл уравнений (1)–(3) есть следствие интеграла уравнений Навье — Стокса, полученного автором для общего случая 3D неустановившегося движения вязкой несжимаемой жидкости [6–8] при сохранении нелинейных членов. Для рассматриваемого в данной работе более простого случая 2D движения при  $\frac{1}{Re} = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  вывод соотношений, представляющих первый интеграл, сводится к следующему.

Преобразуем нелинейные члены уравнений (1)–(2) с учётом известных формул дифференцирования произведения и уравнения неразрывности (3) как

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial uv}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2}, \\ u \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial uv}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{v^2}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

С учётом выражений для нелинейных членов в виде (5) каждое из уравнений системы (1)–(3) представляется в дивергентном виде

$$\frac{\partial P_i}{\partial x} + \frac{\partial Q_i}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

где  $P_i$  и  $Q_i$  есть некоторые комбинации неизвестных.

Уравнение неразрывности (3) изначально имеет вид (6), а для уравнений (1)–(2) нужные представления следующие:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{p}{\rho} \right) + \frac{\partial uv}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 + \frac{p}{\rho} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Известно, что решение уравнения неразрывности (3) задаётся выражениями [1–3]

$$u = \frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad (8)$$

где  $\Psi_1(x, y)$  представляет функцию тока, хорошо известную в гидромеханике величину.

Аналогично можно построить решение всякого уравнения вида (6). В частности, решения уравнений (7) можно представить в виде

$$\begin{aligned} u^2 + \frac{p}{\rho} &= \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y}, \quad uv = -\frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial x}, \\ uv &= \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial y}, \quad v^2 + \frac{p}{\rho} = -\frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\Psi_{1,2}$  и  $\Psi_{1,3}$  представляют некоторые функции переменных  $x$  и  $y$ .

Обозначения этих функций соответствуют названиям, которые были предложены в [6–8]. В указанных работах эти функции были названы псевдофункциями тока первого порядка с номерами 2 и 3 соответственно.

Из уравнений (9) следуют соотношения

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{(u^2 + v^2)}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x} \right), \quad u^2 - v^2 = \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial x}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Psi_{1,3}}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_{1,2}}{\partial x} = 0.$$

Последнее из уравнений (10) представляет уравнение вида (6), и его решение можно представить как

$$\Psi_{1,2} = \frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial y}, \quad \Psi_{1,3} = -\frac{\partial \Psi_{2,1}}{\partial x}, \quad (11)$$

где  $\Psi_{2,1}$  есть псевдофункция тока второго порядка с номером 1. Она представляет некоторую функцию переменных  $x$  и  $y$ . Вводя эту функцию в качестве нового ассоциированного неизвестного и используя для неё более простое обозначение  $\Psi_2$ , из (9) получаем определяющие соотношения в виде

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{U^2}{2} - d, \quad (12)$$

$$u^2 - v^2 = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}, \quad (13)$$

$$uv = -\frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x \partial y}. \quad (14)$$

В уравнениях (12)–(14)  $p_0$  есть аддитивная постоянная давления;  $U = \sqrt{u^2 + v^2}$  – модуль вектора скорости;  $\Psi_2$  – новое ассоциированное неизвестное, возникающее при интегрировании; величина  $d$  в правой части (12) есть приведённая плотность вихревой энергии, вычисляемая по формуле

$$d = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} \right). \quad (15)$$

Если выполнены (12)–(14), то исходные уравнения Эйлера (1)–(2) также будут удовлетворены. Соотношения (12)–(14) представляют первый интеграл уравнений Эйлера для случая 2D установившегося движения идеальной несжимаемой среды. Уравнения (12)–(14) имеют нулевой порядок производных относительно основных неизвестных  $u$ ,  $v$ ,  $p$  и значит, решение этих уравнений сводится к более простой математической задаче. Именно уравнения (12)–(14) вместе с уравнением неразрывности (3) возьмём в качестве основных для дальнейшего решения задачи.

Задачу будем рассматривать в безразмерных переменных при следующем выборе масштабов. В нашем случае специфика задачи подсказывает выбрать для координат  $x$  и  $y$  разные масштабы. В качестве масштаба координаты  $y$  возьмём  $H$ , в качестве масштаба координаты  $x$  – величину  $L$ , масштабом продольной скорости выберем величину  $U_0$ , а масштабом поперечной скорости – величину  $kU_0$ , где  $k = \frac{H}{L}$ . В качестве масштаба давления полагаем  $\rho U_0^2$ . Для всех безразмерных величин сохраним те же обозначения, что и для соответствующих им размерным величинам.

С учётом указанного выбора масштабов область течения в нашем случае будет задаваться неравенствами  $-1 < x < 1$  и  $-1 < y < 1$ .

Кроме того, некоторые из определяющих уравнений несколько изменят свой вид. Так с учётом выбора масштабов уравнения (12) и (13) будут иметь вид

$$p - p_0 = -\frac{U^2}{2} - d, \quad (16)$$

$$u^2 - k^2 v^2 = \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} - k^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2}. \quad (17)$$

По той же причине выражение для модуля скорости примет вид  $U = \sqrt{u^2 + k^2 v^2}$ , а уравнение (15) должно быть записано как

$$d = -\frac{1}{2} \left( k^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial y^2} \right). \quad (18)$$

Граничные условия зададим следующим образом. На ограничивающих поверхностях считаем выполненными условия непротекания [2–4]. Для нашего случая они сводятся к равенству нулю поперечной составляющей скорости вдоль границ канала при  $y = \pm 1$ . Таким образом, потребуем выполнения равенств

$$v(x, \pm 1) = 0. \quad (19)$$

Будем считать, что на входе в канал в сечении  $x = -1$  скорость имеет только продольную составляющую, тогда как поперечная составляющая равна нулю:

$$v(-1, y) = 0. \quad (20)$$

Считаем также, что на концах канала при  $x = \pm 1$  перепад давления задан. Пусть в безразмерных переменных его значение равно величине  $\theta$ , где  $\theta$  представляет заданный положительный параметр,  $\theta = \Delta p / (\rho U_0^2)$ . Тогда данное граничное условие задаётся равенством

$$p(-1, y) - p(1, y) = \theta. \quad (21)$$

Таким образом, в рамках рассматриваемой постановки задача сводится к решению уравнений (14), (16)–(17), (3) при трёх граничных условиях (19)–(21). Величины  $k$  и  $\theta$  представляют изначально заданные положительные параметры.

### 3. Решение определяющих уравнений

В уравнениях (14), (16)–(17) отсутствуют производные основных неизвестных  $u$ ,  $v$ ,  $p$ . То есть по отношению к этим неизвестным имеем чисто алгебраические уравнения.

Предлагается подход к решению, который был использован автором в работах [9, 10].

На первом этапе зададим общий вид выражений для  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  так, чтобы заведомо удовлетворить и уравнению неразрывности (3), и граничным условиям (19)–(20). На втором этапе уточним полученные выражения, чтобы удовлетворить уравнениям (14), (17). На последних этапах составим выражение для  $p - p_0$  в соответствии с равенством (16) и удовлетворим граничному условию (21). Таким образом, всё последующее решение можно представить, как решение отдельных более простых задач.



### 3.1. Первый этап

Чтобы изначально удовлетворить уравнению неразрывности (3), введём функцию тока  $\Psi_1$ . Тогда для неизвестных  $u$  и  $v$  справедливы соотношения (8).

Функцию тока зададим в виде разложения по степеням  $x^n y^m$ , где показатели степеней ограничены неравенством  $0 \leq n + m \leq N$ . Таким образом, положим

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} a_{nm} x^n y^m, \quad (22)$$

где  $a_{nm}$  представляют некоторые, пока не определённые коэффициенты.

Предварительный анализ показывает, что нетривиальные решения получаются уже, начиная с пятого приближения  $N \geq 5$ . В дальнейшем полагаем  $N = 5$  и будем искать неизвестное  $\Psi_1(x, y)$  в виде многочлена пятой степени относительно  $x^n y^m$ .

Без учёта аддитивной постоянной  $a_{00}$ , значение которой произвольно, на данном этапе имеем 20 неопределённых коэффициентов. При этом  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , вычисленные согласно (8), представляют многочлены четвёртой степени относительно  $x^n y^m$ , и они заведомо удовлетворяют уравнению неразрывности (3).

### 3.2. Второй этап

Подберём коэффициенты  $a_{nm}$  так, чтобы удовлетворить граничному условию (19). Рассмотрим выражение для поперечной скорости, согласно второму из (8) и с учётом (22). Получаем выражение

$$v = -(a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + 3a_{30}x^2 + 2a_{21}xy + a_{12}y^2 + 4a_{40}x^3 + 3a_{31}x^2y + 2a_{22}xy^2 + a_{13}y^3 + 5a_{50}x^4 + 4a_{41}x^3y + 3a_{32}x^2y^2 + 2a_{23}xy^3 + a_{14}y^4). \quad (23)$$

Условие (19) требует, чтобы при  $y = \pm 1$  поперечная скорость  $v$  обратилась бы в нуль. А значит, в рамках рассматриваемого приближения должно быть выполнено

$$v = (1 - y^2)(\eta_{00} + \eta_{10}x + \eta_{01}y + \eta_{20}x^2 + \eta_{11}xy + \eta_{02}y^2), \quad (24)$$

где  $\eta_{ij}$  некоторые вспомогательные коэффициенты.

Составляя равенства правых частей (23) и (24), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x^n y^m$ , получаем выражения для вспомогательных коэффициентов  $\eta_{ij}$  через основные коэффициенты  $a_{nm}$

$$\begin{aligned} \eta_{00} &= -a_{10}, & \eta_{10} &= -2a_{20}, & \eta_{01} &= -a_{11}, & \eta_{20} &= -3a_{30}, \\ \eta_{11} &= -2a_{21}, & \eta_{02} &= -a_{12} - a_{10}. \end{aligned}$$

Кроме того, в результате указанной процедуры получаются и дополнительные ограничения на коэффициенты  $a_{nm}$

$$\begin{aligned} a_{40} &= 0, & a_{31} &= 0, & a_{22} &= -a_{20}, & a_{13} &= -a_{11}, & a_{23} &= -a_{21}, \\ a_{50} &= 0, & a_{41} &= 0, & a_{32} &= -a_{30}, & a_{14} &= -a_{12} - a_{10}. \end{aligned} \quad (25)$$

Последние равенства гарантируют выполнимость граничного условия (19).

### 3.3. Третий этап

Наложим новые ограничения на  $a_{nm}$ , чтобы удовлетворить граничному условию (20). Это условие требует, чтобы при  $x = -1$  поперечная скорость  $v$  была нулевая.

Обратимся к выражению (23) с учётом (25), и положим  $x = -1$ . В результате получаем

$$v = -((a_{10} - 2a_{20} + 3a_{30}) + y(a_{11} - 2a_{21}) + y^2(a_{12} + 2a_{20} - 3a_{30}) + y^3(a_{13} + 2a_{21}) - y^4(a_{12} + a_{10})).$$

Правая часть обращается в нуль при условии, что все коэффициенты при степенях  $y^m$  будут нулевыми. Рассматривая полученные равенства как систему уравнений, получаем три новых ограничения на коэффициенты

$$a_{30} = \frac{1}{3}(2a_{20} - a_{10}), \quad a_{21} = \frac{1}{2}a_{11}, \quad a_{12} = -a_{10}. \quad (26)$$

Таким образом, из двадцати коэффициентов, которые присутствовали в выражении изначально, уже определено двенадцать. На данном этапе имеем выражения для скоростей, которые удовлетворяют и уравнению неразрывности, и граничным условиям (19)–(20). Эти выражения следующие

$$u = a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \frac{1}{2}a_{11}x^2 - 2a_{10}xy + 3a_{03}y^2 - 2a_{20}x^2y - 3a_{11}xy^2 + 4a_{04}y^3 + \frac{2}{3}(a_{10} - 2a_{20})x^3y - \frac{3}{2}a_{11}x^2y^2 + 5a_{05}y^4, \quad (27)$$

$$v = -a_{10} - 2a_{20}x - a_{11}y + (a_{10} - 2a_{20})x^2 - a_{11}xy + a_{10}y^2 + 2a_{20}xy^2 + a_{11}y^3 + (2a_{20} - a_{10})x^2y^2 + a_{11}xy^3. \quad (28)$$

Введём ещё одно предположение. Будем считать, что в правой части выражения (27) для  $u$  первое слагаемое равно единице, то есть  $a_{01} = 1$ . Это предположение соответствует тому, что в размерных единицах первое слагаемое совпадает с величиной  $U_0$ , выбранной в качестве масштаба продольной скорости.

### 3.4. Четвёртый этап

На этом этапе нужно обеспечить выполнимость уравнений (14), (17), которые связывают основные неизвестные  $u$ ,  $v$  и производные ассоциированного неизвестного  $\Psi_2$ . Ассоциированное неизвестное  $\Psi_2(x, y)$ , так же как и функцию тока  $\Psi_1(x, y)$ , представляем в виде разложения по степеням

$$\Psi_2(x, y) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} b_{nm} x^n y^m, \quad (29)$$

где  $b_{nm}$  есть некоторые, пока не определённые коэффициенты. Считаем, что  $N = 5$  и ограничиваемся рассмотрением в правой части (29) степеней не выше пятой  $0 \leq n + m \leq 5$ .

Неизвестное  $\Psi_2(x, y)$  полностью определено, если все коэффициенты  $b_{nm}$  будут найдены. Обратимся к уравнениям (14), (17) и найдём разложения всех членов уравнений по степеням  $x^n y^m$ . Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x^n y^m$  в левых и правых частях, получаем неоднородные системы уравнений относительно неизвестных  $b_{nm}$ . Для  $n + m = 2$  и  $n + m = 3$  имеем решения только при условии выполнимости условий совместности. Эти условия задаются следующими

тремя уравнениями

$$\begin{aligned} 6a_{03}a_{10} - 4k^2a_{20} + 2(1 + k^2)a_{10} + k^2a_{11}a_{10} &= 0, \\ 6a_{03}a_{20} + 2a_{20} - (2 - k^2)a_{11}a_{10} - k^2a_{20}a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$12a_{04}a_{10} + 2(1 + k^2)a_{02}a_{10} - 4k^2a_{20}a_{02} + 3a_{03}a_{11} + 3a_{11} - 2k^2a_{20}a_{10} + \frac{k^2}{2}a_{11}^2 = 0.$$

Если выполнены соотношения (30), то коэффициенты  $b_{nm}$  находятся однозначно за исключением  $b_{20}$ , который может быть выбран произвольно. Вычисления приводят к следующим выражениям

$$\begin{aligned} b_{02} &= k^2b_{20} + \frac{1}{2}(1 - k^2a_{10}^2), \quad b_{11} = a_{10}, \\ b_{30} &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{k^2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{2k^2}a_{11} + 2a_{20}a_{10} \right), \quad b_{21} = a_{20} + \frac{1}{2}a_{11}a_{10}, \\ b_{12} &= a_{02}a_{10} + \frac{1}{2}a_{11}, \quad b_{03} = \frac{1}{3} \left( 2a_{02} - \frac{k^2}{2}a_{11}a_{10} + k^2a_{20} \right), \\ b_{40} &= \frac{1}{3}a_{20}^2 + \frac{1}{3}a_{20}a_{10} - \frac{1 + 2k^2}{12k^2}a_{10}^2 + \frac{1}{6k^2}a_{20}a_{02} - \frac{1}{24k^2}(a_{11}^2 + a_{11}), \\ b_{31} &= \frac{1}{3} \left( 2a_{20} + 2a_{20}a_{11} - a_{10} + \frac{1}{2}a_{11}a_{10} \right), \\ b_{22} &= \frac{1}{4}(4a_{20}a_{02} - 2a_{10}^2 + a_{11} + a_{11}^2), \quad b_{13} = \frac{1}{3}(2a_{11}a_{02} - a_{10} + 3a_{03}a_{10}), \\ b_{04} &= \frac{1}{2} \left( a_{03} + \frac{2}{3}a_{02}^2 + \frac{k^2}{3}a_{20}a_{02} + \frac{k^2}{6}a_{10}^2 - \frac{k^2}{12}a_{11}^2 + \frac{k^2}{12}a_{11} \right), \\ b_{50} &= \frac{2}{5}a_{20}^2 - \frac{1 + 2k^2}{10k^2}a_{20}a_{10} + \frac{1}{15k^2}a_{20}a_{02} - \frac{1}{30k^2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{40k^2}a_{11}^2, \\ b_{41} &= \frac{3}{4}a_{20}a_{11} - \frac{1}{4}a_{11}a_{10}, \quad b_{32} = \frac{2}{3}a_{20}a_{02} - \frac{1}{3}a_{02}a_{10} - a_{20}a_{10} + \frac{1}{4}a_{11}^2, \\ b_{23} &= a_{03}a_{20} - a_{11}a_{10} + \frac{1}{3}(a_{02}a_{11} - a_{20}), \\ b_{14} &= a_{04}a_{10} + \frac{3}{4}a_{03}a_{11} - \frac{1}{2}a_{02}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11}, \\ b_{05} &= \frac{k^2}{10}(a_{03}a_{20} + a_{11}a_{10}) + \frac{1}{5}(3a_{03}a_{02} + 2a_{04}) + \frac{k^2}{30}(a_{02}a_{11} - a_{20}). \end{aligned} \quad (31)$$

Выражения (31) полностью определяют неизвестное  $\Psi_2(x, y)$  в рассматриваемом приближении. Уравнения (14), (17) также удовлетворены.

### 3.5. Пятый этап

Осталось удовлетворить граничному условию (21). Рассмотрим правую часть уравнения (16). В правой части присутствуют вторые производные неизвестного  $\Psi_2$ , поскольку через них определяется величина  $d$  согласно (18). В рассматриваемом приближении неизвестное  $\Psi_2$  определялось с точностью до пятых степеней, а значит, для неизвестного  $p$  должны получить разложение с точностью до третьих степеней. То есть неизвестное  $p$  будет определено равенством:

$$p = p_{00} + p_{10}x + p_{01}y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02}y^2 + p_{30}x^3 + p_{21}x^2y + p_{30}x^3 + p_{12}xy^2 + p_{03}y^3, \quad (32)$$

где  $p_{00}$  является произвольно выбираемой аддитивной постоянной давления, а остальные коэффициенты  $p_{nm}$  должны быть определены. Рассматривая разложения по степеням для всех членов правой части (16), приходим к следующим выражениям

$$\begin{aligned} p_{10} &= 2a_{02}a_{10} - a_{11}, & p_{01} &= 2k^2a_{20} - k^2a_{11}a_{10}, \\ p_{20} &= 2a_{20}a_{02} - a_{10}^2 - \frac{1}{2}(a_{11} + a_{11}^2), \\ p_{11} &= 2k^2a_{20} + a_{10} \left( 1 - k^2 + 3a_{03} - \frac{k^2}{2}a_{11} \right), \\ p_{02} &= k^2 \left( a_{10}^2 + 2a_{20}a_{02} + \frac{1}{2}(a_{11} - a_{11}^2) \right), \\ p_{30} &= -\frac{1}{2}a_{11}^2 - 2a_{20}a_{10} + \frac{2}{3}a_{02}(2a_{20} - a_{10}), \\ p_{21} &= a_{20} \left( 1 + 3a_{03} + \frac{k^2}{2}a_{11} \right) - \left( 1 + \frac{k^2}{2} \right) a_{11}a_{10}, \\ p_{12} &= \frac{3a_{11}}{2}(1 + a_{03}) + a_{02}a_{10}(1 - k^2) + 6a_{04}a_{10} + k^2 \left( 2a_{20}a_{02} + a_{20}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11}^2 \right), \\ p_{03} &= 2k^2 \left( a_{11}a_{10} + a_{03}a_{20} + \frac{1}{3}a_{02}a_{11} - \frac{1}{3}a_{20} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Условие (21) в нашем случае сводится к равенству

$$p_{10} + p_{30} + p_{11}y + p_{12}y^2 = -\frac{\theta}{2}. \quad (34)$$

Это равенство должно выполняться тождественно при любых  $-1 < y < 1$ . Для этого необходимо и достаточно

$$p_{10} + p_{30} = -\frac{\theta}{2}, \quad p_{11} = 0, \quad p_{12} = 0. \quad (35)$$

Выражения (33) позволяют уточнить левые части (35). В результате несложных вычислений приходим к трём уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}(a_{02}a_{10} + a_{20}a_{02}) - a_{11} - 2a_{20}a_{10} - \frac{1}{2}a_{11}^2 &= -\frac{\theta}{2}, \\ 3a_{03}a_{10} + 2k^2a_{20} - \frac{k^2}{2}a_{11}a_{10} + (1 - k^2)a_{10} &= 0, \\ 6a_{04}a_{10} + a_{02}a_{10} + \frac{3}{2}a_{11}(a_{03} + 1) + k^2 \left( 2a_{20}a_{02} + a_{20}a_{10} - a_{02}a_{10} - \frac{1}{4}a_{11}^2 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения (36) вместе с уравнениями (30), определяющими условия совместности, представляют дополнительные ограничения на оставшиеся коэффициенты  $a_{ij}$ . Если они выполнены, то все уравнения и граничные условия удовлетворены и задача полностью решена.

Уравнения (30), (36) образуют систему шести нелинейных уравнений с шестью неизвестными  $a_{10}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, a_{03}, a_{04}$ . Для завершения решения задачи осталось разрешить эту систему и найти указанные определяющие коэффициенты. Все остальные интересующие нас величины, включая и основные гидродинамические характеристики  $u(x, y), v(x, y), p(x, y)$ , могут быть найдены через определяющие коэффициенты по приведённым выше формулам. Для  $u(x, y), v(x, y)$  такими формулами являются (27), (28), а для  $p(x, y)$  это формулы (32) с учётом (33).

Аналитическое решение системы (30), (36) затруднительно, поэтому решение было реализовано численно с помощью программ стандартного пакета *Maple*.

#### 4. Результаты

Решение было реализовано для случая  $\theta = 0,1$  и  $k = 0,5$ . Выбранные значения параметров соответствуют случаю сравнительно небольшого перепада давления и относительно малой протяжённости канала, для которого  $L = 2H$ .

Численное решение системы приводит к следующим результатам. Значения шести определяющих коэффициентов получились как

$$\begin{aligned} a_{10} &= \pm 4,113; & a_{20} &= \mp 28,789; & a_{11} &= -30,00; \\ a_{02} &= \mp 5,567; & a_{03} &= -0,333; & a_{04} &= \pm 2,144. \end{aligned}$$

Имеем два набора коэффициентов, а значит, имеем два различных решения. Для обоих решений коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{03}$  совпадают, а значения остальных отличаются знаком.

Ниже представлены таблицы значений основных гидродинамических характеристик, как функции координат  $x$  и  $y$ , которые соответствуют каждому из этих решений. Структура таблиц следующая. Каждая вертикальная колонка таблицы соответствует определённому значению координаты  $x$ , начиная с  $x = -0,8$ . Горизонтальные строки таблиц соответствуют значениям  $y$ , начиная с  $y = -0,9$ . Первыми представлены характеристики для решения 1, для которого выбирались верхние знаки коэффициентов  $a_{ij}$ . В обозначении характеристик для решения 1 и решения 2 добавляется соответствующий верхний индекс.

Таблица 1

Решение 1: Профиль продольной скорости  $u^{(1)}(x, y)$

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	-36,77	-18,65	3,96	16,85	5,81
-0,6	-9,11	-1,22	5,47	1,49	-22,64
-0,3	7,82	8,07	4,02	-9,06	-35,91
0,0	15,40	10,60	1,00	-13,40	-32,60
0,3	15,03	7,77	-2,20	-10,14	-11,33
0,6	8,08	0,97	-4,19	2,10	29,30
0,9	-4,04	-8,42	-3,58	24,71	90,66

Таблица 2

Решение 1: Профиль поперечной скорости  $v^{(1)}(x, y)$ 

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	-3,06	-6,36	-5,91	-1,71	6,24
-0,6	-9,15	-17,97	-14,15	2,30	31,38
-0,3	-11,37	-20,63	-11,93	14,73	59,36
0,0	-10,69	-17,28	-4,11	28,79	81,43
0,3	-8,09	-10,81	4,45	37,66	88,85
0,6	-4,54	-4,14	8,88	34,55	72,85
0,9	-1,01	-0,20	4,35	12,65	24,71

Таблица 3

Решение 1: Давление  $p^{(1)}(x, y) - p_0$ , как функция координат

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	-244,63	-74,21	-22,96	-84,82	-253,76
-0,6	-190,41	-55,52	-16,11	-66,13	-199,54
-0,3	-134,06	-34,71	-7,15	-45,33	-143,20
0,0	-79,53	-15,72	0,00	-26,33	-88,67
0,3	-30,74	-2,46	1,41	-13,08	-39,88
0,6	8,37	1,12	-6,85	-9,49	-0,76
0,9	33,89	-8,90	-28,71	-19,51	24,76

Таблица 4

Решение 2: Профиль продольной скорости  $u^{(2)}(x, y)$ 

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	-4,04	-8,42	-3,58	24,71	90,66
-0,6	8,08	0,97	-4,19	2,10	29,30
-0,3	15,03	7,77	-2,20	-10,14	-11,33
0,0	15,40	10,60	1,00	-13,40	-32,60
0,3	7,82	8,07	4,02	-9,06	-35,91
0,6	-9,11	-1,22	5,47	1,49	-22,64
0,9	-36,77	-18,65	3,96	16,85	5,81

Таблица 5

Решение 2: Профиль поперечной скорости  $v^{(2)}(x, y)$ 

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	1,01	0,20	-4,35	-12,65	-24,71
-0,6	4,54	4,14	-8,88	-34,55	-72,85
-0,3	8,09	10,81	-4,45	-37,66	-88,85
0,0	10,69	17,28	4,11	-28,79	-81,43
0,3	11,37	20,63	11,93	-14,73	-59,36
0,6	9,15	17,97	14,15	-2,30	-31,38
0,9	3,06	6,36	5,91	1,71	-6,24

Таблица 6

Решение 2: Давление  $p^{(2)}(x, y) - p_0$ , как функция координат

$y \setminus x$	-0,8	-0,4	0,0	0,4	0,8
-0,9	33,89	-8,90	-28,71	-19,51	24,76
-0,6	8,37	1,12	-6,85	-9,49	-0,76
-0,3	-30,74	-2,46	1,41	-13,08	-39,88
0,0	-79,53	-15,72	0,00	-26,33	-88,67
0,3	-134,06	-34,71	-7,15	-45,33	-143,20
0,6	-190,41	-55,52	-16,11	-66,13	-199,54
0,9	-244,63	-74,21	-22,96	-84,82	-253,76

## 5. Анализ результатов

Представленные решения, как функции переменных  $x$  и  $y$ , обладают симметрией. При переходе от одного решения к другому и при одновременной замене  $y$  на  $-y$ , продольная скорость и давление не изменяются, тогда как поперечная скорость изменяет знак на противоположный

$$u^{(1)}(x, -y) = u^{(2)}(x, y), \quad p^{(1)}(x, -y) = p^{(2)}(x, y), \quad v^{(1)}(x, -y) = -v^{(2)}(x, y).$$

Например, для  $x = -0,4$  и  $y = \pm 0,6$  по табл. 1 находим значение продольной скорости для первого решения  $u^{(1)}(-0,4; 0,6) = 0,97$ . По табл. 4 для второго решения с противоположным знаком координаты  $y$  определяем  $u^{(2)}(-0,4; -0,6) = 0,97$ . Имеем совпадающие значения  $u^{(1)}(-0,4; 0,6) = u^{(2)}(-0,4; -0,6)$ . Для поперечной скорости для первого решения по табл. 2 находим  $v^{(1)}(-0,4; 0,6) = -4,14$ , тогда как для второго решения по табл. 5 получаем  $v^{(2)}(-0,4; -0,6) = 4,14$ . Указанные значения отличаются знаком. Для давления в случае первого решения из табл. 3 находим  $p^{(1)}(-0,4; 0,6) - p_0 = 1,12$ , тогда как для второго решения из табл. 6 получаем такое же значение  $p^{(2)}(-0,4; -0,6) - p_0 = 1,12$ .

Таким образом, оба решения в некотором смысле симметричны по отношению друг к другу и для выявления качественных особенностей достаточно проанализировать одно из них, например первое, которое представлено табл. 1, 2, 3.

Рассмотрим значения продольной скорости  $u^{(1)}(x; y)$  по табл. 1. Основным направлением движения является движение слева направо. При движении в этом направлении продольная скорость положительна, а при движении в обратном – отрицательна. Из табл. 1 следует, что положительное направление движения имеет основная масса жидкости, сосредоточенной в области  $-0,3 < y < 0,6$ . И лишь в области вблизи границ  $y \pm 1$  продольная скорость отрицательна и движение происходит в обратном направлении. Однако при  $x > 0$  направление движения изменяется. В области, прилегающей к центральной линии  $y = 0$ , движение происходит в обратном направлении, тогда как в области, прилегающей к границам  $y \pm 1$ , движение происходит в основном направлении при положительной продольной скорости. Получается, что при движении вдоль всего канала  $-1 < x < 1$  существуют значительные области движения в обоих направлениях. Обнаруживаются довольно интенсивные возвратные движения, и основное направление движения теряется.

Рассмотрим значения поперечной скорости  $v^{(1)}(x; y)$  по табл. 2. При этом не забудем, что масштабы поперечной и продольной скоростей отличаются в  $k$  раз. В нашем случае  $k = 0,5$  и для того, чтобы сравнение поперечной и продольной скоростей было адекватным, нужно все значения табл. 2 умножить на  $0,5$ . С учётом этого заключаем, что по модулю поперечная скорость меньше продольной, но она ненулевая. Движение во всей области значительно отличается от одномерного. Расчёты показывают, что одномерное движение имело бы место только в случае  $\theta = 0$ . Для этого случая система (30), (36) имела бы решения  $a_{10} = a_{20} = a_{11} = 0$ , и основные гидродинамические характеристики совпадали бы с (4). Однако для нашего случая  $\theta = 0,1$ , и даже это сравнительно небольшое отличие параметра  $\theta$  от нуля исключает наличие одномерного движения. Так что в рамках рассматриваемой постановки движение двумерно. Кроме того, из табл. 2 следует, что существуют значительные области, как с положительными, так и с отрицательными значениями продольной скорости  $v(x; y)$ . Значит, имеются зоны с интенсивными вихревыми движениями.

Значения, приведённые в табл. 3, подтверждают отмеченные выше закономерности. Из табл. 3 следует, что если говорить об области течения в целом, то величина  $p(x; y) - p_0$  изменяется как по знаку, так и значительно изменяется по абсолютной величине. Этот факт соответствует наличию и интенсивных возвратных течений, и интенсивных вихревых движений.

## Литература

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Часть 2. — Наука, 1970. — 568 с.
2. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Часть 1. — Физматлит, 1963. — 584 с.
3. Валландер С. В. Лекции по гидроаэромеханике. — ЛГУ им. А. А. Жданова, 1978. — 295 с.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — Наука, 2003. — 846 с.
5. Lodyzhenskaya O. A. The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid. — Gordon and Breach, 1969. — 288 p.
6. Koptev A. V. Structure of Solution of the Navier — Stokes Equations // Вестник национального исследовательского ядерного университета МИФИ. — 2014. — Т. 6, № 3.
7. Koptev A. V. Первый интеграл уравнений движения несжимаемой жидкости // Материалы 11-го Всероссийского Съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. Казань. — 2015. — 4480 с.
8. Koptev A. V. Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern // Handbook on Navier — Stokes Equations: Theory and Applied Analysis / Ed. by D. Campos. — New York, 2017. — 489 p.



9. *Koptev A. V. Nonlinear Effects in Poiseuille Problem // Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys.* — 2013. — Vol. 6, No 3.
10. *Контев А. В. Теоретическое исследование обтекания цилиндра потоком идеальной несжимаемой среды при наличии экранирующего эффекта // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С. О. Макарова.* — 2016. — Т. 36, № 2.

UDC 532.51:517.95

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154

## An Inviscid Analogue of the Poiseuille Problem

A. V. Koptev

*Mathematical Department  
Institute of Water Way Transport  
Admiral Makarov State University of maritime and inland shipping  
5/7 Dvinskaya St., Saint-Petersburg, 198035, Russian Federation*

We consider a plane problem of steady-state motion of an ideal incompressible fluid flow in a channel between two parallel planes under the action of a given pressure drop. The problem is considered in Cartesian coordinates.

The formulation is analogous to the well-known Poiseuille problem with the difference that an ideal fluid is considered instead of a viscous one. The non-flow condition is set as the boundary ones on the channel walls. So, that the velocity vector is parallel to the bounding surfaces over the channel walls. The pressure drop is set as a given positive quantity.

An approach proposed based on the use of the first integral of the Euler equations while preserving nonlinear terms. We represent the derivation of main relations for the case of 2D steady-state motion of an incompressible fluid. The solution of equations for hydrodynamic characteristics in the form of expansions in powers of the Cartesian coordinates was found out by analytical way. The standard programs of Maple package are used to determine the coefficients of decomposition for some values of defining parameters.

As a result expressions for hydrodynamic characteristics are obtained and their features investigated. In particular, zones of recurrent motions and zones of intense vortex motion of fluid were revealed.

**Key words and phrases:** steady-state motion, ideal incompressible fluid, pressure drop, Euler equations, integral, expansion in powers

## References

1. L. I. Sedov, *Continuum Mechanics. Part 2*, Nauka, 1970, in Russian.
2. N. E. Kochin, I. A. Kibel, N. B. Rose, *Theoretical Hydromechanics. Part 1*, Fismatlit, 1963, in Russian.
3. S. V. Vallander, *Lectures on Hydroaeromechanics*, LGU im. A. A. Zhdanova, 1978, in Russian.
4. L. G. Loitsyanskiy, *Mechanics of Fluid and Gas*, Nauka, 2003, in Russian.
5. O. A. Lodyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Fluid*, Gordon and Breach, 1969.
6. A. V. Koptev, *Structure of Solution of the Navier — Stokes Equations*, *Bulletin of the National Research Nuclear University MEPI* 6 (3).
7. A. V. Koptev, *First Integral of Motion of an Incompressible Fluid*, 2015, in Russian.
8. A. V. Koptev, *Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern*, New York, 2017.
9. A. V. Koptev, *Nonlinear Effects in Poiseuille Problem*, *Journal of Siberian Federal University, Math. and Phys.* 6 (3).

10. A. V. Koptev, Theoretical Research of the Flow around Cylinder of an Ideal Incompressible Medium in the Presence of a Shielding Effect, Bulletin of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping 36 (2), in Russian.

© Коптев А. В., 2018

**Для цитирования:**

*Коптев А. В.* Невязкий аналог задачи Пуазейля // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 140–154. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154.

**For citation:**

Koptev A. V. An Inviscid Analogue of the Poiseuille Problem, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 140–154. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-140-154. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Коптев Александр Владимирович** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики Института водного транспорта Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова (e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, тел.: +7 (921)3524901)

**Information about the authors:**

**Koptev A. V.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Mathematical Department of Institute of Water Way Transport of Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping (e-mail: Alex.Koptev@mail.ru, phone: +7 (921)3524901)



UDC 330.4, 519.83, 519.85, 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-155-166

## Construction of the Mathematical Model of Pricing for Telecommunication Services with Allowance for Congestion in Networks

S. A. Vasilyev, Haroun Hassan Salih

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

This paper considers a model of dynamic pricing in the telecommunications market incomplete competition and taking into account overloads in multiservice networks. The model consists in the use of mathematical modeling methods, game theory and queueing theory. It is assumed that telecommunication companies agree on the rules of incoming and outgoing traffic charging in pairs, and this charging is built as a function of the tariffs that companies offer their subscribers for service. Companies are limited the agreement on mutual rules of reciprocal proportional charging for access traffic at first, which subsequently determine the tariffs for the multiservice network users. The reciprocity of the rules means that companies are subject to the same rules for the entire time interval during which the agreement is in force. Taking into account imperfect competition in the telecommunications market and using profit optimization method for each company the equilibrium tariffs and the volume of services are found with subject to congestion in multi-service networks.

**Key words and phrases:** queueing theory, game theory, optimization methods, probability theory, industrial market theory, economic and mathematical modeling

### Introduction

Methods of mathematical modeling in the economy of telecommunications are being actively developed [1–7]. Jean Tirole considers the impact of telecommunication technologies on competition in services and goods markets [8–12]. In 2014 he was awarded the Nobel Memorial Prize in Economic Sciences for his analysis of market power and regulation.

In paper [13], Se-Hak Chuna considered optimal access charges for the provision of telecommunication network, mobile commerce, and cloud services. Using theoretical analysis, Se-Hak Chuna investigated, when a regulator can set rational access pricing, considering the characteristics of access demand. Se-Hak Chuna demonstrated that optimal access prices depend on whether the final products or services are independent strategies or substitute strategies. The results have applications for policy makers setting optimal access charges that maximize social welfare.

In this article a mathematical model of pricing for telecommunications services with overloads in networks is built. It generalizes the model that was built earlier [14, 15].

It is assumed that telecommunications companies agree in pairs on the rules of charging for access traffic to the network of the other company, and it is considered as a function of the tariffs that companies offer their consumers (subscribers) for services. Thus, these companies have contracts at the first stage by agreements on reciprocal proportional access charge rules (RPACR), which subsequently allow them to determine the subscription rates. The ambiguity of the rules means that companies are subject to the same rules for the entire time interval during which the agreement is valid.

RPACR may be seen as analogous to the regulatory policy of the state of the telecommunications industry. If telecommunication services, provided by different companies, are close substitutes, the use of RPACR by companies leads to competitive prices in

industry. However, if it is assumed that competing companies follow the policy of services differentiation, then intervention of the state is required to preclude the use by companies of monopoly power.

It is also assumed that the utility function of subscribers consists of deterministic and stochastic parts. The deterministic part allows to find a linear function of subscribers demand for telecommunications services, which has a constant price elasticity. It allows to avoid unlimited growth of consumption of telecommunication services by subscribers at aspiration the corresponding tariffs to zero and ensures the existence of a saturation point, i.e., for example, there are time limits that the subscriber uses for using telecommunication services. The Weibull distribution is used for the stochastic component of the utility function, which is convenient for further analysis. It is possible to find equilibrium tariffs and equilibrium demand for telecommunication services. This equilibrium is equilibrium in pure strategies and it always exists, and the subscription rates are calculated explicitly.

## 1. The Model of the Telecommunications Industry in the Case of Multiservice Network

Let's consider a network  $NW$  ( $NW = \bigcup_{i=1}^n NW_i$ ) consisting of  $n$  equivalent multiservice network (numbered in a certain order multiservice network  $SR = \bigcup_{s=1}^m SR_s$ ) belonging to different telecommunication companies  $T_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), and it is assumed that in between all the networking companies there are switching nodes.

Let  $t \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$  be time intervals (for example, the time period equals a week, a month or a year) equal to the length of time periods during which companies  $T_i$  independently decide on pricing for their services, and  $t_{\max}$  is the maximum planning horizon.

Let's assume that the network  $NW$  consists of a set of nodes  $J^t = \bigcup_{i=1}^{s_j} J_i^t$  and a set of channels  $L^t = \bigcup_{i=1}^{s_l} L_i^t$ , and  $NW = J^t \cup L^t$ .

In the time period  $t$  each network  $NW_i$  of the company  $T_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) is represented by the set of nodes  $J_{ij}^t$  ( $j = 1, \dots, s_i^J$ ) and channel set  $L_{ik}^t$  ( $k = 1, \dots, s_i^L$ ), numbered in a certain way, where  $J_i^t = \bigcup_{j=1}^{s_i^J} J_{ij}^t$ ,  $L_i^t = \bigcup_{k=1}^{s_i^L} L_{ik}^t$  and  $NW_i = J_i^t \cup L_i^t$ , and the total number of nodes is  $S_{NW}^J(t) = \sum_{i=1}^n s_i^J$ , and the total number of channels is  $S_{NW}^L(t) = \sum_{i=1}^n s_i^L$  for network  $NW$ .

Let  $H_{ij}^t$  be a capacity (bits/sec) of  $j$ -node ( $j = \overline{1, J_{s_i^J}^t}$ ), and  $S_{ik}^t$  a throughput (bits/sec)  $k$ -link ( $k = \overline{1, L_{s_i^L}^t}$ )  $T_i$  of network  $NW_i$  company  $T_i$  in the time period  $t$ .

Two-point connections can be established to transmit information flows between the network nodes of network  $NW$ . Each connection is characterized by a route, i.e. a set of network links  $NW$ , through which connections are established.

Let  $s = \{1, \dots, m\}$  be a set of services that offer companies for potential consumers (subscribers) during the period  $t \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$ . Let  $b$  ( $b \in (1, 2, \dots, B^t)$ ) be a set of consumers, who want to use the telecommunications services in the market.

Let's assume that the individual consumer demand function for the service  $s = \{1, \dots, m\}$  has the form:

$$D_{bs}^t(p_s^t) = \frac{r_{bs}^t - p_s^t}{2s_{bs}^t} = a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t, \quad a_{bs}^t = \frac{r_{bs}^t}{2s_{bs}^t}, \quad b_{bs}^t = \frac{1}{2s_{bs}^t}, \quad (1)$$

$D_{bs}^t(p_s^t)$  is a linear function of the price  $p_s^t$ , and  $r_{bs}^t > 0$  and  $s_{bs}^t > 0$  is positive coefficients, which are determined from the market research services  $SR$  in the period  $t$ .

A consumer  $b$  generates the traffic loading or the load using the service  $s$  in the period  $t$ . Let  $Y_{bs}^t$  be an individual traffic volume of a consumer  $b$ , and let  $Y_{bs}^t = \bar{\lambda}_{bs}^t h_{bs}^t$  be the average value of  $Y_{bs}^t$ , where the parameter  $\bar{\lambda}_{bs}^t$  is the average intensity of the flow of requests and the parameter  $h_{bs}^t$  is the average duration of service in the period  $t$ .

We assume that the average load is generated by the consumer  $b$  when using the service  $s$  in the period  $t$ , linearly depends on the corresponding demand function for this service  $s$

$$Y_{bs}^t = \bar{\lambda}_{bs}^t h_{bs}^t = \theta_s D_{bs}^t(p_s^t) = \theta_s (a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t), \tag{2}$$

where  $\theta_s$  is the proportionality factor for the  $s$  service. It links the consumer demand for telecommunication services and the amount of traffic generated by this consumer in the network.

The total network traffic volume that is created by a consumer in the period  $t$  during using the service  $s$ , is the sum of consumers network traffic volumes

$$Y_s^t = \sum_{b=1}^{B_t} Y_{bs}^t = \sum_{b=1}^{B_t} \theta_s (a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t) = \bar{A}_s^t - \bar{B}_s^t p_s^t, \tag{3}$$

$$\bar{A}_s^t = \sum_{b=1}^{B_t} \theta_s a_{bs}^t, \quad \bar{B}_s^t = \sum_{b=1}^{B_t} \theta_s b_{bs}^t,$$

where  $\bar{a}_s^t, \bar{B}_s^t$  are parameters of the function  $Y_s^t$ .

The total consumers demand for the service  $s$  during the time  $t$  is the sum of all demand functions for the service  $s$  of all:

$$D_{bs}^t(p_s^t) = \sum_{b=1}^{B^t} D_{bs}^t(p_s^t) = \sum_{b=1}^{B^t} (a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t), \tag{4}$$

$$D_{bs}^t(p_s^t) = (a_s^t - b_s^t p_s^t), \quad a_s^t = \sum_{b=1}^{B^t} a_{bs}^t, \quad b_s^t = \sum_{b=1}^{B^t} B_t b_{bs}^t,$$

where the parameters  $a_s^t \geq 0$  and  $b_s^t \geq 0$  are determined from market research of services in the period  $t$ .

We can get a link between the network traffic volume  $Y_s^t(p_s^t)$  and the demand function  $D_{bs}^t(p_s^t)$  of the service  $s$  during the period  $t$ :

$$Y_s^t(p_s^t) = Q_{bs}^t(p_s^t) \theta_s D_{bs}^t(p_s^t) = \theta_s (a_s^t - b_s^t p_s^t) = A_s^t - B_s^t p_s^t, \tag{5}$$

where  $Y_s^t(p_s^t)$  is linear price functions and  $A_s^t = \theta_s a_s^t, B_s^t = \theta_s b_s^t$  are coefficients.

We can get the network traffic volume that is associated with the consumer  $b$  ( $b = \overline{1, B^t}$ )

$$Y_b^t = \sum_{s=1}^m Y_{bs}^t = \sum_{s=1}^m \theta_s (a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t) \leq \bar{A}_b^t - \bar{B}_b^t \bar{p}^t, \tag{6}$$

$$\bar{A}_b^t = \sum_{s=1}^m \theta_s a_{bs}^t, \quad \bar{B}_b^t = \sum_{s=1}^m b_{bs}^t, \quad \bar{p}^t = \sum_{s=1}^m p_s^t, \quad \bar{B}_b^t \bar{p}^t \leq \sum_{s=1}^m \theta_s b_{bs}^t p_s^t.$$

where  $\bar{A}_b^t \geq 0, \bar{B}_b^t \geq 0$  are parameters load functions  $Y_b^t$  associated with the consumer  $b$ , and a parameter  $\bar{p}^t$  is a tariff for services  $SR$  (service package) during the time period  $t$ .

A consumer's  $b$  ( $b = \overline{1, B^t}$ ) demand for  $SR$ -services in the considered time period  $t$  has the form:

$$Q_b^t(p_b^t) = \sum_{s=1}^m D_{bs}^t(p_s^t) = \sum_{s=1}^m (a_{bs}^t - b_{bs}^t p_s^t) \leq (a_b^t - b_b^t \bar{p}^t),$$

$$a_b^t = \sum_{s=1}^m a_{bs}^t, \quad b_b^t = \sum_{s=1}^m b_{bs}^t, \quad b_b^t \bar{p}^t \leq \sum_{s=1}^m b_{bs}^t p_s^t. \tag{7}$$

Aggregating the network traffic volume  $Y_s^t(p_s^t)$  from (5) for all services  $s = \{1, \dots, m\}$ , we can get the total network traffic volume  $Y(t)$  for the period  $t$  in the form:

$$Y(t) = \sum_{s=1}^m Y_s^t(p_s^t) = \sum_{s=1}^m (a_s^t - b_s^t p_s^t) = \sum_{s=1}^m \theta_s (a_s - b_s^t p_s^t) = \bar{A}^t - \bar{B}^t \bar{p}^t,$$

$$\bar{A}^t = \sum_{s=1}^m \theta_s a_s^t, \quad \bar{B}^t \bar{p}^t \geq \sum_{s=1}^m \theta_s b_s^t p_s^t, \quad \bar{B}^t = \sum_{s=1}^m \theta_s b_s^t, \tag{8}$$

where  $\bar{A}^t \geq 0$  and  $\bar{B}^t \geq 0$  are aggregated parameters of function  $Y(t)$ , and where function of aggregated demand for services  $SR$  (service package) has the form:

$$D(t) = \sum_{s=1}^m (a_s^t - b_s^t p_s^t) = \bar{a}^t - \bar{b}^t \bar{p}^t,$$

$$\bar{a}^t = \sum_{s=1}^m a_s^t, \quad \bar{b}^t \bar{p}^t \geq \sum_{s=1}^m b_s^t p_s^t, \quad \bar{b}^t = \sum_{s=1}^m b_s^t, \tag{9}$$

where the parameters  $\bar{a}^t \geq 0$  and  $\bar{b}^t \geq 0$  are aggregated parameters of the demand function  $D(t)$ .

We can assume that for each company  $T_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) there exists a function of consumer demand for services  $SR$  (service package) during the time period  $t$ . Let  $D_{sii}$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) be a demand function of services  $SR = \bigcup_{s=1}^m SR_s$  provided by the company  $T_i$  using its  $NW_i$  network resource only, and let  $D_{sij}^t$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) be a demand function of services provided together with a network  $NW_i$  of a company  $T_i$  and a network  $NW_j$  of a company  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ). Thus, there is a question of access of one company to resources of a network of the other company.

We assume that the companies  $T_i$  and  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) agree on the charges  $\hat{a}_{ij}^t$  and  $\hat{a}_{ji}^t$ , where  $\hat{a}_{ij}^t$  is a charge, which company  $T_i$  pays the company  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) for the use of its network resources in connection with the service of  $s \in \{1, \dots, m\}$  (traffic from the network  $NW_i$  to the network  $NW_j$  or outgoing traffic for the company  $T_i$  and incoming traffic for the company  $T_j$ ), and  $\hat{a}_{ji}^t$  is a corresponding charge at which the company  $T_j$  pays the company  $T_i$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) for the use of network resources in connection with the provision of a similar service  $s \in \{1, \dots, m\}$  (traffic from the network  $NW_j$  to the network  $NW_i$  or outgoing traffic for the company  $T_j$  and incoming traffic for the company  $T_i$ ) during the time period  $t$ .

Suppose that any two companies  $T_i$  and  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) charges  $\hat{a}_{ij}^t$  and  $\hat{a}_{ji}^t$  depend on tariffs  $\bar{p}_i^t$  and  $\bar{p}_j^t$ , and  $\hat{a}_{ij}^t = a_i^t(\bar{p}_i^t, \bar{p}_j^t)$  for any ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) and  $s \in \{1, \dots, m\}$  at any time  $t \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$ .

We assume that there is the proportional dependence between  $\hat{a}_{ij}^t$  and  $\bar{p}_i^t$ , then  $\hat{a}_{ij}^t = a_i^t \bar{p}_i^t$ , where the proportionality factor is  $0 \leq a_i^t \leq 1$  for  $i \in \{1, \dots, n\}$  and  $s \in \{1, \dots, m\}$ .

## 2. Multiservice Demand Function

Suppose that each consumer can use telecommunication multiservice network of companies  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) at any time period  $t$ . Let's assume that each consumer has individual tastes and preferences in relation to these services  $SR$ . We assume that the consumer  $b$  ( $b \in \{1, \dots, B^t\}$ ), which is ready to choose one service from the set  $s \in \{1, \dots, m\}$  of the company  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ), has the following utility function:

$$u_{ibs}^t = U_{ibs}^t e^{\eta_s \epsilon_{ibs}^t} = U_{bs}^t(Q_{bs}^t(p_{is}^t), p_{is}^t) e^{\eta_s \epsilon_{ibs}^t}, \tag{10}$$

$$U_{ibs}^t = [r_{bs}^t - s_{bs}^t Q_{bs}^t(p_s^t)] Q_{bs}^t(p_s^t) - p_s^t Q_{bs}^t(p_s^t),$$

where the random parameter  $\epsilon_{ibs}^t$  characterizes individual tastes and preferences of the consumer. Let's consider that  $\epsilon_{ibs}^t$  has a Weibull distribution. The value of  $\eta_s$  gives the characteristic measures of the dispersion of tastes and preferences of the consumers, that is,  $\eta_s$  allows us to estimate the substitutability telecommunication services  $s \in \{1, \dots, m\}$  that provide companies  $T_i$  and  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ). The services  $s \in \{1, \dots, m\}$  of companies become total substitutes with  $\eta_s \rightarrow 0$ , and it is total complementary with  $\eta_s \rightarrow \infty$ .

Let's assume that each consumer  $b$  ( $b \in \{1, \dots, B^t\}$ ) chooses the company  $T_i$  and rejects the company  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, t\}, i \neq j$ ) at the period  $t$  then there is inequality

$$U_{ibs}^t e^{\eta_s \epsilon_{ibs}^t} \geq U_{jbs}^t e^{\eta_s \epsilon_{jbs}^t}.$$

Thus, the probability  $P_{ibs}^t$  that the consumer  $b$  gives preference to the company  $T_i$  and rejects the company  $T_j$  ( $i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$ ) equals to

$$P_{ibs}^t = P\{U_{ibs}^t e^{\eta_s \epsilon_{ibs}^t} > U_{jbs}^t e^{\eta_s \epsilon_{jbs}^t}\}. \tag{11}$$

Since the values  $\epsilon_{ibs}^t$  are independent and have a Weibull distribution we have that

$$P_{ibs}^t = \frac{1}{1 + \left(\frac{U_{jbs}^t}{U_{ibs}^t}\right)^{\frac{1}{\eta_s}}} = \frac{(r_{bs}^t p_{is}^t)_s^\tau}{(r_{bs}^t p_{is}^t)_s^\tau + (r_{bs}^t - p_{js}^t)_s^\tau}, \tag{12}$$

where  $\tau_s = 2/\eta_s$ . Similarly for the company  $T_j$  we have the same

$$P_{jbs}^t = \frac{1}{1 + \left(\frac{U_{jbs}^t}{U_{ibs}^t}\right)^{\frac{1}{\eta_s}}} = \frac{(r_{bs}^t p_{js}^t)_s^\tau}{(r_{bs}^t p_{js}^t)_s^\tau + (r_{bs}^t - p_{is}^t)_s^\tau}. \tag{13}$$

Thus, each consumer chooses one service  $s$  in the company  $T_i$  with probability  $p_{ibs}$  and in the company  $T_j$  with probability  $p_{jbs}$ .

We can generalize this approach for the case when the consumer chooses one company  $T_i$  from the set of companies  $\{T_1, \dots, T_n\}$  to obtain the service  $s$ , and we can get the

probability in case the consumer gives preference to the company  $T_i$ :

$$P_{ibs}^t = \frac{(r_{bs}^t - p_{is}^t)^\tau}{\sum_{j=1}^n (r_{bs}^t - p_{js}^t)^\tau}. \tag{14}$$

The probability that the consumer chooses one company  $T_i$  from a set of companies  $\{T_1, \dots, T_n\}$  to receive service package  $SR$  has the form:

$$P_{ib}^t = \frac{\sum_{s=1}^m (r_{bs}^t - p_{is}^t)^\tau}{\sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n (r_{bs}^t - p_{js}^t)^\tau}. \tag{15}$$

The expected value of consumers  $b_i(t)$  who chooses a company  $T_i$  is determined by the probability  $P_{ib}^t$ , which can be considered as the market share  $m_i^t$  of a company  $T_i$ , and has the form

$$m_i^t = P_{ib}^t = \frac{\sum_{s=1}^m (r_{bs}^t - p_{is}^t)^\tau}{\sum_{s=1}^m \sum_{j=1}^n (r_{bs}^t - p_{js}^t)^\tau}, \quad \sum_{i=1}^n m_i^t = 1. \tag{16}$$

The demand of consumers for services  $s \in \{1, \dots, m\}$  of the company  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) has the form:

$$D_{ibs}^t(p_{is}^t) = \frac{B^t P_{ib}^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) = \frac{B^t m_i^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t). \tag{17}$$

Demand function of the consumers  $D_{sii}^t$ , who have plan to use the service  $SR$  of a company  $T_i$ , which may be implemented within network  $NW_i$ , and demand function of the consumer  $D_{ij}^t$ , who has plan to use the service  $SR$  implemented with resources of the networks  $NW_i$  and  $NW_j$ , have the form:

$$D_{sii}^t = \frac{B^t m_i^{t2}}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t), \quad D_{ijs}^t = \frac{B^t m_i^t m_j^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t), \tag{18}$$

where the aggregated  $s$ -service demand  $D_{is}^t$  has the form:

$$D_{is}^t = D_{sii}^t + \sum_{j=1}^n D_{sij}^t = \frac{B^t m_i^{t2}}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) + \sum_{j=1; i \neq j}^n \frac{B^t m_i^t m_j^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t), \tag{19}$$

and the total network traffic volume demand  $D_i^t$  for company  $T_i$  has the form:

$$D_i^t = \sum_{s=1}^m \left[ D_{sii}^t + \sum_{j=1}^n D_{sij}^t \right] = \sum_{s=1}^m \left[ \frac{B^t m_i^{t2}}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) + \sum_{j=1; i \neq j}^n \frac{B^t m_i^t m_j^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) \right],$$



where

$$D_{ii}^t = \sum_{s=1}^m D_{sii}^t, D_{ij}^t = \sum_{s=1}^m D_{sij}^t,$$

and the total network traffic volume for a company  $T_i$  has the form:

$$Y_i^t = \theta D_i^t = \sum_{s=1}^m \theta_s D_{is}^t = \sum_{s=1}^m \theta_s \left[ \frac{B^t m_i^{t2}}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) + \sum_{\substack{j=1; \\ i \neq j}}^n \frac{B^t m_i^t m_j^t}{2s_{bs}^t} (r_{bs}^t - p_{is}^t) \right], \quad (20)$$

where  $\theta$  is an ‘‘average’’ linking parameter for function  $Y_i^t$  and  $D_i^t$ .

Revenue function  $TR_i^t$  of companies  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) at the period  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, T_{\max}$ ) has the form:

$$TR_i^t = \sum_{\substack{i,j=1; \\ i \neq j}}^n [\bar{p}_i^t D_{ii}^t (\bar{p}_i^t) + (\bar{p}_i^t - \delta_{ij}^t \bar{p}_j^t) D_{ij}^t (\bar{p}_i^t) + \delta_{ij}^t \bar{p}_i^t D_{ji}^t (\bar{p}_j^t)], \quad (21)$$

where  $\delta_{ij}^t \in [0, 1]$  is a parameter to be defined during negotiations between companies  $T_i$  and  $T_j$ . We assume that the cost of an access service to the competitor’s network is a value proportional to the cost of servicing by this company of its consumers. Profit function  $\Pi_i^t$  of companies  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) at the period  $t$  ( $t = 1, 2, \dots, T_{\max}$ ) has the form:

$$\begin{aligned} \Pi_i^t &= TR_i^t - TC^t (w_{J_{ik}}^t, H_{ik}^t, w_{L_{ik}}^t, c_{ik}^t, F^t), \\ TC^t &= \left( \sum_{k=1}^{s_i^J} w_{J_{ik}}^t H_{ik}^t + \sum_{k=1}^{s_i^L} w_{L_{ik}}^t c_{ik}^t \right) + F^t, \end{aligned} \quad (22)$$

where  $TC^t$  is a total costs function and  $F^t$  is a fix cost.

### 3. Profit Company Control Problem and Overloads in Networks

We can formulate an optimization problem for each company  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) at any time  $t \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$ :

$$\begin{cases} \partial \Pi_i^t / \partial p_i^t &= 0; \\ \partial^2 \Pi_i^t / \partial p_i^{t2} &< 0. \end{cases} \quad (23)$$

The following theorem holds true.

**Theorem 1.** *Provided that the parameters  $\theta_s > 0$ ,  $\bar{a}^t > 0$ ,  $\bar{b}^t > 0$ ,  $\delta_{ij}^t \in [0, 1]$ ,  $w_{J_{ij}}^t \geq 0$ ,  $w_{L_{ij}}^t \geq 0$ ,  $F^t \geq 0$ , there is a unique solution of the problem (23) in the form of the equilibrium value of the tariff for the use of services SR of company  $i \in \{1, \dots, n\}$  during the period  $t$ :*

$$\bar{p}_i^* = \left( m_i^t + \sum_{j=1; i \neq j}^n \delta_{ij}^t m_j^t \right) \frac{\bar{a}^t}{2\bar{b}^t}.$$

**Proof.** Let's write out the profit function of  $i$  company in the form of:

$$\begin{aligned} \Pi_i^t = & \sum_{\substack{i,j; \\ i \neq j}}^n [\bar{p}_i^t m_i^t (\bar{a}^t - \bar{a}^t \bar{p}_i^t) + m_i^t m_j^t (\bar{p}_i^t - \delta_{ij}^t \bar{p}_j^t) (\bar{a}^t - \bar{b}^t \bar{p}_i^t) + \\ & + \delta_{ij}^t m_j^t m_i^t \bar{p}_i^t (\bar{a}^t - \bar{b}^t \bar{p}_j^t)] - \left( \sum_{k=1}^{s_i^J} w_{J_{ik}}^t H_{ik}^t + \sum_{k=1}^{s_i^L} w_{L_{ik}}^t c_{ik}^t \right) - F^t, \end{aligned}$$

We can calculate the derivatives of  $\bar{p}_i^t$  and equal them to zero, thus we obtain a system of algebraic equations of the form:

$$m_i^t (\bar{a}^t - 2\bar{b}^t \bar{p}_i^t) + \sum_{j=1; j \neq i}^n [m_j^t (\bar{a}^t - 2\bar{b}^t \bar{p}_i^t + \delta_{ij}^t \bar{b}^t \bar{p}_j^t) + \delta_{ij}^t m_j^t (\bar{a}^t - \bar{b}^t \bar{p}_j^t)] = 0,$$

and the equilibrium value of the tariff has the form:

$$\bar{p}_i^* = \left( m_i^t + \sum_{j=1; j \neq i}^n \delta_{ij}^t m_j^t \right) \frac{\bar{a}^t}{2\bar{b}^t}.$$

We can obtain for  $\partial^2 \Pi_i^t / \partial \bar{p}_i^{t2}$ ,

$$\frac{\partial^2 \Pi_i^t}{\partial \bar{p}_i^{t2}} = \sum_{i,j; i \neq j} [-m_i^t 2\bar{b}^t - m_i^t m_j^t 2\bar{b}^t - \delta_{ij}^t m_j^t m_i^t \bar{b}^t \bar{p}_j^t] < 0.$$

The theorem is proved. □

We can formulate an optimization problem for each company  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) at any time  $t \in \{1, 2, \dots, T_{\max}\}$  for the tariff value  $\bar{p}_t^*$  :

$$\begin{cases} \partial \Pi_i^t(\bar{p}_t^*, \delta_{ij}^t) / \partial \delta_{ij}^t = 0; \\ \partial^2 \Pi_i^t(\bar{p}_t^*, \delta_{ij}^t) / \partial \delta_{ij}^{t2} < 0; \end{cases}$$

which allows maximizing the profit of each company of  $T_i$  using the parameter  $\delta_{ij}^t$ .

After substituting the corresponding equilibrium tariffs  $\bar{p}_i^*$  in the profit function, we obtain the following equation

$$\begin{aligned} \Pi_i^t = & \sum_{\substack{i,j; \\ i \neq j}}^n \frac{\bar{a}^{t2} m_i^t [m_i^t + m_j^t]}{2\bar{b}^t} \left( m_i^t + \sum_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^n \delta_{ij}^t m_j^t \right) \left( 1 - 0.5 \left( m_i^t + \sum_{\substack{j=1; \\ j \neq i}}^n \delta_{ij}^t m_j^t \right) \right) - \\ & - \left( \sum_{k=1}^{s_i^J} w_{J_{ik}}^t H_{ik}^t + \sum_{k=1}^{s_i^L} w_{L_{ik}}^t c_{ik}^t \right) - F^t, \end{aligned}$$

and differentiating by  $\delta_{ij}^t$  and equaling to zero, we have a system of algebraic equations, by solving which, we obtain an equilibrium value of  $\delta_t^* = 0.5$ .

The equilibrium tariff  $\bar{p}_t^*$  for the services of company  $T_i$ , taking into account the optimal value  $\delta_t^* = 0.5$  during the period  $t$ , has the form:

$$\bar{p}_t^* = (m_i^t + 1) \frac{\bar{a}^t}{4b^t},$$

The equilibrium demand function for the company  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) services  $SR$  at any  $t$  can be represented as follows:

$$D_{it}^*(\bar{p}_t^*) = m_i^t D_t(\bar{p}_t^*) = 0.25 \cdot m_i^t \bar{a}_t (3 - m_i^t),$$

and the total network traffic volume for a company  $T_i$  with the equilibrium tariff has the form:

$$Y_i^t = \theta D_{it}^* = 0.25 \cdot \theta m_i^t \bar{a}_t (3 - m_i^t).$$

The total equilibrium market demand function  $D_t^*$  and the total equilibrium traffic volume  $Y_t^*$  for services  $SR$  at any  $t$  has the form:

$$D_t^* = \bar{a}^t \left( 3 - \sum_{i=1}^n m_i^{t2} \right), \quad Y_t^* = \theta \bar{a}^t \left( 3 - \sum_{i=1}^n m_i^{t2} \right)$$

and we can show that with a uniform distribution of customers between all companies  $T_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) the total equilibrium traffic volume for services  $SR$  reaches maximum.

If the network bandwidth of companies is less than the traffic volume that subscribers generate, then companies can manage the overload by creating such tariffs that reduce the overload on the network.

## Conclusions

In this paper a mathematical model of the telecommunications market is constructed taking into account overloads in networks. The analysis of equilibrium tariffs for telecommunications services for this type of market is carried out.

The most important result of this paper is the following: when the companies follow the reciprocal proportional access charge rules (PACR) then there always exist equilibrium tariffs for services. The applied value of the model is that the use of PACR telecommunication companies does not require detailed information market telecommunications, as the number of parameters of the model is minimized. This model proved to be effective in analysing the dynamics of the telecommunications market, as it allows companies to respond flexibly to external changes, which allows to change the strategy at every moment of time. The proposed model can serve as a tool for analyzing the existence of collusion between companies in the telecommunications industry market.

## References

1. M. Armstrong, Network Interconnection, The Economic Journal 108 (1998) 545–564.
2. M. Carter, J. Wright, Interconnection in Network Industries, Review of Industrial Organization 14 (1999) 1–25.
3. M. Carter, J. Wright, Asymmetric Network Interconnection, Review of Industrial Organization 22 (2003) 27–46.

4. W. Dessen, Network Competition in Nonlinear Pricing, *Rand Journal of Economics* 34 (2003) 593–611.
5. W. Dessen, Network Competition with Heterogeneous Customers and Calling Patterns, *Information Economics and Policy* 16 (2004) 323–345.
6. T. Doganoglu, Y. Tauman, Network Competition and Access Charge Rules, *The Manchester School* 70 (2002) 16–35.
7. J.-H. Hahn, Network Competition and Interconnection with Heterogeneous Subscribers, *International Journal of Industrial Organization* 22 (2004) 611–631.
8. J.-J. Laffont, J. Tirole, Access Pricing and Competition, *European Economic Review* 38 (1994) 1673.
9. J.-J. Laffont, P. Rey, J. Tirole, Network Competition I: Overview and Nondiscriminatory Pricing, *The Rand Journal of Economics* 29 (1998) 1–37.
10. J.-J. Laffont, P. Rey, J. Tirole, Network Competition II: Price Discrimination, *The Rand Journal of Economics* 29 (1998) 38–56.
11. J.-J. Laffont, J. Tirole, Internet Interconnection and the Off-Net-Cost Pricing Principle, *Rand Journal of Economics* 34 (2003) 73–95.
12. J.-J. Laffont, J. Tirole, Receiver-Pays Principle, *Rand Journal of Economics* 35 (2004) 85–110.
13. S.-H. Chuna, Network Capacity and Access Pricing for Cloud Services, *Procedia – Social and Behavioral Sciences* 109 (2014) 1348–1352.
14. S. A. Vasilyev, D. G. Vasilyeva, M. E. Kostenko, L. A. Sevastianov, D. A. Urusova, Economics and Mathematical Modeling of Duopoly Telecommunication Market, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2009) 57–67, in Russian.
15. S. A. Vasilyev, L. A. Sevastianov, D. A. Urusova, Economics and Mathematical Modeling of Oligopoly Telecommunication Market, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (2) (2011) 59–69, in Russian.

УДК 330.4, 519.83, 519.85, 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-155-166

## Построение математической модели ценообразования на телекоммуникационные услуги с учётом перегрузок в сетях

С. А. Васильев, Харун Хасан Салех

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе строится модель динамического ценообразования на рынке телекоммуникаций при условии ограниченной конкуренции и с учётом перегрузок в мультисервисных сетях. Для построения и исследования модели был применён комплексный подход, заключающийся в использовании методов экономико-математического моделирования и теории массового обслуживания. В предлагаемой модели предполагается, что телекоммуникационные компании попарно договариваются о правилах тарификации входящего и исходящего трафика, причём эта тарификация строится как функция от тарифов, которые компании предлагают своим абонентам за обслуживание. Таким образом, эти компании ограничиваются на первом шаге договорённостями по обоюдным правилам пропорциональной тарификации за доступ трафика (ОПТДТ), которые впоследствии позволяют определить тарифы для пользователей услуг мультисервисных сетей, которыми владеют компании. Обоюдность правил означает, что компании подчиняются одним и тем же правилам на всем интервале времени, в течение которого действует договорённость. С учётом несовершенной конкуренции на рынке

телекоммуникаций и при условии максимизации прибыли каждой компанией, которая является поставщиком услуг, в рамках построенной модели были найдены равновесные тарифы на эти услуги с учётом перегрузок в мультисервисных сетях, а также объёмы этих услуг.

**Ключевые слова:** теория массового обслуживания, теория игр, методы оптимизации, теория вероятностей, теория отраслевых рынков, экономико-математическое моделирование

## Литература

1. *Armstrong M.* Network Interconnection // *The Economic Journal*. — 1998. — Vol. 108. — Pp. 545–564.
2. *Carter M., Wright J.* Interconnection in Network Industries // *Review of Industrial Organization*. — 1999. — Vol. 14. — Pp. 1–25.
3. *Carter M., Wright J.* Asymmetric Network Interconnection // *Review of Industrial Organization*. — 2003. — Vol. 22. — Pp. 27–46.
4. *Dessein W.* Network Competition in Nonlinear Pricing // *Rand Journal of Economics*. — 2003. — Vol. 34. — Pp. 593–611.
5. *Dessein W.* Network Competition with Heterogeneous Customers and Calling Patterns // *Information Economics and Policy*. — 2004. — Vol. 16. — Pp. 323–345.
6. *Doganoglu T., Tauman Y.* Network Competition and Access Charge Rules // *The Manchester School*. — 2002. — Vol. 70. — Pp. 16–35.
7. *Hahn J.-H.* Network Competition and Interconnection with Heterogeneous Subscribers // *International Journal of Industrial Organization*. — 2004. — Vol. 22. — Pp. 611–631.
8. *Laffont J.-J., Tirole J.* Access Pricing and Competition // *European Economic Review*. — 1994. — Vol. 38. — P. 1673.
9. *Laffont J.-J., Rey P., Tirole J.* Network Competition I: Overview and Nondiscriminatory Pricing // *The Rand Journal of Economics*. — 1998. — Vol. 29. — Pp. 1–37.
10. *Laffont J.-J., Rey P., Tirole J.* Network Competition II: Price Discrimination // *The Rand Journal of Economics*. — 1998. — Vol. 29. — Pp. 38–56.
11. *Laffont J.-J., Tirole J.* Internet Interconnection and the Off-Net-Cost Pricing Principle // *Rand Journal of Economics*. — 2003. — Vol. 34. — Pp. 73–95.
12. *Laffont J.-J., Tirole J.* Receiver-Pays Principle // *Rand Journal of Economics*. — 2004. — Vol. 35. — Pp. 85–110.
13. *Chuna S.-H.* Network Capacity and Access Pricing for Cloud Services // *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. — 2014. — Vol. 109. — Pp. 1348–1352.
14. Построение экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае дуополии / С. А. Васильев, Д. Г. Васильева, М. Э. Костенко и др. // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2009. — Т. 3. — С. 57–67.
15. *Васильев С. А., Севастьянов Л. А., Урсова Д. А.* Построение экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае олигополии // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2011. — Т. 2. — С. 59–69.

© Vasilyev S. A., Haroun Hassan Salih, 2018

### Для цитирования:

Vasilyev S. A., Haroun Hassan Salih Construction of the Mathematical Model of Pricing for Telecommunication Services with Allowance for Congestion in Networks // *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. — 2018. — Vol. 26, No 2. — Pp. 155–166. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-155-166.

### For citation:

Vasilyev S. A., Haroun Hassan Salih Construction of the Mathematical Model of Pricing for Telecommunication Services with Allowance for Congestion in Networks, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (2) (2018) 155–166. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-155-166.

**Сведения об авторах:**

**Васильев Сергей Анатольевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: vasilyev\_sa@rudn.university, тел.: +7 (495)7287911)

**Харун Хасан Салех** — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: harounhassan198@yahoo.fr, тел.: +7 (968)3376303)

**Information about the authors:**

**Vasilyev S. A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: vasilyev\_sa@rudn.university, phone: +7 (495)7287911)

**Haroun Hassan Salih** — PhD student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: harounhassan198@yahoo.fr, phone: +7 (968)3376303)



UDC 517.937, 517.928.2, 519.217.2  
DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-167-175

## Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter

S. A. Vasilyev, G. O. Tsareva

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

In this paper we consider the dynamics of large-scale queueing systems with an infinite number of servers. We assume that there is a Poisson input flow of requests with intensity  $N\lambda$ . We suppose that each incoming request selects two any servers randomly and at the next step of an algorithm is sending this request to the server with the shorter queue instantly. A share  $u_k(t)$  of the servers that have the queues lengths with not less than  $k$  can be described using a system of ordinary differential equations of infinite order. We investigate this system of ordinary differential equations of infinite order with a small real parameter. A small real parameter allows us to describe the processes of rapid changes in large-scale queueing systems. We use the simulation methods for this large-scale queueing systems analysis. The numerical simulation show that the solution of the singularly perturbed systems of differential equations have an area of rapid change of the solutions, which is usually located in the initial point of the problem. This area of rapid function change is called the area of the mathematical boundary layer. The thickness of the boundary layer depends on the value of a small parameter, and when the small parameter decreases, the thickness of the boundary layer decreases. The paper presents the numerical examples of the existence of steady state conditions for evolutions  $u_i(t)$  and quasi-periodic conditions with boundary layers for evolutions  $u_i(t)$ .

**Key words and phrases:** countable Markov chains, large-scale queueing systems, singular perturbed systems of differential equations, differential equations of infinite order, small parameter

### Introduction

The current study of service networks with complex sending discipline in [1–3] transport networks [4–6] and the asymptotic behavior of Jackson networks [7] handled with the problematic of verifying the global convergence of the solutions of certain infinite systems of ordinary differential equations to a time-independent solution. In [8] the countable systems of differential equations with bounded Jacobi operators are studied and the necessary settings of global stability and global asymptotic stability was found. In [9] an infinite-server queueing system with a doubly stochastic Poisson input flow is considered. Assuming that the service time does not have expectation, limit theorems for the number of occupied servers is proven. As a consequence, limit theorems for systems is obtained in which the input flow intensity is a regenerative process. In [10] an infinite-server queueing system where customers come by groups of random size at random i.d. intervals of time is considered. Assuming that the number of requests in a group and intervals between their arrivals can be dependent, service times have a regularly varying distribution with infinite mean. Limit theorems for the number of customers in the system and prove limit theorems under appropriate normalizations are considered. In papers [11–13] the authors built various models of queueing systems and considered their dynamics.

In paper [14] we examined the singular perturbed structures of ordinary differential equations of infinite order of Tikhonov-type

$$\epsilon \dot{x} = F(x(t, g_x), y(t, g_y), t), \quad \dot{y} = f(x(t, g_x), y(t, g_y), t)$$

with the initial conditions  $x(t_0) = g_x, y(t_0) = g_y$ , where  $x, g_x \in X, X \subset l_1$  and  $y, g_y \in Y, Y \in \mathbf{R}^n, t \in [t_0, t_1] (t_0 < t_1), t_0, t_1 \in T, T \in \mathbf{R}, g_x$  and  $g_y$  are given vectors,  $\epsilon > 0$  is a small real parameter.

In this paper we apply Dobrushin approaches from [1–3]. We consider the dynamics of large-scale queueing systems that consist of infinite number of servers with a Poisson input flow of requests of intensity  $N\lambda$ . We can use an algorithm that selects two any servers for each incoming request and sent it to one of the servers with the shorter queue instantly. We suppose that service time has mean  $1/\mu$  with exponential distribution. In this case a share  $u_k(t)$  of the servers that have the queues lengths with not less than  $k$  can be described using a system of ordinary differential equations of infinite order. We investigate this system of ordinary differential equations of infinite order with a small real parameter. A small real parameter allows us to describe the processes of rapid changes in large-scale queueing systems. Tikhonov type Cauchy problem for this system with small parameter  $\epsilon$  and initial conditions is investigated.

We investigate the truncation system of this ordinary differential equations of infinite order with a small real parameter order  $N$ . Tikhonov type Cauchy problem for this truncation system with small parameter  $\epsilon$  and initial conditions is used for the simulation of behavior solutions and for analysis of large-scale queueing systems with taking into account parameters  $\lambda, \mu, \epsilon$ .

### 1. Queueing Systems with Infinite Number of Servers

The basic model considered there is a queueing system  $S_N$ , with  $N$  identical infinite-buffer FCFS (First-Come, First-Served) single-servers, with a Poisson arrival flow of rate  $N\lambda$  and with i.i.d. exponential service times of mean  $1/\mu$ , where  $0 < \lambda < \mu$ . Upon its arrival each task chooses  $m$  servers at random (i.e., independently of the pre-history of the queueing system (QS) and with probability  $1/(N^m)$ ) and then selects, among the chosen ones, the server with the lowest queue-size, i.e., the lowest number of tasks in the buffer (including the task in service). If there happen to be more than one server with lowest queue-size, the task selects one of them randomly.

One is interested in the “typical” behavior of a server in  $S_N$ , as  $N \rightarrow \infty$ . Formally, it means that  $\forall t \geq 0$  and  $k = 0, 1, \dots$ , we consider the fraction  $q_k(t) = M_k(t)/N$  where  $M_k(t)$  is the (random) number of servers with the queue-size  $k$  at time  $t$ . Clearly,  $0 \leq q_k(t) \leq 1, \sum_k q_k(t) = 1$ ; and  $Q(t) = (q_k(t)), t \geq 0$ , forms a Markov process (MP). Technically, it is more convenient to pass to the tail probabilities  $r_k(t) = \sum_{j \geq k} Q_j(t)$ ; the state space of the corresponding MP  $U_N(t) = (f_k(t)), t \geq 0$ , is the set  $\mathbf{U}_N$  of non-increasing non-negative sequences  $\mathbf{u} = (u_k, k = 0, 1, \dots)$  with  $u_0 = 1, \sum_{k > 1} u_k < \infty$  and with the  $u_k$ ’s multiple of  $1/N$ , which implies that  $u_k = 0$  for all  $k$  large enough. It is convenient to prolong the sequences  $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_N$  to the negative  $k$ ’s by the value 1.

The generator of  $\{U_N(t)\}$  is an operator  $\mathbf{A}$  acting on functions  $f : \mathbf{U}_N \rightarrow C^1$  and given by

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_N f(\mathbf{u}) = N \sum_{k > 0} (u_k - u_{k+1}) \left[ f \left( \mathbf{u} - \frac{\mathbf{e}_k}{N} - f(\mathbf{u}) \right) \right] + \\ + \lambda N \sum_{k > 0} ((u_{k-1})^2 - (u_k)^2) \left[ f \left( \mathbf{u} + \frac{\mathbf{e}_k}{N} - f(\mathbf{u}) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Here,  $\mathbf{e}_k$  stands for the sequence with the  $k$ -th entry 1 and all others 0, the addition of the sequences is componentwise. Process  $\{U_N(t)\}$  is positive-recurrent and thus possesses a unique invariant distribution,  $\pi_N$ ; given any initial distribution  $\varpi$ , the distribution of  $U_N(t)$  approaches  $\pi_N$  as  $t \rightarrow \infty$ . The main result of [1] is that, as  $N \rightarrow \infty$ , the expected



value  $\mathbf{E}_{\pi_N} r_k(t)$  converges to the value  $\{a_k\}$ , where

$$a_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{(m^k-1)/(m-1)}, \quad k \geq 0. \tag{2}$$

Pictorially speaking, it means that, as  $N \rightarrow \infty$ , an “average” server in the QS will have  $k$  or more tasks in the buffer with probability  $a_k$ .

It is interesting to compare  $\mathbf{S}_N$  with another queueing system  $\mathbf{L}$ , where the arriving task chooses the server completely randomly (i.e., independently of the pre-history and with probability  $1/N$ ). Clearly,  $\mathbf{L}$  is equivalent to an isolated  $M/M/\infty$  queue with the arrival and service rates  $\lambda$  and  $\mu$ , respectively, which justifies omitting subscript  $N$  in this notation. More precisely, the average server in  $\mathbf{L}$  will have  $k$  or more tasks in the buffer with the geometrical probability

$$a_k^0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad k \geq 1, \tag{3}$$

(independently of  $N$ ), which is much larger than  $a_k$ .

In fact, as was shown in [1], the whole process  $\{U_N(t)\}$  is asymptotically deterministic as  $N \rightarrow \infty$ . More precisely, let  $\mathbf{U}$  denote the set of the non-increasing non-negative sequences  $\mathbf{u} = (u_k, k \in \mathbf{Z})$  with  $u_k = 1$  for  $k \leq 0$  and  $\sum_{k \leq 0} u_k < \infty$ . Then, if the distribution  $\varpi$  of initial state  $U_N(0)$  approaches a Dirac delta-measure concentrated at a point  $\mathbf{g} = \{g_k\} \in \mathbf{U}$ , the distribution of  $\{U_N(t)\}$  is concentrated in the limit at the “trajectory”  $\mathbf{u}(t) = \{u_k(t)\}$ ,  $t \geq 0$ , giving the solution to the following system of differential equations

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2), \\ u_0(t) = 0, u_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

where  $g = \{g_k\}_{k=1}^\infty$  is a numerical sequence ( $1 = g_1, g_k \geq g_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ ) [1]. Point  $\mathbf{a} = (a_k)$  (see (2)) is a (unique) fixed point for system (4) in  $\mathbf{U}$ .

These results illustrate the essence of the mean-field approximation for QS  $S_N$ . Equations (4) describe a “self-compatible” evolution of vector  $\mathbf{u}(t)$ , or, equivalently, of the probability distribution  $\mathbf{q}(t) = \{q_k(t)\}$  defined by  $q_k(t) = u_k(t) - u_{k+1}(t)$ ,  $t \geq 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ . As before,  $\mathbf{u}(t)$  is simply the sequence of the tail probabilities for  $\mathbf{q}(t)$ .

We can compare system (4) with the linear system

$$\dot{y}_k(t) = \mu(y_{k+1}(t) - y_k(t)) + \lambda(y_{k-1}(t) - y_k(t)), \tag{5}$$

(where  $k \geq 1$ ) describing the evolution of the probability distribution  $\mathbf{q}^0(t) = (q_k^0(t), q_k^0(t) = y_k(t) - y_{k+1}(t))$  in a standard  $M/M/1/\infty$  queue with the arrival and service rates  $\lambda$  and  $\mu$ , respectively. The  $\mu$ -terms in (4) and (5) are the same; they correspond with the departure of the tasks and ‘push’ the probability mass in  $\mathbf{q}(t)$  and  $\mathbf{q}^{(0)}(t)$  towards  $k = 0$ . On the other hand, the  $\lambda$ -terms (different in both SQ) correspond with the arrival of the tasks; these terms shift the probability mass to larger  $k$ ’s. The  $\lambda$ -term in (4) is smaller than the one in (5) when  $u_k(t)$  is small; pictorially speaking, system (4) provides (for the same values of  $\lambda$  and  $\mu$ ) more “protection”, for large  $k$ , against the shift to the right, which may lead to an “explosion”, when the relation  $\sum_{k>1} u_k(t) < \infty$  or  $\sum_{k>1} y_k(t) < \infty$  may fail as  $t \rightarrow \infty$ . Because of this, the entries  $a_k$  of sequence  $\mathbf{a}$  (see (2)) giving the fixed point of (4) decrease “super-exponentially”, in contrast with the exponential decay of the tail probabilities in the fixed point  $\mathbf{a}^0 = (a_k^0)$  of (5).

## 2. Queueing Systems with Infinite Number of Servers and a Small Parameter

Let's consider a system that consists of  $N$  servers with a Poisson input flow of requests of intensity  $N\lambda$ . Each request arriving to the system randomly selects two servers and is instantly sent to the one with the shorter queue. The service time is distributed exponentially with mean  $\bar{t} = 1/\mu$ . Let  $u_k(t)$  be a share servers that have the queues lengths with not less than  $k$ . It is possible to investigate the asymptotic distribution of the queue lengths as  $N \rightarrow \infty$  and  $\lambda < 1$  [1]. The considered system of the servers is described by ergodic Markov chain. There is a stationary probability distribution for the states of the system and if  $N \rightarrow \infty$  the evolution of the values  $u_k(t)$  becomes deterministic and the Markov chain asymptotically converges to a dynamic system the evolution of which is described by system of ordinary differential equations of infinite order

$$\dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2). \quad (6)$$

For this system of ordinary differential equations of infinite order we can formulate Cauchy problem in the form

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2), \\ u_0(t) = 0, \quad u_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (7)$$

where  $g = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$  is a numerical sequence ( $1 = g_1, g_k \geq g_{k+1}, k = 1, 2, \dots$ ) [1].

We can investigate Cauchy problem for system of ordinary differential equations of infinite order with small parameter such form

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \dot{u}_n(t) = \mu(U_{n+1}(t) - u_n(t)) + \lambda((u_{n-1}(t))^2 - (u_n(t))^2), \\ \epsilon \dot{U}_k(t) = \mu(U_{k+1}(t) - U_k(t)) + \lambda((U_{k-1}(t))^2 - (U_k(t))^2), \quad k = n+1, \dots, \\ u_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad U_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = n+1, \dots, \end{cases} \quad (8)$$

where  $\epsilon > 0$  is a small parameter that bring a singular perturbation to the system (7), which allows us to describe the processes of rapid change of the systems.

## 3. Queueing Systems with Finite Number of Servers and a Small Parameter

Using (8) we can rewrite system of differential equations of order  $N$  in the form

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \dot{u}_n(t) = \mu(U_{n+1}(t) - u_n(t)) + \lambda((u_{n-1}(t))^2 - (u_n(t))^2), \\ \epsilon \dot{U}_k(t) = \mu(U_{k+1}(t) - U_k(t)) + \lambda((U_{k-1}(t))^2 - (U_k(t))^2), \quad k = n+1, \dots, N. \end{cases} \quad (9)$$

For this truncation system of ordinary differential equations of order  $N$  we can formulate Cauchy problem in the form

$$\begin{cases} \dot{u}_k(t) = \mu(u_{k+1}(t) - u_k(t)) + \lambda((u_{k-1}(t))^2 - (u_k(t))^2), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ \dot{u}_n(t) = \mu(U_{n+1}(t) - u_n(t)) + \lambda((u_{n-1}(t))^2 - (u_n(t))^2), \\ \epsilon \dot{U}_k(t) = \mu(U_{k+1}(t) - U_k(t)) + \lambda((U_{k-1}(t))^2 - (U_k(t))^2), \quad k = n+1, \dots, N, \\ u_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \quad U_k(0) = g_k \geq 0, \quad k = n+1, \dots, N. \end{cases} \quad (10)$$

The numerical analysis was carried out using the adaptive step Runge–Kutta integration method, which is one of the most commonly used methods for the numerical solution of the singularly perturbed system of differential equations.

The numerical example is presented in the figure (see Fig. 1, 2) where  $n = 7, N = 10, \lambda = 0.5, \mu = 1.0, g_0 = 1, g_k = 1 - 0.1k, k = \overline{0, 9}$  and a small parameter  $\epsilon = 0.1$  (Fig. 1),  $\epsilon = 0.01$  (Fig. 2),  $\epsilon = 0.001$  (Fig. 3). In these numerical examples we can see the existence of regularly perturbed solutions  $u_i(t), i = \overline{0, 5}$  and singularly perturbed solutions  $u_i(t), i = \overline{6, 10}$  with boundary layers.

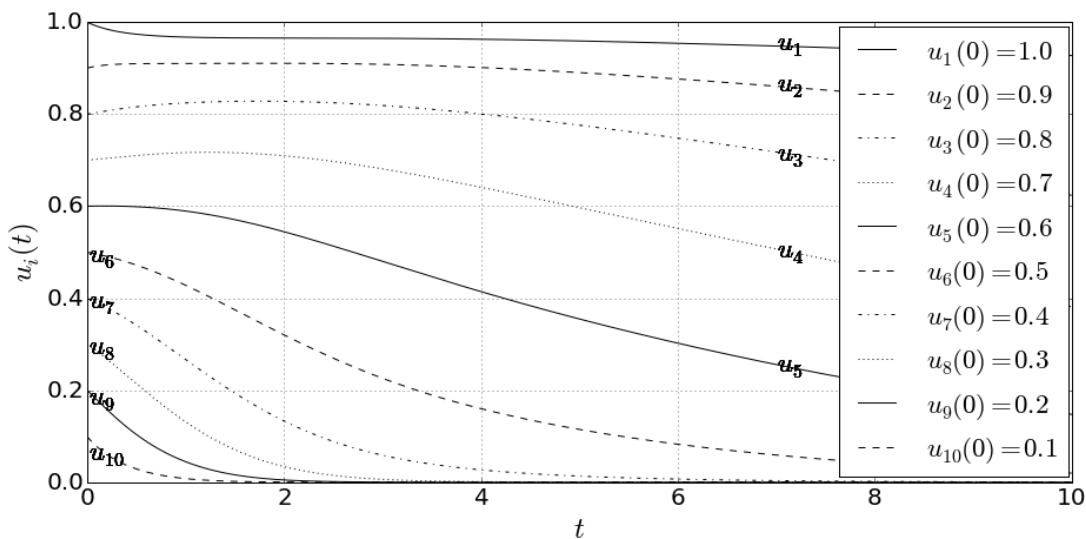


Figure 1. Evolution analysis of  $u_k$  ( $\epsilon = 0.1$ )

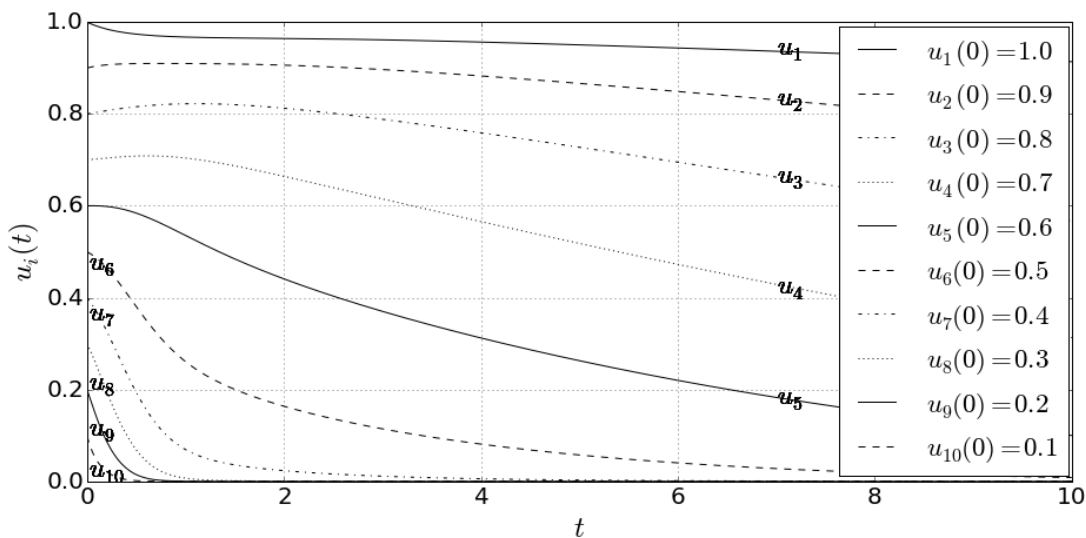


Figure 2. Evolution analysis of  $u_k$  ( $\epsilon = 0.01$ )

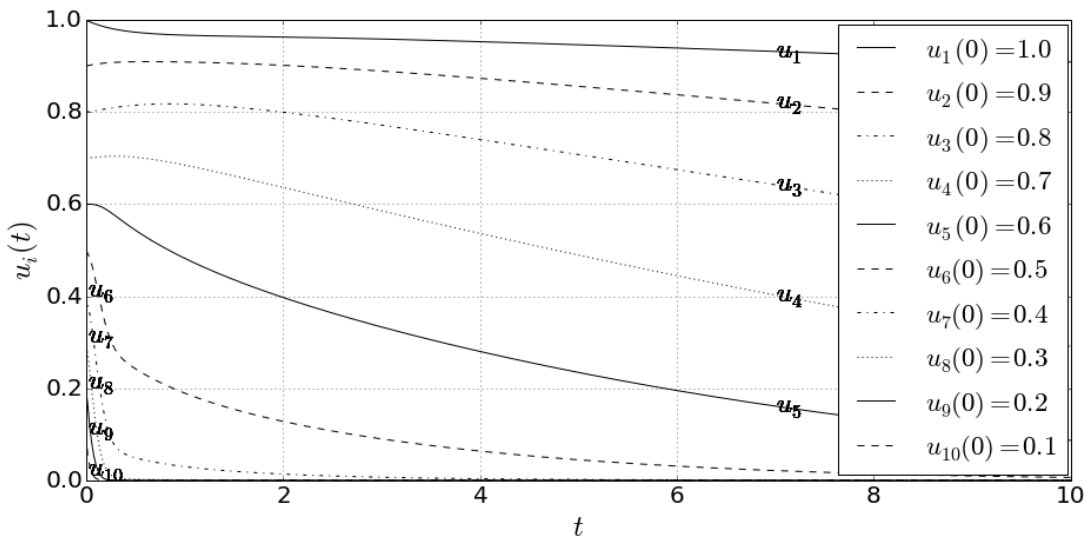


Figure 3. Evolution analysis of  $u_k$  ( $\epsilon = 0.001$ )

The numerical simulation shows that the solution of the singularly perturbed systems of differential equations have an area of rapid change of the function, which is usually located in the initial point of the problem. This area of rapid function change is called the area of the mathematical boundary layer. The thickness of the boundary layer depends on the value of a small parameter, and when the small parameter decreases, the thickness of the boundary layer decreases. The integration area is divided into external (outside the boundary layer) and internal (inside the boundary layer). The solution of the singularly perturbed equation is sought in the form of a solution suitable for the outer domain, which is then refined in the vicinity of the boundary point where the boundary layer is located. The numerical examples have shown the existence of regularly perturbed solutions and singularly perturbed solutions with boundary layers for evolutions  $u_i(t)$ .

## Conclusions

We investigate the dynamics of large-scale queueing systems that consists of infinite number of servers with a Poisson input flow of requests of intensity  $N\lambda$ . Each request arriving to the system randomly selects two servers and this request is instantly sent to the one with the shorter queue. We suppose that service time has mean  $1/\mu$  with exponential distribution. In this case a share  $u_k(t)$  of the servers that have the queues lengths with not less than  $k$  can be described using a system of differential equations of infinite order. Tikhonov type Cauchy problem for this system with small parameter  $\epsilon$ . Tikhonov type Cauchy problem for this system with small parameter  $\epsilon$  and initial conditions is investigated. We use the simulation methods for behavior solutions analysis with taking into account parameters  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\epsilon$ . The numerical examples have shown the existence of steady state conditions for queueing systems with an infinite number of servers and singularly perturbed conditions with boundary layers for evolutions  $u_i(t)$  with a small parameter.

## References

1. N. D. Vvedenskaya, R. L. Dobrushin, F. I. Karpelevich, Queueing System with Selection of the Shortest of Two Queues: An Asymptotic Approach, *Probl. Peredachi Inf.* 32 (1) (1996) 20–34, in Russian.
2. N. D. Vvedenskaya, Yu. M. Suhov, Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue with Dynamic Routing, no. 3, 1997.
3. N. D. Vvedenskaya, Large Queueing System where Messages are Transmitted via Several Routes, Vol. 34, 1998, in Russian.
4. L. G. Afanassieva, G. Fayolle, S. Yu. Popov, Models for Transportation Networks, *Journal of Mathematical Sciences* 84 (3) (1997) 1092–1103.
5. D. V. Khmelev, V. I. Oseledets, Mean-Field Approximation for Stochastic Transportation Network and Stability of Dynamical System (Preprint No. 434), University of Bremen, Bremen, 1999.
6. D. V. Khmelev, Limit Theorems for Nonsymmetric Transportation Networks, Vol. 7, 2001.
7. V. V. Scherbakov, Time Scales Hierarchy in Large Closed Jackson Networks (Preprint No. 4), French–Russian A. M. Liapunov Institute of Moscow State University, Moscow, 1997.
8. V. I. Oseledets, D. V. Khmelev, Global Stability of Infinite Systems of Nonlinear Differential Equations, and Nonhomogeneous Countable Markov Chains, Vol. 36, 2000.
9. E. A. Chernavskaya, Limit Theorems for an Infinite-Server Queueing System, Vol. 99, 2015.
10. E. A. Chernavskaya, Limit Theorems for Queueing Systems with Infinite Number of Servers and Group Arrival of Requests, Vol. 71, 2016.
11. Yu. Gaidamaka, E. Sopin, M. Talanova, Approach to the Analysis of Probability Measures of Cloud Computing Systems with Dynamic Scaling, Vol. 601, 2016.
12. A. V. Korolkova, E. G. Eferina, E. B. Laneev, I. A. Gudkova, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov, Stochastization of One-Step Processes in the Occupations Number Representation, 2016.
13. K. Samouylov, V. Naumov, E. Sopin, I. Gudkova, S. Shorgin, Sojourn Time Analysis for Processor Sharing Loss System with Unreliable Server, Vol. 9845, Springer Verlag, 2016.
14. G. O. Bolotova, S. A. Vasilyev, D. N. Udin, Systems of Differential Equations of Infinite Order with Small Parameter and Countable Markov Chains, Vol. 678, Springer Verlag, 2016.

УДК 517.937, 517.928.2, 519.217.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-167-175

### Исследование систем массового обслуживания с бесконечным числом приборов и малым параметром

С. А. Васильев, Г. О. Царева

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В данной работе рассматривается динамика крупномасштабных систем массового обслуживания с бесконечным числом обслуживающих приборов. Предполагается, что имеется входящий пуассоновский поток заявок с интенсивностью  $N\lambda$ . Также предполагается, что каждая заявка, попав в систему, выбирает два произвольных прибора случайным образом и выбирает для обслуживания прибор с более короткой очередью. Доля  $u_k(t)$  приборов с длиной очереди не менее чем  $k$  можно описать с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Предполагается, что эта система обыкновенных

дифференциальных уравнений бесконечного порядка с малым вещественным параметром, который позволяет описать процессы быстрых изменений в системах массового обслуживания. В этой работе используются методы численного моделирования для анализа такого класса систем массового обслуживания. Численный анализ показал, что решение рассматриваемых сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнения имеют область быстрого изменения решений, которая находится в начальной области интегрирования задачи. Эта зона быстрого изменения решений называется областью пограничного слоя. Толщина пограничного слоя зависит от величины малого параметра, и когда малый параметр уменьшается, то толщина пограничного слоя также уменьшается. В работе приведены численные примеры существования стационарных состояний для эволюции решений  $u_i(t)$ , а также решения с пограничными слоями.

**Ключевые слова:** счётные марковские цепи, крупномасштабные системы массового обслуживания, сингулярные возмущённые системы дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения бесконечного порядка, малый параметр

## Литература

1. *Введенская Н. Д., Добрушин Р. Л., Карпелевич Ф. И.* Система обслуживания с выбором наименьшей из двух очередей – асимптотический подход // Проблемы передачи информации. — 1996. — Т. 32, № 1. — С. 20–34.
2. *Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M.* Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue with Dynamic Routing. 3. — 1997. — Pp. 493–526.
3. *Введенская Н. Д.* Большая система обслуживания с передачей сообщения по нескольким путям. — 1998. — Т. 34, С. 98–108.
4. *Afanassieva L. G., Fayolle G., Popov S. Yu.* Models for Transportation Networks // Journal of Mathematical Sciences. — 1997. — Vol. 84, No 3. — Pp. 1092–1103.
5. *Khmelev D. V., Oseledets V. I.* Mean-Field Approximation for Stochastic Transportation Network and Stability of Dynamical System (Preprint No. 434). — Bremen: University of Bremen, 1999.
6. *Khmelev D. V.* Limit Theorems for Nonsymmetric Transportation Networks. — 2001. — Vol. 7, Pp. 1259–1266.
7. *Scherbakov V. V.* Time Scales Hierarchy in Large Closed Jackson Networks (Preprint No. 4). — Moscow: French–Russian A. M. Liapunov Institute of Moscow State University, 1997.
8. *Oseledets V. I., Khmelev D. V.* Global Stability of Infinite Systems of Nonlinear Differential Equations, and Nonhomogeneous Countable Markov Chains. — 2000. — Vol. 36, Pp. 60–76.
9. *Chernavskaya E. A.* Limit Theorems for an Infinite-Server Queuing System. — 2015. — Vol. 99.
10. *Chernavskaya E. A.* Limit Theorems for Queueing Systems with Infinite Number of Servers and Group Arrival of Requests. — 2016. — Vol. 71, Pp. 257–260.
11. *Gaidamaka Yu., Sopin E., Talanova M.* Approach to the Analysis of Probability Measures of Cloud Computing Systems with Dynamic Scaling. — 2016. — Vol. 601, Pp. 121–131.
12. Stochastization of One-Step Processes in the Occupations Number Representation / A. V. Korolkova, E. G. Eferina, E. B. Laneev et al. — 2016. — Pp. 698–704.
13. Sojourn Time Analysis for Processor Sharing Loss System with Unreliable Server / K. Samouylov, V. Naumov, E. Sopin et al. — Springer Verlag, 2016. — Vol. 9845, Pp. 284–297.
14. *Bolotova G. O., Vasilyev S. A., Udin D. N.* Systems of Differential Equations of Infinite Order with Small Parameter and Countable Markov Chains. — Springer Verlag, 2016. — Vol. 678, Pp. 565–576.

**Для цитирования:**

*Vasilyev S. A., Tsareva G. O.* Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 2. — Pp. 167–175. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-167-175.

**For citation:**

*Vasilyev S. A., Tsareva G. O.* Analysis of Queueing Systems with an Infinite Number of Servers and a Small Parameter, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 167–175. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-167-175.

**Сведения об авторах:**

**Васильев Сергей Анатольевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [vasilyev\\_sa@rudn.university](mailto:vasilyev_sa@rudn.university), тел.: +7 (495)7287911)

**Царева Галина Олеговна** — аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [gotsareva@gmail.com](mailto:gotsareva@gmail.com), тел.: +7 (903)7631589)

**Information about the authors:**

**Vasilyev S. A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [vasilyev\\_sa@rudn.university](mailto:vasilyev_sa@rudn.university), phone: +7 (495)7287911)

**Tsareva G. O.** — PhD student of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [gotsareva@gmail.com](mailto:gotsareva@gmail.com), phone: +7 (903)7631589)



UDC 535.421

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-176-182

## Device for Periodic Modulation of Laser Radiation

V. A. Komotskii, Yu. M. Sokolov, N. V. Suetin

*Institute of Physical Researches and Technologies  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)  
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russian Federation*

In this paper we consider a new type of mechanical device for periodic modulation of laser radiation. The modulating unit consists of two phase diffraction gratings with a rectangular profile, one of which moves relative to the other. The output beam of radiation in this device can be either a zero-order beam of diffraction, or one of the first orders of diffraction. The results of numerical simulation of output waveforms are presented. In the first order, we obtain a sinusoidal form of output power modulation with an efficiency of up to 40 percent. Optimal parameters of the phase diffraction gratings are calculated. Modulation produced in the zero order of diffraction has an impulse form with an efficiency of about 80–90 percent. The specific shape of the pulses in the zero order of diffraction depends on the distance between the two gratings. The results of numerical calculations and experimental studies are in good agreement. A special advantage of this type of modulator is the possibility of increasing the frequency of mechanical modulation of the laser beam to hundreds of kHz. The results of experimental studies of the characteristics of the scheme under consideration are presented. The device makes it possible to obtain modulation frequencies up to hundreds of kHz with a harmonic waveform in the first orders of diffraction and periodic pulses in the zero order.

**Key words and phrases:** modulation of a laser beam, an optical modulator, diffraction gratings, double diffraction on phase gratings

### 1. Introduction

Optical choppers are widely used during physical experiments. Optical chopper is a rotating disk punctuated with holes or slits. Since this type of laser modulator is mechanical in nature, the maximum frequency is limited to the several kHz. In addition, when the laser beam intersects the borders of holes, diffraction effects occurs, which distort a shape of the output beam. The other type of mechanical laser beam modulator described in [1] allows obtaining up to 100% modulation of laser radiation power, but the maximal frequency of modulation is also low.

In this report, we present results of investigations of the device where laser beam modulation occurs as a result of sequential diffraction by two phase diffraction gratings, one of which is being moved relatively to the other one in the direction across grating lines. There are specific diffraction gratings which have a rectangular “meander” type profile formed by a relief on a transparent substrate used in this device.

With applying of this device it is possible to increase the frequency of modulation of the laser beam up to hundreds kHz. In the special case, when we use the first diffraction order as output beam, it is possible to obtain its power modulation according to the harmonic law. When we use the zero diffraction order as output beam, it is possible to get the modulation of the output beam in the form of periodic pulses of a specific shape with a peak power close to the radiation power at the input of the device.

---

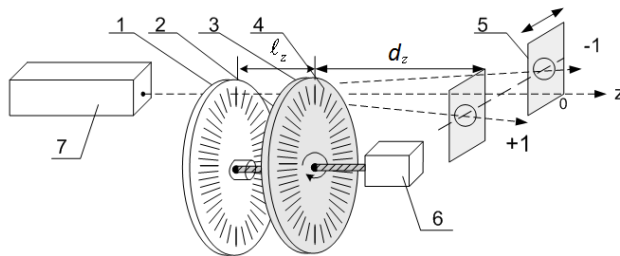
Received 16<sup>th</sup> March, 2018.

This research is made in Optoelectronics lab at the Institute of Physical Researches and Technologies in RUDN University.



## 2. Theoretical Analysis

The modulator scheme is shown in Fig. 1. The device includes a laser 7, a modulating unit (1–4, 6) and a spatial filter 5. The modulating unit consists of two transparent disks 1 and 3. There are two identical circular relief diffraction gratings (DG) 2 and 4 of the same period  $\Lambda$ , located on the periphery of disks surfaces at distances  $R_G$  from the centres of these disks. Disks are located in parallel planes at a small distance from each other. The distance  $l_z$  between the DGs, which are located on the surfaces of the disks, facing each other, must satisfy the condition:  $l_z \ll \Lambda^2/\lambda$ , where  $\lambda$  is the laser wavelength. One of the disks is rotated by the motor 6 relative to the second disk, making  $n$  revolutions per second (rps).



**Figure 1. Schematic diagram of the laser light modulator with modulating unit containing two DGs**

The relief has a specific form of the “meander” type, with the width of the protrusions equal to the width of the grooves. The lines of the relief of the DG are located along the radial directions to the center of the disk. The optimal depth of the relief of the DG, at which the modulation in the zero and in the first orders has the maximum amplitude, is calculated by the following formula:

$$h_{\text{OPT}} = \frac{\lambda}{4(n_g - 1)}, \quad (1)$$

where  $n_g$  is the refractive index of the substance of which the relief is made. When the depth of the relief is equal to  $h_{\text{OPT}}$ , the depth of optical wave front phase modulation is equal to  $\Delta\varphi = \pi/2$ , and the amplitude of the optical wave spatial phase modulation (SPM) is  $\Phi_M = \Delta\varphi/2 = \pi/4$ .

The interaction of optical wave with the system of two diffraction gratings, as shown on the Fig. 2, was considered in [2]. This analysis shows that the radiation power in diffraction orders depends on several parameters: the distance between the DGs, the displacement of one grating relative to the other one in the  $Ox$  direction, as far as the amplitude and shape of the SPM which obtained by the optical wave after propagating through each of these phase type gratings.

As follows from theoretical analysis we can get the best results, when we use DG of the special rectangular meander profile, since **there are no even diffraction orders** in the diffraction spatial spectra of these DGs. Only in this special case periodical oscillation of the output optical beam power of the first orders of diffraction as a result of one of the DGs moving relative to the other occurs according to a harmonic law. Power oscillations of the zero order will be periodical also. But these oscillations would not be purely sinusoidal. When the optimal depth of the gratings,  $h_{\text{OPT}}$  is used, the highest modulation efficiency is obtained. At a depth of each grating equal to  $h_{\text{OPT}}$ , and with a normal incidence of the laser beam on the DGs, the dependence of the intensity coefficient in the first diffraction orders on the displacement of the DG across the grating lines is expressed by formula [1]:

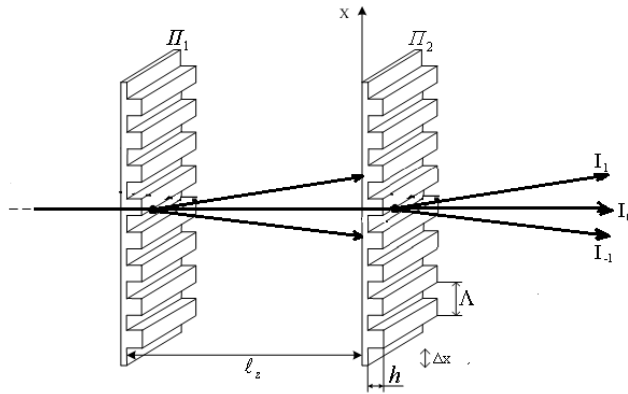


Figure 2. Diagram showing an optical wave propagates through a system of two DGs

$$I_{\pm 1}(x) = \frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{\pi^2} \cos\left(\frac{2\pi}{\Lambda} xmL\right), \quad (2)$$

$$L = \pi \frac{\lambda}{\Lambda^2} l_z \text{ — the distance parameter.}$$

The intensity coefficient in the zero order of diffraction is described by a more complicated formula which contains infinite series of harmonics [1]:

$$I_0 = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)^2 L)}{(2k+1)^2} \cos\left((2k+1) \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x\right)\right) +$$

$$+ \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{\cos(4(k^2 - k'^2 + k - k')L)}{(2k+1)^2(2k'+1)^2} \cos\left(2(k' - k) \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x\right)\right) +$$

$$+ \frac{8}{\pi^4} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(2(k+j+1) \left(\frac{2\pi}{\Lambda} x\right) + 4(j^2 - k^2 + j - k)L\right)}{(2k+1)^2(2j+1)^2}, \quad k \neq k'. \quad (3)$$

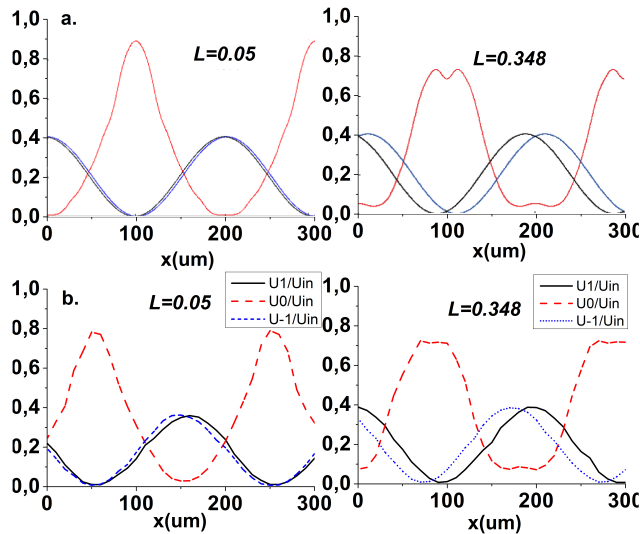
Power of the beam radiated to the order of diffraction with the number  $n$  ( $n = 0, 1, -1$ ) is related to the intensity coefficient and to the radiation power  $P_{\text{in}}$  measured at the input of the device, by formula:

$$P_n = \eta I_n P_{\text{in}}. \quad (4)$$

Here  $\eta$  is coefficient of effective use of power, taking into account radiation losses in the optical scheme due to reflection and absorption. As follows from formula (2), the output power in the *first diffraction order* varies according to a harmonic law from zero to a maximum value which is equal to  $P_{1 \text{ max}} = (4/\pi^2)\eta P_{\text{in}}$ . The intensity of the *zero diffraction order* also varies with a period equal to  $\Lambda$ . The **shape** of the intensity dependence on the displacement of DG is similar to pulse shape. The shapes of these pulses are changed in a complex way with changing of the parameter  $L$ . Dependences of power of different diffraction orders on the displacement of the DG, calculated by

formulas (2) and (3) are presented in Fig. 3a. The amplitude of modulation of the zero order beam power reaches the value  $P_{0\max} = 0.9\eta P_{\text{in}}$  (provided parameter  $L = 0.05$ ).

For the purpose of experimental investigation of these dependences the special setup with use of two phase gratings of a rectangular profile of period equal to  $\Lambda = 200 \mu\text{m}$  and with relief depth which was close to the optimum have been fabricated. One of the gratings was stationary. The second one was installed parallel to the first grating on the moving platform. The second grating was driven by a micrometric screw in the direction across the grating lines. The displacement step was  $10 \mu\text{m}$ . In addition, the design allowed changing the distance between two DGs. A He-Ne laser with a wavelength  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$  was used as a source of coherent radiation. Diffraction orders intensities were measured by a photodiode with use of reverse bias. Experimental dependencies of radiation intensities in the diffraction orders on the displacement of the DG are presented in Fig. 3b.



**Figure 3.** Calculated (a) and experimental (b) power dependences in the zero and first orders of diffraction on the displacement for different values of the distance parameter  $L$

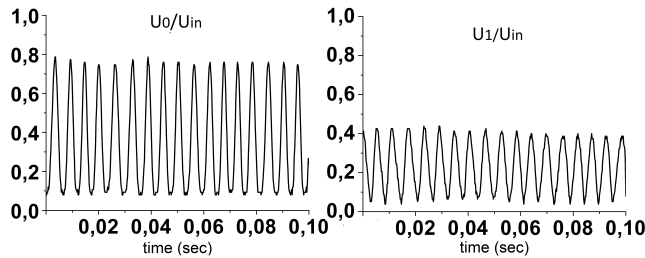
As can be seen from comparing Fig. 3a and 3b, the shapes of experimental curves are in a good agreement with the calculated ones. When one grating is being moved in the direction of the  $0x$  axis at a constant speed, periodic modulation of the diffraction orders power in dependence of time would be observed. In the first orders of diffraction, the modulation shape will be harmonic. Also one can see that phases of the oscillations in the first and minus first orders of diffraction depend on the distance between two gratings. In the zero order of diffraction the shape of periodic modulation looks like pulses, which amplitudes are about from  $0.9\eta P_{\text{in}}$  to  $0.7\eta P_{\text{in}}$ .

### 3. Experimental Investigation of the Modulator Setup

Experimental setup was built according to the scheme shown in Fig. 1. Disk sectors with gratings were manufactured using photolithography and chemical etching of glass. The DG period, measured at a distance of 3 cm from the center of the disk, was  $150 \mu\text{m}$ . The amplitude of the SPM of DG was calculated from the measured ratio of the powers of the zero and the first diffraction orders [3]. By measuring results the amplitude of SPM was close to  $\Phi_M = \pi/4$ , in practice  $\Phi_M = (42^\circ \cdot 43^\circ)$ . The stationary grating was fixed on the path of the laser beam. The movable grating was installed in the hole on

the surface of the disk. The disk was driven by a DC motor. Gratings were installed in parallel at a distance of about 1 mm. It was possible to tune the position of one of the disks in order to ensure the parallelism of the grating lines. Photodiodes with load resistors were installed in diffraction orders. Reverse bias voltage was connected to photodiode. In this case, the voltage across the load resistor is proportional to the power of the radiation incident on the photodiode. The shape of the output signal was recorded using an oscilloscope with a signal recording function.

The experimental modulation characteristics are presented in Fig. 4. The dependence was normalized to the voltage measured on the photodiode load resistor when a laser beam was directed onto the photodiode, with correction of this value taking into account reflection losses. The modulation curves are very close to the calculated ones.



**Figure 4. Experimental dependencies of output beam intensities on time. Rotation speed was equal to  $n = 0.15$  rps, modulation frequency was  $F = 190$  Hz**

When the disk rotates, the linear displacement speed of the moving grating relatively to the stationary one is equal to  $\nu = 2\pi Rn$ . The oscillation frequency is equal to  $F = \nu/\Lambda = 2\pi Rn/\Lambda$ . For  $R = 3$  cm, with  $n = 0.15$  rps and  $\Lambda = 150$   $\mu\text{m}$  we get calculated value:  $F = 188$  Hz, which is very close to the experimental value of the modulation frequency  $F = 190$  Hz. With increasing rotation speed of the disk to 100 rps, with the same grating parameters, the modulation frequency will be increased up to  $F = 125$  kHz.

## 4. Conclusions

The method of laser beam modulation with use of the system of two diffraction gratings is investigated theoretically and experimentally. Modulation frequencies of the hundred of kHz domain with the use of mechanical type driver are possible. Harmonic type shape of the output beam modulation can be obtained in the first order of diffraction. Pulse type modulation can be obtained in the zero order of diffraction. Zero-order modulation with amplitude  $P_{0\text{max}} = 0.75\eta P_{\text{in}}$  and harmonic modulation in the first diffraction order with amplitude  $P_{1\text{max}} = 0.35\eta P_{\text{in}}$  at a depth of the gratings close to the optimum was demonstrated.

## References

1. V. A. Komotskii, Yu. M. Sokolov, N. V. Suetin, Laser Beam Modulation Using Corner Reflector and Deep Diffraction Grating, *Journal of Communications Technology and Electronics* 62 (7) (2017) 822–826. doi:10.1134/S1064226917070063.
2. V. A. Komotskii, Yu. M. Sokolov, Analysis of the Intensities of Diffractive Orders in Optical Scheme Based on Two Phase Diffraction Gratings, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Physico-Mathematical Sciences* 1 (2006) 90–95.
3. V. A. Komotskii, Yu. M. Sokolov, E. V. Basisty, Depth measurement of the periodic grooved reflectors of surface acoustic waves using the laser probing, *Journal of Communications Technology and Electronics* 56 (2) (2011) 220–225. doi:10.1134/S1064226910121125.

УДК 535.421

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-176-182

## Устройство для периодической модуляции лазерного излучения

В. А. Комоцкий, Ю. М. Соколов, Н. В. Суетин

*Институт физических исследований и технологий  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В настоящей работе рассматривается новый тип механического устройства для периодической модуляции лазерного излучения. Модулирующий блок состоит из двух фазовых дифракционных решёток с прямоугольным профилем, одна из которых перемещается относительно другой. Выходным пучком излучения в этом устройстве может быть либо пучок нулевого порядка дифракции, либо один из первых порядков дифракции. Приводятся результаты численного моделирования форм выходных сигналов. В первом порядке мы получаем синусоидальную форму модуляции выходной мощности с эффективностью до 40 процентов. Рассчитаны оптимальные параметры фазовых дифракционных решёток. Модуляция, производимая в нулевом порядке дифракции, имеет импульсную форму с эффективностью около 80–90 процентов. Конкретная форма импульсов в нулевом порядке дифракции зависит от расстояния между двумя решётками. Результаты численных расчётов и экспериментальных исследований находятся в хорошем согласии. Особым преимуществом этого типа модулятора является возможность увеличения частоты механической модуляции лазерного луча до сотен кГц. Приводятся результаты экспериментальных исследований характеристик рассматриваемой схемы. Устройство позволяет получать частоты модуляции до сотен кГц с сигналом гармонической формы в первых порядках дифракции и периодическими импульсами в нулевом порядке.

**Ключевые слова:** модуляция лазерного пучка, оптический модулятор, дифракционные решётки, двойная дифракция на фазовых решётках

## Литература

1. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Суетин Н. В. Модуляция лазерного пучка с применением уголкового отражателя и глубокой дифракционной решётки // Радиотехника и электроника. — 2017. — Т. 62, № 7. — С. 717–722. — DOI: 10.7868/S0033849417070063.
2. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М. Анализ интенсивностей дифракционных порядков в оптической схеме на основе двух фазовых дифракционных решёток // Вестник РУДН. Серия: Физико-математические науки. — 2006. — Т. 1. — С. 90–95.
3. Комоцкий В. А., Соколов Ю. М., Басистый Е. В. Метод измерения глубины периодических рельефных отражателей поверхностных акустических волн лазерным зондированием // Радиотехника и электроника. — 2011. — Т. 56, № 2. — С. 243–248. — DOI: 10.1134/S1064226910121125.

© Komotskii V. A., Sokolov Yu. M., Suetin N. V., 2018

### Для цитирования:

*Komotskii V. A., Sokolov Yu. M., Suetin N. V. Device for Periodic Modulation of Laser Radiation // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 2. — Pp. 176–182. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-176-182.*

### For citation:

*Komotskii V. A., Sokolov Yu. M., Suetin N. V. Device for Periodic Modulation of Laser Radiation, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 176–182. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-176-182.*

**Сведения об авторах:**

**Комоцкий Владислав Антонович** — профессор, доктор технических наук, профессор Института физических исследований и технологий РУДН (e-mail: komotsky\_va@rudn.university, тел.: +7 (977) 4870523)

**Соколов Юрий Михайлович** — кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией Института физических исследований и технологий РУДН (e-mail: sokolov\_yuri@mail.ru, тел.: +7(977) 3949989)

**Суетин Никита Владимирович** — инженер Института физических исследований и технологий РУДН (e-mail: ponama911@gmail.com, тел.: +7(926) 2154286)

**Information about the authors:**

**Komotskii V. A.** — professor, Doctor of Technical Sciences, professor of Institute of Physical Researches and Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university) (e-mail: komotsky\_va@rudn.university, phone: +7 (977) 4870523)

**Sokolov Yu. M.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of laboratory of Institute of Physical Researches and Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university) (e-mail: sokolov\_yuri@mail.ru, phone: +7(977) 3949989)

**Suetin N. V.** — Engineer of Institute of Physical Researches and Technologies of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university) (e-mail: ponama911@gmail.com, phone: +7(926) 2154286)

## Междисциплинарные исследования

УДК 004.94:34

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-183-193

### Коррупция: механизмы развития, способы профилактики (опыт компьютерного моделирования с применением численных методов)

А. П. Суходолов, И. А. Кузнецова

*Кафедра информатики и кибернетики  
Байкальский государственный университет  
ул. Ленина, д. 11, Иркутск, Россия, 664003*

Преступная деятельность коррумпированных работников российских государственных структур различного уровня является одной из значимых причин пребывания страны в состоянии кризиса. Происходит объединение значительной части управляющей бюрократии в единую антисоциальную систему. Цель такой системы, в первую очередь, — достижение высочайшего уровня своего благосостояния и благосостояния близкого окружения. С другой стороны, конгломерат взаимосвязанных участников этого преступного сообщества вместо выполнения в полной мере возложенных служебных обязанностей реализует планы деструктивного согласованного воздействия на государственный социально-экономический базис, завоёвывая и укрепляя своё силовое влияние в политической, экономической и социальной сферах.

Цель авторов настоящей работы состоит в кратком изложении идеи когнитивного подхода в системном анализе коррупционного процесса. Он представлен имитационной моделью лавинообразного вида особой структуры для демонстрации двойственного механизма управления социальным взрывом, вызванным коррупцией.

Идея применения когнитивного моделирования коррупционного процесса основана на диалектической концепции: управлении внутренним противоречием. Это позволяет отразить динамику состояния системы и продемонстрировать результат накопления количественного признака с переходом в новое качество.

В означенном контуре развитие коррупционной деятельности приводит к взрыву, нарушая целостность социально-экономической системы. Когнитивное исследование (в структурном аспекте) даёт возможность выявить механизм действия факторов, влияющих на ход «размножения» коррумпированной элиты. Причём одни факторы способствуют торможению, другие, наоборот, ускоряют наступление национальной катастрофы. Организационные и правовые меры воздействия на источник деградации позволяют вести борьбу с коррупцией. Российская ментальность, национальные, культурные особенности, а также законодательный базис не позволяют в полной мере перенять опыт борьбы с коррупцией некоторых стран, например, Китая, США, Сингапура. Поэтому следует вырабатывать свои способы.

В настоящих исследованиях использована компьютерная программа, имитирующая лавинообразный процесс. В статье приведены результаты имитационных экспериментов, реализующих механизм двухстороннего регулирования состояния изучаемого феномена. Модель проста и наглядна, содержит малое количество параметров и переменных, позволяет объяснить неотвратимость социально-экономического кризиса в условиях действующего законодательства и ослабленного морально-этического воздействия на преступную анти-социальную коалицию.

Положения и выводы настоящего исследования доказывают неотвратимость катастрофических последствий в социально-экономическом пространстве, но при этом их можно оттянуть на значительное время за счёт принятия организационных мер дисциплинарного, правового, воспитательного характера.

**Ключевые слова:** коррупция, социально-экономическая система, когнитивное моделирование, имитационная модель, лавинообразный процесс, управление, противоречие

## 1. Введение

Коррупция в современном обществе носит характер «вирусной инфекции», атаке которой подвержены его члены, если выполняются «благоприятные» условия активного действия носителя этой инфекции. Существует глубокая аналогия между механизмом коррупции в обществе и разрушительной вирусной деятельностью в биологической популяции, то есть коррупция — это социальная эпидемия. Данный термин (от латинского *contingere* — «растлевать», *corruptio* — «порча», «подкуп») означает форму разложения (деградации) государственного механизма. Это явление способствует достижению цели определённых политических и олигархических кругов, то есть уничтожению системы управления государством и завладению его ресурсами.

## 2. Социально-психологические аспекты коррупции

Механизм деградации системы любой природы универсален. Изучение специалистами его действия в таких сферах естествознания, как биология, эпидемиология, ядерная физика и пр., до сих пор продолжается, достигнуты значимые успехи [1]. Раскрытие сути явления деградации системы и выработку способов управления этим процессом весьма полезно осмыслить, обобщить и применить в области социальных наук (в правовой сфере) для изучения данного феномена и поиска эффективных способов противодействия коррупции.

Заметим, каждая социальная система обладает «иммунной защитой», обеспечиваемой комплексом средств, которые делятся на

1) внутренние правила:

- (а) устоявшиеся общественные нормы поведения;
- (б) культурные традиции;
- (с) общечеловеческие ценности;

2) внешние рычаги:

- (а) уголовное право;
- (б) административное право;
- (с) судебная система;
- (д) общественные, профессиональные обязанности и пр.

Иначе говоря, любому обстоятельству в общественном организме, приводящему к отклонению от нормы социального бытия, должны соответствовать активные и эффективные средства защиты — специальные системы противодействия (в биологии — антитела). Если административно-правовая система государственной защиты не справляется со своими обязанностями в полной мере, есть основание полагать о наступлении т.н. «эффекта СПИДа» [1]. Коррупция в данном рассмотрении представляет одну из главных причин.

Психология и социология объясняют коррупцию как проявление сложно переплетённого множества противоречий эндогенного и экзогенного характера [2]. Имеет место сочетание личных целей с целями системы, в которую встроены субъект, но не всегда такое сочетание гармонично. Поэтому коррупционное действие — это возникший перекос в сторону личного благополучия ответственного лица за счёт отбора и присвоения ресурсов системы в целях личной выгоды, соответственно, в ущерб её функционирования и развития, использования собственных властных полномочий и доверенных субъекту прав, которые противоречат законодательству.

Теория коррупции стала бурно развиваться во второй половине XX в. Роузом и Найя [3]. Основной упор приходился на рассмотрение правовой стороны влияния и политической подоплёки. Кроме того, немаловажная роль отводилась экономической причине расцвета мздоимства и других форм материального обогащения за счёт государства.



### 3. Меры противодействия

Данное социальное явление существовало всегда. Ещё в библейские времена периода XII–VI вв. до н.э. устанавливался запрет чиновникам на принятие даров по службе. В древнем Вавилоне к середине II тыс. до н.э. коррупция была явлением, несущим значительный вред государству, поэтому царь Хаммурапи издал антикоррупционный закон, применяемый к судьям. Подношения даров вельможам Месопотамии, Вавилона, жрецам Египта, судьям, сенаторам Римской империи за принятие решений в пользу просителя заметно нарушали социальный порядок во вред его населению и государству в целом [3]. Зафиксированы также случаи получения взяток в XIII веке. Русские цари Иван III, Иван IV, Пётр I и др. вели непримиримую борьбу с вымогателями материального вознаграждения, доводя наказание до смертной казни.

В наше время данное антиобщественное явление процветает повсюду и несёт ощутимую угрозу государственной безопасности. Методы борьбы с коррупцией разрабатываются, применяются во многих государствах. Накоплен положительный опыт использования этих способов в отдельных странах. Его можно было бы взять для выработки комплекса мер выявления, предотвращения и наказания в нашей стране. Но некоторые их недостатки и особенности менталитета граждан Российской Федерации, национальных традиций, российского законодательства затрудняют внедрение этого опыта [4–6]. Так, в Великобритании для подавления коррупционеров ужесточают наказание. Значит, во избежание ответственности усложняется схема получения взяток. В Сингапуре коррупция почти истреблена за счёт

1. деятельности сформированного специального антикоррупционного Комитета по расследованию преступлений коррупционного характера;
2. увеличения заработной платы чиновникам, судьям и т.п.

Китайский опыт дал положительные результаты, но при этом применяемые там меры — смертная казнь в особых случаях — не могут быть использованы в России из-за моратория на смертную казнь. Кроме того, менталитет китайского чиновника значительно отличается от менталитета российского. Определённые успехи достигнуты в Италии, США. М. Делягин, анализируя способы антикоррупционной борьбы, предлагает перенять американский и итальянский опыт, основанные на тотальном контроле и ужесточении наказания [7].

Глава Национального антикоррупционного комитета (НАК) России планирует дополнительные правовые механизмы для борьбы с коррупцией наряду с теми, которые прописаны в отечественном законодательстве [8, 9]. Так, правительство РФ участвовало в создании методики изучения генезиса коррупции чиновников. Применяется план противодействия чиновничьему произволу. Следует отметить, организационно-правовая основа антикоррупционной борьбы имеет ряд недостатков, снижающих её эффективность [10].

Коррупция в России системна, следовательно, для рассмотрения проблемы необходим системный подход, учитывающий ключевые факторы, способствующие как развитию данного социального недуга, так и его свёртыванию. Человеческая натура, как было отмечено, двойственна, то есть противоречива, поэтому игнорировать коррупцию как общественное явление полностью невозможно: оно все больше проявляется и становится серьёзным препятствием в гармоничном развитии социума. Для многих чиновников использование должностных полномочий в корыстных целях вошло в их образ жизни [4, 5, 10].

В рамках настоящей статьи представим процесс коррупционного развития как кибернетическую модель, раскрывающую организацию управляемой деградации с включением противоположно действующих рычагов. Суть такого подхода с особой структурой, отражающей поляризованность управляющих действий, опирается на диалектическую концепцию [11, 12]. Использован опыт имитационного моделирования с применением численных методов [12–14].

В системном анализе протекание процесса рассматривается в двух режимах: функционирования и развития. Режим функционирования отражает организацию системы,

позволяющую выполнять её основные функции. Если в системе происходит количественное изменение характеристик — накопление, приводящее к изменениям свойств, то такие целостности проявляются и в процессе развития. При взаимодействии с окружающей средой (внешнее управление) могут произойти параметрические, структурные и функциональные изменения [15, 16].

Чтобы снизить степень неопределённости в понимании природы функционирования и развития коррупционной системы, следует, прежде всего, выявить основные рычаги, поддерживающие и управляющие коррупционным развитием в целом (участники процесса функционирования взаимосвязаны, формируя структуры разного типа: линейную, сетевую, иерархическую). Очевидно, состояние процесса в каждый рассматриваемый момент времени различно. Поэтому моделирование системы в развитии позволяет выявить способы управления процессом, используя рычаги воздействия со стороны системы управления.

#### 4. Имитационная модель коррупционного процесса

В развитии коррупционных процессов по принципу положительной обратной связи (размеры поборов, «откатов» и «распилов» неукоснительно возрастают) для укрепления системы личного обогащения необходимо вовлекать в коррупционный «бизнес» других лиц, склонных к моральной деградации. Отсюда следует, что развитие коррупционной лавины принципиально не отличается от возникновения снежной лавины, развития эпидемии, ядерного взрыва, революции, др. природных и социальных катастроф.

В [17, 18] применён системный подход в моделировании лавинных процессов с использованием типовых звеньев теории автоматического управления. Лавинная модель в этих работах отражает диалектическую природу функционирования и развития. Коррупционная лавина аналогична лавинным процессам другого вида по принципу организации и механизмам управления.

В своё время К. Бернар, основоположник учения о гомеостазе, определял жизнь системы как результат конкуренции (конflikта) между внутренним состоянием системы и влиянием внешней среды, проявляющейся в двух процессах: синтезе и распаде. Управление коррупцией организовано по гомеостатическому принципу, т.е. осуществляется целенаправленное регулирование внутренним противоречием.

Имитационную модель коррупции формально (с применением гомеостатических принципов) можно представить системой, включающей множество  $N$  взаимосвязанных субъектов, склонных к коррупционной деятельности с вероятностью  $p$  и вовлечению в эту сферу («заражению»)  $k$  субъектов из дополняющего множества остальных членов  $\bar{N}$ ; ( $N \cup \bar{N} = E$ ). Коэффициент  $k$  — число «заражаемых» — принят для упрощения модели,  $E$  — общая численность рассматриваемых субъектов.

Морально-психологическая обстановка в социуме формирует негативный фон, оказывающий деморализующее действие на лиц, обладающих склонностью реализовать корыстный интерес. По мнению Л. Рон Хаббарда, «То, что намерение ещё не действие, ни в коей мере не умаляет значения намерения» [18] Развитие коррупции уплотняет формируемый негативный фон. Он, в свою очередь, оказывает прямое влияние на увеличение численности стяжателей, т.е. «заражаются» субъекты из множества  $\bar{N}$ , пополняя армию чиновников-взяточников; увеличиваются вероятность  $p$ , коэффициент  $k$ . Численность коррупционеров растёт: каждый «заражает»  $k$  следующих. Если не сдерживать организационными мерами этот процесс, государство «погибнет».

Процесс управляется двумя надстройками (рис. 1), одна из которых способствует ускорению роста числа коррупционеров — дезорганизующая, другая — организующая — сокращает их численность за счёт «оздоровления» чиновничьего сообщества, применяя разные меры воздействия. Управление несёт двойной характер действия, противоположного по целям: с одной стороны, интенсифицирует процесс криминализации за счёт увеличения коррупционеров ( $N + \Delta N$ ), увеличения вероятности

морального падения ( $p + \Delta p$ ), числа вовлекаемых в преступный сговор ( $k + \Delta k$ ) и, с другой стороны, замедляет (соответственно, с корректировкой параметров:  $N - \Delta N$ ,  $p - \Delta p$ ,  $k - \Delta k$ ), то есть сводит к вялотекущему развитию. Результат зависит от соотношения сил воздействия управляющих надстроек, то есть от величины противоречия.

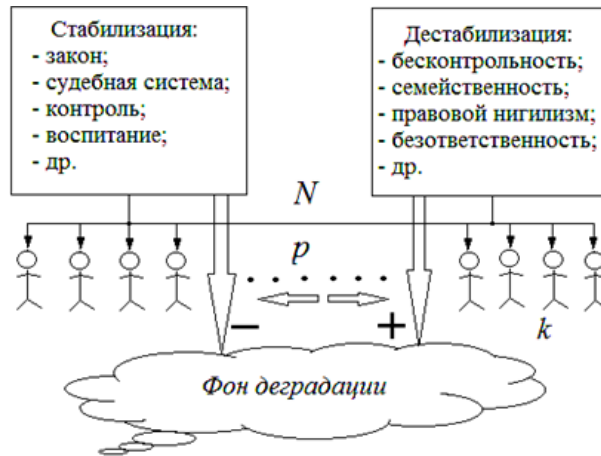


Рис. 1. Схема управления коррупцией

Принципиальная блок-схема алгоритма управления коррупцией (развитием или торможением развития лавинного процесса) представлена на рис. 3.

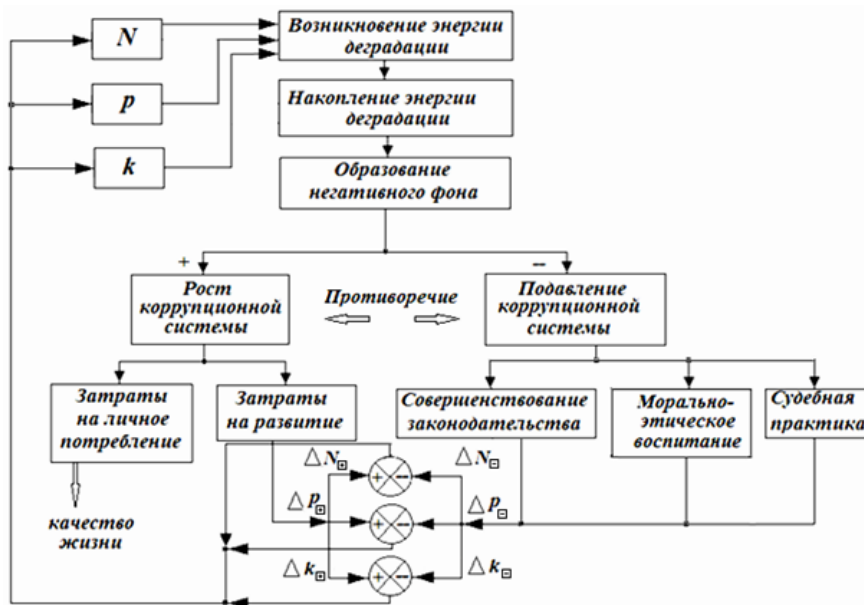


Рис. 2. Принципиальная блок-схема управления коррупционным процессом

Параметры и переменные модели перечислены ниже:

- $\mathcal{E}_{\text{дег.}}$  —  $const$ , выделяемая энергия деградации, пополняющая негативный фон;
- $N(t)$  — численность членов, склонных к коррупции;
- $\mathcal{E}_{\text{сум.}}(t)$  — накопленная энергия деградации;

- $p(t)$  – вероятность деградации;
- $\mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t)$  – общий негативный фон деградации;
- $k(t)$  – коэффициент «заражения»;
- $\mathcal{E}_{\text{дис.}}(t)$  – потеря энергии (диссипация);
- $T_{\text{нак.}}, T_{\text{дис.}}, T_{\text{кор.}}, T_{\text{орг.}}$  – постоянные времени;
- $\mathcal{E}_{\text{кор.}}(t)$  – энергия, используемая для развития лавинного процесса;
- $T$  – время моделирования;
- $\mathcal{E}_{\text{орг.}}(t)$  – энергия, используемая для подавления коррупции;
- $n, m, n_1, m_1, m_2, m_3, m_4$  – const;
- $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$  – изменяемые коэффициенты, учитывающие нелинейность процесса;
- $\mathcal{E}_{\text{порог.}}, \mathcal{E}_{\text{порог. нас.}}$  – границы области насыщения негативного фона;
- $k_{\text{max}}, k_{\text{min}}, \beta_{\text{min}}, \beta_{\text{max}}, \gamma_{\text{min}}, \gamma_{\text{max}}$  – ограничения показателей.

Математическая модель лавинного процесса включает следующие уравнения:

$$\mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) = \frac{N(t)k(t)p(t)}{T_{\text{нак.}}} \int_0^T \mathcal{E}_{\text{дег.}} dt; \quad \mathcal{E}_{\text{дис.}}(t) = \frac{1}{T_{\text{дис.}}} \int_0^T \alpha(t) \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) dt;$$

$$\mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) = \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) - \mathcal{E}_{\text{дис.}}(t);$$

$$\alpha_{\text{дис.}}(t) = \begin{cases} m_1 \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t), & \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) < \mathcal{E}_{\text{порог.}}; \\ m_2 \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) + \mathcal{E}_{\text{порог.}}(m_1 - m_2), & \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) \in (\mathcal{E}_{\text{порог.}}, \mathcal{E}_{\text{порог. нас.}}); \\ m_1 \mathcal{E}_{\text{порог.}} + (\mathcal{E}_{\text{порог. нас.}} - \mathcal{E}_{\text{порог.}})m_2, & \mathcal{E}_{\text{сум.}}(t) \geq \mathcal{E}_{\text{порог. нас.}}; \end{cases}$$

$$p(t) = \begin{cases} m \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t), & \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) < \mathcal{E}_{\text{порог.}}; \\ 1, & \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) \geq \mathcal{E}_{\text{порог.}}; \end{cases}$$

$$k(t) = \begin{cases} n \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) + k_{\text{min}}, & \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) < \mathcal{E}_{\text{порог.}}; \\ k_{\text{max}}, & \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) \geq \mathcal{E}_{\text{порог.}}; \end{cases}$$

$$\mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) = \mathcal{E}_{\text{орг.}}(t) + \mathcal{E}_{\text{кор.}}(t);$$

$$\mathcal{E}_{\text{кор.}}(t) = \frac{1}{T_{\text{кор.}}} \int_0^T \beta(t) \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) dt; \quad \mathcal{E}_{\text{орг.}}(t) = \frac{1}{T_{\text{орг.}}} \int_0^T \gamma(t) \mathcal{E}_{\text{нег.ф.}}(t) dt;$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_{\text{min}} + m_3 \mathcal{E}_{\text{кор.}}(t), & \mathcal{E}_{\text{кор.}}(t) < \mathcal{E}_{\text{пар.нас.}}; \\ \beta_{\text{max}}, & \mathcal{E}_{\text{пар.}}(t) \geq \mathcal{E}_{\text{пар.нас.}}; \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_{\text{min}} + m_4 \mathcal{E}_{\text{орг.}}(t), & \mathcal{E}_{\text{орг.}}(t) < \mathcal{E}_{\text{орг.нас.}}; \\ \gamma_{\text{max}}(t), & \mathcal{E}_{\text{орг.}}(t) \geq \mathcal{E}_{\text{орг.нас.}}. \end{cases}$$

На основе алгоритма создана программа «Модель формирования лавинного процесса в естественных и социально-экономических системах» [19], позволяющая проводить имитационные эксперименты для изучения условий ускорения или, наоборот, торможения коррупционного «взрыва».

При разработке программного средства использована среда Borland C++ Delphi 7.0 (язык программирования Basic). В перечень реализуемых функций входят ввод начальных условий переменных и параметров, представление справочных материалов по модели, расчёт, вывод графика лавинного развития процесса деградации. Программа используется в качестве пособия для изучения структурных особенностей развивающихся социально-экономических систем студентами Байкальского государственного университета.

## 5. Примеры экспериментирования с моделью

На рис. 3–5 отражены результаты имитационных экспериментов с моделью лавинного процесса, демонстрирующие формирование коррупционного взрыва в разных условиях развития. Условия задаются исходными параметрами и переменными.

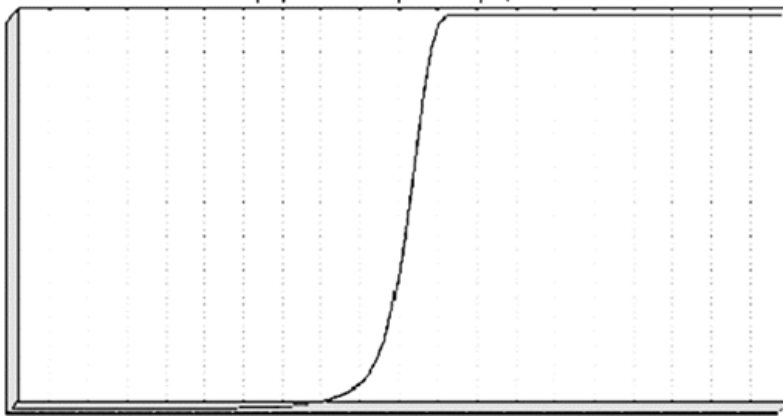


Рис. 3. Моделирование развития коррупционного взрыва

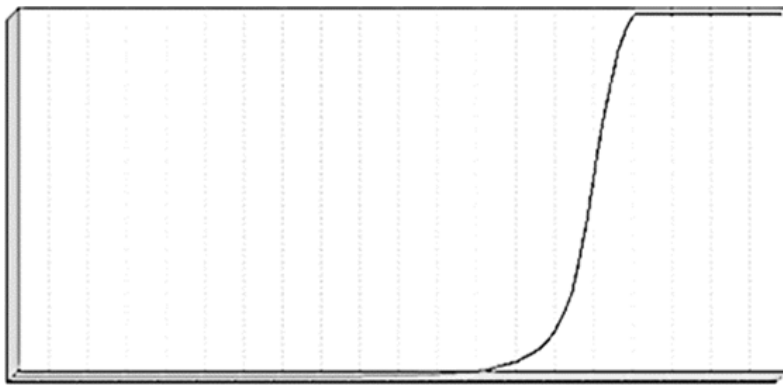


Рис. 4. Моделирование коррупционного взрыва в условиях усиления ряда мер борьбы

Так, на графике рис. 3 показан коррупционный взрыв в условиях неконтролируемого использования государственных ресурсов в личных целях.

Взрыв на рис. 4 происходит позже и формируется с меньшей интенсивностью, так как начальные уровни значений вероятности  $p$  и числа «заражаемых»  $k$  снижены.

Рис. 5 демонстрирует вялотекущее формирование деградации за счёт резкого усиления контроля чиновничьего аппарата и подавления коррупции с применением судебно-правовых инструментов воздействия (кроме уменьшения значений  $p$  и  $k$ , в модели предусмотрено изменение распределения энергии негативного фона в пользу организующей надстройки).

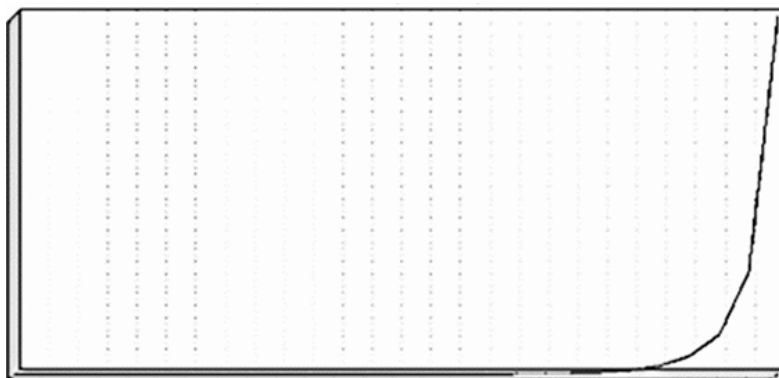


Рис. 5. Моделирование валютящего процесса в условиях ужесточения борьбы с коррупцией

## 6. Заключение

Средствами имитационного моделирования продемонстрирован механизм лавинообразного формирования коррупционного взрыва, приводящего к социально-экономическому краху. При проведении имитационных (компьютерных) экспериментов установлено и показано, что совершенствование и комплексное применение правовых, социально-экономических, воспитательных, организационных, политических и других мер даёт возможность снизить темпы роста численности коррупционеров, оздоровить психологический климат в обществе.

## Литература

1. Горский Ю. М., Степанов А. М., Теслинов А. Г. Гомеостатика: гармония в игре противоречий. — Иркутск: Репроцентр А1, 2008. — 634 с.
2. Олейник А. Н. Институциональная экономика: Учебное пособие. — М.: ИНФРА-М, 2002. — 416 с.
3. Беспалько В. Г. Религиозно-нравственные начала борьбы с коррупцией в Моисеевом уголовном праве в их сравнении с российским законодательством // Взаимодействие органов государственной власти при расследовании преступлений коррупционной направленности: проблемы и пути их решения: материалы Международной научно-практической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения выдающегося русского учёного Николая Сергеевича Алексеева (Москва, 23 октября 2014 года). — М.: Академия Следственного комитета Российской Федерации, 2014. — С. 152.
4. Любкина Н. А. Коррупция в России: политико-правовые принципы и направления противодействия: монография. — М.: РУСАЙНС, 2017. — 162 с.
5. Артемьев А. Б. Коррупция в механизме функционирования государства (теоретико-правовое исследование в рамках эволюционного подхода): дисс. ... докт. юрид. наук: Кандидатская диссертация / Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, Москва. — 2014.
6. Kurer O. Clientelism, Corruption, and the Allocation of Resources // Public Choice. — 1993. — No 77. — Pp. 259–273.
7. Делягин М. Г. Поможет ли России опыт западных стран по борьбе с коррупцией? [Электронный ресурс]. — <https://delyagin.ru/articles/191>.

8. Руководитель НАК — о том, почему в 2016 – 2017 годах произошел всплеск коррупционных дел. [Электронный ресурс]. — <https://www.irk.kp.ru/daily/26750/3780330/>.
9. Федеральный закон от 25 декабря 2008 г. N 273-ФЗ «О противодействии коррупции». Система ГАРАНТ. [Электронный ресурс]. — <http://base.garant.ru/12164203/#ixzz51ez9G0kr>.
10. Андриянов В. Н. Коррупция: понятие и история развития, основные направления и формы противодействия : учебное пособие. — Иркутск: Изд-во БГУЭП, 2010. — 70 с.
11. Sukhodolov A. P., Popkova E. G., Kuzlaeva I. M. Internet Economy vs Classic Economy: Struggle of Contradictions. — Springer International Publishing, 2017. — 75 p.
12. Построение модели преступности с применением когнитивного подхода / А. П. Суходолов, А. А. Попов, В. А. Маренко и др. // Всероссийский криминологический журнал. — 2017. — Т. 11, № 4. — С. 649–655.
13. Collins G. W. II Fundamental Numerical Methods and Data Analysis. [The electronic resource]. — 2003. — <http://eek.diary.ru/p178707231.htm#607551026>.
14. Амосов А. Л., Дубинский Ю. Л., Копченова Н. В. Вычислительные методы для инженеров: учебное пособие. — М.: Высш. шк., 1994. — 544 с.
15. Анфилатов В. С. Системный анализ в управлении. — М.: Финансы и статистика, 2009. — 368 с.
16. Баринов В., Болотова Л. Теория систем и системный анализ в управлении организациями: справочник. — М.: Финансы и статистика, 2012. — 848 с.
17. Gorsky Y. V., Kuznetsova I. A. Simulation of “Avalanche” Process (One of the Manifestation of the Law of the Unity and Conflict of Opposites) // Modelling and Simulation of Systems: Proceedings of the 31st Conference Zabreh n. M., Czech Republic, April 25–30. — 1997. — Pp. 61–66.
18. Хаббард Л. Р. Дианетика: Современная наука душевного здоровья. — М.: Издательская группа Нью Эра, 1993. — 530 с.
19. Кузнецова И. А. Модель формирования лавинного процесса в естественных и социально-экономических системах. Свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ № 2014614802, 07.05.2014.

UDC 004.94:34

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-183-193

## **Corruption: Development Mechanisms, Ways of Prevention (Experience of Computer Modeling with Application of Numerical Methods)**

**A. P. Sukhodolov, I. A. Kuznetsova**

*Computer science and cybernetics Department  
Baikal State University  
11 Lenin St., Irkutsk, 664003, Russian Federation*

Criminal activity of the corrupted employees of the Russian government institutions of various levels is one of the significant reasons of stay of the country in a condition of crisis. There is an association of considerable part of the operating bureaucracy in uniform antisocial system. A main goal of such a system is achievement of the highest level of the welfare and welfare of friends and relatives. On the other hand, the conglomerate of the interconnected participants of this criminal community, instead of fully performing fully their official duties, realizes plans of the destructive coordinated impact on the state social and economic basis, gaining and strengthening the power influence in political, economic and social spheres.

The purpose of the authors of this work is a brief description of the idea of cognitive approach to the system analysis of corruption process. It is presented by simulation model of the avalanche

type of special structure for demonstration of the dual mechanism of management of the social explosion caused by corruption.

The idea of applying cognitive modeling of corruption process is based on the dialectic concept: control of an internal contradiction. It allows to reflect dynamics of a system condition and to show result of accumulation of a quantitative property with transition to the new quality.

In the marked area development of corruption activity leads to explosion, breaking integrity of social and economic system. Cognitive research (in structural aspect) gives us the chance to reveal the mechanism of action of the factors influencing the course of “reproduction” of the corrupted elite. However, some factors promote braking, others, on the contrary, accelerate approach of national accident. Organizational and legal impacts on a source of degradation allow conducting fight against corruption. The Russian mentality, national, cultural features, and legislative basis do not allow adopting fully experience of fight against corruption of some countries, for example, of China, the USA, Singapore, etc. Therefore, it is necessary to develop the ways.

In this study, the computer program of the avalanche process is used. Results of the computer experiments realizing the mechanism of double regulation of a condition of the studied phenomenon are given. The model is simple and evident, contains not many parameters and variables, and allows explaining inevitability of social and economic crisis in conditions of the current legislation and the weakened moral and ethical influence on the criminal antisocial union.

Provisions and conclusions of this study prove inevitability of catastrophic consequences in social and economic space, but they can be delayed for considerable time due to disciplinary, legal, educational influence.

**Key words and phrases:** Corruption, social and economic system, cognitive modeling, computer model, the avalanche process, management, contradiction

## References

1. Yu. M. Gorskii, A. M. Stepanov, A. G. Teslinov, Homeostatics: Harmony in a Play of Contradictions, Reprintsentr A1 Publ., Irkutsk, 2008, in Russian.
2. A. N. Oleynik, Institutional Economy: Manual, INFRA-M Publ., Moscow, 2002, in Russian.
3. V. G. Bespalko, The Religious and Moral Beginnings of Fight Against Corruption in Moiseevy Criminal Law in Their Comparison with the Russian Legislation, in: Interaction of public authorities at investigation of crimes of a corruption orientation: problems and ways of their decision: materials of the International scientific and practical conference devoted to the 100 anniversary since the birth of the outstanding Russian scientist Nikolay Sergeevich Alekseev (Moscow, on October 23, 2014), Academy of Investigative committee of the Russian Federation, Moscow, 2014, p. 152, in Russian.
4. N. A. Lyubkina, Corruption in Russia: Political Legal Principles and Directions of Counteraction: Monograph, RUSAYNS Publ., Moscow, 2017, in Russian.
5. A. B. Artemyev, Corruption in the Mechanism of Functioning of the State (Teoretiko-Legal Research within Evolutionary Approach). Moscow, Ph.D. thesis, Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration, [The electronic resource]. URL: [http://www.ranepa.ru/docs/dissertation/202-text\\_diss.pdf](http://www.ranepa.ru/docs/dissertation/202-text_diss.pdf), in Russian (2014).
6. O. Kurer, Clientelism, Corruption, and the Allocation of Resources, Public Choice (77) (1993) 259–273.
7. M. G. Delyagin, Can help of Russia experiment of the western countries on fight against corruption?, in Russian.  
URL <https://delyagin.ru/articles/191>
8. The Head the NAC — about Why in 2016–2017 There was a Surge in Corruption Affairs, in Russian.  
URL <https://www.irk.kp.ru/daily/26750/3780330/>
9. The Federal Law of December 25, 2008 N 273-FZ “About corruption counteraction”. System GUARANTOR [An electronic resource]., in Russian.  
URL <http://base.garant.ru/12164203/#ixzz51ez9G0kr>



10. V. N. Andriyanov, Corruption: Concept and History of Development, Main Directions and Forms of Counteraction: Manual, Publishing house of BGUEP, Irkutsk, 2010, in Russian.
11. A. P. Sukhodolov, E. G. Popkova, I. M. Kuzlaeva, Internet Economy vs Classic Economy: Struggle of Contradictions, Springer International Publishing, 2017.
12. A. P. Sukhodolov, A. A. Popov, V. A. Marenko, et al., Creation of Model of Crime with Application of Cognitive Approach, Russian Journal of Criminology 11 (4) (2017) 649–655, in Russian.
13. G. W. Collins, II Fundamental Numerical Methods and Data Analysis (2003). URL <http://eek.diary.ru/p178707231.htm#607551026>
14. A. L. Amosov, Yu. L. Dubinsky, N. V. Kopchenova, Computing Methods for Engineers, High School, Moscow, 1994, in Russian.
15. V. S. Anfilatov, The System Analysis in Management, Finance and Statistics Publ., Moscow, 2009, in Russian.
16. V. Barinov, The Theory of Systems and the System Analysis in Management of the Organizations: Reference Book, Finance and Statistics Publ., Moscow, 2012, in Russian.
17. Y. V. Gorsky, I. A. Kuznetsova, Simulation of “Avalanche” Process (One of the Manifestation of the Law of the Unity and Conflict of Opposites), in: Modelling and Simulation of Systems: Proceedings of the 31st Conference Zabreh n. M., Czech Republic, April 25–30, 1997, pp. 61–66.
18. L. R. Hubbard, Dianetikcs: Modern Science of Sincere Health, New Hera Publ. group, Moscow, 1993, in Russian.
19. I. A. Kuznetsova, Model of Formation of Avalanche Process in Natural, and Social and Economic Systems. Certificate on the state registration of the COMPUTER program, No. 2014614802, 07.05.2014, in Russian.

© Суходолов А. П., Кузнецова И. А., 2018

#### Для цитирования:

*Суходолов А. П., Кузнецова И. А.* Коррупция: механизмы развития, способы профилактики (опыт компьютерного моделирования с применением численных методов) // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 183–193. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-183-193.

#### For citation:

Sukhodolov A. P., Kuznetsova I. A. Corruption: Development Mechanisms, Ways of Prevention (Experience of Computer Modeling with Application of Numerical Methods), RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (2) (2018) 183–193. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-2-183-193. In Russian.

#### Сведения об авторах:

**Суходолов Александр Петрович** — профессор, доктор экономических наук, ректор Байкальского государственного университета (e-mail: [rector@bgu.ru](mailto:rector@bgu.ru), тел.: +7 (3952) 52-26-22)

**Кузнецова Ирина Альфредовна** — доцент кафедры информатики и кибернетики Байкальского государственного университета (e-mail: [iak\\_irk@bk.ru](mailto:iak_irk@bk.ru), тел.: +7 (914)-882-53-82)

#### Information about the authors:

**Sukhodolov A. P.** — Professor, DSc. in Economics, Rector of Baikal State University (e-mail: [rector@bgu.ru](mailto:rector@bgu.ru), phone: +7 (3952) 52-26-22)

**Kuznetsova I. A.** — PhD in Engineering, Associate Professor of Computer Science and Cybernetics Department of Baikal State University (e-mail: [iak\\_irk@bk.ru](mailto:iak_irk@bk.ru), phone: +7 (914)-882-53-82)



## Правила оформления статей

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе  $\text{\LaTeX}$  (используется версия  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , для набора формул используется макропакет  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\text{\LaTeX}$ ). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитируемую литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS,  $\text{\TeX}$ ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полтона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе  $\text{\BibTeX}$  и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям: оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, комн. 313; e-mail: [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика.  
Информатика. Физика»**

Количество  
комплектов:

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

**ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА**

на журнал

**18235**

(индекс издания)

ПВ	место	литер

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика. Информатика. Физика»**

Стоимость	подписки	руб. __ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	руб. __ коп.	

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)