



ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СЕРИЯ:

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.  
ФИЗИКА

Том 26 № 1 (2018)

Научный журнал  
Издается с 1993 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ No ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

RUDN JOURNAL OF  
MATHEMATICS,  
INFORMATION SCIENCES  
AND PHYSICS

Volume 26 Number 1 (2018)

Founded in 1993

Founder: RUDN University

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

### Цель и тематика

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски Журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) [elibrary.ru](http://elibrary.ru).

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru)

---

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year.

Languages: Russian, English.

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>.

### Aim and Scope

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).

© Российский университет дружбы народов, 2018

© Peoples' Friendship University of Russia, 2018

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

### Главный редактор

**Рыбаков Юрий Петрович** —  
Заслуженный деятель науки РФ, доктор  
физико-математических наук,  
профессор  
РУДН, Россия,  
rybakov\_yp@rudn.university

### Заместитель главного редактора

**Севастьянов Леонид Антонович** —  
доктор физико-математических наук,  
профессор  
РУДН, Россия,  
sevastianov\_la@rudn.university

### Члены редколлегии

**Ильгисонис Виктор Игоревич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

**Скубачевский Александр Леонидович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

**Гупта Субхашин Датта** (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

**Мартикайнен Олли Эрkki** (Финляндия) — Ph.D., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

**Медведев М. В.** (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

**Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо** (Испания) — профессор Барселонского университета

**Саха Виджан** (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

**Чулуунбаатар Очбадрах** (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

---

**Литературный редактор:** *К. В. Зенкин*

**Компьютерная вёрстка:** *А. В. Королькова*

**Адрес редакции:**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7(495)955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

**Адрес редакционной коллегии**

**серии «Математика. Информатика. Физика»:**

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419  
тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: mipjh@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru  
сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Подписано в печать 12.01.2018. Выход в свет 5.02.2018. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 11,68 Тираж 500 экз. Заказ № 11. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)  
117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,  
тел. (495) 952-04-41, e-mail: ipk@rudn.university

## EDITORIAL BOARD

### Editor-in-Chief

**Rybakov Yu. P.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia  
RUDN University, Russia,  
rybakov\_yp@rudn.university

### Vice Editor-in-Chief

**Sevastianov L. A.** — DSc in Physics and Mathematics, professor  
RUDN University, Russia,  
sevastianov\_la@rudn.university

### Members of the editorial board

**Il'gisonis V. I.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center "Kurchatov Institute"

**Samouylov K. E.** — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

**Skubachevski A. L.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

**Gupta Subhasish Dutta** (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

**Martikainen Olli Erkki** (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

**Medvedev M. V.** (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

**Ramirez Inostrozo Orlando Raphael** (Spain) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

**Saha Bijan** (Bangladesh) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

**Chuluunbaatar Ochbadrah** (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

---

**Review Editor:** *K. V. Zenkin*

**Computer Design:** *A. V. Korolkova*

**Address of editorial board:**

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

**Address of editorial board**

**"RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics":**

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education "RUDN University"

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university



## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- Альхалиль Н. Х., Алмохаммад Х.** Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса . . . . . 3
- Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е.** Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II . . . . . 13
- Осипов О. А.** Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы . . . . . 28

### Математическое моделирование

- Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А.** О сведении уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца . . . . . 39
- Амирханов И. В., Саркар Н. Р.** Об одном методе исследования самосогласованной нелинейной краевой задачи на собственные значения с растущими потенциалами . . . . . 49
- Беляков Глеб** Об одном методе оценки многомерной плотности на основе ближайших соседей . . . . . 58
- Щетинин Е. Ю., Рассакан Н. Д.** Моделирование полей экстремальных осадков на территории Европейской части России . . . . . 74

### Информатика и вычислительная техника

- Бобрикова Е. В., Гайдамака Ю. В.** Анализ времени распространения файла для одноранговой сети . . . . . 84
- Правила оформления статей** . . . . . 93



## CONTENTS

### Mathematics

|   |    |
|---|----|
| <b>Alkhalil N., Almohammad Kh.</b> Differential Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type . . . . .          | 3  |
| <b>Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Samouylov K. E.</b> A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers. Part II . . . . . | 13 |
| <b>Osipov O. A.</b> A Heterogeneous Fork-Join Queueing System in Which Each Job Occupy All Free Servers . . . . .                         | 28 |

### Mathematical Modeling

|  |    |
|--|----|
| <b>Malykh M. D., Sevastianov A. L., Sevastianov L. A., Tyutyunnik A. A.</b> On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations . . . . . | 39 |
| <b>Amirkhanov I. V., Sarker N. R.</b> On a Method of Investigation of the Self-Consistent Nonlinear Boundary-Value Problem for Eigen-Values with Growing Potentials . . . . .            | 49 |
| <b>Beliakov Gleb</b> On a Method of Multivariate Density Estimate Based on Nearest Neighbours Graphs . . . . .   | 58 |
| <b>Shchetinin E. Yu., Rassakhan N. D.</b> Modeling of Extreme Precipitation Fields on the Territory of the European Part of Russia . . . . .   | 74 |

### Computer Science and Computer Engineering

|   |    |
|---|----|
| <b>Bobrikova E. V., Gaidamaka Yu. V.</b> Analysis of the File Distribution Time in Peer-to-Peer Network . . . . . | 84 |
| <b>Guidelines for Authors</b> . . . . .   | 93 |



## Математика

УДК 517.951

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-3-12

### Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса

Н. Х. Альхалиль, Х. Алмохаммад

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе изучаются дифференциальные свойства свёрток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда  $G_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . Теория классических потенциалов Бесселя является важным разделом общей теории пространств дифференцируемых функций дробной гладкости и её приложений в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли, С. М. Никольского, И. М. Стейна, В. Г. Мазы. Локальное поведение ядер Бесселя–Макдональда в окрестности начала координат характеризуется наличием особенности степенного типа  $|x|^{n-\alpha}$ . На бесконечности они стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью. Исследованию дифференциальных свойств обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса были посвящены недавние работы М. Л. Гольдмана, А. В. Малышевой и Д. Хароске.

В данной статье изучаются дифференциальные свойства потенциалов, обобщающих классические потенциалы Бесселя–Рисса. Ядра потенциалов могут иметь нестепенные особенности в окрестности начала координат. Их поведение на бесконечности связано лишь с условием интегрируемости, так что в рассмотрение включены и ядра с компактным носителем. В связи с этим порождённые ими пространства обобщённых потенциалов Бесселя относятся к так называемым пространствам обобщённой гладкости. Рассмотрен случай когда выполнен критерий вложения потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций. В этом случае дифференциальные свойства потенциалов выражены в терминах поведения их модулей непрерывности в равномерной метрике. Установлены критерии вложения потенциалов в пространства Кальдерона и получены явные описания модулей непрерывности потенциалов и оптимальных пространств для таких вложений в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространство Лоренца. Эти результаты конкретизируют общие конструкции, установленные в предыдущих работах.

**Ключевые слова:** потенциалы Бесселя, пространства Лоренца, пространства Кальдерона, модули непрерывности, перестановочно инвариантные пространства, оптимальные вложения

### 1. Введение

В работе изучаются дифференциальные свойства свёрток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда  $G_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . Теория классических потенциалов Бесселя является важным разделом общей теории пространств дифференцируемых функций дробной гладкости и её приложений в теории дифференциальных уравнений в частных производных. Свойства классических ядер Бесселя–Макдональда подробно изучены в книгах Беннетта и Шарпли [1], С. М. Никольского [2], И. М. Стейна [3], В. Г. Мазы [4]. Локальное поведение ядер Бесселя–Макдональда в окрестности начала координат характеризуется наличием особенности степенного типа  $1/|x|^{n-\alpha}$ . В данной статье мы изучаем дифференциальные свойства свёрток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда. В отличие от классического случая в них допускаются нестепенные особенности ядер в окрестности начала координат (см. подробнее [5, 6]).

Интегральные свойства обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса были рассмотрены в нашей работе [7]. Мы опираемся в наших оценках на результаты работы [8]. Дифференциальные свойства потенциалов характеризуются с помощью модулей непрерывности любых порядков в равномерной норме. В данной работе установлены точные оценки модулей непрерывности порядка  $k \in \mathbb{N}$ . Отметим, что общие точные по порядку оценки для модулей непрерывности потенциалов были получены в работах М. Л. Гольдмана, А. В. Малышевой, Д. Хароске [9–11]. Здесь мы конкретизируем эти общие результаты в случае, когда базовое пространство для потенциалов является весовым пространством Лоренца с общими весовыми функциями. Полученная конкретизация общих построений позволяет дать явные выражения для точных мажорант модулей непрерывности потенциалов и применить эти оценки для описания пространств типа Кальдерона, в которые вложены пространства потенциалов.

## 2. Вспомогательные определения

Пространство потенциалов  $H_E^G(\mathbb{R}^n)$  на  $n$ -мерном евклидовом пространстве определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства (см. [7])  $H_E^G(\mathbb{R}^n) = u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)$ , где  $E(\mathbb{R}^n)$  — перестановочно инвариантное пространство (кратко: ПИП). При этом используется аксиоматика, введённая авторами К. Беннетт и Р. Шарпли [1].

В частности,  $E' = E'(\mathbb{R}^n)$  — ассоциированное ПИП, т. е. ПИП с нормой:

$$\|g\|_{E'} = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |fg| \, d\mu : f \in E, \|f\|_E \leq 1 \right\}.$$

Для ПИП  $E(\mathbb{R}^n)$ ,  $E'(\mathbb{R}^n)$  рассмотрим пространства  $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\tilde{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$  — их представления Люксембурга, т. е. ПИП, для которых выполнены следующие соотношения  $\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}$ ,  $\|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}$ , где  $f^*$  — убывающая перестановка функции  $f$ , т. е. неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на  $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ , которая равноизмерима с  $f$ :

$$\mu_n\{x \in \mathbb{R}^n : |f(y)| > y\} = \mu_1\{t \in \mathbb{R}_+ : |f^*(t)| > y\}, \quad y \in \mathbb{R}_+.$$

Введём понятие максимальной функции (см. [7]):

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau) \, d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Введём класс монотонных функций  $\text{Im}_n(R)$  следующим образом: функция  $\Phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}_+ \in \text{Im}_n(R)$ , если для  $\Phi$  выполнены следующие условия:

- 1)  $\Phi$  — убывающая и непрерывная на  $(0, R)$  функция;
- 2) существует постоянная  $c \in \mathbb{R}_+$  такая, что

$$\int_0^r \Phi(\rho) \rho^{n-1} \, d\rho \leq c\Phi(r)r^n, \quad r \in (0, R).$$

**Определение 1.** Пусть  $\Phi \in \text{Im}_n(\infty)$ . Считаем, что  $G \in S_R(\Phi)$ , если  $G(x) \cong \Phi(|x|)$ ,  $0 < \rho = |x| < R$ ,  $R \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 2.** Пусть  $\Phi \in \text{Im}_n(\infty)$ . Считаем, что  $G \in S_R(\Phi; X)$ , где  $X(\mathbb{R}^n)$  — ПИП, если  $G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x)$ :  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ ,  $R \in \mathbb{R}_+$ ,  $G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x)$ ;  $G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x)$ ,  $G_R^0(x) \cong \Phi(|x|)$  при  $|x| < R$ ,  $G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 3 (см. [6]).** Потенциалы  $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$  называются обобщёнными потенциалами Бесселя, если

$$G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int_{\mathbb{R}^n} G dx \neq 0, \quad \Phi \in \text{Im}_n(R),$$

где  $R \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 4.** Модуль непрерывности для  $u \in C(\mathbb{R}^n)$  в равномерной норме:

$$\omega_c^k(u; \tau) = \sup \{ \|\Delta_h^k u\|_c : |h| \leq \tau \}, \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

**Определение 5.** Пространством Лоренца  $\Lambda^q(\nu)u\Gamma^q(\nu)$ , где  $\delta$  и  $\nu > 0$  — измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечной нормой (см. [7]):

$$\|f\|_{\Lambda^q(\nu)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty f^{*q}(t)\nu(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f^*(t)\nu(t)\}, & q = \infty. \end{cases}$$

**Определение 6.** Пусть  $X = X(0, T)$  — идеальное пространство и  $k \in \mathbb{N}$ . Мы вводим пространство Кальдерона  $\Lambda^k(C; X)$ :

$$\Lambda^k(C; X) = \left\{ u \in C(\mathbb{R}^n) : \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \in X(0, T) \right\};$$

$$\|u\|_{\Lambda^k(C; X)} = \|u\|_c + \left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{X(0, T)}.$$

### 3. Вспомогательные теоремы

**Замечание 1.** Пусть  $p, q \in (0, \infty]$ , пусть  $\nu, \delta, \omega$  — веса, и

$$Y(s) = \int_0^s \delta(t) dt, \quad V(s) = \int_0^s \nu(t) dt.$$

Мы будем использовать результат из работы [8]. А именно, при  $1 < p \leq q < \infty$ ,  $1/p + 1/p' = 1$

$$\|f\|_{\Gamma_\delta^q(\omega)} \leq C \|f\|_{\Lambda^p(\nu)} \Leftrightarrow$$

$$A_3 = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{Y(x)}{Y(x)+Y(t)} \right)^q \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{Y(t)}{Y(t)+Y(x)} \right)^{p'} \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < \infty.$$

Кроме того, наилучшая постоянная  $C$  в оценке  $\|f\|_{\Gamma_\delta^q(\omega)} \leq C\|f\|_{\Lambda^p(\nu)}$  удовлетворяет условию  $C \approx A_3$ .

**Теорема 1 (см. [10]).** Пусть  $G \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ,  $G \neq 0$ ,  $\varphi(\tau) = G^*(\tau)$ ,  $\tau \in \mathbb{R}_+$ , и функция  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  такова, что при некотором  $T \in \mathbb{R}_+$

$$\int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau < \infty. \quad (1)$$

1) Для свёртки

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

справедлива оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |u(x)| \leq c_0 \int_0^T \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau, \quad c_0 = 1 + \left( \int_T^\infty \varphi(\tau) d\tau \right) \left( \int_0^T \varphi(\tau) d\tau \right)^{-1};$$

2) пусть ещё  $G \in G^k(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ ,  $k \in N$ , для  $G_k(x) := \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha G(x)|$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , при

$c_1 \in \mathbb{R}_+$  имеет место оценка

$$|G_k(x)| \leq c_1 \varphi_k(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3)$$

где

$$0 \leq \psi_k(\tau) := \Psi_k \left( \left( \frac{\tau}{V_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \downarrow \text{ на } \mathbb{R}_+$$

и выполнены соотношения

$$\psi_k(\tau) \leq \tau^{-k/n} \varphi(\tau), \quad \tau \in (0, T]; \quad \int_T^\infty \psi_k(\tau) d\tau < \infty.$$

Тогда свёртка  $u$ , определённая в (2), непрерывна на  $\mathbb{R}_+$ , и при  $t \in (0, T]$  для модуля непрерывности справедлива оценка

$$\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq c_2 \int_0^T \left[ \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right] \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau. \quad (4)$$

Здесь  $c_2 = c_1 \tilde{c} d$ , где

$$d = 1 + \frac{2}{T \psi_k(T)} \left( \int_T^\infty \psi_k(\tau) d\tau \right),$$

$c_1$  — постоянная из условия (3),  $\tilde{c} = \tilde{c}(k, n) \in \mathbb{R}_+$ .

**Замечание 2.** При выполнении условия  $\varphi \in E'(0, T)$  неравенство (1) выполнено для любой функции  $f \in E(\mathbb{R}^n)$ , т. е. теорема 1 применима для любого потенциала  $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$ , поскольку для него верна формула (2).

Далее рассмотрены некоторые более простые оценки модулей непрерывности при дополнительных ограничениях на ядра потенциалов.

**Лемма 1.** Пусть выполнено следующее условие:

$$\int_t^\tau \tau^{-\frac{k}{n}} \varphi(\tau) d\tau \leq B_0 t^{1-\frac{k}{n}} \varphi(t), \quad t \in (0, T], \quad (5)$$

где  $B_0 \in \mathbb{R}_+$  не зависит от  $t$ .

Кроме того, пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

$$\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq c_2 \int_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad (6)$$

где  $c_3 = (1 + B_0)c_2$ ,  $c_2$  — постоянная из (4).

**Лемма 2.** Для классических потенциалов, если  $k > \alpha$ , справедлива оценка

$$\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq \tilde{c} \int_0^t \tau^{\frac{\alpha}{k}-1} f^*(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T],$$

где  $\tilde{c} = \tilde{c}(k, n, \alpha, T) \in \mathbb{R}_+$ .

#### 4. Основная часть

**Лемма 3.** Пусть выполнены условия леммы 1 и, кроме того,

$$A_3 = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q \tilde{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{\nu(t)}{V(t)^{q'}} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \right\} < \infty,$$

где

$$\tilde{w} = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}, \quad \Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Тогда  $\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 c \|f\|_{\Lambda^q(\nu)}$ .

**Доказательство (леммы 3).** Из леммы 1 следует, что

$$\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq c_2 \int_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T], \quad (7)$$

Мы будем использовать следующий вариант «второй перестановки»:

$$f_\varphi^{**}(t) = \frac{1}{\left( \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \right)} \int_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau.$$

Обозначим  $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ . Подставим эти обозначения в неравенство (7):

$$\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq c_2 \Phi_0(t) \frac{1}{\Phi_0(t)} \int_0^t \varphi(\tau) f^*(\tau) d\tau, \quad t \in (0, T].$$

Итак,  $\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \leq c_2 \Phi_0(t) f_\varphi^{**}(t)$ ,  $t \in (0, T]$ . Из этой оценки следует, что

$$\frac{\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right)}{\Phi_0(t)} \leq c_2 f_\varphi^{**}(t), \quad t \in (0, T].$$

Тогда получим

$$\left\| \frac{\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right)}{\Phi_0(t)} \right\|_{L_q(w)} \leq c_2 \|f_\varphi^{**}\|_{L_q(w)}.$$

Из определения нормы в  $L_q(w)$  следует

$$\left( \int_0^\infty \left| \frac{\omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right)}{\Phi_0(t)} \right|^q \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq c_2 \|f_\varphi^{**}\|_{L_q(w)}.$$

Итак,  $\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 \|f_\varphi^{**}\|_{L_q(w)}$ , где  $\tilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$ .

Но  $\|f_\varphi^{**}\|_{L_q(w)} = \|f\|_{\Gamma_\varphi^q}$  по определению  $f_\varphi^{**}$ , так что последняя оценка даёт

$$\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 \|f\|_{\Gamma_\varphi^q}.$$

По замечанию 1 отсюда следует, что  $\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 c \|f\|_{\Lambda^q(\nu)}$  при условии  $A_3 < \infty$ .  $\square$

Приведём критерий вложения пространства потенциалов в пространство Кальдерона  $\Lambda(C; X)$  (см. [11]).

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия леммы 1, тогда

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X) \Leftrightarrow \left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_X \leq c_2 c \|f\|_{\tilde{E}}.$$

При  $\tilde{E} = \Lambda^q(u)$ ,  $X = L_q(\tilde{w})$  это условие выполнено при  $A_3 < \infty$ ,  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ , где

$$A_3 = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(x)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^q \tilde{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{\Phi_0(t)}{\Phi_0(t) + \Phi_0(x)} \right)^{q'} \frac{\nu(t)}{V^{q'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{q'}} \right\}.$$

**Доказательство (теоремы 2).** При  $A_3 < \infty$  справедливо следующее вложение

$$\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 c \|f\|_{\Lambda^q(\nu)} \Rightarrow H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X),$$

где  $E = \Lambda^q(\nu)$ ,  $X = L_q(\tilde{w})$ ,  $\tilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$ ,  $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ .

Теперь покажем, что  $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X) \Rightarrow \left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_q(\tilde{w})} \leq c_2 c \|f\|_{\Lambda^q(\nu)}$ , где

$E = \Lambda^q(\nu)$ ,  $X = L_q(\tilde{w})$ ,  $\tilde{w}(t) = \frac{\omega(t)}{\Phi_0(t)^q}$ ,  $\Phi_0(t) = \int_0^t \varphi(\tau) d\tau$ .

В работе [11] установлено, что  $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X) \Leftrightarrow K \mapsto X$ , где  $K$  — конус из функций в  $(0, T)$ :

$$K = \left\{ h(t) = \int_0^T \Omega(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau : \sigma \in \tilde{E}_0(0, T) \right\},$$

$$\rho_k(h) = \inf \left\{ \|\sigma\|_{\tilde{E}(0, T)} ; \int_0^T \Omega(t, \tau) \sigma(\tau) d\tau = h(t) \right\}.$$

Здесь  $\tilde{E}_0(0, T) = \{\sigma \in \tilde{E}(0, T) : 0 \leq \sigma \downarrow\}$ ;  $\Omega(t, \tau) = \varphi(\tau) \left( 1 + \left( \frac{\tau}{t} \right)^{\frac{k}{n}} \right)^{-1}$ .

Поэтому можно записать формулу для  $h(t)$  в виде

$$h(t) = \int_0^T \left[ \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right] \varphi(\tau) \sigma(\tau) d\tau, \quad 0 \leq \sigma \downarrow.$$

Но

$$0 < \tau < t \Rightarrow \tau^{-\frac{k}{n}} > t^{-\frac{k}{n}} \Rightarrow \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \cong 1.$$

Поэтому

$$h(t) \cong \int_0^t \varphi(\tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_t^T \left[ \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right] \varphi(\tau) \sigma(\tau) d\tau.$$

При условии

$$\int_t^\tau \tau^{-\frac{k}{n}} \varphi(\tau) d\tau \leq B_0 t^{1-\frac{k}{n}} \varphi(t), \quad t \in (0, T],$$

где  $B_0 \in \mathbb{R}_+$  не зависит от  $t$ , имеем:

$$\int_t^T \left[ \frac{\tau^{-\frac{k}{n}}}{\tau^{-\frac{k}{n}} + t^{-\frac{k}{n}}} \right] \varphi(\tau) \sigma(\tau) d\tau \leq \int_0^t \varphi(\tau) \sigma(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$h(t) \cong \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau) d\tau; \quad \sigma \in \tilde{E}_0, \quad \|\sigma\|_{\tilde{E}} = \rho_K(h),$$

Вложение  $K \rightarrow X$  означает, что  $K \subset X$ , и  $\exists c_k \in \mathbb{R}_+$ ;  $\|h\|_x \leq c_k \rho_k(h)$ , это даёт оценку

$$\left\| \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau) d\tau \right\|_X \leq c_k \|\sigma\|_{\tilde{E}}, \quad c_k \in \mathbb{R}_+.$$

При  $\tilde{E} = \Lambda^q(\nu)$ ,  $X = L_{q(\bar{w})}$ , оценка примет вид

$$\left\| \int_0^t \varphi(\tau)\sigma(\tau) d\tau \right\|_{L_{q(\bar{w})}} \leq c_k \|\sigma\|_{\Lambda^q(\nu)}.$$

При условии (5) и при  $\sigma = f^* \geq 0 \downarrow$  можно писать, что

$$\left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_{L_{q(\bar{w})}} \leq c_2 c \|f\|_{\Lambda^q(\nu)}.$$

Отметим, что  $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X) \Rightarrow \left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_X \leq c_2 c \|f\|_{\tilde{E}}$ .

При  $\tilde{E} = \Lambda^q(\nu)$ ,  $X = L_{q(\bar{w})}$  и условии  $A_3 < \infty$  можно использовать критерий:

$$H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X) \Leftrightarrow \left\| \omega_c^k \left( u; t^{\frac{1}{n}} \right) \right\|_X \leq c_2 c \|f\|_{\tilde{E}}.$$

Итак, при  $\tilde{E} = \Lambda^q(\nu)$ ,  $X = L_{q(\bar{w})}$  и условии  $A_3 < \infty$  справедливо вложение  $H_E^G(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda(C; X)$ . Здесь  $\Phi_0$  — функция, введённая в лемме 1.  $\square$

## 5. Заключение

В работе получены следующие основные результаты:

1. рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами;
2. установлены точные по порядку оценки равномерных модулей непрерывности потенциалов в случае вложения пространства потенциалов в пространство непрерывных ограниченных функций;
3. получены критерии вложений пространства потенциалов в пространство Кальдерона, приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

## Литература

1. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of Operators // Pure and Applied Mathematics Journal. — New York: Academic Press, 1988. — Vol. 129.
2. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. — М.: Наука, 1977.
3. *Стейн И. М.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
4. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. — Ленинград: ЛГУ, 1985.

5. Гольдман М. Л. Конус перестановок для обобщённых бесселевых потенциалов // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2008. — Т. 260. — С. 151–163.
6. Гольдман М. Л. Об оптимальных вложениях обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 91–111.
7. Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х. Интегральные свойства обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 331–340.
8. Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization / A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 2007. — Vol. 76. — Pp. 69–92.
9. Гольдман М. Л., Малышева А. В. Двусторонняя оценка модуля непрерывности свёртки // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49, № 5. — С. 585–596.
10. Гольдман М. Л., Малышева А. В. Об оценке равномерного модуля непрерывности обобщённого потенциала Бесселя // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2013. — Т. 283. — С. 1–12.
11. Goldman M. L., Haroske D. Optimal Calderon Spaces for Generalized Bessel Potentials // Doklady Mathematics. — 2015. — Т. 492, № 1. — С. 404–407.

UDC 517.951

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-3-12

## Differential Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type

N. Alkhalil, Kh. Almohammad

*Department of Nonlinear Analysis and Optimization  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

In this paper we study differential properties of convolutions of functions with kernels that generalize the classical Bessel–Macdonald kernels  $G_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . The theory of classical Bessel potentials is an important section of the general theory of spaces of differentiable functions of fractional smoothness and its applications in the theory of partial differential equations. The properties of the classical Bessel–Macdonald kernels are studied in detail in the books of Bennett and Sharpley, S. M. Nikol'skii, I. M. Stein, V. G. Mazya. The local behavior of the Bessel–Macdonald kernels in the neighborhood of the origin is characterized by the presence of a power-type singularity  $|x|^{n-\alpha}$ . At infinity, they tend to zero at an exponential rate. The recent work of M. L. Goldman, A. V. Malysheva, and D. Haroske was devoted to the investigation of the differential properties of generalized Bessel–Riesz potentials.

In this paper we study the differential properties of potentials that generalize the classical Bessel–Riesz potentials. Potential kernels can have nonpower singularities in the neighborhood of the origin. Their behavior at infinity is related only to the integrability condition, so that kernels with a compact support are included. In this connection, the spaces of generalized Bessel potentials generated by them belong to the so-called spaces of generalized smoothness. The case with the satisfied criterion for embedding potentials in the space of continuous bounded functions is considered. In this case, the differential properties of the potentials are expressed in terms of the behavior of their module of continuity in the uniform metric. Criteria for embedding of potentials in Calderon spaces are established and explicit descriptions of the module of continuity of potentials and optimal spaces for such embeddings are obtained in the case when the base space for potentials is the Lorentz weight space. These results specify the general constructions established in previous works.

**Key words and phrases:** Bessel potentials, Lorentz spaces, Calderon spaces, rearrangement-invariant spaces, optimal embeddings

## References

1. C. Bennett, R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Vol. 129, Academic Press, New York, 1988.
2. S. M. Nikolsky, *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems*, Nauka, Moscow, 1977, in Russian.
3. E. M. Stein, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Mir, Moscow, 1973, in Russian.
4. V. G. Mazya, *Sobolev Spaces*, LSU, Leningrad, 1985, in Russian.
5. M. L. Goldman, *The Cone of Permutations for Generalized Bessel Potentials*, Vol. 260, 2008, pp. 151–163, in Russian.
6. M. L. Goldman, *On Optimal Investment Potentials of the Generalized Bessel and Riesz*, Vol. 269, 2010, pp. 91–111, in Russian.
7. Kh. Almohammad, N. Alkhalil, *Integral properties of generalized bessel and riesz potentials*, Bulletin of RUDN University. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics 25 (4) (2017) 331–340, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349.
8. A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson, *Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization*, Bulletin of the Australian Mathematical Society 76 (2007) 69–92.
9. M. L. Goldman, A. V. Malysheva, *Two-Sided Estimate for the Modulus of Continuity of a Convolution*, Differential Equations 49 (5) (2013) 557–568.
10. M. L. Goldman, A. V. Malysheva, *An Estimate of the Uniform Modulus of the Generalized Bessel Potential Continuity*, Proceedings of Steklov Mathematical Institute 283 (2013) 1–12, in Russian.
11. M. L. Goldman, D. Haroske, *Optimal Calderon Spaces for Generalized Bessel Potentials*, Doklady Mathematics 492 (1) (2015) 404–407, in Russian.

© Альхалиль Н. Х., Алмохаммад Х., 2018

### Для цитирования:

Альхалиль Н. Х., Алмохаммад Х. Дифференциальные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 3–12. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-3-12.

### For citation:

Alkhalil N., Almohammad Kh. *Differential Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type*, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 3–12. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-3-12. In Russian.

### Сведения об авторах:

**Алмохаммад Халиль** — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, тел.: +7 (968) 0806641)

**Альхалиль Нисрин Хамадех** — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, тел.: +7 (968) 0806641)

### Information about the authors:

**Almohammad Kh.** — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, phone: +7 (968) 0806641)

**Alkhalil N.** — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, phone: +7 (968) 0806641)



УДК 519.21

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-13-27

## Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II

А. В. Горбунова\*, И. С. Зарядов\*<sup>†</sup>, К. Е. Самуйлов\*

\* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

<sup>†</sup> *Институт проблем информатики  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН  
ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, Москва, Россия, 119333*

Данная работа является продолжением обзора методов исследования системы массового обслуживания вида «fork-join» (в западной классификации) или системы с расщеплением запросов. Интерес к рассматриваемой системе объясняется широким спектром задач, которые могут быть решены с её помощью, поскольку фактически речь идёт о параллельной обработке данных и их приложениях. К примеру, это может касаться анализа работы дисковых массивов, облачных вычислений, высокопроизводительных сервисов и даже процесса комплектации заказов на складе. Если в первой части обзора были описаны особенности построения данной модели и родственных ей систем, а также приведено подробное описание подхода к получению точного выражения среднего времени отклика в случае двух приборов и представлено несколько методов приближенного анализа данной характеристики в случае, когда число приборов больше двух, то во второй части обзора представлено описание других существующих методов аппроксимации среднего времени отклика. В частности, к рассматриваемым подходам приближенного анализа времени отклика относятся: матрично-геометрический метод, анализ с помощью порядковых статистик для различных типов распределения времени пребывания подзапросов.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, расщепление заявок, параллельное обслуживание, параллельная обработка, время отклика, время синхронизации, матрично-геометрический метод, порядковые статистики

### 1. Введение

Наряду с такими методами аппроксимации среднего времени отклика системы с расщеплением запросов, как эмпирический подход и интерполяция с помощью предельных значений загрузки системы [1], отдельного внимания заслуживают матрично-геометрический метод и анализ с помощью порядковых статистик, которому посвящена большая часть статьи, поскольку известные результаты теории порядковых статистик позволяют расширить ряд изучаемых распределений для входящего потока и времени обслуживания, а также оценить не менее важные характеристики для рассматриваемой системы: математическое ожидание и дисперсию времени синхронизации. Под временем синхронизации здесь фактически подразумевается её задержка, т.е. время между окончанием обслуживания первого и последнего подзапросов одного запроса [2].

Статья организована следующим образом: в разделе 2 описываются особенности и результаты применения матрично-геометрического метода к анализу системы с расщеплением запросов, в разделе 3 представлен подход к анализу среднего времени отклика, основанный на теории порядковых статистик, в заключении кратко подведены итоги работы.

---

Статья поступила в редакцию 5 ноября 2017 г.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 18-07-00576, 16-07-00766.

## 2. Анализ с помощью матрично-геометрического метода

Идея использования матрично-геометрического подхода при анализе fork-join систем в большинстве работ сводится к рассмотрению моделей, аппроксимирующих исходную, непосредственный анализ которых позволяет сделать вывод, что изучаемый процесс, описывающий поведение системы, является квазипроцессом «размножения и гибели» со всеми вытекающими из этого следствиями [3–5]. То же касается и fork-join системы с конечными очередями к серверам в условиях пуассоновского входящего потока и экспоненциальных времён обслуживания. Так, в [6, 7] был предложен алгоритм, позволяющий свести матрицу вероятностей переходов для марковского процесса, описывающего поведение системы, к блочно-диагональному виду, что даёт возможность компактно записать систему уравнений равновесия (СУР) и решить её одним из известных численных методов и, как следствие, вычислить среднее время отклика.

Матрично-геометрический подход для оценки времени отклика fork-join системы используется в серии статей [8–10]. В первой работе [8] были предложены две модели, аппроксимирующие исходную fork-join систему с  $K$  ветвями  $M|M|1$  и различными интенсивностями обслуживания на разных серверах (приборах):

- 1) поступающий запрос принимается в систему тогда и только тогда, когда число подзапросов  $k$ -го типа, находящихся в системе, меньше некоторого фиксированного положительного целого числа  $U_k$ :  $n_k < U_k$ ,  $k = \overline{2, K}$ , в противном случае он теряется;
- 2) отказ в обслуживании на  $j$ -м сервере происходит тогда и только тогда, когда нарушается условие:  $n_i - n_j \neq U_{i,j}$  для некоторого  $i$  и для фиксированных положительных целых чисел  $U_{i,j}$ ,  $\forall i, j, i \neq j$ , причём сервер  $j$  блокируется до тех пор, пока подзапрос не закончит обслуживаться на сервере  $i$ .

Здесь вектор  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_k, \dots, n_K)$  отражает состояние системы,  $n_k$  — число подзапросов  $k$ -го типа в системе,  $k = \overline{1, K}$ .

В результате анализа обеих систем с помощью матрично-геометрического метода удаётся определить стационарное распределение числа подзапросов в системах  $\pi(\vec{n})$ . Далее полученное распределение используется при алгоритмическом решении задачи нахождения функции распределения времени отклика:

$$F_{W_{K, \max}}(x) = \sum_{\vec{n}} \pi(\vec{n}) F_{W_{K, \max}^{\vec{n}}}(x), \quad x > 0.$$

Таким образом, задача сводится к поиску условного распределения времени отклика  $F_{W_{K, \max}^{\vec{n}}}(x)$  при условии, что система находится в состоянии  $\vec{n}$ . Для первой модифицированной модели искомое условное распределение может быть выражено с помощью распределения Эрланга, а во втором случае условное распределение получается при анализе процесса поглощения для подзапросов. Кроме того, авторы доказали, что решения, полученные при анализе этих двух систем, являются верхней и нижней границами для функции распределения времени отклика соответственно.

В следующей статье авторов [9] изучается fork-join система с пуассоновским входящим потоком, но при этом время обслуживания на однородных серверах имеет распределение Кокса. Отметим, что для стационарных вероятностей состояний в СМО  $M|C_k|1$  известно точное решение [11]. Как и в предыдущей работе рассматриваются две аналогичные, аппроксимирующие исходную систему модели:

- 1) модель, в которой все очереди кроме очереди к первому серверу имеют конечную ёмкость;
- 2) модель, в которой вводится ограничение на то, что разница между каждой парой длин очередей к серверам не должна превышать заданный порог.

Матрично-геометрический анализ указанных систем, предложенный в [12], благодаря тому, что матрицы вероятностей перехода сводятся к блочно-треугольному

виду, позволяет получить стационарные вероятности, которые используются для вывода распределения времени отклика, а, соответственно, и моментов этого распределения. Полученные выражения являются верхними и нижними границами для моментов времени отклика. Следующая работа [10] продолжает начатые исследования. Авторы предлагают алгоритмический метод для вычисления верхних и нижних оценок производительности системы, который, по их мнению, может быть расширен для анализа систем с отличными от пуассоновского входящим потоком и отличным от экспоненциального временем обслуживания на разнородных серверах.

Отметим, что матрично-геометрический метод (МГМ) использовался и при анализе систем, родственных fork-join. Так, МГМ был применён для анализа модели независимых серверов (ISM), в [13] с помощью МГМ анализируется split-merge система [1] с двумя ветвями с наложением ограничения на ёмкость накопителя одной из очередей. Были получены выражения для математического ожидания, дисперсии и функции распределения времени отклика. Также был разработан метод аппроксимации для систем с более чем с двумя ветвями. В работах [14, 15] также исследуется fork-join система, но уже с распределением фазового типа для входящего потока и с потерями. В статье [16] рассматривается ещё одна вариация классической fork-join системы, для анализа которой используется МГМ: обслуживание каждого подзапроса происходит в несколько этапов, включая фазу ожидания и фазу объединения родственных подзапросов; существует динамическая политика планирования нагрузки системы для поддержания эффективного использования сервера.

### 3. Анализ с помощью порядковых статистик

Поскольку время отклика fork-join системы классически определяется как максимум, а в некоторых случаях и как минимум из  $K$  случайных величин времён пребывания подзапросов в системе [17], то естественно, что одним из альтернативных способов оценки среднего времени отклика является использование теории порядковых статистик [18–20]. По определению [18–20], если  $\xi_1, \dots, \xi_K$  — конечная выборка, определённая на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$ , и для  $\omega \in \Omega$  :  $x_i = \xi_i(\omega)$ ,  $i = 1, \dots, K$ , и далее, если перенумеровать последовательность  $\{x_i\}_{i=1}^K$  в порядке неубывания таким образом, что  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(K-1)} \leq x_{(K)}$ , то такая последовательность будет называться вариационным рядом, а его члены — порядковыми статистиками. Случайная величина же  $\xi_{(k)} : \xi_{(k)}(\omega) = x_{(k)}$  называется  $k$ -й порядковой статистикой исходной выборки. Из определения ясно, что

$$\xi_{(1)} = \min(\xi_1, \dots, \xi_K), \quad \xi_{(K)} = \max(\xi_1, \dots, \xi_K). \quad (1)$$

Таким образом, время отклика  $W_{K,\max} = \xi_{(K)}$  или  $W_{K,\min} = \xi_{(1)}$  в терминах теории порядковых статистик, где  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, K}$  — положительные случайные величины времён пребывания подзапросов в системе до попадания в буфер синхронизации. Следовательно, математическое ожидание времени отклика можно вычислить, зная распределения экстремальных значений  $\xi_{(1)}$  и  $\xi_{(K)}$ , причём функция распределения второй случайной величины фактически является совместной функцией распределения случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_K$ :

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = P(\max(\xi_1, \dots, \xi_K) < x) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x),$$

$$F_{\xi_{(1)}}(x) = P(\min(\xi_1, \dots, \xi_K) \leq x) = 1 - P(\xi_1 > x, \dots, \xi_K > x).$$

Обозначим через  $F_k(x)$  — функцию распределения, а через  $f_k(x)$  — плотность распределения случайной величины  $\xi_k$ ,  $k = \overline{1, K}$ . Если сделать допущение о том, что  $\xi_1, \dots, \xi_K$  — независимые, что в нашем случае, как уже говорилось выше, является упрощающим предположением, то:

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x) = \prod_{i=1}^K F_i(x),$$

$$F_{\xi_{(1)}}(x) = 1 - P(\xi_1 > x, \dots, \xi_K > x) = 1 - \prod_{i=1}^K [1 - F_i(x)],$$

а  $n$ -й момент случайной величины времени отклика можно определить, вычислив интеграл:

$$E[W_{K,\max}^n] \approx E[\xi_{(K)}^n] = \int_0^\infty x^n f_{\xi_{(K)}}(x) dx, \quad E[W_{K,\min}^n] \approx E[\xi_{(1)}^n] = \int_0^\infty x^n f_{\xi_{(1)}}(x) dx,$$

где

$$f_{\xi_{(K)}}(x) = \sum_{j=1}^K \frac{f_j(x)}{F_j(x)} \prod_{i=1}^K F_i(x), \quad f_{\xi_{(1)}}(x) = \sum_{j=1}^K f_j(x) \prod_{i=1}^K \frac{1 - F_i(x)}{1 - F_j(x)}.$$

Далее, если предположить, что серверы являются однородными, т.е. случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_K$  не только независимы, но и одинаково распределены, а, следовательно, их функции и плотности распределения равны между собой:  $F_k(x) = F(x)$ ,  $f_k(x) = f(x)$ ,  $k = \overline{1, K}$ , то

$$P(\xi_1 < x, \dots, \xi_K < x) = F^K(x), \quad 1 - P(\xi_1 > x, \dots, \xi_K > x) = 1 - (1 - F(x))^K,$$

и, соответственно,

$$E[\xi_{(K)}^n] = K \int_0^\infty x^n f(x) F^{K-1}(x) dx, \quad E[\xi_{(1)}^n] = K \int_0^\infty x^n f(x) (1 - F(x))^{K-1} dx. \quad (2)$$

Также заметим, что математическое ожидание максимума  $K$  н.о.р.с.в. можно представить в виде [21]:

$$E[\xi_{(K)}] = \int_0^\infty x dF^K(x) = \int_0^\infty [1 - F^K(x)] dx. \quad (3)$$

Для того чтобы проанализировать время отклика, необходимо вычислить указанные интегралы. В зависимости от типа распределения для оценки интегралов могут быть применены численные методы, однако для таких распределений, как экспоненциальное, гиперэкспоненциальное и распределение Эрланга 2-го порядка, распределение Кокса, результат может быть получен в символьном виде [21–23]. Вычислительные затраты увеличиваются с ростом ветвей ( $K$ ) и увеличением порядка для распределений Эрланга или Кокса. Для уменьшения вычислительных затрат при вычислении максимума может быть использован характеристический максимум [24].

### 3.1. Экспоненциальное распределение

Допустим, что времена пребывания подзапросов в подсистемах являются независимыми экспоненциально распределёнными случайными величинами с плотностями распределения  $f_k(x) = \lambda_k e^{-\lambda_k x}$ ,  $x > 0$ ,  $k = \overline{1, K}$ .

Для того, чтобы определить моменты высшего порядка максимума  $K$  независимых экспоненциальных случайных величин, эффективнее с вычислительной точки зрения может быть дифференцирование соответствующее число раз преобразования Лапласа–Стилтьеса (ПЛС) совместной функции распределения максимума  $\pi_{\xi_{(K)}}(s)$  по  $s$  и в последующем приравнивание  $s$  к нулю. В частности, для случая  $K = 2$  функция распределения, плотность распределения и ПЛС [25, 26] равны:

$$F_{\xi_{(2)}}(x) = F_1(x)F_2(x) = 1 - e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x} + e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x},$$

$$\begin{aligned} f_{\xi_{(2)}}(x) &= \frac{dF_2(x)}{dx} = f_1(x)F_2(x) + f_2(x)F_1(x) = \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)x}, \end{aligned}$$

$$\pi_{\xi_{(2)}}(s) = \int_0^{\infty} f_2(x)e^{-sx} dx = \frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + \frac{\lambda_2}{s + \lambda_2} - \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s + \lambda_1 + \lambda_2}.$$

Тогда математическое ожидаемое максимума равно [21, 23, 25, 26]:

$$E\xi_{(2)} = - \left. \frac{d\pi_2(s)}{ds} \right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Общее выражение для ПЛС максимума  $K$  экспоненциально распределённых случайных величин может быть записано в следующем виде [27]:

$$\pi_{\xi_{(K)}}(s) = \sum_{i=1}^K (-1)^{i-1} \sum_{j=1}^i \sum_{m=1}^j \frac{\sum_{l=1}^i \lambda_{(m+l-1)_K}}{s + \sum_{l=1}^i \lambda_{(m+l-1)_K}},$$

где  $(m+l-1)_K$  обозначает сложение по модулю  $K$ . Кроме того, ПЛС максимума  $K$  независимых экспоненциально распределённых случайных величин с параметрами  $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_K)$  и плотностью распределения  $f_{\xi_{(K)}}(\boldsymbol{\lambda}, x)$  с ПЛС  $\pi_{\xi_{(K)}}(\boldsymbol{\lambda}, s)$  можно представить с помощью рекуррентной формулы [28]:

$$\left( s + \sum_{j=1}^k \lambda_j \right) \pi_{\xi_{(k)}}(\boldsymbol{\lambda}, s) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \pi_{\xi_{(k-1)}}(\boldsymbol{\lambda}_{/j}, s), \quad 1 \leq k \leq K,$$

где « $/j$ » означает исключение  $\lambda_j$ , т.е.  $\boldsymbol{\lambda}_{/j} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \dots, \lambda_m)$  и  $\pi_0(\mathbf{0}, s) = 1$ . Тогда момент  $n$ -го порядка максимума  $K$  независимых экспоненциально распределённых случайных величин равен:

$$M_K(\boldsymbol{\lambda}, n) = \left( nM_K(\boldsymbol{\lambda}, n-1) + \sum_{j=1}^K M_{K-1}(\boldsymbol{\lambda}_{/j}, n) \right) \left( \sum_{j=1}^K \lambda_j \right)^{-1}, \quad (4)$$

$K \geq 1$ ,  $M_0(\mathbf{0}, n) = 0$  для всех  $n \geq 1$  и  $M_K(\boldsymbol{\lambda}, 0) = 1$  для всех  $K \geq 0$ .

Рассмотрим ещё одну важную характеристику производительности системы облачных вычислений — время синхронизации. Время синхронизации определяется как

время между поступлением первого и последнего подзапросов одного запроса в буфер синхронизации, иными словами, это разность между максимумом и минимумом из времён пребывания подзапросов в системе:

$$E[W_K] = E[W_{K,\max}] - E[W_{K,\min}].$$

В теории порядковых статистик данная величина называется размахом [18–20]. Одни из первых результатов анализа этого показателя были приведены в работе [2], а именно численное решение оптимизационной задачи по минимизации среднего времени синхронизации. В статье [25] были представлены оценки математического ожидания в случае неоднородных приборов, а в случае однородных приборов ( $\lambda_k = \lambda, k = \overline{1, K}$ ) получена оценка и для дисперсии времени синхронизации:

$$D[W_K] \approx \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{i^2}.$$

Вычислить дисперсию исследуемой величины, для определения которой недостаточно знать значения дисперсий случайных величин  $W_{K,\max}$  и  $W_{K,\min}$ , можно и в неэкспоненциальном случае, действуя аналогичным образом, а именно пользуясь известными в теории порядковых статистик формулой для функции распределения размаха положительных н.о.р.с.в.:

$$F_{W_K}(x) \approx F_{\xi_{(K)} - \xi_{(1)}}(x) = \sum_{i=1}^K \int_0^{\infty} f_i(y) \prod_{j=1, j \neq i}^K [F_j(y+x) - F_j(y)] dy, \quad (5)$$

либо непосредственно формулой для вычисления дисперсии размаха выборки объёма  $K$  н.о.р.с.в. с функцией распределения  $F(x)$  [18]:

$$\begin{aligned} D[W_K] &\approx D[\xi_{(K)} - \xi_{(1)}] = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F^K(y) - [1 - F(x)]^K + [F(y) - F(x)]^K) dx dy - (E[W_K])^2. \end{aligned} \quad (6)$$

### 3.2. Распределение Эрланга

Формула для аппроксимации среднего времени отклика fork-join системы с *распределением Эрланга*  $l_k$ -го порядка ( $\varepsilon_{l_k}$ ), которое представляет собой сумму  $l_k$  независимых случайных величин, распределённых по одному и тому же экспоненциальному закону с параметром  $\lambda_k$  для времени пребывания в  $k$ -й ветви системы,  $k = \overline{1, K}$  с функцией и плотностью распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda_k x} \sum_{i=0}^{l_k-1} \frac{(\lambda_k x)^i}{i!}, \quad f(x) = \frac{\lambda_k (\lambda_k x)^{l_k-1}}{(l_k-1)!} e^{-\lambda_k x},$$

где  $\lambda_k \geq 0; l_k = 1, 2, \dots; x \geq 0$ , а математическое ожидание равно  $l_k/\lambda_k$ , представлена в [29]:

$$E[W_{K,\max}] \approx \int_0^{\infty} \left[ 1 - \prod_{k=1}^K \left( 1 - e^{-\lambda_k x} \sum_{i=0}^{l_k-1} \frac{(\lambda_k x)^i}{i!} \right) \right] dx.$$

Для случая  $K = 2$ :

$$E[W_{2,\max}] \approx \sum_{k=1}^2 \frac{l_k}{\lambda_k} - \sum_{m=0}^{l_1-1} \sum_{n=0}^{l_2-1} \binom{m+n}{m} \frac{\lambda_1^m \lambda_2^n}{(\lambda_1 + \lambda_2)^{m+n+1}}.$$

### 3.3. Распределение экстремальных значений

Ещё один метод вычисления максимума н.о.р.с.в. — это его аппроксимация распределением экстремальных значений [30]. Распределение экстремальных значений представляет собой предельное распределение наибольшего  $\xi_{(K)}$  (наименьшего  $\xi_{(1)}$ ) из значений н.о.р. непрерывных с.в. при бесконечном увеличении их числа  $K \rightarrow \infty$ , т.е., говоря иными словами, это предельное распределение наибольшего (наименьшего) выборочного значения при бесконечном увеличении объёма выборки из непрерывного распределения [30], хотя, конечно, нельзя сказать, что распределение экстремального значения — это распределение  $\xi_{(K)}$  при  $K \rightarrow \infty$ , поскольку фактически оно будет вырожденным, поэтому, чтобы получить невырожденное предельное распределение, рассматривают линейное преобразование  $\xi_{(K)}$  с коэффициентами, зависящими от объёма выборки, что в действительности аналогично нормировке, но по большому счету не исчерпывается только последовательностями линейных преобразований [30].

Существует три типа семейств экстремальных распределений [30]:

- 1) тип I — распределение типа Гумбеля, которое ещё иногда называют дважды экспоненциальным:

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = \exp\left(-e^{-\frac{x-\alpha}{\theta}}\right), \quad (7)$$

- 2) тип II — распределение типа Фреше:

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha, \\ \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\theta}\right)^{-n}\right], & x \geq \alpha, \end{cases}$$

- 3) тип III — распределение типа Вейбулла:

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{x-\alpha}{\theta}\right)^n\right], & x < \alpha, \\ 0, & x \geq \alpha, \end{cases}$$

где  $\alpha, \theta > 0$  и  $n > 0$  — параметры. Распределения типа II и III приводятся к распределению типа I с помощью преобразований  $(\ln(\xi_{(K)} - \alpha))$  и  $(-\ln(\xi_{(K)} - \alpha))$ , соответственно, поэтому в основном акцент делается на распределении типа Гумбеля, плотность распределения которого имеет вид:

$$f_{\xi_{(K)}}(x) = \theta^{-1} e^{-\frac{x-\alpha}{\theta}} \exp\left(-e^{-\frac{x-\alpha}{\theta}}\right),$$

а математическое ожидание и дисперсия равны:

$$E[\xi_{(K)}] = \alpha + \gamma\theta, \quad D[\xi_{(K)}] = \frac{\pi^2\theta^2}{6},$$

где  $\gamma \approx 0,577721$  — это постоянная Эйлера–Маскерони. При  $\alpha = 0$  и  $\theta = 1$  получается стандартная форма распределения типа I — распределение Гумбеля:

$$F_{\xi_{(K)}}(x) = \exp(-e^{-x}), \quad f_{\xi_{(K)}}(x) = \exp(-x - e^{-x}). \quad (8)$$

В [30] упоминается об установленной связи между свойствами генерального распределения  $F(x)$  и типом предельного распределения. Полученные условия, которым, вообще говоря, удовлетворяют далеко не все распределения (например, распределения с «тяжёлыми хвостами»), являются необходимыми и достаточными для сходимости к одному из трёх типов семейств экстремальных значений и касаются поведения  $F(x)$  при больших (малых) значениях  $x$ , если речь идёт о наибольших (наименьших) значениях случайных величин. Причём при одном и том же исходном распределении наибольшее и наименьшее значения могут иметь предельные распределения, относящиеся к разным типам. К распределениям, которые удовлетворяют условию сходимости к типу I можно отнести *нормальное, экспоненциальное и логистическое*, к типу II — *распределение Коши*, а к типу III — распределения, сосредоточенные на ограниченной сверху части числовой оси [30]. Так, в [20] было показано, что распределение максимального значения  $\xi_{(K)}$  в выборке из случайных величин с экспоненциальным распределением с параметром  $\lambda = 1$  приближается к *распределению Гумбеля* в его стандартной форме с ростом объёма выборки, т.е.

$$\xi_{(K)} \approx \ln K + \zeta, \quad E[\xi_{(K)}] \approx \ln K + \gamma, \quad D[\xi_{(K)}] \approx D[\zeta] \approx \pi^2/6,$$

где  $\zeta$  — это случайная величина с распределением Гумбеля с функцией распределения из (8), математическим ожиданием  $E[\zeta] = \gamma$  и дисперсией  $D[\zeta] = \pi^2/6$ .

Отметим, что для случая, когда каждая порядковая статистика имеет стандартное распределение экстремальных значений типа I из (8), математическое ожидание максимума вычисляется по формуле [30]:  $E[\xi_{(K)}] = \alpha + \gamma\theta + \theta \ln K$ .

### 3.4. Произвольное распределение

Рассмотрим обобщение вывода в [28] для аппроксимации моментов максимума случайных величин с произвольным распределением [4]. Рассмотрим случайную величину  $\xi = \max(\xi_1, \xi_2)$ , где  $\xi_k$  — неотрицательные и независимые с функциями распределения  $F_k(x)$ , а  $\pi_k(s)$  — это ПЛС этих функций распределения,  $k = 1, 2$ . Тогда математическое ожидание  $\xi$  можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} E[\xi] &= E[\xi_1] + P(\xi_2 > \xi_1) \cdot E[\xi_2 - \xi_1 | \xi_2 > \xi_1] = \\ &= E[\xi_1] + \int_0^{\infty} F_1(x) dF_2(x) \cdot E[\xi_2 - \xi_1 | \xi_2 > \xi_1]. \end{aligned}$$

Пусть  $\mu_1$  и  $\sigma_1$  — первые два момента случайной величины  $\xi_1$ , а  $\mu_2$  и  $\sigma_2$  — случайной величины  $\xi_2$ . Тогда, если  $\xi_1$  — экспоненциальная, то

$$E[\xi_2 - \xi_1 | \xi_2 > \xi_1] = \frac{\sigma_2}{2\mu_2}.$$

Далее окончательно получаем следующую аппроксимацию:

$$E[T] = \mu_1 + \frac{\sigma_2 \pi_1(\mu_2^{-1})}{2\mu_2},$$

которая фактически является точным результатом для случая, когда обе случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют экспоненциальное распределение. Таким образом, в общем случае, когда речь идёт о  $K$  случайных величинах, необходимо аппроксимировать ПЛС функции распределения максимума  $(K - 1)$  случайных величин. Поэтому допустим, что уравнение (4) применимо не только к экспоненциальным случайным величинам. Обозначим  $M(K, \lambda, \sigma)$  среднее значение максимума  $K$  случайных величин с математическими ожиданиями  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_K)$ ,  $\lambda = (\mu_1^{-1}, \dots, \mu_K^{-1})$  и вторыми моментами  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_K)$ . Тогда  $M(K, \lambda, \sigma)$  можно выразить рекуррентно:

$$M(k, \lambda, \sigma) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k M(k-1, \lambda_{/i}, \sigma_{/i}) + \frac{1}{2} \lambda_i \sigma_i \pi_{\xi_{(k-1)}}(\lambda_{/i}, \lambda_i), \quad (9)$$

где  $k = 2, \dots, K$  и  $M(1, \lambda_1, \sigma_1) = 1/\lambda_1$ . Если же все случайные величины имеют одинаковые распределения со средним  $\lambda_i = \lambda$  и  $\sigma_i = \sigma$  для  $1 \leq i \leq K$ , то

$$M(k, \lambda, \sigma) = \frac{1}{\lambda} + \frac{\sigma \lambda}{2} (H_k - 1).$$

Результаты моделирования для оценки точности приближения приведены в [28], а также в [31] с использованием уравнения из (2). Рассматриваются следующие распределения: распределение Эрланга 2-го, 3-го и 4-го порядков  $(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$  и распределение Парето с функцией распределения вида  $F_p(x) = 1 - \alpha(x + \gamma)^{-\beta}$ ,  $\beta > 2$ , для  $\beta = 4$  и  $\beta = 5$ . Условие  $\beta > 2$  необходимо для того, чтобы первые два момента были конечными,  $\alpha = \gamma^\beta$  и  $\gamma = \beta - 1$ , так что  $m = 1$  и  $M = 2 + 2/(\beta - 2)$ .

Погрешность аппроксимации выражений (9) и (2) мала и для  $\varepsilon_2$ , но быстро увеличивается начиная с  $K = 16$ , для  $\varepsilon_3$  и  $\varepsilon_4$ . Интересно, что оба уравнения дают точные результаты для распределения Парето, а последнее уравнение даёт более точные результаты в обоих случаях.

### 3.5. Аппроксимация на основе границ моментов порядковых статистик

Если математическое ожидание и дисперсию генерального распределения обозначить  $\mu$  и  $\sigma^2$  соответственно, то справедливо [18, 19]:

$$E[\xi_{(K)}] \leq \mu + \sigma \frac{K-1}{\sqrt{2K-1}}, \quad E[\xi_{(1)}] \geq \mu - \sigma \frac{K-1}{\sqrt{2K-1}}.$$

Поэтому в [18, 19] для максимума  $K$  н.о.р.с.в.  $\xi_{(K)}$  была предложена аппроксимация следующего вида:

$$E[\xi_{(K)}] \approx \mu + \sigma G(K), \quad (10)$$

где

$$G(K) \leq \frac{K-1}{\sqrt{2K-1}}. \quad (11)$$

Заметим, для экспоненциального распределения справедливо, что  $G(K) = H_K - 1$ , а для равномерного распределения выполняется:  $G(K) = \sqrt{3}(K-1)/(K+1)$  [27]. Если же математическое ожидание равно нулю, а стандартное квадратическое отклонение равно единице, то, очевидно,  $E[\xi_{(K)}] \approx G(K)$ . Знак равенства в выражении (11) имеет место для н.о.р.с.в.  $(\xi_k, k = 1, K)$  с функцией и плотностью распределения

следующего вида:

$$F(x) = \left(\frac{1+bx}{K}\right)^{1/(K-1)}, \quad f(x) = \frac{b}{K} \left(\frac{1+bx}{K}\right)^{1/(K-1)-1},$$

где

$$-\frac{\sqrt{2K-1}}{K-1} \leq x \leq \sqrt{2K-1}, \quad b = \frac{K-1}{\sqrt{2K-1}}.$$

Для симметричного распределения  $F(x) = 1 - F(-x)$  справедливо:

$$E[\xi_{K,\max}] \leq \frac{K}{2} \left[ \frac{2(1 - 1/\binom{2K-2}{K-1})}{2K-1} \right]^{1/2}.$$

Для аппроксимации ожидаемого значения максимума н.о.р.с.в. с *нормальным распределением* в работе [32] используется  $G(K) = \sqrt{2 \ln(K)}$  в формуле (10), т.е.:

$$E[\xi_{(K)}] \approx \mu + \sigma \sqrt{2 \ln(K)}.$$

Более точная аппроксимация дана в [30]:

$$E[\xi_{(K)}] \approx \mu + \sigma \left[ \sqrt{2 \ln(K)} - \frac{\ln(\ln(K)) - \ln(4\pi) - 2\gamma}{2\sqrt{2 \ln(K)}} \right]. \quad (12)$$

Стоит отметить, что в уравнении (12) существует некоторый сдвиг (смещение), который корректируется путём вычитания  $0,1727K^{-0,2750}$  из выражения в скобках в (12) [33]. Таким образом, имеем:

$$D[\xi_{(K)}] \approx \frac{1,64492\sigma^2}{2 \ln(K)}.$$

На основе формулы (10) в [34] для случайной величины времени отклика было представлено приближение:

$$E[W_{K,\max}] \approx E[W_{1,\max}] + F_K \sigma_{W_{1,\max}}(\rho) \alpha_K(\rho), \quad (13)$$

где  $E[W_{1,\max}]$  и  $\sigma_{W_{1,\max}}$  обозначают математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение времени отклика СМО  $M|G|1$  с коэффициентом загрузки системы  $\rho$ . Напомним, что если времена обслуживания подзапросов распределены по произвольному закону  $B(x)$  [4], то

$$E[W_{1,\max}] = b + \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)},$$

где  $b = \int_0^\infty x dB(x)$ ,  $b^{(2)} = \int_0^\infty x^2 dB(x)$ ,  $\rho = \lambda b$ .  $F_K$  определяется из (13) при  $\rho = 0$  и  $\alpha_K(\rho) = 1$  следующим выражением:

$$F_K = \frac{b_{K,\max} - b}{\sqrt{b^{(2)} - b^2}},$$

где  $b_{K,\max} = \int_0^{\infty} [1 - B^K(x)] dx$  — математическое ожидание максимума  $K$  н.о.р.с.в. с функцией распределения  $B(x)$ . Легко показать, что для экспоненциального распределения  $F_K = H_K - 1$ , а для распределения экстремальных значений  $F_K = \sqrt{6} \ln(K)/\pi$  [30]. Сравнительный анализ полученного приближения и результатов имитационного моделирования при заданном распределении времени отклика может быть использован для получения выражения  $\alpha_K(\rho)$  [34]:

$$\alpha_K(\rho) = \frac{E[W_{K,\max}] - E[W_{1,\max}]}{F_K \sigma_{W_{1,\max}}}.$$

Так, например, для fork-join системы с двумя ветвями  $M|M|1$  из выражения (6) следует, что  $\alpha_2(\rho) = 1 - \rho/4$ .

#### 4. Заключение

В статье рассмотрены подходы к приближенному анализу времени отклика: матрично-геометрический метод, анализ с помощью порядковых статистик для различных типов распределения времени пребывания подзапросов в системе. Также приводятся результаты для математического ожидания и дисперсии времени синхронизации. Стоит отметить, что существуют исследования, посвящённые анализу работы сетей массового обслуживания, в качестве узла или узлов которой выступает система с расщеплением, но обзор подобных работ выходит за рамки поставленной перед авторами задачи.

#### Литература

1. Обзор систем параллельной обработки заявок / А. В. Горбунова, И. С. Зарядов, К. Е. Самуйлов, Э. С. Сопин // Вестник РУДН. Серия: Математика, информатика, физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 350—362.
2. *Tsimashenka I., Knottenbelt W. J.* Reduction of Subtask Dispersion in Fork-Join Systems // Computer Performance Engineering. — Springer Berlin Heidelberg, 2013. — Pp. 325–336.
3. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телетрафика. — Москва: РУДН, 2009. — 342 с.
4. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — Москва: Изд-во РУДН, 1995. — 529 с.
5. Queueing Theory / P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno. — Brill Academic Publishers, 2004. — 457 p.
6. *Мокров Е. В., Самуйлов К. Е.* Модель системы облачных вычислений в виде системы массового обслуживания с несколькими очередями и с групповым поступлением заявок // Т-Comm — Телекоммуникации и Транспорт. — 2013. — Т. 11, № 7. — С. 139–141.
7. *Мокров Е. В., Чукарин А. В.* Анализ показателей эффективности системы облачных вычислений с миграцией серверов // Т-Comm — Телекоммуникации и Транспорт. — 2014. — Т. 8, № 8. — С. 64–67.
8. *Balsamo S., Mura I.* Approximate Response Time Distribution in Fork and Join Systems // SIGMETRICS Performance Evaluation Review. — 1995. — Vol. 23, No 1. — Pp. 305–306.
9. *Balsamo S., Mura I.* On Queue Length Moments in Fork and Join Queuing Networks with General Service Times // Computer Performance Evaluation Modelling Techniques and Tools. LNCS. — 1997. — Vol. 1245. — Pp. 218–231.

10. *Balsamo S., Donatiello L., Van Dijk N. M.* Bound Performance Models of Heterogeneous Parallel Processing Systems // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. — 1998. — Vol. 9, No 10. — Pp. 1041–1056.
11. *Perros H. G.* On the  $M/C_k/1$  Queue // *Performance Evaluation*. — 1983. — Vol. 3, No 2. — Pp. 83–93.
12. *Neuts M. F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. — Courier Corporation, 1981. — 332 p.
13. *Rao B. M., Posner M. J. M.* Algorithmic and Approximation Analyses of the Split and Match Queue // *Stochastic Models*. — 1985. — Vol. 1, No 3. — Pp. 433–456.
14. *Takahashi M., Ōsawa H., Fujisawa T.* On a Synchronization Queue with Two Finite Buffers // *Queueing Systems*. — 2000. — Vol. 36. — Pp. 107–123.
15. *Takahashi M., Takahashi Y.* Synchronization Queue with Two MAP Inputs and Finite Buffers // *Proc. of the Third International Conference on Matrix Analytical Methods in Stochastic Models*. — 2000. — Pp. 375–390.
16. Generalized Parallel-Server Fork-Join Queues with Dynamic Task Scheduling / *M. S. Squillante, Y. Zhang, A. Sivasubramaniam, N. Gautam* // *Annals of Operations Research*. — 2008. — Vol. 160, No 1. — Pp. 227–255.
17. *Joshi G., Soljanin E., Wornell G.* Efficient Redundancy Techniques for Latency Reduction in Cloud Systems // *arXiv preprint arXiv:1508.03599*. — 2015.
18. *David H. A.* Order Statistics. — Wiley, New York, 1981.
19. *David H. A., Nagaraja H. N.* Order Statistics. — John Wiley & Sons, 2003. — 458 p.
20. *Gumbel E. J.* Statistics of Extremes. — New York: Columbia University Press, 1958. — 375 p.
21. *Allen A. O.* Probability, Statistics, and Queueing Theory: With Computer Science Applications. — Gulf Professional Publishing, 1990. — 740 p.
22. *Kleinrock L.* Queueing Systems, Volume I: Theory. — Wiley Interscience, 1975. — 448 p.
23. *Trivedi K. S.* Probability and Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications (2nd ed.). — John Wiley & Sons, 2002. — 830 p.
24. *Gravey A.* A Simple Construction of an Upper Bound for the Mean of the Maximum of  $N$  Identically Distributed Random Variables // *Journal of Applied Probability*. — 1985. — Vol. 22. — Pp. 844–851.
25. The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests / *A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matushenko, E. S. Sopin* // *Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science*. — 2016. — Vol. 678. — Pp. 418–429.
26. *Самуйлов К. Е., Зарядов И. С., Горбунова А. В.* Анализ времени отклика системы облачных вычислений // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. — 2015. — Т. 9, № 11. — С. 57–61.
27. *Thomasian A.* Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems // *ACM Computing Surveys (CSUR)*. — 2014. — Vol. 47, No 2. — Pp. 17:1–17:71.
28. *Harrison P., S. Z.* Queueing Models with Maxima of Service Times // *Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools*. — Springer Berlin Heidelberg, 2003. — Pp. 152–168.
29. *Thomasian A., Menon J.* RAID5 Performance with Distributed Sparing // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. — 1997. — Vol. 8, No 6. — Pp. 640–657.
30. *Johnson N. L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. — Wiley Series in Probability and Statistics, 1995. — Vol. 1, 752 p.
31. *Lebrecht A. S., Knottenbelt W. J.* Response Time Approximations in Fork-Join Queues // *In Proceedings of the 23rd Annual UK Performance Engineering Workshop (UKPEW'07)*. — 2007.
32. *Arnold B. C.* Distribution-Free Bounds on the Mean of the Maximum of a Dependent Sample // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1985. — Vol. 38, No 1. — Pp. 163–167.

33. *Petzold M.* A Note on the First Moment of Extreme Order Statistics from the Normal Distribution // rapport nr.: Seminar Papers. — 2000.
34. *Thomasian A., Tantawi A. N.* Approximate Solutions for  $M/G/1$  Fork/Join Synchronization // Proceedings of the 26th conference on Winter simulation (WSC'94) / Society for Computer Simulation International. — 1994. — Pp. 361–368.

UDC 519.21

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-13-27

## A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers. Part II

A. V. Gorbunova\*, I. S. Zaryadov\*<sup>†</sup>, K. E. Samouylov\*

\* *Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

<sup>†</sup> *Institute of Informatics Problems  
Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences  
44-2 Vavilova St., Moscow, 119333, Russian Federation*

This paper is a continuation of the survey of the “fork-join” queuing systems (in the western classification) or the systems with splitting of queries. Interest in such systems is explained by a wide range of problems that can be solved with their help, since in fact it is a matter of parallel processing of data and their applications. For example, this may concern the analysis of disk arrays, cloud computing, high-performance services and even the process of picking orders in a warehouse. In the first part of the survey, the main features of the described model (and related systems) and its construction were introduced. Also the detailed description of the approach to obtaining an accurate expression of the average response time in the case of two devices was presented as well as several methods of approximate analysis of this characteristic (the case when the number of devices is more than two). This part of the survey is devoted to the description of other existing methods for approximating the average response time. In particular, the approaches of the approximate analysis of the response time are as follows: the matrix-geometric method, the analysis with the help of order statistics for various types of distribution of the service time of subqueries.

**Key words and phrases:** queuing system, splitting of requests, parallel service of requests, parallel processing, response time, synchronization delay, matrix geometric method, order statistics

## References

1. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, K. E. Samouylov, E. S. Sopin, A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 350–362, in Russian.
2. I. Tsimashenka, W. J. Knottenbelt, Reduction of Subtask Dispersion in Fork-Join Systems, in: Computer Performance Engineering, Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 325–336.
3. G. P. Basharin, Lectures on the Mathematical Theory of Teletraffic, PFUR, Moscow, 2009, in Russian.
4. P. P. Bocharov, A. V. Pechinkin, Queueing Theory, PFUR, Moscow, 1995, in Russian.
5. P. Bocharov, C. D'Apice, A. Pechinkin, S. Salerno, Queueing theory, Brill Academic Publishers, 2004.
6. E. V. Mokrov, K. E. Samouylov, Modeling of Cloud Computing as a Queuing System with Batch Arrivals, T-Comm — Telecommunications and transport 11 (7) (2013) 139–141, in Russian.

7. E. V. Mokrov, A. V. Chukarin, Performance Analysis of Cloud Computing System with Live Migration, T-Comm — Telecommunications and transport 8 (8) (2014) 64–67, in Russian.
8. S. Balsamo, I. Mura, Approximate Response Time Distribution in Fork and Join Systems, SIGMETRICS Performance Evaluation Review 23 (1) (1995) 305–306.
9. S. Balsamo, I. Mura, On Queue Length Moments in Fork and Join Queuing Networks with General Service Times, Computer Performance Evaluation Modelling Techniques and Tools. LNCS 1245 (1997) 218–231.
10. S. Balsamo, L. Donatiello, N. M. Van Dijk, Bound Performance Models of Heterogeneous Parallel Processing Systems, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 9 (10) (1998) 1041–1056.
11. H. G. Perros, On the  $M/C_k/1$  Queue, Performance Evaluation 3 (2) (1983) 83–93.
12. M. F. Neuts, Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, Courier Corporation, 1981.
13. B. M. Rao, M. J. M. Posner, Algorithmic and Approximation Analyses of the Split and Match Queue, Stochastic Models 1 (3) (1985) 433–456.
14. M. Takahashi, H. Ōsawa, T. Fujisawa, On a Synchronization Queue with Two Finite Buffers, Queueing Systems 36 (2000) 107–123.
15. M. Takahashi, Y. Takahashi, Synchronization Queue with Two MAP Inputs and Finite Buffers, in: Proc. of the Third International Conference on Matrix Analytical Methods in Stochastic Models, 2000, pp. 375–390.
16. M. S. Squillante, Y. Zhang, A. Sivasubramaniam, N. Gautam, Generalized Parallel-Server Fork-Join Queues with Dynamic Task Scheduling, Annals of Operations Research 160 (1) (2008) 227–255.
17. G. Joshi, E. Soljanin, G. Wornell, Efficient Redundancy Techniques for Latency Reduction in Cloud Systems, arXiv preprint arXiv:1508.03599.
18. H. A. David, Order Statistics, Wiley, New York, 1981.
19. H. A. David, H. N. Nagaraja, Order Statistics, John Wiley & Sons, 2003.
20. E. J. Gumbel, Statistics of Extremes, Columbia University Press, New York, 1958.
21. A. O. Allen, Probability, Statistics, and Queueing Theory: With Computer Science Applications, Gulf Professional Publishing, 1990.
22. L. Kleinrock, Queueing Systems, Volume I: Theory, Wiley Interscience, 1975.
23. K. S. Trivedi, Probability and Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications (2nd ed.), John Wiley & Sons, 2002.
24. A. Gravey, A Simple Construction of an Upper Bound for the Mean of the Maximum of  $N$  Identically Distributed Random Variables, Journal of Applied Probability 22 (1985) 844–851.
25. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matushenko, E. S. Sopin, The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests, Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2016. Communications in Computer and Information Science 678 (2016) 418–429.
26. K. E. Samouylov, I. S. Zaryadov, A. V. Gorbunova, The Response Time Analysis of Cloud Computing System, T-Comm — Telecommunications and transport 9 (11) (2015) 57–61, in Russian.
27. A. Thomasian, Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems, ACM Computing Surveys (CSUR) 47 (2) (2014) 17:1–17:71.
28. P. Harrison, Z. S., Queueing Models with Maxima of Service Times, in: Computer Performance Evaluation. Modelling Techniques and Tools, Springer Berlin Heidelberg, 2003, pp. 152–168.
29. A. Thomasian, J. Menon, RAID5 Performance with Distributed Sparing, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 8 (6) (1997) 640–657.
30. N. L. Johnson, S. Kotz, N. Balakrishnan, Continuous Univariate Distributions, Vol. 1, Wiley Series in Probability and Statistics, 1995.

31. A. S. Lebrecht, W. J. Knottenbelt, Response Time Approximations in Fork-Join Queues, in: In Proceedings of the 23rd Annual UK Performance Engineering Workshop (UKPEW'07), 2007.
32. B. C. Arnold, Distribution-Free Bounds on the Mean of the Maximum of a Dependent Sample, SIAM Journal on Applied Mathematics 38 (1) (1985) 163–167.
33. M. Petzold, A Note on the First Moment of Extreme Order Statistics from the Normal Distribution, in: rapport nr.: Seminar Papers, 2000.
34. A. Thomasian, A. N. Tantawi, Approximate Solutions for  $M/G/1$  Fork/Join Synchronization, in: Proceedings of the 26th conference on Winter simulation (WSC'94), Society for Computer Simulation International, 1994, pp. 361–368.

© Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е., 2018

**Для цитирования:**

Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е. Обзор систем параллельной обработки заявок. Часть II // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 13–27. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-13-27.

**For citation:**

Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Samouylov K. E. A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers. Part II, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 13–27. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-13-27. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Горбунова Анастасия Владимировна** — кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: gorbunova\_av@rudn.university, тел.: +7(495)9550927)

**Зарядов Иван Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, старший научный сотрудник ИПИ ФИЦ ИУ РАН (e-mail: zaryadov\_is@rudn.university, тел.: +7(495)9550927)

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: samuylov\_ke@rudn.university, тел.: +7(495)9550956)

**Information about the authors:**

**Gorbunova A. V.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: gorbunova\_av@rudn.university, phone: +7(495)9550927)

**Zaryadov I. S.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Senior Researcher of Institute of Informatics Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences (e-mail: zaryadov\_is@rudn.university, phone: +7(495)9550927)

**Samouylov K. E.** — professor, Doctor of Engineering Science, head of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: samuylov\_ke@rudn.university, phone: +7(495)9550956)



УДК 519.21;519.872

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-28-38

## Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы

О. А. Осипов

*Кафедра системного анализа и автоматического управления  
Саратовский национальный исследовательский государственный университет  
имени Н. Г. Чернышевского  
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, Россия, 410012*

В работе рассматривается многоприборная система массового обслуживания с ожиданием, требования в которой делятся в момент начала обслуживания на фрагменты так, что они одновременно занимают все свободные обслуживающие приборы. Предполагается, что обслуживающие приборы имеют различные интенсивности обслуживания. Фрагменты обслуживания независимы друг от друга, интенсивность обслуживания фрагмента зависит от его величины. Фрагмент, завершивший своё обслуживание, освобождает обслуживающий его прибор. Требование будет считаться обслуженным только после того, как будет завершено обслуживание всех его фрагментов, сразу после чего фрагменты требования объединяются, и полученное исходное требование покидает систему обслуживания.

В предположении о пуассоновском входящем потоке и экспоненциальных длительностях обслуживания фрагментов на приборах для описанной системы обслуживания с использованием матрично-геометрического метода получены точные выражения для основных стационарных характеристик. Особое внимание уделено длительности времени пребывания требований в системе обслуживания. Приводится численный пример анализа системы рассматриваемого типа, обсуждаются результаты работы и перспективы дальнейших исследований.

Представленная в работе система обслуживания может применяться в качестве модели современных многопроцессорных вычислительных систем, а также других систем с параллельным и распределённым принципом функционирования.

**Ключевые слова:** системы массового обслуживания с делением и слиянием требований, неоднородные приборы, матрично-геометрический метод, многопроцессорные системы, распределённое и параллельное выполнение

### 1. Введение

Реальные системы, в которых имеет место параллельная обработка [1] (многопроцессорные системы, GRID-системы, распределённые базы данных), получают все большее распространение. В таких системах поступающие для обработки задачи делятся на более простые для выполнения подзадачи, которые распределяются по системе, занимая выделенные для них ресурсы. После завершения своего выполнения подзадачи освобождают выделенные им ресурсы, однако исходная задача будет считаться выполненной только после выполнения всех её подзадач.

Для анализа производительности указанных выше систем используются модели теории массового обслуживания, такие как [2]: с центральным делением без синхронизирующей очереди (centralized splitting model without synchronization queue, split-merge model), с центральным делением и синхронизирующей очередью (centralized splitting model with synchronization queue), с распределённым делением и синхронизирующей очередью (distributed splitting model with synchronization queue), которые обычно относят к классу систем массового обслуживания с делением и слиянием требований (fork-join queueing systems) [3–8], а также такие родственные

модели как, например, модель независимых приборов (independent server model) [9,10], модель командного обслуживания (team service model) [11].

Общим во всех перечисленных моделях является деление поступающих требований на части — фрагменты, которые обслуживаются параллельно на приборах системы, и последующее объединение обслуженных фрагментов в исходные требования. Требование считается обслуженным и покидает систему только после окончания обслуживания всех его фрагментов. Распределение фрагментов поступающих требований по приборам системы с делением и слиянием требований, как и число фрагментов, получаемых при делении одного требования, задаётся некоторой детерминированной или вероятностной [12, 13] стратегией. Так, в работах [3, 4, 6–8] требования каждый раз делятся на одинаковое число фрагментов, по одному фрагменту для каждого обслуживающего прибора системы. С другой стороны, в [12] рассматривалась модель, в которой каждое требование может быть поделено на случайное число фрагментов, которые поступают на обслуживающие приборы в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Обзор всех основных теоретических и прикладных результатов связанных с моделями данного класса можно найти в [14, 15].

В статье рассматривается многоприборная система массового обслуживания с очередью бесконечной вместимости и пуассоновским входящим потоком. Основным отличием от известных работ является то, что деление требования в момент начала обслуживания на фрагменты происходит так, что они занимают все свободные обслуживающие приборы, то есть число фрагментов, получаемых при делении одного требования, зависит от состояния системы обслуживания, а длительность обслуживания фрагмента зависит от его величины. Фрагменты обслуживаются независимо друг от друга. Фрагмент, обслуживание которого завершено, освобождает обслуживающий его прибор. Требование будет считаться обслуженным только после того, как будет завершено обслуживание всех его фрагментов, сразу после чего фрагменты требования объединяются, а полученное исходное требование покидает систему обслуживания. Также отметим, что во многих работах [4, 7, 12, 13] рассматривается случай идентичных обслуживающих приборов, в представленной же системе обслуживания приборы имеют различные интенсивности обслуживания.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 подробно описывается изучаемая система массового обслуживания. Стационарное распределение состояний системы обслуживания, а также выражения для основных стационарных характеристик приводятся в разделах 3 и 4 соответственно. Раздел 5 содержит численные результаты анализа системы обслуживания.

## 2. Описание системы обслуживания

Рассматривается система обслуживания, состоящая из  $M$  обслуживающих приборов  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , и очереди бесконечной вместимости с дисциплиной обслуживания FCFS. В систему обслуживания поступает пуассоновский поток требований с интенсивностью  $\Lambda$ . Обозначим через  $w$  класс требования и положим, что для всех требований, поступающих из источника,  $w = 1$ .

Требование, поступающее на обслуживание, делится на фрагменты так, что они занимают все свободные в данный момент времени обслуживающие приборы: если имеется  $1 \leq d \leq M$  свободных приборов, то поступающее требование разделяется на  $d$  идентичных фрагментов с классом  $w = d$ . Каждый из фрагментов мгновенно занимает свободный прибор и начинает обслуживаться. То есть деление требования на  $d > 1$  фрагментов происходит в том случае, когда в момент поступления этого требования очередь системы была пуста, при этом имелось более одного свободного прибора. В других случаях требование не делится, однако для удобства будем называть и такое требование фрагментом.

Длительность обслуживания любого фрагмента с классом  $w$  на приборе  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , есть экспоненциально распределённая случайная величина с параметром  $w\mu_i$ , здесь  $\mu_i$ —интенсивность обслуживания фрагмента (требования) класса  $w = 1$ .

Фрагмент, обслуживание которого завершено, освобождает обслуживающий его прибор. Требование будет считаться обслуженным только после того, как будет завершено обслуживание всех его фрагментов. Сразу после этого фрагменты требования мгновенно объединяются в исходное требование, которое покидает систему обслуживания.

### 3. Стационарное распределение системы обслуживания

Состояние системы обслуживания определим как вектор  $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_M)$ , где  $n_0$ —число требований в очереди,

$$n_i = \begin{cases} 0, & \text{если прибор } S_i \text{ свободен,} \\ w_i, & \text{если прибор } S_i \text{ обслуживает фрагмент класса } w_i; \end{cases}$$

где  $i = 1, \dots, M$ .

Очевидно, что  $(M + 1)$ -мерный процесс  $\{\mathbf{n}(t), t \geq 0\}$  есть цепь Маркова с непрерывным временем, определённая на пространстве состояний  $\mathcal{S}$ ,

$$\mathcal{S} = \left\{ (0, n_1, \dots, n_M) : n_i \in \{0, \dots, M\}, i = 1, \dots, M \right\} \cup \left\{ (n_0, n_1, \dots, n_M) : n_0 > 0, n_i \in \{1, \dots, M\}, i = 1, \dots, M \right\}.$$

Обозначим через  $q(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$  интенсивность перехода цепи из состояния  $\mathbf{n} \in \mathcal{S}$  в состояние  $\mathbf{n}' \in \mathcal{S}$ . Справедливо

1. если  $n_i > 0, i = 0, 1, \dots, M$ ,

$$q((n_0, n_1, \dots, n_M), (n_0 + 1, n_1, \dots, n_M)) = \Lambda, \quad (1)$$

$$q((n_0, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \dots, n_M), (n_0 - 1, n_1, \dots, n_{j-1}, 1, n_{j+1}, \dots, n_M)) = \mu_j n_j, \quad (2)$$

где  $j \in \{1, \dots, M\}$ ;

2. если  $n_i > 0, i = 1, \dots, M$ ,

$$q((0, n_1, \dots, n_M), (1, n_1, \dots, n_M)) = \Lambda; \quad (3)$$

3. если  $n_i \geq 0, i = 1, \dots, M$ , и существует  $j \in \{1, \dots, M\}$  такое, что  $n_j = 0$ ,

$$q((0, n_1, \dots, n_M), (0, n'_1, \dots, n'_M)) = \Lambda, \quad (4)$$

где

$$n'_i = \begin{cases} n_i, & n_i > 0, \\ d(\mathbf{n}), & n_i = 0; \end{cases}$$

$d(\mathbf{n})$ —число свободных приборов при нахождении системы обслуживания в состоянии  $\mathbf{n}$ ;

4. если  $n_i \geq 0, i = 1, \dots, M$ ,

$$q((0, n_1, \dots, n_{j-1}, n_j, n_{j+1}, \dots, n_M), (0, n_1, \dots, n_{j-1}, 0, n_{j+1}, \dots, n_M)) = \mu_j n_j, \quad (5)$$

где  $j \in \{1, \dots, M\}$ .

Упорядочим состояния цепи Маркова в лексикографическом порядке. Под макросостоянием с номером  $i$ , будем понимать множество состояний  $\mathcal{S}_i$ , определяемое как

$$\mathcal{S}_i = \{(n_0, n_1, \dots, n_M) \in \mathcal{S} : n_0 = i\}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Мощности множеств  $\mathcal{S}_0$  и  $\mathcal{S}_i, i > 0$ , равны  $(M+1)^M$  и  $M^M$  соответственно. Заметим, что из (1) и (2) следует возможность перехода из макросостояния  $\mathcal{S}_i, i > 0$ , только в макросостояния  $\mathcal{S}_{i+1}$  и  $\mathcal{S}_{i-1}$ , интенсивности этих переходов не зависят от  $i$ .

Цепь Маркова  $\{\mathbf{n}(t), t \geq 0\}$  является квазипроцессом размножения и гибели [16], а инфинитезимальный оператор  $\mathbf{Q} = (q(\mathbf{n}, \mathbf{n}'))$ ,  $\mathbf{n}, \mathbf{n}' \in \mathcal{S}$ , цепи имеет блочнодиагональный вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $\mathbf{B}_{00}, \mathbf{B}_{01}, \mathbf{B}_{10}$  имеют размерность  $(M+1)^M \times (M+1)^M, (M+1)^M \times M^M, M^M \times (M+1)^M$  соответственно. Матрицы  $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  суть квадратные матрицы порядка  $M^M$ . Выражения (2) полностью определяют элементы матриц  $\mathbf{A}_0$  и  $\mathbf{B}_{10}$ .

Отметим, что  $\mathbf{A}_2 = \Lambda \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица;  $\mathbf{A}_1$  — диагональная матрица,  $\mathbf{A}_1 = -\text{diag}(\mathbf{A}_0 \mathbf{1} + \mathbf{A}_2 \mathbf{1})$ , где  $\text{diag}(\mathbf{a})$  задаёт диагональную матрицу с вектором  $\mathbf{a}$  на главной диагонали,  $\mathbf{1}$  — единичный вектор-столбец.

Матрицы  $\mathbf{B}_{00}, \mathbf{B}_{01}$  определяются выражениями (3), (4), (5).

Для вычисления стационарного распределения  $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \dots)$  воспользуемся аппаратом матрично-аналитических решений [17], а именно матрично-геометрическим методом. Здесь  $\boldsymbol{\pi}_i, i = 0, 1, \dots$ , есть вектор-строка, каждая компонента которого задаёт вероятность нахождения системы обслуживания в некотором состоянии из макросостояния  $\mathcal{S}_i$  в соответствии с введённым лексикографическим порядком. Будем использовать следующие обозначения:  $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{n}) = \pi(n_0, n_1, \dots, n_M)$  — стационарная вероятность нахождения системы в состоянии  $\mathbf{n}$ ;  $\boldsymbol{\pi}(\mathcal{S}_i)$  — стационарная вероятность нахождения системы в макросостоянии  $\mathcal{S}_i$ ,

$$\boldsymbol{\pi}(\mathcal{S}_i) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}_i} \boldsymbol{\pi}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\pi}_i \mathbf{1}.$$

Для системы обслуживания стационарный режим будет существовать тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\psi = \frac{\Lambda}{\mu_1 + \dots + \mu_M} < 1, \quad (6)$$

где  $\psi$  — коэффициент использования системы обслуживания.

Известно [16, 17], что при выполнении условия (6) стационарное распределение имеет вид  $\boldsymbol{\pi}_i = \boldsymbol{\pi}_1 \mathbf{R}^{i-1}, i = 1, 2, \dots$ , где  $\mathbf{R}$  есть решение уравнения  $\mathbf{A}_2 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2 \mathbf{A}_0 = \mathbf{0}$ , векторы  $\boldsymbol{\pi}_0$  и  $\boldsymbol{\pi}_1$  находятся как решение уравнения

$$(\boldsymbol{\pi}_0, \boldsymbol{\pi}_1) \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{00} & \mathbf{B}_{01} \\ \mathbf{B}_{10} & \mathbf{A}_1 + \mathbf{R}\mathbf{A}_0 \end{pmatrix} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}),$$

с условием нормировки  $\pi_0 \mathbf{1} + \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1} \mathbf{1} = 1$ .

#### 4. Вычисление стационарных характеристик

Используя стационарное распределение  $\pi$ , определим математическое ожидание  $\bar{B}$  числа требований в очереди системы обслуживания и математическое ожидание  $\bar{W}$  длительности пребывания требований в очереди,

$$\bar{B} = \sum_{i=1}^{\infty} i \pi(S_i) = \pi_1 \sum_{i=1}^{\infty} i \mathbf{R}^{i-1} \mathbf{1} = \pi_1 (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-2} \mathbf{1},$$

$$\bar{W} = \bar{B} / \Lambda.$$

Одной из основных характеристик, представляющих интерес в системах данного класса, является длительность времени пребывания требования [4, 6, 7] в системе обслуживания, которая определяется как длительность интервала времени от поступления требования в систему до возвращения требования в источник. Под длительностью обслуживания требования в системе обслуживания будем понимать максимум из длительностей интервалов времени, затраченных на обслуживание приборами всех фрагментов этого требования. Обозначим через  $\bar{V}$  математическое ожидание длительности обслуживания требований в системе обслуживания, тогда математическое ожидание  $\bar{T}$  длительности времени пребывания требований в системе обслуживания  $\bar{T} = \bar{W} + \bar{V}$ .

Рассмотрим два случая для поступающего из источника требования.

1. Требование застаёт все приборы системы обслуживания занятыми и встаёт в очередь. Тогда длительность обслуживания требования есть случайная величина с экспоненциальным распределением.
2. Требование застаёт в системе обслуживания  $d > 0$  свободных обслуживающих приборов. В этом случае длительность обслуживания требования есть максимум из  $d$  независимых случайных величин с экспоненциальными распределениями.

Пусть система обслуживания находится в состоянии  $\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_M)$ ,  $n_0 > 0$ , тогда вероятность  $\alpha_i(n_1, \dots, n_M)$  завершения обслуживания фрагмента на приборе  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , определяется как

$$\alpha_i(n_1, \dots, n_M) = \frac{\mu_i n_i}{\mu_1 n_1 + \dots + \mu_M n_M};$$

м.о.  $\mathbf{v}(n_1, \dots, n_M)$  длительности обслуживания для требования, занявшего освобождённый прибор, определяется выражением

$$\mathbf{v}(n_1, \dots, n_M) = \sum_{i=1}^M \frac{\alpha_i(n_1, \dots, n_M)}{\mu_i}.$$

Будем рассматривать систему обслуживания при условии, что в очереди есть требования, тогда множество  $\mathcal{S}^* = \{(n_1, \dots, n_M) : n_i \in \{1, \dots, M\}, i = 1, \dots, M\}$ , определяет множество состояний обслуживающих приборов. При данном предположении вероятность  $\alpha_i(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_M)$  является вероятностью перехода из состояния  $(n_1, \dots, n_{i-1}, n_i, n_{i+1}, \dots, n_M)$  в состояние  $(n_1, \dots, n_{i-1}, 1, n_{i+1}, \dots, n_M)$ , обусловленного завершением обслуживания некоторого фрагмента на приборе  $S_i$ . Случайный процесс, вложенный по моментам ухода фрагментов, является цепью Маркова с дискретным временем и множеством состояний  $\mathcal{S}^*$ . Пусть состояния в  $\mathcal{S}^*$  упорядочены в лексикографическом порядке, а  $\mathbf{P}$  задаёт матрицу переходов для цепи Маркова.

Предположим, что требование поступает в систему, когда в очереди находится  $i > 0$  требований. Рассмотрим эволюцию цепи Маркова, описывающей переходы между состояниями приборов. В этом случае  $\pi(i, n_1, \dots, n_M)/\pi(\mathcal{S}_i)$  задаёт вероятность нахождения приборов в состоянии  $(n_1, \dots, n_M)$  при условии нахождения в очереди  $i$  требований. Вектор  $\pi_i/\pi(\mathcal{S}_i)$  будет являться вектором начального распределения для рассматриваемого процесса. Через  $i$  завершённых обслуживания поступившее в систему обслуживания требование будет первым в очереди на обслуживание, следовательно, математическое ожидание  $\bar{V}_i$  длительности обслуживания требования, заставшего  $i$  требований в очереди, определяется как

$$\bar{V}_i = \frac{\pi_i}{\pi(\mathcal{S}_i)} P^i \mathbf{v}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где  $\mathbf{v}$  есть вектор-столбец, составленный из элементов множества  $\{\mathbf{v}(n_1, \dots, n_M) : (n_1, \dots, n_M) \in \mathcal{S}^*\}$  в соответствии с введённым лексикографическим порядком на множестве  $\mathcal{S}^*$ .

Рассмотрим теперь случай, когда поступающее в систему обслуживания требование не застаёт в очереди требований. Если все обслуживание приборы заняты, то математическое ожидание длительности обслуживания определяется аналогично предыдущему случаю. Пусть требование застаёт некоторые обслуживающие приборы свободными; обозначим через  $D(\mathbf{n})$  множество номеров свободных приборов для состояния  $\mathbf{n} \in \mathcal{S}$ . Положим для некоторого  $\mathbf{n}$ ,  $D(\mathbf{n}) \neq \emptyset$ , тогда требование разделится на  $d(\mathbf{n}) > 0$  фрагментов, длительность обслуживания этого требования будет максимумом из независимых экспоненциально распределённых случайных величин. Таким образом, для требований, которые застают очередь системы пустой, математическое ожидание  $\bar{V}_0$  длительности обслуживания требования определяется как

$$\bar{V}_0 = \frac{1}{\pi(\mathcal{S}_0)} \left( \sum_{(n_1, \dots, n_M) \in \mathcal{S}^*} \pi(0, n_1, \dots, n_M) \mathbf{v}(n_1, \dots, n_M) + \sum_{\mathbf{n} \in \mathcal{S}, d(\mathbf{n}) > 0} \pi(\mathbf{n}) \mathbf{E} \left[ \max_{i \in D(\mathbf{n})} \{ \exp(d(\mathbf{n}) \mu_i) \} \right] \right),$$

здесь  $\mathbf{E}$  обозначает оператор математического ожидания,  $\exp(a)$  — случайная величина с экспоненциальным распределением с параметром  $a$ . Обсуждение нахождения распределения максимума случайных величин можно найти, например, в [16, 18].

Тогда для математического ожидания  $\bar{V}$  длительности обслуживания требований справедливо

$$\bar{V} = \sum_{i=0}^{\infty} \pi(\mathcal{S}_i) \bar{V}_i = \pi(\mathcal{S}_0) \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i P^i \mathbf{v} = \pi(\mathcal{S}_0) \bar{V}_0 + \pi_1 \sum_{i=0}^{\infty} R^i P^i P \mathbf{v}. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} R^i P^i$ , обозначив через  $X$  его сумму,

$$\sum_{i=0}^{\infty} R^i P^i = \mathbf{I} + R(\mathbf{I} + RP + R^2 P^2 + \dots)P = \mathbf{I} + RXP = X,$$

$$X = \mathbf{I} + RXP. \quad (8)$$

Матрица  $\mathbf{X}$  есть решение уравнения (8), которое может быть переписано в привычном для уравнения Сильвестра [19, 20] виде (9):

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X} - \mathbf{X} \mathbf{P}. \quad (9)$$

Из (7) после преобразований получаем

$$\bar{V} = \pi(\mathcal{S}_0) \bar{V}_0 + \pi_1 \mathbf{X} \mathbf{P} v.$$

Математическое ожидание числа требований в системе  $\bar{N} = \Lambda \bar{T}$ .

## 5. Пример

На основании полученных выражений рассмотрим изменение математического ожидания длительности пребывания требований в системе обслуживания в зависимости от числа обслуживающих приборов ( $M = 2, 3, 4$ ) и интенсивности входящего потока. Предполагается, что  $\mu_1 = \dots = \mu_M = 1$ , коэффициент использования меняется в следующих границах:  $0, 1 \leq \psi \leq 0, 9$ .

Графики зависимости представлены на рис. 1. Отметим, что полученные с использованием выражений численные результаты были подтверждены также результатами имитационного моделирования.

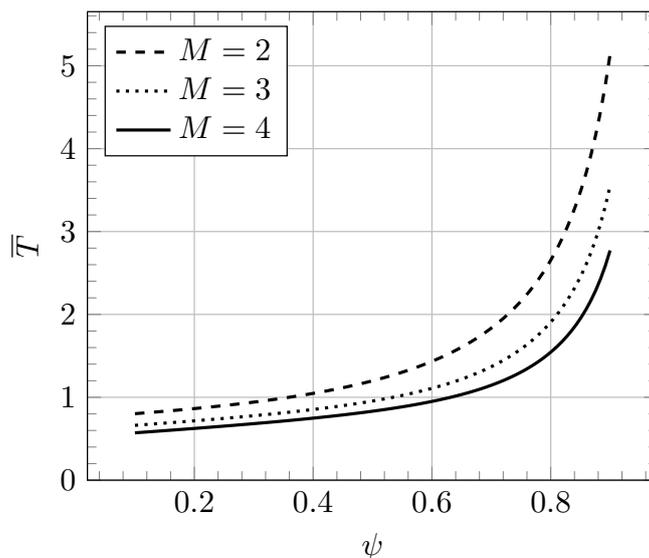


Рис. 1. Зависимость математического ожидания длительности пребывания требований в системе обслуживания

Отметим, что когда коэффициент использования приближается к единице, рассматриваемая система ведёт себя аналогично системе с  $M$  обслуживающими приборами без деления требований, тогда в случае, когда все обслуживающие приборы имеют одинаковую интенсивность обслуживания  $\mu$ , математическое ожидание  $\bar{T}$  длительности времени пребывания требований в системе может быть приближённо найдено как

$$\bar{T} \approx \frac{1}{\mu} \left[ p_0 \frac{M^{M-1} \psi^M}{M!(1-\psi)^2} + 1 \right], \quad p_0 = \left[ \frac{(M\psi)^M}{M!(1-\psi)} + \sum_{i=0}^{M-1} \frac{(M\psi)^i}{i!} \right]^{-1}.$$

Сравнение результатов для случая, когда  $M = 4$ ,  $\mu = 1$ , приведено в табл. 1.

**Таблица 1**

**Математическое ожидание длительности пребывания требований в системе для двух различных моделей**

| $\psi$                 | 0.1    | 0.3    | 0.5    | 0.7    | 0.8    | 0.9    | 0.95   |
|------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| с делением требований  | 0,5714 | 0,6821 | 0,8324 | 1,1540 | 1,5604 | 2,8001 | 5,2955 |
| без деления требований | 1,0002 | 1,0132 | 1,0870 | 1,3572 | 1,7455 | 2,9694 | 5,4571 |

Видно, что во всех случаях система без деления требований на фрагменты имеет большее математическое ожидание длительности пребывания требований в системе, то есть может быть использована для нахождения верхней границы для  $\bar{T}$ .

## 6. Заключение

В статье рассмотрена многоприборная система массового обслуживания с очередью бесконечной вместимости, в которой требование делится на фрагменты так, что они занимают все свободные обслуживающие приборы. С использованием матрично-геометрического метода получено стационарное распределение вероятностей состояний системы, а также точные выражения для основных стационарных характеристик системы (математическое ожидание длительности пребывания требований в системе обслуживания, математическое ожидание длительности пребывания требований в очереди и т.д.).

В качестве направления дальнейших исследований могут быть рассмотрены различные дисциплины разделения требований, например, с ограничением на максимальное число фрагментов, порождаемых одним требованием.

## Литература

1. Models for Parallel and Distributed Computation / Ed. by R. Corrêa, I. Dutra, M. Fiallos, F. Gomes. — Springer US, 2002.
2. *Narahari Y., Sundarrajan P.* Performability Analysis of Fork-join Queueing Systems // Journal of the Operational Research Society. — 1995. — Vol. 46, No 10. — Pp. 1237–1249.
3. *Flatto L., Hahn S.* Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands I // SIAM Journal on Applied Mathematics. — 1984. — Vol. 44, No 5. — Pp. 1041–1053.
4. *Nelson R., Tantawi A. N.* Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues // IEEE Transactions on Computers. — 1988. — Vol. 37, No 6. — Pp. 739–743.
5. *Ko S.-S., Serfozo R. F.* Response Times in  $M|M|s$  Fork-Join Networks // Advances in Applied Probability. — 2004. — Vol. 36, No 3. — Pp. 854–871.
6. Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений / А. В. Горбунова, И. С. Зарядов, С. И. Матюшенко, К. Е. Самуйлов, С. Я. Шоргин // Информатика и её применения. — 2015. — Т. 9, вып. 3. — С. 31–38.
7. Generalized Parallel-Server Fork-Join Queues with Dynamic Task Scheduling / M. S. Squillante, Y. Zhang, A. Sivasubramaniam, N. Gautam // Annals of Operations Research. — 2008. — Vol. 160, No 1. — Pp. 227–255.

8. *Вьшенский С. В., Григорьев П. В., Дубенская Ю. Ю.* Идеальный синхронизатор маркированных пар в сети разветвление-объединение // *Обозрение прикладной и промышленной математики*. — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 385–399.
9. *Green L.* A Queueing System in Which Customers Require a Random Number of Servers // *Operations Research*. — 1980. — Vol. 28, No 6. — Pp. 1335–1346.
10. *Rumyantsev A., Morozov E.* Stability Criterion of a Multiserver Model with Simultaneous Service // *Annals of Operations Research*. — 2015. — Vol. 252, No 1. — Pp. 29–39.
11. *Omahen K., Schrage L.* A Queueing Analysis of a Multiprocessor System with Shared Memory // *Proceedings of the Symposium on Computer Communication Networks and Teletraffic*. — 1972. — Pp. 77–88.
12. *Kumar A., Shorey R.* Performance Analysis and Scheduling of Stochastic Fork-Join Jobs in a Multicomputer System // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*. — 1993. — Vol. 10, No 4. — Pp. 1147–1164.
13. *Javidi T.* Cooperative and Non-Cooperative Resource Sharing in Networks: A Delay Perspective // *IEEE Transactions on Automatic Control*. — 2008. — Vol. 53, No 9. — Pp. 2134–2142.
14. *Thomasian A.* Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems // *ACM Computing Surveys*. — 2014. — Vol. 47, No 2. — Pp. 17:1–17:71.
15. Обзор систем параллельной обработки заявок / А. В. Горбунова, И. С. Зарядов, К. Е. Самуйлов, Э. С. Сопин // *Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика*. — 2017. — Т. 25, вып. 4. — С. 350–362.
16. *He Q.-M.* Fundamentals of Matrix-Analytic Methods. — New York: Springer, 2014.
17. *Neuts M. F.* Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach. — Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 1981.
18. *David H. A., Nagaraja H. N.* Order Statistics. — John Wiley & Sons, Inc., 2003.
19. *Gantmacher F. R.* The Theory of Matrices. — Chelsea Publishing Company, 1959.
20. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1973.

UDC 519.21;519.872

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-28-38

## A Heterogeneous Fork-Join Queueing System in Which Each Job Occupy All Free Servers

O. A. Osipov

*Department of System Analysis and Automatic Control  
Saratov State University (SSU)  
83 Astrahanskaya St., Saratov, 410012, Russian Federation*

In this paper, we consider a multiserver queueing system with heterogeneous servers in which each job is split to be serviced into a number of tasks, one for each free server. The tasks are serviced independently, but service time depends on weight of the tasks. A job is considered to be complete only when all the tasks associated with the job have been executed to completion.

Applying a matrix-geometric approach, we obtain the exact expression for the stationary distribution of the number of jobs in the system under exponential assumptions. Using the distribution, we derive other important performance measures. Special attention is paid to the sojourn time in the queueing system (the time to complete a job). Finally, some numerical examples and a section of conclusions commenting the main research contributions of this paper are presented.

The results can be used for the performance analysis of multiprocessor systems and other modern distributed systems.

**Key words and phrases:** fork-join queueing systems, heterogeneous servers, matrix-geometric method, multiprocessor systems, distributed computing systems

## References

1. R. Corrêa, I. Dutra, M. Fiallos, F. Gomes (Eds.), *Models for Parallel and Distributed Computation*, Springer US, 2002. doi:10.1007/978-1-4757-3609-0.
2. Y. Narahari, P. Sundarrajan, Performability Analysis of Fork-join Queueing Systems, *Journal of the Operational Research Society* 46 (10) (1995) 1237–1249. doi:10.1057/jors.1995.171.
3. L. Flatto, S. Hahn, Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands I, *SIAM Journal on Applied Mathematics* 44 (5) (1984) 1041–1053. doi:10.1137/0144074.
4. R. Nelson, A. N. Tantawi, Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues, *IEEE Transactions on Computers* 37 (6) (1988) 739–743. doi:10.1109/12.2213.
5. S.-S. Ko, R. F. Serfozo, Response Times in  $M|M|s$  Fork-Join Networks, *Advances in Applied Probability* 36 (3) (2004) 854–871. doi:10.1017/s000186780001315x.
6. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matyushenko, K. E. Samouylov, S. Ya. Shorgin, The Approximation of Response Time of a Cloud Computing System, *Informatics and applications* 9 (2015) 32–38, in Russian. doi:10.14357/19922264150304.
7. M. S. Squillante, Y. Zhang, A. Sivasubramaniam, N. Gautam, Generalized Parallel-Server Fork-Join Queues with Dynamic Task Scheduling, *Annals of Operations Research* 160 (1) (2008) 227–255. doi:10.1007/s10479-008-0312-7.
8. S. V. Vyshenski, P. V. Grigoriev, Yu. Yu. Dubenskaya, Ideal Synchronizer for Marked Pairs in Fork-Join Network, *Review of applied and industrial mathematics* 15 (3) (2008) 385–399, in Russian.
9. L. Green, A Queueing System in Which Customers Require a Random Number of Servers, *Operations Research* 28 (6) (1980) 1335–1346.
10. A. Rumyantsev, E. Morozov, Stability Criterion of a Multiserver Model with Simultaneous Service, *Annals of Operations Research* 252 (1) (2015) 29–39. doi:10.1007/s10479-015-1917-2.
11. K. Omahen, L. Schrage, A Queueing Analysis of a Multiprocessor System with Shared Memory, in: *Proceedings of the Symposium on Computer Communication Networks and Teletraffic*, 1972, pp. 77–88.
12. A. Kumar, R. Shorey, Performance Analysis and Scheduling of Stochastic Fork-Join Jobs in a Multicomputer System, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems* 10 (4) (1993) 1147–1164.
13. T. Javidi, Cooperative and Non-Cooperative Resource Sharing in Networks: A Delay Perspective, *IEEE Transactions on Automatic Control* 53 (9) (2008) 2134–2142. doi:10.1109/TAC.2008.930186.
14. A. Thomasian, Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems, *ACM Computing Surveys* 47 (2) (2014) 17:1–17:71. doi:10.1145/2628913.
15. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, K. E. Samouylov, E. S. Sopin, A Survey on Queueing Systems with Parallel Serving of Customers, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (2017) 350–362, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362.
16. Q.-M. He, *Fundamentals of Matrix-Analytic Methods*, Springer, New York, 2014. doi:10.1007/978-1-4614-7330-5.
17. M. F. Neuts, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1981.
18. H. A. David, H. N. Nagaraja, *Order Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., 2003. doi:10.1002/0471722162.
19. F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, 1959.
20. P. Lancaster, M. Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, 2d edition, Academic Press, 1985, in Russian.

**Для цитирования:**

Осипов О. А. Система обслуживания с делением и слиянием требований, в которой требование занимает все свободные обслуживающие приборы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 28–38. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-28-38.

**For citation:**

Osipov O. A. A Heterogeneous Fork-Join Queueing System in Which Each Job Occupy All Free Servers, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 28–38. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-28-38. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Осипов Олег Александрович** — ассистент кафедры системного анализа и автоматического управления СГУ (e-mail: oleg.alex.osipov@gmail.com, тел.: +7(8452)213620)

**Information about the authors:**

**Osipov O. A.** — assistant of Department of System Analysis and Automatic Control of Saratov State University (SSU) (e-mail: oleg.alex.osipov@gmail.com, phone: +7(8452)213620)



## Математическое моделирование

УДК 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48

### О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца

М. Д. Малых, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов, А. А. Тютюнник

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Исследование электромагнитного поля в регулярном волноводе, заполненном однородным веществом, сводится к исследованию двух независимых краевых задач для уравнения Гельмгольца. В случае волновода, заполненного неоднородным веществом, между модами этих двух задач возникает связь, которую в численных экспериментах не всегда удаётся учесть в полной мере. В настоящей статье показано, как переписать уравнения Гельмгольца в векторной форме, чтобы выразить эту связь явно.

В работе рассматривается цилиндрический волновод с идеально проводящими стенками, заполнение которого может менять в поперечном сечении произвольным образом. В основе нашего подхода лежит двумерный аналог теоремы, известной в теории упругих тел как декомпозиция Гельмгольца. На её основании будут введены четыре потенциала вместо двух, обычно используемых в теории полых волноводов. Доказано, что любое решение уравнений Максвелла в волноводе, удовлетворяющее краевым условиям идеальной проводимости на стенках волновода, можно представить при помощи этих потенциалов. Система уравнений Максвелла записана относительно этих потенциалов, и показано, что эта система переходит в пару несвязанных уравнений Гельмгольца в случае полого волновода.

**Ключевые слова:** волновод, уравнения Максвелла, уравнение Гельмгольца, нормальные моды, Sagemath

### Введение

Первые задачи, описывающие распространение и дифракцию волноводных мод, были успешно решены ещё в середине прошлого века в ставших уже классическими работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского [1] и А. Г. Свешникова [2–4]. За редкими исключениями, рассмотренными ещё в работах А. Н. Тихонова и А. А. Самарского, эти задачи не решаются в символьном виде и требуют создания ресурсоёмких комплексов программ [5–7]. Фактически подобные комплексы создавались под конкретные задачи и не были детально описаны и переданы в общественное пользование, чему способствовала закрытость тематики в 1970–1980-х годах. Из опубликованных исследований следует упомянуть в первую очередь цикл работ, выполненных в МГУ им. М. В. Ломоносова, в том числе по проектированию волноводного перехода [8–11], вычислению нормальных мод волновода со сложным диэлектрическим заполнением [12, 13], решению дифракции волн на неоднородности в волноводе [14–18].

Теоретическая сторона этих вопросов хорошо проработана в общей векторной постановке. Для спектральной задачи установлена дискретность спектра и полнота системы нормальных волн, причём даже для волноводов с очень сложным заполнением [19–22]. Для задачи дифракции установлена фредгомость [23–26] и с некоторыми оговорками обосновано применение неполного метода Галёркина, в том числе для волновода, сечение которого имеет входящие ребра [27–29]. Однако на практике при проведении численных экспериментов очень часто ограничиваются так называемым скалярным приближением. На самом деле векторный характер поля в заполненных волноводах приводит к гибридизации ТЕ- и ТМ-мод. Однако плохо изучено,

Статья поступила в редакцию 4 декабря 2017 г.

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100» и при частичной поддержке грантов РФФИ № 16-07-00556, № 18-07-00567.

насколько значительно этот эффект влияет на адекватность численных экспериментов натурным, а значит векторным задачам о распространении волноводных мод. Упомянутые выше теоретические результаты были сначала получены в скалярном приближении, а затем перенесены на векторный случай путём введения нестандартных функциональных норм. Перенесение этих конструкций на язык метода конечных разностей или метода конечных элементов часто представляет технически трудную задачу и приводит к весьма громоздким формулам.

Проектирование современных устройств интегральной и волоконной оптики приводит к тем же задачам о распространении и дифракции волноводных волн с той существенной для численных экспериментов оговоркой, что параметры волновода, например, линейные размеры, раньше бывшие примерно равными, могут отличаться друг от друга на четыре порядка. Так, например, высота волноводной линзы Люнеберга меньше её диаметра в  $10^4$  раз, что неизбежно приводит к вычислительным трудностям. В настоящее время созданы комплексы программ (Ansys, Comsol Multiphysics) и даже специализированные языки программирования (FreeFem++), позволяющие решать стандартные краевые и начально краевые задачи математической физики по методу конечных разностей в самых разнообразных его модификациях и обобщениях [30]. Следует, однако, заметить, что задача дифракции в волноводе становится корректной математической задачей только после постановки парциальных условий излучения [5, 6], которые не являются локальными в отличие от классических краевых условий, реализованных в общедоступных комплексах программ по умолчанию. Поэтому в настоящий момент представляется весьма актуальной разработка современного комплекса программ, в котором было бы реализовано вычисление нормальных мод волновода с произвольным заполнением и решение задачи дифракции именно в полной электромагнитной постановке и с парциальными условиями излучения.

Общедоступность такого комплекса не может быть достигнута, если в нём не будет реализована наглядная и в то же время весьма общая схема решения. На наш взгляд, ключевой момент в векторной задаче таится в отсутствии ответа на очень старый вопрос. Хорошо известно, что в некоторых криволинейных координатах, в том числе цилиндрических, можно свести уравнения Максвелла к паре уравнений Гельмгольца. Потенциалы вводились и именовались по-разному, например, назывались функциями Борнгиса или  $z$ -координатой векторов Герца [6, 31]. Поэтому волны в полном регулярном волноводе описываются двумя независимыми уравнениями Гельмгольца, что и даёт деление нормальных мод на ТЕ- и ТМ-моды. Однако в волноводе со вставками такая декомпозиция оказывается невозможной хотя бы потому, что там возникают гибридные моды. На интуитивном уровне понятно, что в этом случае поле должно описываться парой уравнений Гельмгольца, «зацепляющихся» некоторым перекрёстным членом, величина которого характеризует явление гибридизации, а значит ошибку в применении скалярного приближения. Вопрос же состоит в том, как явно выписать эту пару уравнений Гельмгольца. Первые работы по математической теории волновода всегда имели в виду обобщение метода Фурье, поэтому вопрос о сведении системы уравнений Максвелла к двум скалярным уравнениям оказался в тени теоремы о полноте системы нормальных мод. В этой статье мы покажем, как выписать эту пару связанных уравнений Гельмгольца, если перейти к гамильтоновой или, выражаясь точнее, векторной форме этих уравнений. В основе нашего подхода [32] лежит двумерный аналог теоремы, известной в теории упругих тел как декомпозиция Гельмгольца [33].

## 1. Исключение продольных компонент из системы уравнений Максвелла

Рассмотрим волновод постоянного сечения  $S$  с идеально проводящими стенками, относительно заполнения  $\varepsilon, \mu$  которого не будет делать пока никаких предположений. Ось  $Oz$  направим по оси цилиндра, нормаль к поверхности волновода будем

обозначать как  $\vec{n}$ , касательный вектор, перпендикулярный к  $\vec{e}_z$  как  $\vec{\tau}$ . В этой системе координат векторное поле  $\vec{F}$  можно записать как  $\vec{F} = \vec{F}_\perp + F_z \vec{e}_z$ .

При решении задач в волноводах в полной векторной постановке можно выбирать в качестве основных различные наборы координат векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ . Обзор возможностей на примере спектральной задачи дан в [12].

Возьмём сейчас за основу систему уравнений Максвелла, из которой исключим  $E_z$  и  $H_z$ . Чтобы выписать эту систему, положим  $\nabla = (\partial_x, \partial_y)^T$ ,  $\nabla' = (-\partial_y, \partial_x)^T$ .

Как известно,  $(\text{rot } \vec{A})_\perp = \vec{e}_z \times \partial_z \vec{A}_\perp + \nabla A_z \times \vec{e}_z$ . Поэтому уравнения Максвелла можно записать так

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H}_\perp + \nabla H_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon \vec{E}_\perp = 0, \\ (\text{rot } \vec{H}_\perp)_z + ik\varepsilon E_z = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z \vec{E}_\perp + \nabla E_z \times \vec{e}_z - ik\mu \vec{H}_\perp = 0, \\ (\text{rot } \vec{E}_\perp)_z - ik\mu H_z = 0. \end{cases}$$

Исключая отсюда продольные компоненты векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , имеем

$$\begin{cases} \vec{e}_z \times \partial_z \vec{H}_\perp + \nabla \frac{1}{ik\mu} (\text{rot } \vec{E}_\perp)_z \times \vec{e}_z + ik\varepsilon \vec{E}_\perp = 0, \\ \vec{e}_z \times \partial_z \vec{E}_\perp - \nabla \frac{1}{ik\varepsilon} (\text{rot } \vec{H}_\perp)_z \times \vec{e}_z - ik\mu \vec{H}_\perp = 0. \end{cases} \quad (1)$$

На границе выполняются условия идеальной проводимости

$$\vec{E}_\perp \times \vec{n} = 0, \quad \vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = 0, \quad E_z = 0. \quad (2)$$

## 2. Декомпозиция Гельмгольца

**Теорема 1.** Пусть  $S$  — односвязная область на плоскости. Если вектор  $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$  удовлетворяет граничному условию  $\vec{A} \cdot \vec{\tau} = 0$  и имеет первые непрерывные производные в  $S$ , то найдутся такие функции  $u \in \overset{0}{W}_2^1(S)$  и  $v \in W_2^1(S)$ , что  $\vec{A} = \nabla u + \nabla' v$ ; при этом  $u$  — решение задачи

$$\Delta u = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad u|_{\partial S} = 0, \quad (3)$$

а  $v$  — решение задачи

$$\Delta v = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad \nabla v \cdot \vec{n}|_{\partial S} = 0. \quad (4)$$

Указанное представление единственно с точностью до аддитивных констант.

**Доказательство.** Задачи (3) и (4) имеют решение в  $\overset{0}{W}_2^1(S)$  и  $W_2^1(S)$  [34], которое во внутренних точках области  $S$  является дважды непрерывно дифференцируемым в силу леммы Вейля [35]. Вектор  $\vec{B} = \nabla u + \nabla' v - \vec{A}$  удовлетворяет в обобщённом смысле двум условиям

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta u - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad \text{и} \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = \Delta v - \partial_x A_y + \partial_y A_x = 0.$$

Отсюда следует, что  $\vec{B} = \nabla w$ , где  $w$  гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot \tau = \nabla u \cdot \tau + \nabla' v \cdot \tau - \vec{A} \cdot \tau = 0,$$

то есть  $w$  принимает на границе постоянное значение. В силу принципа максимума это означает, что  $w = \text{const}$ , а  $\vec{B} = 0$ .  $\square$

**Теорема 2.** Пусть  $S$  — односвязная область на плоскости. Если вектор  $\vec{A} = (A_x, A_y)^T$  удовлетворяет граничному условию  $\vec{A} \cdot \vec{n} = 0$  и имеет первые непрерывные производные в  $S$ , то найдутся такие функции  $u \in \overset{\circ}{W}_2^1(S)$  и  $v \in W_2^1(S)$ , что  $\vec{A} = \nabla v + \nabla' u$ ; при этом  $v$  — решение задачи

$$\Delta v = \partial_x A_x + \partial_y A_y, \quad \nabla v \cdot n|_{\partial S} = 0, \quad (5)$$

а  $u$  — решение задачи

$$\Delta u = \partial_x A_y - \partial_y A_x, \quad u|_{\partial S} = 0. \quad (6)$$

При этом потенциалы определены с точностью до аддитивных констант.

**Доказательство.** Задачи (6) и (5) имеют решение в  $\overset{\circ}{W}_2^1(S)$  и  $W_2^1(S)$  [34], которое во внутренних точках области  $S$  является дважды непрерывно дифференцируемым в силу леммы Вейля [35]. Вектор  $\vec{B} = \nabla v + \nabla' u - \vec{A}$  удовлетворяет в обобщённом смысле двум условиям:

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \Delta v - \partial_x A_x - \partial_y A_y = 0 \quad \text{и} \quad \partial_x B_y - \partial_y B_x = \Delta u - \partial_x A_y + \partial_y A_x = 0.$$

Отсюда следует, что  $\vec{B} = \nabla w$ , где  $w$  гармоническая функция. На границе

$$\vec{B} \cdot n = \nabla v \cdot n + \nabla' u \cdot n - \vec{A} \cdot n = 0,$$

то есть  $\nabla w \cdot n = 0$ . Это означает, что  $w = \text{const}$ , а  $\vec{B} = 0$ .  $\square$

### 3. Уравнения Максвелла, записанные относительно потенциалов

Теоремы 1, 2 позволяют в случае волноводов с односвязным сечением, не ограничивая общности рассмотрения, искать решение системы (1) в виде

$$\vec{E}_\perp = \nabla u_e + \nabla' v_e, \quad \vec{H}_\perp = \nabla v_h + \nabla' u_h. \quad (7)$$

Если сечение является многосвязным, то искать решение в таком виде можно, сознавая, что так теряются некоторые «электростатические» решения.

Введённые здесь на основании теоремы 1 четыре скалярные функции будем называть потенциалами и всегда предполагать, что они удовлетворяют граничным условиям

$$u_e = u_h = n \cdot \nabla v_e = n \cdot \nabla v_h \quad (8)$$

на границе волновода. При этом автоматически выполняются два из трёх граничных условий (2):  $\vec{E}_\perp \cdot \vec{\tau} = \nabla u_e \cdot \vec{\tau} + \nabla' v_e \cdot \vec{\tau} = 0$ ,  $\vec{H}_\perp \cdot \vec{n} = \nabla v_h \cdot \vec{n} + \nabla' u_h \cdot \vec{n} = 0$ .

Что же касается третьего условия  $E_z$ , то его можно записать как  $(\text{rot } \vec{H}_\perp)_z = 0$  или

$$\Delta u_h|_{\partial S} = 0. \quad (9)$$

В простых случаях на физическом уровне строгости третье условие выводят из первых двух, и поэтому про него можно было бы забыть. На самом деле, при обобщённой формулировке задачи это условие появляется вполне естественным образом.

Подставляя выражения (7) в уравнения Максвелла (1), получим

$$\begin{cases} \nabla' \left( \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e \right) + ik\varepsilon \nabla' v_e - \nabla \partial_z u_h + ik\varepsilon \nabla u_e = 0, \\ \nabla' \left( \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h \right) - ik\mu \nabla' u_h - \nabla \partial_z v_e - ik\mu \nabla v_h = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Эта система представляет собой уравнения Максвелла, записанные относительно 4-х потенциалов.

Если  $\varepsilon$  и  $\mu$  зависят от  $x, y$ , то эта система не распадается на две: отдельно для  $u$ -потенциалов, отдельно для  $v$ -потенциалов, в чем, собственно говоря, и состоит упомянутое выше явление гибридизации мод. Частный случай, когда  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от  $x$  и  $y$ , интересен тем, что он позволяет разглядеть в этой системе пару уравнений Гельмгольца.

#### 4. Частный случай, когда система распадается на два скалярных уравнения Гельмгольца

Пусть  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят от  $x$  и  $y$ . Не делая пока никаких предположений об их зависимости от  $z$ , можем переписать систему (10) следующим образом

$$\begin{cases} \nabla' \left( \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e \right) - \nabla (\partial_z u_h - ik\varepsilon u_e) = 0, \\ \nabla' \left( \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h \right) - \nabla (\partial_z v_e + ik\mu v_h) = 0. \end{cases}$$

Всякое решение этой системы, удовлетворяющее граничным условиям  $u_e = \Delta u_e = 0$ ,  $\nabla v_e \cdot n = \nabla \Delta v_e \cdot n = 0$ , в силу теорем 1 и 2 удовлетворяет системе из четырёх уравнений, которая распадается на две системы:

$$\begin{cases} \partial_z v_h - \frac{1}{ik\mu} \Delta v_e + ik\varepsilon v_e = 0, & \begin{cases} \partial_z u_e + \frac{1}{ik\varepsilon} \Delta u_h - ik\mu u_h = 0, \\ \partial_z v_e + ik\mu v_h = 0, \end{cases} \\ \partial_z v_e + ik\mu v_h = 0, & \partial_z u_h - ik\varepsilon u_e = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Исключая  $v_h$  и  $u_e$ , получим два уравнения

$$\mu \partial_z \frac{1}{\mu} \partial_z v_e + \Delta v_e + k^2 \varepsilon \mu v_e = 0, \quad \varepsilon \partial_z \frac{1}{\varepsilon} \partial_z u_h + \Delta u_h + k^2 \varepsilon \mu u_h = 0. \quad (12)$$

В том случае, когда  $\varepsilon$  и  $\mu$  не зависят и от  $z$ , уравнения (12) переходят в уравнение Гельмгольца.

Переход от системы уравнений первого порядка к эквивалентному им уравнению второго порядка хорошо известен в классической механике как переход от уравнений Гамильтона к уравнениям Ньютона. Следуя этой аналогии, будем называть системы (11) гамильтоновыми формами уравнения Гельмгольца (12). Однако этот термин подразумевает проведение дополнительного исследования симплектической структуры, связанной с этими уравнениями. Поэтому мы будем говорить осторожно, что зацепление между уравнениями Гельмгольца мы выразили, переписав сами уравнения Гельмгольца в векторной форме.

## Заключение

Введение четырёх потенциалов вместо двух позволило свести систему уравнений Максвелла в волноводе к системе (10), которую можно трактовать как систему двух связанных уравнений Гельмгольца, записанных в векторной форме. По всей видимости, эта форма будет очень удобна для численно-аналитического анализа по неполному методу Галёркина, однако сказанное требует дальнейшего исследования.

## Литература

1. Самарский А. А., Тихонов А. Н. О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ // Журнал технической физики. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 959–970.
2. Свешников А. Г. К обоснованию метода расчета нерегулярных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 1. — С. 170–179.
3. Свешников А. Г. К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1963. — Т. 3, № 2. — С. 314–326.
4. Свешников А. Г. Неполный метод Галёркина // ДАН СССР. — 1977. — Т. 236, № 5. — С. 1076–1079.
5. Ильинский А. С., Кравцов В. В., Свешников А. Г. Математические модели электродинамики. — Москва: Высшая школа, 1991. — 224 с.
6. Могилевский И. Е., Свешников А. Г. Математические задачи теории дифракции. — Москва: Физический факультет МГУ, 2010. — 197 с.
7. Chew W. C. Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides. — 2012. — <http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwA1120121211.pdf>.
8. Боголюбов А. Н., Минаев Д. В. Синтез плоского волноводного перехода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1993. — Т. 34, № 2. — С. 67–69.
9. Свешников А. Г., Боголюбов А. Н., Минаев Д. В. Расчёт согласующего волноводного перехода между двумя коаксиальными волноводами овальной формы // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1997. — № 4. — С. 51–54.
10. Боголюбов А. Н., Будкарев А. А. Применение метода конечных элементов к исследованию волноводного перехода // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2003. — № 4. — С. 6–9.
11. Делицын А. Л. О применении метода конечных элементов к задаче сочленения коаксиального и радиальных волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2016. — № 4. — С. 30–35.
12. Боголюбов А. Н., Едакина Т. В. Применение вариационно-разностных методов для расчета диэлектрических волноводов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1991. — Т. 32, № 2. — С. 6–14.
13. Боголюбов А. Н., Едакина Т. В. Расчет диэлектрических волноводов со сложной формой поперечного сечения вариационно-разностным методом // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 1992. — Т. 34, № 3. — С. 72–74.
14. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л. Расчет диэлектрических волноводов методом конечных элементов, исключающий появление нефизических решений // Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. — 1996. — № 1. — С. 9–13.
15. Лавренова А. В. Расчёт неоднородности волновода методом конечных элементов // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия. — 2004. — № 1. — С. 22–24.

16. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Лавренова А. В. Метод конечных элементов в задаче волноводной дифракции // Электромагнитные волны и электронные системы. — 2004. — Т. 9, № 8. — С. 22–25.
17. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Лавренова А. В. Применение метода конечных элементов в волноводных задачах дифракции // Радиотехника. — 2004. — № 12. — С. 20–26.
18. Боголюбов А. Н., Лавренова А. В. Математическое моделирование дифракции на неоднородности в волноводе с использованием смешанных конечных элементов // Математическое моделирование. — 2008. — Т. 20, № 2. — С. 122–128.
19. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О полноте корневых векторов радиоволновода // Доклады Академии Наук. — 1999. — С. 458–460.
20. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О полноте системы собственных и присоединенных функций волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 38, № 11. — С. 1891–1899.
21. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Малых М. Д. О корневых векторах цилиндрического волновода // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2001. — Т. 41, № 1. — С. 126–129.
22. Делицын А. Л. О полноте системы собственных векторов электромагнитных волноводов // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — № 10. — С. 1883–1888.
23. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. Об условиях разрешимости задачи возбуждения радиоволновода // Доклады Академии Наук. — 2000. — № 4. — С. 1–4.
24. Боголюбов А. Н., Делицын А. Л., Свешников А. Г. О задаче возбуждения волновода с неоднородным заполнением // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1999. — Т. 39, № 11. — С. 1869–1888.
25. Малых М. Д. О способе повышения нижней границы непрерывного спектра в задачах спектральной теории волноведущих систем // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. — 2006. — № 4. — С. 3–5.
26. Делицын А. Л. О постановке краевых задач для системы уравнений Максвелла в цилиндре и их разрешимости // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2007. — Т. 71, № 3. — С. 61–112.
27. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е. Векторная модель волновода с входящими ребрами // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). — 2012. — № 2.
28. Боголюбов А. Н., Ерохин А. И., Могилевский И. Е. Математическое моделирование нерегулярного волновода с входящими ребрами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2012. — № 6. — С. 1058–1062.
29. Ерохин А. И. Применение проекционных методов к расчету волноведущих и резонансных структур с особенностями // Вычислительные методы и программирование. — 2012. — № 1. — С. 192–196.
30. Жуков М. Ю., Ширяева Е. В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. — Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2008. — 256 с.
31. Zhang K., Li D. Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics. 2nd ed. — Berlin: Springer, 2008. — 711 p.
32. On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials / M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev // Journal of Electromagnetic Waves and Applications. — 2017. — Pp. 1–13. — DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
33. Лав Дж. Теория упругости. — ГТТИ, 1939.
34. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — Москва: Наука, 1973. — 407 с.
35. Hellwig G. Differential Operators of Mathematical Physics. — Reading, MA: Addison-Wesley, 1967. — 304 p.

UDC 519.633.2

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48

## On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations

M. D. Malykh, A. L. Sevastianov, L. A. Sevastianov, A. A. Tyutyunnik

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The investigation of the electromagnetic field in a regular homogeneous waveguide reduces to the investigation of two independent boundary value problems for the Helmholtz equation, corresponding to TE- and TM-modes. In the case of an inhomogeneous waveguide TE- and TM-modes are connected to each other, which in numerical experiments can not always be fully taken into account. In this paper we show how to rewrite the Helmholtz equations in vector form to express this relationship explicitly.

In the article the cylindrical waveguide with perfectly conducting walls is considered, but we don't make any assumptions about filling of waveguide. The introduced approach is based on two-dimensional analogue of the theorem known in the theory of elastic bodies as the Helmholtz decomposition. On its basis, we introduce four potentials, instead of two potentials, usually used in the theory of hollow waveguides. It is proved that any solution of Maxwell's equations in a waveguide that satisfies the boundary conditions of ideal conductivity on the boundaries of a waveguide can be represented with the help of these potentials. The system of Maxwell's equations is written with respect to these potentials and it is shown that this system has the form of two independent Helmholtz equations in the case of a hollow waveguide.

**Key words and phrases:** waveguide, Maxwell's equations, Helmholtz Equation, normal modes, Sagemath

## References

1. A. A. Samarskiy, A. N. Tikhonov, On the Representation of a Field in a Waveguide in the Form of a Sum of Fields TE and TM, *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki* 18 (7) (1948) 959–970, in Russian.
2. A. G. Sveshnikov, The Basis for a Method of Calculating Irregular Waveguides, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 3 (1) (1963) 219–232.
3. A. G. Sveshnikov, A Substantiation of a Method for Computing the Propagation of Electromagnetic Oscillations in Irregular Waveguides, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 3 (2) (1963) 413–429.
4. A. G. Sveshnikov, Incomplete Galerkin Method, *DAN USSR* 236 (5) (1977) 1076–1079, in Russian.
5. A. S. Il'inskij, V. V. Kravcov, A. G. Sveshnikov, *Mathematical Models of Electrodynamics*, Vysshaja shkola, Moscow, 1991, in Russian.
6. I. E. Mogilevskii, A. G. Sveshnikov, *Mathematical Problems of the Theory of Diffraction*, Faculty of Physics MSU, Moscow, 2010, in Russian.
7. W. C. Chew, *Lectures on Theory of Microwave and Optical Waveguides* (2012). URL <http://wcchew.ece.illinois.edu/chew/course/tgwA1120121211.pdf>
8. A. N. Bogolyubov, D. V. Minaev, Synthesis of a Plane Waveguide Transition, *Moscow University Physics Bulletin* 48 (2) (1993) 63–64.
9. A. G. Sveshnikov, A. N. Bogolyubov, D. V. Minaev, Calculation of the Matching Waveguide Transition between Two Coaxial Waveguides of the Oval Shape, *Moscow University Physics Bulletin* (4) (1997) 51–54, in Russian.
10. A. N. Bogolyubov, A. A. Budkarev, Studying the Waveguide Transition by the Finite Element Method, *Moscow University Physics Bulletin* 58 (4) (2003) 6–10.
11. A. L. Delitsyn, Finite-Element Methods for Junction Problems for Coaxial and Radial Waveguides, *Moscow University Physics Bulletin* 71 (4) (2016) 368–374.

12. A. N. Bogolyubov, T. V. Eygakina, Application of Variational-Difference Methods to Dielectric Waveguide Calculations, *Moscow University Physics Bulletin* 46 (2) (1991) 7–13.
13. A. N. Bogolyubov, T. V. Eygakina, Calculation of Dielectric Waveguides with a Complicated Cross-Sectional Shape by the Variational-Difference Method, *Moscow University Physics Bulletin* 34 (3) (1992) 72–74, in Russian.
14. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, Calculation of Dielectric Waveguides by the Finite Element Method, Eliminating the Appearance of Unphysical Solutions, *Moscow University Physics Bulletin* (1) (1996) 9–13, in Russian.
15. A. V. Lavrenova, Calculation of the Waveguide Heterogeneity by the Finite Element Method, *Moscow University Physics Bulletin* (1) (2004) 22–24, in Russian.
16. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. V. Lavrenova, Finite Element Method in the Problem of Waveguide Diffraction, *Elektromagnitnyye volny i elektronnyye sistemy* 9 (8) (2004) 22–25, in Russian.
17. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. V. Lavrenova, Application of the Finite Element Method in Waveguide Diffraction Problems, *Radiotekhnika* (12) (2004) 20–26, in Russian.
18. A. N. Bogolyubov, A. V. Lavrenova, Mathematical Modeling of Diffraction on an Inhomogeneity in a Waveguide Using Mixed Finite Elements, *Mathematical Models and Computer Simulations* 1 (1) (2009) 131–137.
19. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, On the Completeness of Root Vectors of a Radio Waveguide, *Doklady Mathematics* (3) (1999) 453–455.
20. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of the Excitation of a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 38 (11) (1999) 1815–1823.
21. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, M. D. Malykh, On the Root Vectors of a Cylindrical Waveguide, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 41 (1) (2001) 121–124.
22. A. L. Delitsyn, On the Completeness of the System of Eigenvectors of Electromagnetic Waveguides, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* (10) (2011) 1771–1776.
23. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, Solvability Conditions for the Radio Waveguide Excitation Problem, *Doklady Mathematics* (1) (2000) 126–129.
24. A. N. Bogolyubov, A. L. Delitsyn, A. G. Sveshnikov, On the Problem of Exciting a Waveguide with an Inhomogeneous Medium, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 39 (11) (1999) 1794–1813.
25. M. D. Malykh, On the Method of Raising the Lower Boundary of a Continuous Spectrum in Problems of the Spectral Theory of Waveguiding Systems, *Moscow University Physics Bulletin* (4) (2006) 3–5, in Russian.
26. A. L. Delitsyn, On the Formulation of Boundary Value Problems for the System of Maxwell Equations in a Cylinder and Their Solvability, *Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Seriya matematicheskaya* 71 (3) (2007) 61–112, in Russian.
27. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevsky, Vector Waveguide Model with Incoming Edges, *Zhurnal radioelektroniki (electronic journal)* (2), in Russian.
28. A. N. Bogolyubov, A. I. Erokhin, I. E. Mogilevskii, Mathematical simulation of an irregular waveguide with reentering edges, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* (6) (2012) 932–936.
29. A. I. Erokhin, Application of Projective Methods to Calculation the Waveguide and Resonant Structures with Features, *Vychislitel'nyye metody i programirovanie* (1) (2012) 192–196, in Russian.
30. M. Ju. Zhukov, E. V. Shirjaeva, Usege of the FEA FreeFem ++ in problems of hydrodynamics, electrophoresis and biology, Southern Federal University, Rostov-on-Don, 2008, in Russian.
31. K. Zhang, D. Li, *Electromagnetic Theory for Microwaves and Optoelectronics*. 2nd ed., Springer, Berlin, 2008.

32. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, A. A. Tiutiunnik, N. E. Nikolaev, On the Representation of Electromagnetic Fields in Closed Waveguides Using Four Scalar Potentials, *Journal of Electromagnetic Waves and Applications* (2017) 1–13 DOI: 10.1080/09205071.2017.1409137.
33. J. Love, *Theory of Elasticity*, ГТТИ, 1939, in Russian.
34. O. A. Ladyzhenskaya, *The Boundary Value Problems of Mathematical Physics*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1985.
35. G. Hellwig, *Differential Operators of Mathematical Physics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.

© Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А., 2018

**Для цитирования:**

*Малых М. Д., Севастьянов А. Л., Севастьянов Л. А., Тютюнник А. А. О сведениях уравнений Максвелла в волноводах к системе связанных уравнений Гельмгольца // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 39–48. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48.*

**For citation:**

Malykh M. D., Sevastianov A. L., Sevastianov L. A., Tyutyunnik A. A. On the Reduction of Maxwell's Equations in Waveguides to the System of Coupled Helmholtz Equations, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (1) (2018) 39–48. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-39-48. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Малых Михаил Дмитриевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: malykhmd@yandex.ru, тел.: +7 (495)9550999)

**Севастьянов Антон Леонидович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevastianov\_al@rudn.university, тел.: +7(495)9522572)

**Севастьянов Леонид Антонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: sevastianov\_la@rudn.university, тел.: +7(495)9522572)

**Тютюнник Анастасия Александровна** — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, тел.: +7 (495)9522572)

**Information about the authors:**

**Malykh M. D.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: malykhmd@yandex.ru, phone: +7 (495)9550999)

**Sevastianov A. L.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: sevastianov\_al@rudn.university, phone: +7(495)9522572)

**Sevastianov L. A.** — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: sevastianov\_la@rudn.university, phone: +7(495)9522572)

**Tyutyunnik A. A.** — assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: tyutyunnik\_aa@rudn.university, phone: +7 (495)9522572)



УДК 519.633, 538.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57

## Об одном методе исследования самосогласованной нелинейной краевой задачи на собственные значения с растущими потенциалами

И. В. Амирханов, Н. Р. Саркар

*Лаборатория информационных технологий  
Объединённый институт ядерных исследований  
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Один из распространённых методов исследования многочастичных задач в рамках вариационного подхода — переход к нелинейной одночастичной задаче путём введения самосогласованного поля, зависящего от состояний этих частиц. В работе рассматривается нелинейная краевая задача на собственные значения для уравнения Шрёдингера с растущим потенциалом, включающим зависимость от волновой функции и степенную зависимость от координаты  $r^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . При  $n = 2$  краевая задача для уравнения Шрёдингера (линейная задача) имеет точное решение. Для чётных степеней  $n$  показано, что решения такой задачи можно выразить через решения соответствующей линейной задачи, причём при  $n = 2$  решение удаётся получить в явном виде. Получаемый для  $n = 2$  набор решений характеризуется эквидистантностью расстояний между соседними собственными значениями. Показано, что решение нелинейной задачи отличается от решения линейной сдвигом собственных значений. В случае потенциала выше квадратичного, появляются новые растущие потенциалы меньшей степени. Для случая нечётных значений  $n$  обсуждается переход от интегро-дифференциальной формулировки задачи к системе дифференциальных уравнений, которая может быть решена численно на основе метода последовательных приближений, подтвердивший свою эффективность при исследовании модели полярона.

**Ключевые слова:** автолокализация, собственные значения, полярон, растущие потенциалы, нелинейная краевая задача

### 1. Введение

При исследовании решений многочастичных задач применяя вариационный принцип и путём введения самосогласованного поля, можно свести их к одночастичной задаче. Самосогласованные поля сами зависят от состояний этих частиц, и тем самым задача становится нелинейной.

В качестве характерного примера можно привести концепцию полярона, являющуюся одной из классических моделей квантовой теории поля, которая имеет многочисленные приложения в физике конденсированных сред. Отметим, что проблема полярона была первоначально сформулирована как задача автолокализованного электрона в ионном кристалле. В настоящее время исследованию автолокализованных состояний в конденсированных средах посвящено много оригинальных работ, обзоров и монографий [1–5].

Эффект автолокализации в жидкостях приводит к образованию в них сольватированных электронов, играющих важную роль во многих химических процессах [6, 7]. Под действием облучения вода (или иная среда) переходит в особое состояние, характеризующееся специальными физическими и химическими свойствами [8].

Подобные задачи возникают в рамках квантово-механической задачи двух тел, и её изучение является актуальной проблемой современной физики элементарных частиц. Например, в нерелятивистской потенциальной модели описание спектра тяжёлых кваркониев [9] сводится к решению уравнения Шрёдингера для двух тел.

Статья поступила в редакцию 9 января 2018 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ, №17-01-00661-а.

Авторы выражают благодарность Земляной Е.В., Дикусару Н.Д и Тухлиеву З.К. за полезное обсуждение и ценные замечания.

Релятивистское обобщение этой модели в рамках КХД, необходимое для единообразного описания спектров лёгких и тяжёлых кваркониев, приводит к релятивистским вариантам уравнения Шрёдингера. В качестве эффективного потенциала межкваркового взаимодействия обычно используется сочетание растущего и кулоновского потенциалов. Численные исследования задач на собственные значения с кулоновским и линейно растущими потенциалами приведены в работах [10, 11].

Другой пример использования самосогласованного поля — уравнение Хартри для исследования задач в ядерной или атомной физике, в том числе для системы электронов [12].

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{\text{яд}}(r_j) + \sum_{i=1, j \neq i}^N e^2 \Phi_i(r_j) \right] \psi_j = \varepsilon_j \psi_j, \quad 1 \leq j \leq N, \quad (1)$$

где потенциалы определяются из системы  $N$  уравнений Пуассона

$$\Delta \Phi_i = -4\pi \psi_i^* \psi_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (2)$$

где  $V_{\text{яд}}(r_j)$  — потенциал взаимодействия  $j$  того электрона в кулоновском поле ядра.

Полученная таким способом потенциальная энергия (2) называется самосогласованным полем Хартри. Путём введения самосогласованного поля (2) многоэлектронная задача сводится к одноэлектронной, т.е. к решению уравнения Шрёдингера (1), содержащего координаты только одного электрона. Самосогласованное поле, правильно учитывающее симметрию перестановки частиц, было получено Фоком [12]. Система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Фока отличается от системы Хартри с присутствием обменного интеграла, обусловленным симметризацией координатных функций.

В данной работе предложен метод исследования решений нелинейной краевой задачи на собственные значения для уравнения Шрёдингера с растущим потенциалом, включающим зависимость от волновой функции.

## 2. Постановка задачи

Изучение стационарных автолокализованных состояний в среде, как правило, сводится к исследованию решений нелинейной краевой задачи в рамках уравнения Шрёдингера, которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\left[ \Delta + E - c\Phi(|\psi|^2) \right] \psi(\vec{r}) = 0, \quad (3)$$

где

$$\Phi = \int d\vec{r}_1 V(|\vec{r} - \vec{r}_1|) |\psi(\vec{r}_1)|^2, \quad (4)$$

при условии сохранения нормировки  $\int d\vec{r} |\psi(\vec{r})|^2 = 1$ , а также граничные условия имеют вид:

$$\psi(0) = \text{const}, \quad \psi(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0. \quad (5)$$

Потенциал (4) является самосогласованным, т.е. так как зависит от самого решения уравнения (3).

Характер такой зависимости, а также форма функции  $V$  определяются конкретной моделью. Так, при исследовании состояний полярона  $V(|\vec{r} - \vec{r}_1|) = 1/|\vec{r} - \vec{r}_1|$ . Тогда

функция  $\Phi$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta\Phi = -4\pi|\psi|^2. \quad (6)$$

Отметим, что с вычислительной точки зрения обычно более удобно исследовать систему дифференциальных уравнений (3) и (6) с граничными условиями (5), а не систему интегро-дифференциальных уравнений (3)–(5). В работе проводится исследование нелинейной краевой задачи (3)–(5), где потенциал  $V$  имеет вид

$$V(|\vec{r} - \vec{r}_1|) = |\vec{r} - \vec{r}_1|^n, \quad n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (7)$$

### 3. Методы исследования и анализ полученных результатов

Исследование свойств решений задачи (3)–(5), (7) будем проводить отдельно для чётных и нечётных значений.

1. Рассмотрим случай, когда  $n = 2, 4, 6, \dots$

Сферически симметричное решение (3) ищем в виде  $\psi(\vec{r}) = (\varphi(r)/r)Y_{00}$ , с граничными условиями  $\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0$ , где  $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$ . Тогда (4) примет следующий вид

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty dr_1 \varphi^2(r_1) \int_{-\pi}^\pi d\varphi_1 \int_0^\pi d\theta_1 \sin\theta_1 |\vec{r} - \vec{r}_1|^n. \quad (8)$$

При  $n = 2$ , после интегрирования по углам получим

$$\Phi = A_1 r^2 + A_2, \quad \text{где} \quad A_1 = \int_0^\infty dr_1 \varphi^2(r_1), \quad (9)$$

с учётом нормировки  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = \int_0^\infty dr_1 r_1^2 \varphi^2(r_1)$ .

Уравнение (3) для сферически симметричных решений в безразмерных переменных перепишем в виде

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} + E_m - c\Phi \right] \varphi_m(r) = 0 \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

с граничными условиями  $\varphi_m(0) = \varphi_m(\infty) = 0$ .

Решая уравнение (10) с этими же граничными условиями, находим собственные значения  $E_m$ . Далее будем сравнивать аналитическое решения уравнения (10) с потенциалом  $\Phi = r^2$  (линейная задача) с решениями нелинейной задачи с потенциалом (9).

Решения ищем в виде

$$\varphi_i = N_i \bar{\varphi}_i, \quad (11)$$

где  $N_i (i = 0, 1, 2, \dots)$  — нормировочные постоянные, которые имеют вид

$$N_i = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \bar{\varphi}_i^2 dr}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_0 &= r e^{-\beta r^2}; & \bar{\varphi}_1 &= r(r^2 - a_1)e^{-\beta r^2}; & \bar{\varphi}_2 &= r(r^2 - a_2)(r^2 - a_3)e^{-\beta r^2}; \\ \bar{\varphi}_3 &= r(r^2 - a_4)(r^2 - a_5)(r^2 - a_6)e^{-\beta r^2}; \\ \bar{\varphi}_4 &= r(r^2 - a_7)(r^2 - a_8)(r^2 - a_9)(r^2 - a_{10})e^{-\beta r^2}.\end{aligned}$$

Подставляя выражения (11) для разных  $i = 0, 1, 2, \dots$  в уравнение (10) с потенциалом  $\Phi = r^2$ , получим систему алгебраических уравнений для нахождения собственных значений  $E_m (m = 0, 1, 2, 3, 4)$  и параметров  $a_i = 1, 2, \dots, 10$ . Решая эту систему уравнений, получим

$$\begin{aligned}E_0 &= 3\sqrt{c}, & E_1 &= 7\sqrt{c}, & E_2 &= 11\sqrt{c}, & E_3 &= 15\sqrt{c}, & E_4 &= 19\sqrt{c}, \\ a_1 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(3), & a_2 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(5 - \sqrt{10}), & a_3 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(5 + \sqrt{10}), & a_4 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(14, 0657980), \\ a_5 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(1, 3326518), & a_6 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(5, 6015501), & a_7 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(20, 3648752), \\ a_8 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(10, 2747750), & a_9 &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(4, 3132752), & a_{10} &= \frac{1}{2\sqrt{c}}(1, 0470521), & \beta &= \frac{\sqrt{c}}{2}.\end{aligned}$$

Для нелинейной задачи с потенциалом  $\Phi_m = r^2 + A_{2m}$ , где  $A_{2m} = \int_0^\infty dr r^2 \varphi_m^2(r)$ , собственные значения  $E_m$  сдвигаются на  $cA_{2m}$ . Тогда имеем  $\bar{E}_0 = E_0 + cA_{20}$ ,  $\bar{E}_1 = E_1 + cA_{21}$ ,  $\bar{E}_2 = E_2 + cA_{22}$ ,  $\bar{E}_3 = E_3 + cA_{23}$ ,  $\bar{E}_4 = E_4 + cA_{24}$ .

Таким образом, решение нелинейной краевой задачи с потенциалом (9) свели к решению линейной задачи с потенциалом  $\Phi = r^2$ . Действительно, если потенциал (9) поставить в уравнение (10), то получаем линейную задачу со сдвинутым собственным значением  $\bar{E}_m = E_m + cA_{2m}$ .

Так как уравнение (10) с потенциалом  $\Phi = r^2$  имеет аналитическое решение, то и нелинейная задача также имеет аналитическое решение (см. табл. 1).

Интегралы

$$A_{2m} = \int_0^\infty dr r^2 \varphi_m^2(r)$$

с функциями (11) вычисляются аналитически. Так как вычисления интегралов громоздкие, мы их опускаем, в таблице приведены только окончательные результаты. Из полученных результатов следует, что расстояния между соседними собственными значениями нелинейной задачи эквидистантны (см. последние колонки табл. 1). А также проверено, что решения (11)  $\varphi_n$  ортогональны, т.е.

$$\int_0^\infty dr \varphi_l \varphi_m = 0, \quad l \neq m.$$

При  $n = 4$  после интегрирования по углам (8) получим

$$\Phi = \frac{10}{3}A_2 r^2 + A_1 r^4 + A_3, \quad \text{где} \quad A_3 = \int_0^\infty dr_1 r_1^4 \varphi^2(r_1). \quad (12)$$

**Таблица 1**

**Собственные значения линейной задачи  $E$ , нелинейной задачи  $\bar{E}$  и значения интеграла  $A_{2m}$  при  $n = 2$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, 4$**

| <b>с</b>   | <b><math>m</math></b> | <b>0.25</b> | <b>1.0</b> | <b>4.0</b> |
|--|-----------------------|-------------|------------|------------|
| Собственные значения линейной задачи $E$           | 0                     | 1,5         | 3          | 6          |
|  | 1                     | 3,5         | 7          | 14         |
|  | 2                     | 5,5         | 11         | 22         |
|  | 3                     | 7,5         | 15         | 30         |
|  | 4                     | 9,5         | 19         | 38         |
| Значения интеграла $A_{2m}$                        | 0                     | 3           | 1,5        | 0,75       |
|  | 1                     | 7           | 3,5        | 1,75       |
|  | 2                     | 11          | 5,5        | 2,75       |
|  | 3                     | 15          | 7,5        | 3,75       |
|  | 4                     | 19          | 9,5        | 4,75       |
| Собственные значения нелинейной задачи $\bar{E}$   | 0                     | 2,25        | 4,50       | 9          |
|  | 1                     | 5,25        | 10,5       | 21         |
|  | 2                     | 8,25        | 16,5       | 33         |
|  | 3                     | 11,25       | 22,5       | 45         |
|  | 4                     | 14,25       | 28,5       | 57         |
| Расстояние между соседними собственными значениями |                       | 3           | 6          | 12         |
|  |                       | 3           | 6          | 12         |
|  |                       | 3           | 6          | 12         |
|  |                       | 3           | 6          | 12         |

При  $n = 6$  получим

$$\Phi = 7A_3r^2 + 7A_2r^4 + A_1r^6 + A_4, \quad \text{где} \quad A_4 = \int_0^{\infty} dr_1 r_1^6 \varphi^2(r_1) \quad (13)$$

и т.д.

В этом случае кроме потенциалов  $\Phi = r^4$ ,  $\Phi = r^6$  исходной задачи в нелинейной задаче появляются новые растущие потенциалы меньшей степени (см. (12) и (13)). Однако найти аналитические решения не удалось.

2. Теперь рассмотрим случаи, когда  $n$  принимает нечётные значения  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Пусть  $n = 1$ . Тогда

$$\Phi_1(\vec{r}) = \int_0^{\infty} d\vec{r}_1 |\vec{r} - \vec{r}_1| |\psi(\vec{r}_1)|^2.$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$\Phi_1(0) = \int_0^{\infty} d\vec{r}_1 r_1 |\psi(\vec{r}_1)|^2, \quad \Phi_1(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r. \quad (14)$$

Действуя на функцию  $\Phi_1(\vec{r})$  оператором  $\Delta$ , получим

$$\Delta\Phi_1 = 2\Phi_2, \quad (15)$$

где

$$\Phi_2 = \int_0^\infty d\vec{r}_1 \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} |\psi(\vec{r}_1)|^2.$$

Действуя на функцию  $\Phi_2(\vec{r})$  оператором  $\Delta$ , получим

$$\Delta\Phi_2 = -4\pi|\psi|^2, \quad (16)$$

где

$$\Phi_2(0) = \int_0^\infty d\vec{r}_1 \frac{1}{r_1} |\psi(\vec{r}_1)|^2, \quad \Phi_2(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r}. \quad (17)$$

Таким образом, вместо системы интегро-дифференциальных уравнений (3)–(5) получили систему трёх дифференциальных уравнений (3), (15), (16).

Сферические симметричные решения системы (3), (15), (16) ищем в виде

$$\psi(\vec{r}) = \frac{\varphi(r)}{r} Y_{00}, \quad \Phi_1(\vec{r}) = \frac{V_1(r)}{r} Y_{00}, \quad \Phi_2(\vec{r}) = \frac{V_2(r)}{r} Y_{00}, \quad \text{где } Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}.$$

Подставляя в систему уравнений (3), (15), (16), получим

$$\varphi'' + E\varphi - \frac{c}{\sqrt{4\pi}} \frac{V_1}{r} \varphi = 0, \quad V_1'' = 2V_2, \quad V_2'' = -\frac{|\varphi|^2}{r} \quad (18)$$

с граничными условиями

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad V_1(0) = 0, \quad V_1(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^2, \quad V_2(0) = 0, \quad V_2'(\infty) = 0. \quad (19)$$

При написании граничных условий (19) учтены свойства (14) и (17).

Для решения задачи (18), (19) можно использовать алгоритм на основе метода последовательных приближений, успешно апробированный для решения системы уравнений полярона в работе [13]:

- 1) решаем третье уравнение системы (18) при заданном (в начальном приближении)  $\varphi^k$  и найдём  $V_2$ ;
- 2) решаем второе уравнение для нахождения  $V_1$ ;
- 3) решая первое уравнение, найдём в следующем приближении  $\varphi^{k+1}$ ;
- 4) повторяем весь алгоритм до самосогласования, т.е.  $\max_{0 < r < \infty} |\varphi^{k+1}(r) - \varphi^k(r)| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — заданная малая положительная величина, влияющая на точность получаемого численного решения.

Точность определяется порядком аппроксимации и шагом дискретной сетки.

Пусть  $n = 3$ . Тогда  $\Phi_3(\vec{r}) = \int_0^\infty d\vec{r}_1 |\vec{r} - \vec{r}_1|^3 |\psi(\vec{r}_1)|^2$ , где

$$\Phi_3(0) = \int_0^\infty d\vec{r}_1 r_1^3 |\psi(\vec{r}_1)|^2, \quad \Phi_3(\vec{r}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} r^3. \quad (20)$$

Действуя на функцию  $\Phi_3(\vec{r})$  оператором  $\Delta$  несколько раз, получим

$$\Delta\Phi_3 = 12\Phi_1, \quad \Delta\Phi_1 = 2\Phi_2, \quad \Delta\Phi_2 = -4\pi|\psi|^2. \quad (21)$$

Таким образом, получили систему четырёх дифференциальных уравнений. Аналогично, при  $n = 5$ , получим систему пяти дифференциальных уравнений и т.д. Для численного решения этих систем необходимо обобщить вышеописанный алгоритм на случай большего числа уравнений.

#### 4. Выводы

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

а) При исследовании обсуждаемой нелинейной краевой задачи (3)–(5), (7) в случае чётных значений  $n$ , эта задача сведена к решению линейной задачи. При  $n = 2$  получено аналитическое решение нелинейной задачи, характеризующееся эквидистантностью расстояний между соседними собственными значениями спектра.

б) Для случая нечётных значений на основе исходной системы интегродифференциальных уравнений формулируется система дифференциальных уравнений, численное решение которой может быть проведено на основе метода последовательных приближений, что является предметом дальнейшей работы.

#### Литература

1. Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов. — М.: ГИТГЛ, 1951. — 256 с.
2. Каширина Н. И., Лахно В. Д. Математическое моделирование автолокализованных состояний в конденсированных средах. — М.: Физматлит, 2013. — 292 с.
3. Решение уравнений ЛЛП в теории биполярона / И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, В. Д. Лахно // Известия АН, серия физическая. — 1995. — Т. 59, № 8. — С. 106–110.
4. Численное исследование квантово-полевой модели бинуклона сильной связи / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, В. Д. Лахно, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Препринт ОИЯИ, Дубна. — 1996. — № P11-96-268.
5. Численное исследование нелинейной самосогласованной задачи на собственные значения в обобщенной модели полярона / И. В. Амирханов, В. Д. Лахно, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, В. К. Федянин // Препринт, Биологические исследования АН СССР, Пущино. — 1988. — 23 с.
6. Томпсон Д. Электроны в жидком аммиаке. — М.: Мир, 1979. — 138 с.
7. Численное исследование нелинейной самосогласованной задачи на собственные значения в обобщенной модели сольватированного электрона / И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. А. Стриж, О. В. Васильев, В. Д. Лахно // Препринт, Биологические исследования СССР, Пущино. — 1990. — 24 с.
8. Поляронная модель формирования состояний гидратированного электрона / В. Д. Лахно, А. В. Волохова, Е. В. Земляная, И. В. Амирханов, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2015. — № 1. — С. 1–6.
9. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. Потенциальные модели кваркония // Успехи физических наук. — 1984. — Т. 143. — С. 3.
10. О некоторых проблемах численного исследования задачи на собственные значения в импульсном представлении / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Математическое моделирование. — 1997. — Т. 9, № 10. — С. 111–119.
11. Численное исследование релятивистских уравнений на связанные состояния с кулоновским и линейным потенциалами / И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж // Математическое моделирование. — 2000. — Т. 12, № 12. — С. 79–96.
12. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975. — 387 с.

13. Амирханов И. В. и др. Численное исследование динамики поляронных состояний // Вестник тверского университета. Серия: Прикладная математика. — 2009. — № 17. — С. 5–14.

UDC 519.633, 538.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57

## On a Method of Investigation of the Self-Consistent Nonlinear Boundary-Value Problem for Eigen-Values with Growing Potentials

I. V. Amirkhanov, N. R. Sarker

*Laboratory of Information Technologies  
Joint Institute for Nuclear Research  
6 Joliot-Curie Str., Dubna, Moscow region, Russia, 141980*

One of the most common methods for investigating multiparticle problems in the framework of the variational approach is the transition to a nonlinear one-particle problem by introducing a self-consistent field that depends on the states of these particles. The paper considers a nonlinear boundary value eigenvalue problem for the Schrödinger equation with a growing potential including a dependence on the wave function and a power dependence on the coordinate  $V = r^n$  where  $n = 1, 2, 3, \dots$ . For  $n = 2$ , the boundary value problem for the Schrödinger equation (linear problem) has an exact solution. For even powers of  $n$ , it is shown that solutions of such a problem can be expressed in terms of solutions corresponding to the linear problem, and for  $n = 2$  the solution can be obtained in explicit form. The set of solutions obtained for  $n = 2$  is characterized by equal distances between neighboring eigenvalues. It is shown that the solution of the nonlinear problem differs from the solution of the linear problem by the shift of the eigenvalues. In the case of a potential higher than the quadratic one, new growing potentials of a lesser degree appear. For the case of odd values of  $n$ , the transition is discussed, from the integro-differential formulation of the problem to a system of differential equations which can be solved numerically on the basis of the method of successive approximations, which has proved its effectiveness in the study of the polaron model.

**Key words and phrases:** self-localization, eigenvalues, polaron, growing potentials, nonlinear boundary value problem

## References

1. S. I. Pekar, Studies on the Electronic Theory of Crystals, GITGL, Moscow, 1951, in Russian.
2. N. I. Kashirina, V. D. Lakhno, Mathematical Modeling of Autolocalized States in Condensed Media, Fizmatlit, Moscow, 2013, in Russian.
3. I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, V. D. Lakhno, Solution of LLP Equations in Bipolaron Theory, Bulletin of the Academy of Sciences, the series of physical 59 (8) (1995) 106–110, in Russian.
4. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, V. D. Lakhno, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, Numerical Investigation of the Quantum Field Model of the Strong-Binding Binucleon, Mathematical Modelling 8 (1997) 51–59, in Russian.
5. I. V. Amirkhanov, V. D. Lakhno, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, V. K. Fedyanin, Numerical Study of a Nonlinear Self-Consistent Eigenvalue Problem in the Generalized Polaron Model, 1988, in Russian.
6. J. Thompson, Electrons in Liquid Ammonia, Mir, Moscow, 1979, in Russian.
7. I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. A. Strizh, O. V. Vasilyev, V. D. Lakhno, Numerical Investigation of a Nonlinear Self-Consistent Eigenvalue Problem in the Generalized Model of a Solvated Electron, 1990, in Russian.

8. V. D. Lakhno, A. V. Volokhova, E. V. Zemlyanaya, I. V. Amirkhanov, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, Polaron Model of the Formation of Hydrated Electron States, Surface. X-ray, synchrotron and neutron studies (1) (2015) 1–6, in Russian.
9. A. A. Выков, I. M. Dremin, A. V. Leonidov, Potential models of quarkonium, Successes of Physical Sciences 143 (1984) 3, in Russian.
10. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, On Some Problems of Numerical Investigation of the Eigenvalue Problem in the Momentum Representation, Mathematical modeling 9 (10) (1997) 111–119, in Russian.
11. I. V. Amirkhanov, E. V. Zemlyanaya, I. V. Puzynin, T. P. Puzynina, T. A. Strizh, Numerical Investigation of Relativistic Equations for Bound States with Coulomb and Linear Potentials, Math modeling 12 (12) (2000) 79–96, in Russian.
12. D. Potter, Computational Methods in Physics, Mir, Moscow, 1975, in Russian.
13. I. V. Amirkhanov, et al., Numerical Study of the Dynamics of Polaron States, Bulletin of Tver University. Series: Applied Mathematics (17) (2009) 5–14, in Russian.

© Амирханов И. В., Саркар Н. Р., 2018

**Для цитирования:**

Амирханов И. В., Саркар Н. Р. Об одном методе исследования самосогласованной нелинейной краевой задачи на собственные значения с растущими потенциалами // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2018. — Т. 26, № 1. — С. 49–57. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57.

**For citation:**

Amirkhanov I. V., Sarker N. R. On a Method of Investigation of the Self-Consistent Nonlinear Boundary-Value Problem for Eigen-Values with Growing Potentials, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 49–57. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-49-57. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Амирханов Илькызар Валиевич** — старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, начальник сектора Научного отдела вычислительной физики Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: [camir@jinr.ru](mailto:camir@jinr.ru), тел.: +7 (49621) 62547)

**Саркар Нил Ратан (Бангладеш)** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Научного отдела вычислительной физики Лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: [sarker@jinr.ru](mailto:sarker@jinr.ru), тел.: +7 (49621) 62547)

**Information about the authors:**

**Amirkhanov I. V.** — Senior Researcher, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Sector “Scientific Division of Computational Physics”. Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (e-mail: [camir@jinr.ru](mailto:camir@jinr.ru), phone: +7 (49621) 62547)

**Sarker Nil Ratan** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher “Scientific Division of Computational Physics”. Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (e-mail: [sarker@jinr.ru](mailto:sarker@jinr.ru), phone: +7 (49621) 62547)



UDC 004.021, 004.8, 519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-58-73

## On a Method of Multivariate Density Estimate Based on Nearest Neighbours Graphs

Gleb Beliakov

*School of Information Technology  
Deakin University**221 Burwood Hwy, Burwood 3125, Australia*

A method of multivariate density estimation based on the reweighted nearest neighbours, mimicking the natural neighbours techniques, is presented. Estimation of multivariate density is important for machine learning, astronomy, biology, physics and econometrics. A 2-additive fuzzy measure is constructed based on proxies for pairwise interaction indices. The neighbours of a point lying in nearly the same direction are treated as redundant, and the contribution of the farthest neighbour is transferred to the nearer neighbour. The calculation of the local point density estimate is performed by the discrete Choquet integral, so that the contributions of the neighbours all around that point are accounted for. This way an approximation to the Sibson's natural neighbours is computed. The method relieves the computational burden of the Delaunay tessellation-based natural neighbours approach in higher dimensions, whose complexity is exponential in the dimension of the data. This method is suitable for density estimates of structured data (possibly lying on lower dimensional manifolds), as the nearest neighbours differ significantly from the natural neighbours in this case.

**Key words and phrases:** density estimate, nearest neighbours, Choquet integral, fuzzy measure, natural neighbours

### 1. Introduction and Problem Formulation

Multivariate density estimates from finite samples play an important role in data analysis and clustering [1]. Among other applications, density estimates provide a way to construct density based metrics [2], density based averages [3, 4], perform density based clustering, and also compute robustly the mode(s) of a distribution [5, 6]. Practical applications include data analysis and machine learning, anomaly detection, econometrics, high energy physics, astronomy, flow cytometry, image analysis and computer vision to name a few. For example, spatial distribution of cosmic matter at megaparsec scale was analysed by using nonparametric density estimates in [7]. Density based metrics are often used in unsupervised data analysis, e.g., in the DBSCAN algorithm [8].

Histograms are traditionally used as density estimates of single variable distributions. Their use in the multivariate setting is problematic because of the rapidly growing number of histogram bins, the majority of which remain empty. Kernel-based density estimates due to the works by Parzen and Rosenblatt [1, 5], often called Parzen-Rosenblatt windows, is a popular multivariate approach, in which a point density estimate is constructed by averaging the values of a kernel function of the distances between a fixed point and the data. One problem with kernel density estimates is the bandwidth selection, which is the smoothing parameter in this process. The values of the bandwidth parameter which are too small result in spiky estimates, values that are too large result in oversmoothing. There are approaches for automatic bandwidth selection based on cross-validation [9] but they are computationally expensive.

Another family of density estimates is based on the notion of the Voronoi diagram [10]. A Voronoi cell is a set of points which are closer to one point from the sample than to any other point in that sample. Intuitively, the volumes of Voronoi cells can serve as proxies

for density estimation: small Voronoi cells imply high density. One can view Voronoi cells as (polyhedral) bins in a histogram that contain a single datum. From the technical viewpoint, Voronoi cells are not very convenient, as a) there are Voronoi cells of infinite volume, and b) multiple calculation of Voronoi cell volumes is computationally expensive. Instead the dual of the Voronoi diagram, the Delaunay tessellation, is used [11]. The Delaunay tessellation is a partition of the convex hull of the data (and hence Delaunay cells are finite), and since these cells are simplices, their volume is computed easily in the multivariate setting. The method in [7] averages the reciprocals of the volumes of the neighbouring Delaunay simplices to provide point density estimates at every point in the sample. One important feature of Delaunay tessellation is that the neighbouring simplices involve data located all around the point at which the density estimate is computed. This feature led to the development of the method of “natural neighbours” in scattered data interpolation [12].

The issue with Delaunay tessellation is its complexity: the number of Delaunay cells grows exponentially with the dimension  $d$  of the space, more precisely as  $O(n^{\lfloor d/2 \rfloor})$ , where  $n$  is the sample size. This is a manifestation of the curse of dimensionality.

Another approach to density estimation is based on the nearest neighbour type graphs, including the  $k$  nearest neighbour graph (kNN), minimum spanning tree (MST) and Gabriel graph [13, 14]. The distance from a point to its nearest neighbour can give an estimate of the density, as it provides the volume of an empty sphere near that point. Compared to the Delaunay tessellation, there is no combinatorial explosion of complexity with the increasing dimension, as no space partitioning is required (only  $n^2$  pairwise distances are needed to construct the MST or kNN graph). The MST and Gabriel graphs are subgraphs of the Delaunay graph, which prompted their use as proxies for the Delaunay tessellation. But on the other hand, the nearest neighbours are not always located all around a query point, and the nearest neighbour relation is not reciprocal. The kNN graphs may not be connected, which makes them not fully suitable for proximity calculations [14]. Selecting a larger value of  $k$  also leads to oversmoothing.

In this paper we explore one method of density estimation based on the nearest neighbours graph. In this method we take a sufficiently large value of  $k$  in the kNN density estimate, but ensure that only the neighbours located *all around* a query point are counted. That is, we attempt to marry the kNN with the natural neighbours approach, but without performing expensive Delaunay tessellation. To this end we use the notion of the discrete Choquet integral with respect to a specially constructed fuzzy measure. It allows one to account for correlations between the inputs, and explicitly model the notions of redundancy and positive reinforcement. In particular we account for contributions of the neighbours situated in the same direction from a query point and downweight the contribution of the furthest. This way only the contributions to the density estimate from the neighbours all around a query point will count.

The problem is formulated as follows. Given a sample of (independent, identically distributed) data of size  $n$  and dimension  $d$ ,

$$\mathcal{D} = \left\{ x_i^j \right\}_{i=1, \dots, d; j=1, \dots, n} = \left\{ \left( x_1^j, \dots, x_d^j \right) \right\}, \quad j = 1, \dots, n,$$

find a density estimate approximating the probability density of the distribution the data were drawn from.

The paper is structured as follows. Section 2 presents the background material needed for the rest of the paper. Section 3 presents the proposed kNN reweighting method, including the construction of a 2-additive fuzzy measure from the interaction indices and computation of the threshold for the size of the cone of directions in the multivariate setting, so that the proportion of data located in such a cone remains constant in different dimensions. Section 4 provides a numerical illustration and Section 5 concludes.

## 2. Preliminaries

### 2.1. Point Density Estimation Problem

Let the data set  $\mathcal{D}$  be generated by sampling from a distribution with probability density  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ . The goal of density estimation is to recover an approximation to  $\rho$ , denoted  $\hat{\rho}$ . Non-parametric methods do not assume any specific form of  $\rho$  and hence build  $\hat{\rho}$  based only on the data.

Building a histogram is the traditional approach which usually works in one or two dimensions, but is not suitable in the multivariate setting because of the rapidly growing number of histogram bins where the data are allocated. There are several approaches to density estimation mentioned in the Introduction. In particular, kernel density estimates provide density  $\hat{\rho}(\mathbf{x})$  at a point using that point as a centre of a neighbourhood of selected radius, while Voronoi diagrams provide point density estimates using the nearest neighbours of the point  $\mathbf{x}$  located all around it. By selecting a kernel function  $K_a$  with bandwidth parameter  $a$  we have

$$\hat{\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{na} \sum_{j=1}^n K_a(\mathbf{x}, \mathbf{x}^j).$$

The bandwidth  $a$  affects the roughness or smoothness of the estimate, and kernel based methods are sensitive to the choice of  $a$ .

Voronoi diagram based methods like [7] use the data all around  $\mathbf{x}$  and the neighbourhood around  $\mathbf{x}$  is thus obtained automatically.

### 2.2. $K$ Nearest Neighbours and Natural Neighbours Estimators

The  $K$  nearest neighbours is a popular method in machine learning, see e.g. [15]. It is based on calculating the distances between the reference data (it is often called training data, although no actual training in the kNN method takes place) and the query point  $\mathbf{x}$ , at which either the value of a function or a class label is required.

Calculate the pairwise distances  $d_i = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\|$  (in some norm), and sort the data set in the order of increasing  $d_i$ . There are many works dedicated to the choice of such a norm, see, e.g. [15, 16], which is a very hard and context dependent problem. In this study we assume it is the Euclidean norm. Then approximate  $f(\mathbf{x})$  by  $y = \sum_{i=1}^k w_i f(\mathbf{x}^i)$ , where the weights  $w_i$  are determined usually by some non-increasing function  $w_i = h(d_i)$ , see [16, 17]. It was also proposed [18] to use the Induced Ordered Weighted Averaging functions (Induced OWA) instead of the weighted mean to aggregate the values  $f(\mathbf{x}^i)$  and to learn  $\mathbf{w}$  from the data. The Choquet integral was used for the same purpose in [19].

Unlike in function approximation, in the case of density estimation the values  $f(\mathbf{x}^i)$  are not given but need to be estimated from the data set itself. One measure of density applicable to the kNN approach is the reciprocal of the pairwise distances, which we present in Section 3.

Another popular method of multivariate approximation is the natural neighbour scheme by Sibson [12, 20, 21]. The idea of this method is to build an interpolant whose value at  $\mathbf{x}$  would depend on a few data points close to  $\mathbf{x}$  at the same time distributed *all around*  $\mathbf{x}$ , see Figure 1. It favorably contrasts with the nearest neighbour methods in which only the distance from  $\mathbf{x}$  matters.

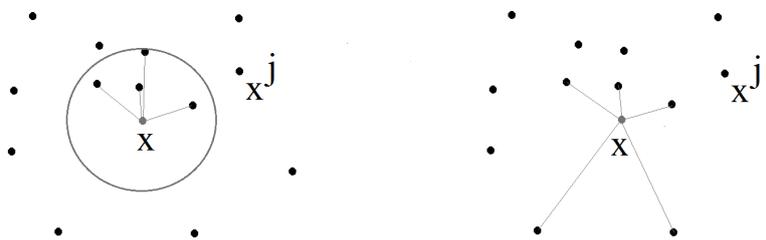


Figure 1. The nearest neighbours of a query point (left) versus natural neighbours (right)

In the natural neighbour scheme, the interpolant is a weighted average of the neighbouring data values

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^J w_j(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}^j),$$

where the weight  $w_j(\mathbf{x})$  is proportional to the volume of the part of Voronoi cell  $Vor(\mathbf{x}_j) = \{\mathbf{z} : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^j\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^k\|, k \neq j\}$ , which is cut by the Voronoi cell  $Vor(\mathbf{x}) = \{\mathbf{z} : \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{x}^k\|\}$ , when  $\mathbf{x}$  is added to the Voronoi diagram as one of the sites. Since Voronoi cell  $Vor(\mathbf{x})$  borders only a few neighbouring Voronoi cells, only a few neighbouring data points *around*  $\mathbf{x}$  participate in calculation of  $f(\mathbf{x})$  (so called natural neighbours). More recently variations of Sibson's method were developed, based on other rules for calculating weights  $w_j(\mathbf{x})$  [21, 22].

Sibson's interpolant possesses many useful properties, but it is computationally expensive, as each  $\mathbf{x}$  requires computation of a new Voronoi diagram having  $\mathbf{x}$  as one of the sites. There are methods that allow an update of the Voronoi diagram when  $\mathbf{x}$  is added to the list of sites in 2- and 3-variate cases, so that the whole Voronoi diagram needs not be built for every  $\mathbf{x}$ . Such methods are very competitive, but we are unaware of any extension for more than three variables.

### 2.3. Fuzzy Measures and Discrete Choquet Integral

Aggregation of inputs into a representative output is the subject of aggregation functions [23, 24]. The weighted arithmetic mean (WAM) and the median are the two most commonly employed aggregation functions, and the WAM is used in the traditional kNN when averaging contributions of the  $K$  nearest neighbours. These functions are not suitable for our purpose as we want to account for input redundancies. The Choquet integral is a tool for explicitly modelling such interactions.

While the weights of the inputs in the WAM are associated with relative importances of each input, a discrete fuzzy measure allows one to assign importances to all possible groups of inputs, and thus offers a much greater flexibility for modeling aggregation.

**Definition 1.** Let  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, n\}$ . A discrete fuzzy measure is a set function  $v : 2^{\mathcal{N}} \rightarrow [0, 1]$  which is monotonic (i.e.  $v(\mathcal{A}) \leq v(\mathcal{B})$  whenever  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ) and satisfies  $v(\emptyset) = 0$  and  $v(\mathcal{N}) = 1$ .

In Definition 1, a subset  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$  can be considered as a *coalition*, so that  $v(\mathcal{A})$  gives us an idea about the importance or the weight of this coalition. The monotonicity condition implies that adding new elements to a coalition does not decrease its weight.

**Definition 2.** The discrete Choquet integral with respect to a fuzzy measure  $v$  is given by

$$C_v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_{(i)} [v(\{j|x_j \geq x_{(i)}\}) - v(\{j|x_j \geq x_{(i+1)}\})], \quad (1)$$

where  $\mathbf{x}_{\nearrow} = (x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)})$  is a non-decreasing permutation of the input  $\mathbf{x}$ , and  $x_{(n+1)} = \infty$  by convention.

**Definition 3.** Let  $v$  be a fuzzy measure. The Möbius transformation of  $v$  is a function defined for every  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$  as

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \sum_{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}} (-1)^{|\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}|} v(\mathcal{B}).$$

The WAM and ordered weighted averaging (OWA) functions are special cases of Choquet integrals with respect to additive and symmetric fuzzy measures respectively. In this contribution we are specifically interested in  $K$ -additive fuzzy measures [25, 26].

**Definition 4.** A fuzzy measure  $v$  is called  $K$ -additive ( $1 \leq K \leq n$ ) if its Möbius transformation verifies

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) = 0$$

for any subset  $\mathcal{A}$  with more than  $K$  elements,  $|\mathcal{A}| > K$ , and there exists a subset  $\mathcal{B}$  with  $K$  elements such that  $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \neq 0$ .

In this work we are interested in 2-additive fuzzy measures, therefore we assume all  $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = 0$  for  $|\mathcal{A}| > 2$ .

When dealing with multiple inputs, it is often the case that these are not independent, and there is some interaction (positive or negative) among the inputs. To measure such concepts as the importance of an input and interaction among the inputs we will use the concepts of Shapley value, which measures the importance of an input  $i$  in all possible coalitions, and the interaction index, which measures the interaction of a pair of inputs  $i, j$  in all possible coalitions [25, 26].

**Definition 5.** Let  $v$  be a fuzzy measure. The Shapley index for every  $i \in \mathcal{N}$  is

$$\varphi(i) = \sum_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \setminus \{i\}} \frac{(n - |\mathcal{A}| - 1)! |\mathcal{A}|!}{n!} [v(\mathcal{A} \cup \{i\}) - v(\mathcal{A})].$$

The Shapley value is the vector  $\varphi(v) = (\varphi(1), \dots, \varphi(n))$ . It satisfies  $\sum_{i=1}^n \varphi(i) = 1$ .

**Definition 6.** Let  $v$  be a fuzzy measure. The interaction index for every pair  $i, j \in \mathcal{N}$  is

$$I_{ij} = \sum_{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \setminus \{i, j\}} \frac{(n - |\mathcal{A}| - 2)! |\mathcal{A}|!}{(n - 1)!} \times [v(\mathcal{A} \cup \{i, j\}) - v(\mathcal{A} \cup \{i\}) - v(\mathcal{A} \cup \{j\}) + v(\mathcal{A})].$$

The interaction indices verify  $I_{ij} < 0$  as soon as  $i, j$  are positively correlated (negative synergy). Similarly  $I_{ij} > 0$  for negatively correlated inputs (positive synergy).  $I_{ij} \in [-1, 1]$  for any pair  $i, j$ .

A fundamental property of  $K$ -additive fuzzy measures, which justifies their use in simplifying interactions between the criteria in multiple criteria decision making is the following [26].

**Proposition 1.** Let  $v$  be a  $K$ -additive fuzzy measure,  $1 \leq K \leq n$ . Then

- $I(\mathcal{A}) = 0$  for every  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$  such that  $|\mathcal{A}| > K$ ;
- $I(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$  for every  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N}$  such that  $|\mathcal{A}| = K$ .

Thus  $K$ -additive measures acquire an interesting interpretation. These are fuzzy measures that limit interaction among the criteria to groups of size at most  $K$ . For instance, for 2-additive fuzzy measures, there are pairwise interactions among the criteria but no interactions in groups of 3 or more.

The Choquet integral can also be expressed in terms of interaction indices. For 2-additive fuzzy measures we have [27]:

$$C_I(\mathbf{x}) = \sum_{I_{ij} > 0} \min(x_i, x_j) I_{ij} + \sum_{I_{ij} < 0} \max(x_i, x_j) |I_{ij}| + \sum_{i=1 \dots K} x_i \left( \varphi(i) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |I_{ij}| \right), \quad (2)$$

subject to

$$v(\{i\}) = \varphi(i) - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} |I_{ij}| \geq 0$$

for all  $i = 1, \dots, K$ .

### 3. Nearest Neighbour Reweighted Graph

As we mentioned in the introduction, this density estimate is based on the kNN graph. Let us fix a value of  $K$  (sufficiently large to include the natural neighbours, of the order of tens to hundreds). Let us also fix a datum,  $\mathbf{x}^j$  at which the density estimate will be computed. Calculate the pairwise distances from  $\mathbf{x}^j$  to all the other points in the sample and select the  $K$  nearest neighbours.

Let the density estimate at  $\mathbf{x}^j$ ,  $\hat{\rho}(\mathbf{x}^j)$  be given as a weighted sum of the values

$$\rho_{jk} = \frac{1}{\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^k\|^d},$$

which are (up to a constant factor) the reciprocals of the volumes of spheres whose diameters are the segments between  $\mathbf{x}^j$  and  $\mathbf{x}^i$ .

If we were to use a kNN estimate without reweighting, a large value of  $K$  would result in oversmoothing. Our goal is to select the weights in such a way that contributions of the neighbours on the same side relative to  $\mathbf{x}^j$  are not double counted. This way only the natural neighbours all around  $\mathbf{x}^j$  will contribute to the sum, and that would be equivalent to using a Delaunay based estimate but without its high complexity when  $d$  is large. The question is how to perform such weights redistribution.

Our main tool will be the discrete Choquet integral with respect to a fuzzy measure.

#### 3.1. Construction of the Fuzzy Measure

We now construct such a fuzzy measure based on the proxies for interaction indices, which we call the redundancy values. In our setting the contributions of two neighbours,  $k$  and  $l$ , toward point density estimate are redundant if these neighbours lie on the same side from the query point  $\mathbf{x}^j$ . The degree of redundancy  $R_{kl}$  can be expressed

as a function of the cosine of the angle  $\theta_{kl}^j = \angle \mathbf{x}^k \mathbf{x}^j \mathbf{x}^l$ , which is easily computed as  $\cos(\theta_{kl}^j) = (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^k) \cdot (\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^l) / (\|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^k\| \|\mathbf{x}^j - \mathbf{x}^l\|)$ . In other metric spaces  $R_{kl}$  can be computed without recurring to the scalar product, as a function of distances only.

Now, take the redundancy values  $R_{kl} = g(\cos(\theta_{kl}^j))$ , where  $g : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$  is some monotone function chosen as described below. Of course, the redundancy values cannot be taken as the (negative) interaction indices directly, because the interaction indices need to satisfy a number of constraints [25, p. 429], namely,

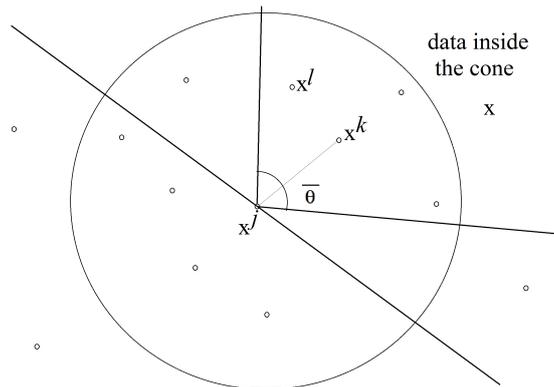
$$\frac{1}{2} \left( \sum_{j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{A} \cup \{i\}} I_{ij} - \sum_{l \in \mathcal{A}} I_{il} \right) \leq \varphi(i), \quad (3)$$

for all  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{N} \setminus \{i\}$ ,  $i = 1, \dots, K$ , where  $\mathcal{N} = \{1, \dots, K\}$  and  $\varphi(i)$  are the Shapley indices. The constraints are satisfied if and only if  $v$  is a 2-additive fuzzy measure.

In addition, the Shapley values are also unknown. While it is possible to set up an optimization problem to select the interaction indices close to the redundancy values, but subject to the constraints (3), it would be extremely inefficient to solve such a problem for every datum  $\mathbf{x}^j$ . Instead we proceed as follows.

Let  $C : [0, 1]^r \rightarrow [0, 1]$  be a triangular conorm [23], a monotone increasing symmetric associative function with neutral element 0. These functions are often used to aggregate inputs so that the total contribution does not exceed 1. The Einstein sum  $C(x, y) = x + y - xy$  and the maximum function are prototypical examples of triangular conorms.

Let the initial contribution of all the  $K$  nearest neighbours of  $\mathbf{x}^j$  be the same  $w_k = 1/K$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Suppose that the neighbour  $\mathbf{x}^l$  is located further than the inputs  $k_1, k_2, \dots, k_m$  and in roughly the same direction, so that  $\theta_{k_1 l}^j, \dots, \theta_{k_m l}^j$  are smaller than some threshold, like  $\bar{\theta} = \pi/4$ , see Figure 2. We want to redistribute the contribution from the input  $l$  to  $k_1, \dots, k_m$  proportionally to the redundancy values.



**Figure 2. The contribution of inputs inside the cone is downweighted**

We take the new weight  $u_l = w_l(1 - C(R_{k_1 l}, \dots, R_{k_m l}))$ . Note that  $u_l \geq 0$  and becomes 0 only in case of at least one of the redundancy values  $R_{k_i l} = 1$ . The weights

of the inputs  $k_i$  are incremented by the value

$$w_{k_i} \rightarrow w_{k_i} + w_l \frac{R_{k_i l} C(R_{k_1 l}, \dots, R_{k_m l})}{\sum_{t=1}^m R_{k_i t}}.$$

The weight  $w_l$  is updated  $w_l \rightarrow u_l$ .

By applying these formulas to every neighbour  $l$  from the furthest to the nearest, we downweight the contribution of the furthest and reallocate their weights to the nearer neighbours as long as those lie in the same direction (in the same spherical cone centered at  $\mathbf{x}^j$  of angle of  $\bar{\theta}$ ).

We can now state that the resulting reweighted sum  $\sum_{k=1}^K w_k \rho_k$  corresponds to the Choquet integral with respect to a 2-additive fuzzy measure whose interaction indices are negative and correspond to the redundancy values.

**Theorem 1.** *Let the redundancy values  $0 \leq R_{kl} = R_{lk} \leq 1$ , and let the weights be computed as*

$$w_k = \left( \frac{1}{K} + \sum_{t < k} w_t C_{m > t}(R_{mt}) \frac{R_{kt}}{\sum_{m > t} R_{mt}} \right) (1 - C_{s > k}(R_{sk})), \quad (4)$$

where  $C(\dots)$  denotes the value of the triangular conorm applied to the arguments that satisfy the condition expressed in its subindex, analogously to the  $\sum$  notation. Then

the weighted sum  $\sum_{k=1}^K w_k \rho_k$  is equal to the Choquet integral of  $\rho_k$  with respect to some 2-additive fuzzy measure whose interaction indices  $I_{kl}$  are negative only when  $R_{kl} > 0$ .

**Proof.** Since the values of  $\rho_k$  are inversely proportional to the distances from  $\mathbf{x}^j$  to  $\mathbf{x}^k$ , they are sorted in the order opposite to the order of  $\mathbf{x}^k$ . So we assume the neighbours are sorted in the order of decreasing distance to  $\mathbf{x}^j$ , and hence  $\rho_k$  are sorted in increasing order.

Consider the sequential process of calculating the weights  $w_k$ ,  $k = 1, \dots, K$ . Before the process starts all  $w_k = 1/K$ , which are positive and add to one. Take any iteration of this reweighting process,  $k = q$ , and assume that at its start all  $w_k \geq 0$  and they add to one. We show that after that iteration is completed, the updated weights still add to one and are non-negative. We perform the following two steps

$$w_q \rightarrow w_q (1 - C_{k > q}(R_{kq})),$$

and then for all  $t > q$ :

$$w_t \rightarrow w_t + w_q C_{k > q}(R_{kq}) \frac{R_{tq}}{\sum_{k > q} R_{kq}}.$$

The value of  $\sum_k w_k$  does not change, as

$$w_q C_{k > q}(R_{kq}) - \sum_{t > q} w_q C_{k > q}(R_{kq}) \frac{R_{tq}}{\sum_{k > q} R_{kq}} = 0,$$

and since the value of the triangular conorm  $C$  is no greater than one,  $w_q$  remains non-negative. Hence after the above iteration all  $w_k$  are still non-negative and add to one. By applying mathematical induction, these properties are maintained till the end of the iterative reweighting process. The formula (4) expresses the end result of the described reweighting process.

The weighted sum  $\sum_{k=1}^K w_k \rho_k$  can be expressed as the Choquet integral

$$\sum_{k=1}^K w_k \rho_k = \sum_{k=1}^K \rho_k (v(\{j|\rho_j \geq \rho_k\}) - v(\{j|\rho_j \geq \rho_{k+1}\})) = C_v(\boldsymbol{\rho}) \quad (5)$$

with respect to some fuzzy measure  $v$  [23]. There are of course many such possible fuzzy measures, including additive and 2-additive measures, because we have only specified  $K$  out of  $2^K$  fuzzy measure coefficients (in the form of  $w_k$ ). In particular for the two-additive measure we have expression (2) [27].

In our case we discard the first sum as we only have to account for redundancies (all  $I_{ij} \leq 0$ ) and hence our measure is submodular. We can therefore determine the values of  $v(\{i\})$  and  $I_{ij}$  by matching the coefficients in (2), (5) with  $w_k$ , and setting  $I_{ij} = 0$  whenever  $R_{ij} = 0$ . For this we obtain an underdetermined linear system of equations which always has at least one positive (in terms of the values  $v(\{i\})$ ) solution. Furthermore we can set up a linear programming problem to maximize the values  $v(\{i\})$  (in terms of their sum or their minimum) subject to matching (2), (5) with  $w_k$ , and the selected  $I_{ij} \leq 0$  which always has a feasible solution (one of which is  $v(\{i\}) = w_i$  and all  $I_{ij} = 0$ ).  $\square$

So for the purposes of averaging local density values over the natural neighbours of  $\mathbf{x}^j$  we fix  $K$ , triangular conorm  $C$  and a way of calculating the redundancy coefficients (from the cosines of the angles  $\theta_{kl}^j$ ), and then apply the iterative reweighting process expressed in (4) to calculate the density estimate  $\hat{\rho}_j$  as the Choquet integral with respect to some submodular 2-additive fuzzy measure. In our experiments we used

$$R_{kl} = \max \left( 0, \left( 2 \cos \left( \theta_{kl}^j \right)^2 - 1 \right) \right)$$

for the threshold  $\bar{\theta} = \pi/4$ , and a modified version of this formula for other thresholds as described in the next section.

Three features of the reweighting method can be highlighted. Firstly, this method is equivariant to data translation, rotation and scaling (this property is expected from reliable estimators of density, mode and location). The reason is that the pairwise distances and angles used in calculations are not affected under these linear transformations. Secondly, the computational complexity of the presented algorithm is  $O(dn^2 + dnK^2)$ , based on the number of distance and angle calculations. Hence it will have performance gains over other natural neighbours schemata for larger dimensions, notably for  $d \geq 8$ . Thirdly, this method is fully parallelisable and also suitable for SIMD architectures like Graphics Processing Units (GPUs). Therefore quadratic complexity in  $n$  seems not to be much of an issue for  $n \leq 10^6$ .

### 3.2. Selection of the Threshold $\bar{\theta}$

We now discuss a method for choosing an appropriate value of the threshold  $\bar{\theta}$  consistent across different dimensions  $d$ . If we choose  $\theta = \pi/2$ , then the cone in which the data is assumed to be redundant becomes half-space in any dimension, so half of the nearest

neighbours of the point  $\mathbf{x}^k$  are expected to be located in that half-space (assuming a locally uniform distribution). That may look too broad a choice, and one may select the redundant neighbours in a narrower cone, for example, choosing  $\bar{\theta} = \pi/4$ , see Figure 2. In the case of two-dimensional data such a cone will contain roughly a quarter of the nearest neighbours.

The difficulty is that when the dimension  $d$  increases, the probability that a near neighbour of  $\mathbf{x}^k$  falls into such a cone of angle  $\bar{\theta}$  decreases. This is due to the fact that in higher dimensions the volume of a spherical cone of angle  $\bar{\theta} < \pi/2$  decreases compared to the volume of the ball. Therefore, in order for a spherical cone to contain approximately the same proportion of the near neighbours of a point across different dimensions we need to select the threshold  $\bar{\theta}(d)$  as a function of the dimension of the space.

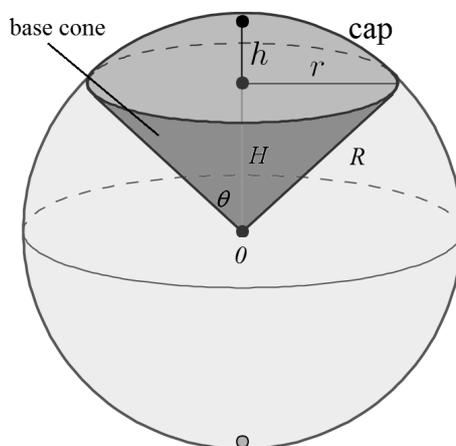
Let us consider the ratio of the volume of the intersection of a spherical cone with the ball of radius  $R$  to the volume of the ball  $\text{Vol}_c(d)/\text{Vol}_s(d)$ , the ratio we want to keep constant. With no loss of generality we can set  $R = 1$ .

It is known that

$$\text{Vol}_s(d) = C_d R^d,$$

where the constant  $C_d = \pi^{d/2}/\Gamma(1 + d/2)$  depends only on the dimension  $d$ .  $\Gamma$  is the standard gamma-function.

The spherical cone, which is the intersection of a cone  $C$  with the ball centered at the vertex of the cone can be represented as the union of two parts, the spherical cap (a non-empty intersection of a ball with a half-plane) and the intersection of the cone with the complement of the mentioned half-space, which we call the base cone  $B$ , see Figure 3.



**Figure 3. Three-dimensional spherical cone**

It is also known that the volume of the spherical cap is given by [28]

$$\text{Vol}_{\text{cap}}(d) = \frac{1}{2} C_d R^d I_{(2Rh-h^2)/R^2} \left( \frac{d+1}{2}, \frac{1}{2} \right),$$

where  $I_y(a, b)$  is the regularized incomplete beta function, and  $h \leq R$  is the height of the cap.

Further, the volume of the base cone of height  $H$  and base radius  $r$  is given by

$$\text{Vol}_{\text{base}}(d) = \frac{Hr^{d-1}C_{d-1}}{d},$$

where  $H = R - h$  and  $r^2 = R^2 - H^2$ . Therefore, assuming  $R = 1$  and expressing  $2h - h^2 = (1 - H)(2 - (1 - H)) = (1 - H^2)$ , the volume of the spherical cone is

$$\text{Vol}_c(d) = \frac{1}{2}C_d I_{(1-H^2)}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{H(1-H^2)^{\frac{d-1}{2}}C_{d-1}}{d}.$$

Now, let us fix the desired fraction of the volume of the ball  $t = \text{Vol}_c(d)/\text{Vol}_s(d)$ , for example  $t = \frac{1}{4}$ . Then we solve for  $H$  the equation

$$\frac{1}{2}I_{(1-H^2)}\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \frac{C_{d-1}H(1-H^2)^{\frac{d-1}{2}}}{C_d d} = t.$$

From  $H = \cos(\bar{\theta}(d))$  we find the desired threshold  $\bar{\theta}(d)$ . The graph of  $\cos(\bar{\theta}(d))$  is presented on Figure 4. As expected, the first two values are  $\cos(\bar{\theta}(2)) = 1/\sqrt{2}$  and  $\cos(\bar{\theta}(3)) = 1/2$  which correspond to  $\bar{\theta}(2) = \pi/4$  and  $\bar{\theta}(3) = \pi/3$  respectively, but no closed form expression for the other values was found, although some simplifications using the relations between the gamma and beta functions can be made. Interestingly, the computed values are very well approximated by the function  $g(d) = 1.2 - 0.839 \tan^{-1}(\log(d))$ , and this formula can be used for selecting a suitable value for the cosine of the threshold. The coefficients in the formula for  $g$  were obtained by the standard least squares regression with the approximation error RMSE= 0.004.

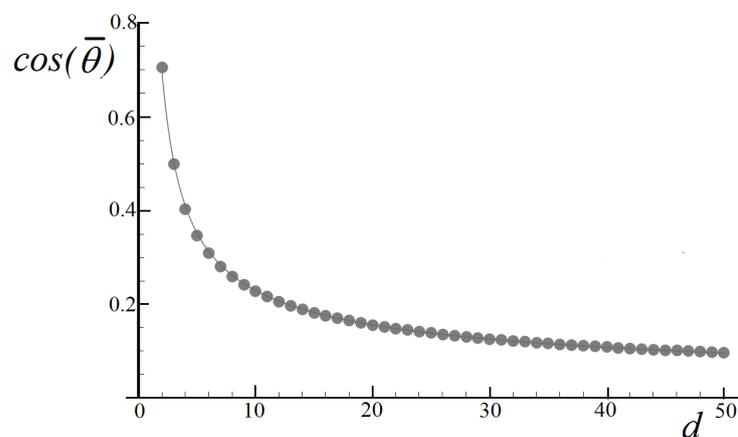


Figure 4. The graph of the values of the threshold as a function of the dimension  $(d, \cos(\bar{\theta}(d)))$  and its approximating function  $g$

#### 4. Numerical Illustration

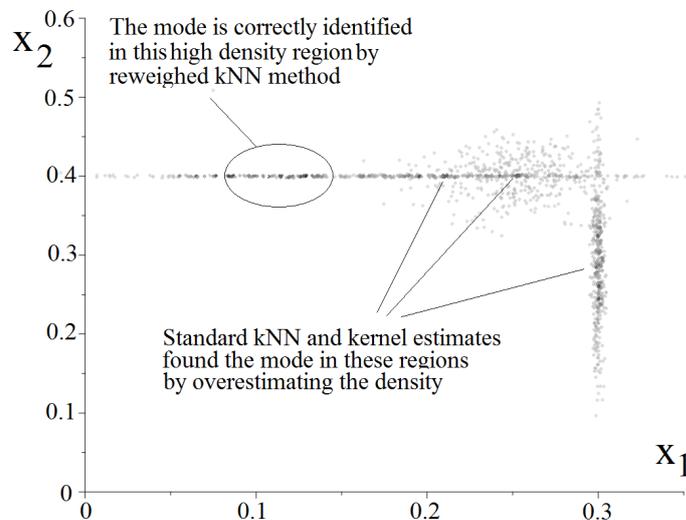
In order to show the advantages of the proposed method we will use highly structured data in  $\mathbb{R}^d$  coming from a lower dimensional manifold. The reason is that if the data

are sampled from some standard test distribution, like a mixture of multivariate normals with nearly equal  $\sigma$ , the nearest neighbours of a point are distributed all around that point, and thus will overlap significantly with the set of natural neighbours we aim at identifying. In this case the proposed method shows quite similar results as the standard kNN and kernel estimates, provided that the value of  $K$  or the bandwidth are chosen appropriately to avoid oversmoothing.

It is for structured data that we expect significant benefits, i.e., when the nearest neighbours significantly differ from the natural neighbours. Furthermore, it turns out that this method is not sensitive to the choice of  $K$ , as contributions from the neighbours which are located beyond closer neighbours in the same direction are automatically downweighted.

Compared to Delaunay tessellation based methods, we expect to obtain computational advantages for higher dimensions. But for the purposes of illustration we limit ourselves to two-dimensional pictures. A detailed computational benchmarking is a subject for a followup paper.

Figure 5 presents a sample generated from a mixture (in equal proportions) of three products of normal distributions with parameters  $(\mu_x, \mu_y, \sigma_x, \sigma_y)$  taken as  $(0.13, 0.4, 0.08, 0.001)$ ,  $(0.3, 0.3, 0.002, 0.8)$  and  $(0.25, 0.4, 0.025, 0.025)$ . Notice that the sample from the first distribution is practically located on a horizontal line, and because of the data does not alleviate this. The simulated mixture has three local modes at the centres of the above normal distributions, with the highest mode at  $(0.13, 0.4)$  (notice small values of  $\sigma_x, \sigma_y$  for this component). The colour intensity of the data points in Figure 5 reflects the computed density at that point. The main mode of this mixture is at  $(0.13, 0.4)$  and is significantly more pronounced than the two other modes. The sample size is 1000.



**Figure 5.** For this structured data sample the reweighted kNN shows advantages over other estimates which fail to identify the mode correctly

The reweighted kNN estimate (with  $K = 150$ , which is quite large) correctly identifies the regions of high density and points correctly to the mode. In contrast, the standard kNN with that value of  $K$  oversmooths the estimate and incorrectly identifies the mode as that of the second component of the mixture. Other (smaller) values of  $K$  in the standard kNN incorrectly position the mode around  $(0.25, 0.4)$ . In fact, a careful manual adjustment to the value of  $K$  between 10 and 15 yields a better estimate of the mode at  $(0.2, 0.4)$ , but makes the estimate more “spiky” and overestimates the density at other places.

## 5. Conclusion

We have presented a multivariate density estimation method which calculates the local data density from the averaged distance to the natural neighbours of a point  $\mathbf{x}$ , the nearest neighbours distributed all around  $\mathbf{x}$ . The natural neighbours offer advantages over the standard kNN and kernel density estimates for structured data, for which the nearest neighbours could be distributed from one side of  $\mathbf{x}$ , thus introducing a bias into the estimate. However, the methods based on Voronoi and Delaunay tessellations, which compute the natural neighbours, suffer from high computational cost even for moderate dimension  $d \geq 5$ .

To alleviate prohibitive computational cost for higher dimensions we proposed a reweighting scheme, in which the contributions from a larger number of the nearest neighbours are reweighted based on their redundancy values, measured through the cosines of the angles these neighbours are visible from the point  $\mathbf{x}$ . These redundancy values serve as proxies for the interaction indices of a 2-additive fuzzy measure, with respect to which the pairwise distances are averaged by using the discrete Choquet integral. This way the contribution of the neighbours in the same direction as some of the nearer neighbours are discounted, and eventually only the contributions from the neighbours which all lie in distinct directions are accounted for. It is shown how redundancy values should be computed from the cosines of the angles in the multivariate setting according to the dimension  $d$ . The computational complexity of the proposed method is quadratic in the number of data  $n$  (same as the complexity of the kNN and kernel density estimates), and the method is fully parallelisable. Besides the kNN, the reweighting scheme can be used in conjunction with the kernel density estimates, which will be studied in the future.

We foresee applications of the proposed technique in density based clustering, mode estimation, image segmentation, anomaly detection and other areas of data analytics.

## References

1. D. W. Scott, *Multivariate Density Estimation*, John Wiley and Sons, New York, 2015.
2. G. Beliakov, M. King, *Density Based Fuzzy C-Means Clustering of Non-Convex Patterns*, *Europ. J. Oper. Res.* 173 (2006) 717–728.
3. P. Angelov, R. R. Yager, *Density-Based Averaging — a New Operator for Data Fusion*, *Information Sciences* 222 (2013) 163–174.
4. G. Beliakov, T. Wilkin, *On Some Properties of Weighted Averaging with Variable Weights*, *Information Sciences* 281 (2014) 1–7.
5. E. Parzen, *On the Estimation of a Probability Density Function and the Mode*, *Annals of Math. Stats.* 33 (1962) 1065–1076.
6. C. Abraham, G. Biau, B. Cadre, *Simple Estimation of the Mode of a Multivariate Density*, *The Canadian Journal of Statistics* 31 (2003) 23–34.
7. W. E. Schaap, R. van de Weygaert, *Continuous Fields and Discrete Samples: Reconstruction Through Delaunay Tessellations*, *Astronomy and Astrophysics* 363 (2000) L29–L32.
8. E. Schubert, J. Sander, M. Ester, H. P. Kriegel, X. Xu, *DBSCAN Revisited, Revisited: Why and How You Should (Still) Use DBSCAN*, *ACM Trans. Database Syst.* 42 (2017) 19:1–19:21. doi:10.1145/3068335.
9. N.-B. Heidenreich, A. Schindler, S. Sperlich, *Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation: a Review of Fully Automatic Selectors*, *AStA Adv. Stat.* 97 (2013) 403–433.
10. G. Voronoi, *Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques*, *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik* 133 (1908) 97–178.
11. B. Delaunay, *Sur la sphere vide*, *Bulletin de l'Academie des Sciences de l'URSS, Classe des sciences mathematiques et naturelles* 6 (1934) 793–800.
12. R. Sibson, *Brief Description of Natural Neighbor Interpolation*, in: V. Barnett (Ed.), *Interpreting Multivariate Data*, John Wiley and Sons, New York, 1981, pp. 21–36.

13. W. Stuetzle, Estimating the Cluster Tree of a Density by Analyzing the Minimal Spanning Tree of a Sample, *Journal of Classification* 20 (2003) 25–47.
14. H. Samet, *Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures*, Elsevier, Boston, 2006.
15. T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2001.
16. B. Dasarathy, *Nearest Neighbor Norms: NN Pattern Classification Techniques*, IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1991.
17. S. Cost, S. Salzberg, A Weighted Nearest Neighbor Algorithm for Learning with Symbolic Features, *Machine Learning* 10 (1993) 57–78.
18. R. Yager, Using Fuzzy Methods to Model Nearest Neighbor Rules, *IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybernetics* 32 (2002) 512–525.
19. E. Hüllermeier, The Choquet-Integral as an Aggregation Operator in Case-Based Learning, in: B. Reusch (Ed.), *Computational Intelligence, Theory and Applications*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2006, pp. 615–627.
20. D. Watson, *Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data*, Pergamon Press, Oxford, 1992.
21. J.-D. Boissonnat, F. Cazals, Smooth Surface Reconstruction Via Natural Neighbour Interpolation of Distance Functions, *Proc. of the 16th Annual Symposium on Computational Geometry* (2000) 223–232.
22. V. V. Belikov, V. D. Ivanov, V. K. Kontorovich, S. A. Korytnik, A. Y. Semenov, The Non-Sibsonian Interpolation: a New Method of Interpolation of the Values of a Function on an Arbitrary Set of Points, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 37 (1997) 9–15.
23. G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer, Heidelberg, 2007.
24. M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap, *Aggregation Functions*, Cambridge University press, Cambridge, 2009.
25. M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno (Eds.), *Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.
26. M. Grabisch, k-Order Additive Discrete Fuzzy Measures and Their Representation, *Fuzzy Sets and Systems* 92 (1997) 167–189.
27. B. Mayag, M. Grabisch, C. Labreuche, A Characterization of the 2-additive Choquet Integral, in: *Proc. of IPMU, Malaga, Spain, 2008*, pp. 1512–1518.
28. J. W. Harris, H. Stocker, Spherical Segment (Spherical Cap), in: *Handbook of Mathematics and Computational Science*, Springer, New York, 1998.

УДК 004.021, 004.8, 519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-58-73

## **Об одном методе оценки многомерной плотности на основе ближайших соседей**

**Глеб Беляков**

*Кафедра вычислительных технологий  
Университет Дикин  
Бурвуд хайвей 221, Бурвуд 3125, Австралия*

Представлен метод оценки многомерной плотности, основанный на взвешенном методе ближайших соседей и имитирующий метод естественных соседей. Оценка многомерной плотности важна в машинном обучении, астрономии, биологии, физике и эконометрике. Строится 2-аддитивная нечёткая мера на основе аппроксимации индексов парных взаимодействий. Соседи, лежащие примерно в одном направлении, рассматриваются как излишние, и вклад дальнего соседа передаётся ближайшему соседу. Расчёт локальной оценки плотности осуществляется с помощью дискретного интеграла Шоке таким образом, что учитывается

вклад соседей, расположенных со всех сторон точки, где производятся вычисления. Однако вклад соседей, расположенных с одной и той же стороны, занижается с помощью выбора подходящей нечёткой меры. Таким образом вычисляется приближение к множеству естественных соседей Сибсона. Этот метод значительно снижает вычислительную нагрузку методов на базе естественных соседей, которые лежат на основе тесселяции Делоне, в высокой размерности, для которых вычислительная сложность растёт как экспонента размерности. Описанный метод подходит для оценки плотности структурированных данных (возможно, лежащих на многообразии более низкой размерности), так как в этом случае ближайшие соседи могут значительно отличаться от естественных соседей.

**Ключевые слова:** оценка плотности, метод ближайших соседей, интеграл Шоке, нечёткая мера, метод естественных соседей

## Литература

1. *Scott D. W.* Multivariate Density Estimation. — New York: John Wiley and Sons, 2015.
2. *Beliakov G., King M.* Density Based Fuzzy C-Means Clustering of Non-Convex Patterns // *Europ. J. Oper. Res.* — 2006. — Vol. 173. — Pp. 717–728.
3. *Angelov P., Yager R. R.* Density-Based Averaging — a New Operator for Data Fusion // *Information Sciences.* — 2013. — Vol. 222. — Pp. 163–174.
4. *Beliakov G., Wilkin T.* On Some Properties of Weighted Averaging with Variable Weights // *Information Sciences.* — 2014. — Vol. 281. — Pp. 1–7.
5. *Parzen E.* On the Estimation of a Probability Density Function and the Mode // *Annals of Math. Stats.* — 1962. — Vol. 33. — Pp. 1065–1076.
6. *Abraham C., Biau G., Cadre B.* Simple Estimation of the Mode of a Multivariate Density // *The Canadian Journal of Statistics.* — 2003. — Vol. 31. — Pp. 23–34.
7. *Schaap W. E., van de Weygaert R.* Continuous Fields and Discrete Samples: Reconstruction Through Delaunay Tessellations // *Astronomy and Astrophysics.* — 2000. — Vol. 363. — Pp. L29–L32.
8. DBSCAN Revisited, Revisited: Why and How You Should (Still) Use DBSCAN / *E. Schubert, J. Sander, M. Ester, H. P. Kriegel, X. Xu* // *ACM Trans. Database Syst.* — 2017. — Vol. 42. — Pp. 19:1–19:21.
9. *Heidenreich N.-B., Schindler A., Sperlich S.* Bandwidth Selection for Kernel Density Estimation: a Review of Fully Automatic Selectors // *ASTA Adv. Stat.* — 2013. — Vol. 97. — Pp. 403–433.
10. *Voronoi G.* Nouvelles applications des parametres continus a la theorie des formes quadratiques // *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik.* — 1908. — Vol. 133. — Pp. 97–178.
11. *Delaunay B.* Sur la sphere vide // *Bulletin de l'Academie des Sciences de l'URSS, Classe des sciences mathematiques et naturelles.* — 1934. — Vol. 6. — Pp. 793–800.
12. *Sibson R.* Brief Description of Natural Neighbor Interpolation // *Interpreting Multivariate Data* / Ed. by V. Barnett. — New York: John Wiley and Sons, 1981. — Pp. 21–36.
13. *Stuetzle W.* Estimating the Cluster Tree of a Density by Analyzing the Minimal Spanning Tree of a Sample // *Journal of Classification.* — 2003. — Vol. 20. — Pp. 25–47.
14. *Samet H.* Foundations of Multidimensional and Metric Data Structures. — Boston: Elsevier, 2006.
15. *Hastie T., Tibshirani R., Friedman J.* The Elements of Statistical Learning. — New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2001.
16. *Dasarathy B.* Nearest Neighbor Norms: NN Pattern Classification Techniques. — Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press, 1991.
17. *Cost S., Salzberg S.* A Weighted Nearest Neighbor Algorithm for Learning with Symbolic Features // *Machine Learning.* — 1993. — Vol. 10. — Pp. 57–78.

18. *Yager R.* Using Fuzzy Methods to Model Nearest Neighbor Rules // IEEE Trans. on Syst., Man, and Cybernetics. — 2002. — Vol. 32. — Pp. 512–525.
19. *Hüllermeier E.* The Choquet-Integral as an Aggregation Operator in Case-Based Learning // Computational Intelligence, Theory and Applications / Ed. by B. Reusch. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. — Pp. 615–627.
20. *Watson D.* Contouring: A Guide to the Analysis and Display of Spatial Data. — Oxford: Pergamon Press, 1992.
21. *Boissonnat J.-D., Cazals F.* Smooth Surface Reconstruction Via Natural Neighbour Interpolation of Distance Functions // Proc. of the 16th Annual Symposium on Computational Geometry. — 2000. — Pp. 223–232.
22. The Non-Sibsonian Interpolation: a New Method of Interpolation of the Values of a Function on an Arbitrary Set of Points / V. V. Belikov, V. D. Ivanov, V. K. Kontorovich, S. A. Korytnik, A. Y. Semenov // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 1997. — Vol. 37. — Pp. 9–15.
23. *Beliakov G., Pradera A., Calvo T.* Aggregation Functions: A Guide for Practitioners. — Heidelberg: Springer, 2007.
24. Aggregation Functions / M. Grabisch, J.-L. Marichal, R. Mesiar, E. Pap. — Cambridge: Cambridge University press, 2009.
25. Fuzzy Measures and Integrals. Theory and Applications / Ed. by M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno. — Heidelberg: Physica-Verlag, 2000.
26. *Grabisch M.* k-Order Additive Discrete Fuzzy Measures and Their Representation // Fuzzy Sets and Systems. — 1997. — Vol. 92. — Pp. 167–189.
27. *Mayag B., Grabisch M., Labreuche C.* A Characterization of the 2-additive Choquet Integral // Proc. of IPMU. — Malaga, Spain: 2008. — Pp. 1512–1518.
28. *Harris J. W., Stocker H.* Spherical Segment (Spherical Cap) // Handbook of Mathematics and Computational Science. — New York: Springer, 1998. — 107 p.

© Beliakov Gleb, 2018

**Для цитирования:**

*Beliakov Gleb* On a Method of Multivariate Density Estimate Based on Nearest Neighbours Graphs // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 1. — Pp. 58–73. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-58-73.

**For citation:**

*Beliakov Gleb* On a Method of Multivariate Density Estimate Based on Nearest Neighbours Graphs, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 58–73. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-58-73.

**Сведения об авторах:**

**Беляков Глеб** — профессор, кандидат физико-математических наук, профессор кафедры вычислительных технологий Университета Дикин, Австралия (e-mail: [gleb@deakin.edu.au](mailto:gleb@deakin.edu.au), тел.: +61 3 925 17475)

**Information about the authors:**

**Beliakov Gleb** — professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, professor of School of Information Technology of Deakin University, Australia (e-mail: [gleb@deakin.edu.au](mailto:gleb@deakin.edu.au), phone: +61 3 925 17475)



UDC 519.246.5

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-74-83

## Modeling of Extreme Precipitation Fields on the Territory of the European Part of Russia

E. Yu. Shchetinin\*, N. D. Rassakhan†

\* *FGU “All-Russian research institute on problems of civil defence and emergencies of Emergency Control Ministry of Russia”  
7 Davydkovskaya St., Moscow, 121352, Russian Federation*

† *Department of Applied Mathematics  
Moscow State Technology University “STANKIN”  
3a Vadkovsky Ln., Moscow, 127055, Russian Federation*

Present work is devoted to the study and development of space-time statistical structures of extreme type modeling with the use of the max-stable processes. The theory of one-dimensional extremal values and its extension to the two-dimensional case are considered and for that max-stable processes are introduced and then the main parametric families of max-stable processes (Schlather, Smith, Brown–Resnick, and Extremal-t) are presented. By modifying the maximum likelihood method, namely using the paired likelihood function, parameter estimates were obtained for each of the models whose efficiency was compared using the Takeuchi information criterion (TIC).

Resulting models are coherent with classical extreme value theory and allow consistent treatment of spatial dependence of rainfall. We illustrate the ideas through data, based on daily cumulative rainfall totals recorded at 14 stations in central European part of Russia for period 1966–2016 years. We compare fits of different statistical models appropriate for spatial extremes and select the model that is the best for fitting our data. The method can be used in other situations to produce simulations needed for hydrological models, and in particular for the generation of spatially heterogeneous extreme rainfall fields over catchments. It is shown that the most successful model for the data we studied is the model from the extremal-t family with the Whittle–Matern correlation function.

**Key words and phrases:** spatial modeling, extreme rainfall, max-stable processes, extreme value theory, spatial structures of statistical dependence, pairwise likelihood function

### 1. Introduction

The rapidly growing number of various natural and man-made disasters that previously were considered extremely rare indicates that the global climate change of the Earth is becoming obvious. Observable in various regions of the world and in particular in Russia, hurricanes, rainfalls and other natural disasters bring human casualties and substantial material damage to states and their economies. Therefore it is necessary to develop new methods of resisting the impacts of different environmental disasters, including comprehensive measures for forecasting, preventing and adapting the population to extreme situations. The study of regional climate change peculiarities that take place in connection with global warming is a priority area of modern international research projects. Important place in this area is given to the study of changes in the frequency and intensity of extreme weather events, including extreme precipitation, as it often leads to serious economic, environmental and human losses.

According to recent studies significant increase in the frequency of extreme events including rainfall is expected as a result of global and regional climate change. The archives of long-term accumulated observations and numerical model calculations of hydrometeorological parameters make it possible to study general patterns of spatio-temporal variability of extreme precipitation in Russia, caused by both environmental and anthropogenic factors over the historical observation period and to calculate the projections of their possible future changes.

Spatial modeling methods is a popular approach for studying extreme events in environmental applications. Numerous scientific publications (like [1–3]) on this subject are engaging extreme value theory (EVT) and extreme processes to the analysis of environmental problems.

Present work is devoted to the study and development of precipitation models in European Russia for the period 1966–2016 with the aim of constructing a short-term precipitation forecast in a given region exceeding the normative indices. The study of regularities of long-term variability of extreme precipitation on the territory of Russia is aimed at the development of long-term forecasts. At the same time, such studies are important for the subsequent solution of many applied problems, including long-term planning of regional economic development.

## 2. Extreme Value Theory

Extreme value theory is based on Fisher–Tippett–Gnedenko theorem [2] that states the existence of normalized maxima’s marginal distribution for sequence of i.i.d. random variables. If such distribution  $H(x)$  exists and is non-degenerate then it satisfies requirements of max-stable distributions  $H^n(\alpha_n x + \beta_n) = H(x)$  for  $n > 1$  and  $\alpha_n > 0$  and  $\beta_n \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^1$ . Such distributions can be written in alternative form

$$H(x) = \exp \left\{ \left[ - \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right\}_+^{-\frac{1}{\xi}} \right] \right\},$$

where  $a_+ = \max(a, 0)$ ,  $-\infty < \mu < \infty$  is location parameter,  $\sigma > 0$  is scale parameter and  $-\infty < \xi < \infty$  is shape parameter. Last equation represents generalized extreme value (GEV) distribution [1] because it includes Weibull distribution ( $\xi < 0$ ), Gumbel distribution ( $\xi = 0$ ) and Frechet distribution ( $\xi > 0$ ). Case  $\xi = 0$  is interpreted as limiting  $\xi \rightarrow 0$ .

Another approach to order statistic modeling known as the threshold approach is bound to previous one. Following Pickands theory [1] under suitable conditions and for a sufficiently high threshold  $u$ , the upper tail distribution of a wide class of random variables  $X$  can be well approximated by

$$G(x) = 1 - Pr(X > x) = 1 - \zeta \left\{ 1 + \xi \left( \frac{x - u}{\tau + \xi u} \right) \right\}_+^{-\frac{1}{\xi}},$$

where  $x > u$ ,  $\tau + \xi u > 0$ ,  $-\infty < \xi < \infty$  and  $\zeta(u) = Pr(X > u)$ . Here  $\zeta(u)$  is the probability that the threshold  $u$  is exceeded, and  $\tau$  and  $\xi$  are respectively scale and shape parameters determining the distribution of exceedances corresponding to those of the limiting distribution of maxima. The parametrization of the generalized Pareto distribution (GPD), whose survivor function appears in the braces on the right part of equation is different from the usual one and has the advantage that the parameters  $\tau$  and  $\xi$  do not depend on the choice of threshold  $u$ .

## 3. Max-Stable Processes

Using of max-stable processes [3] is an extension of extreme value theory applied to spatio-temporal precipitation fields. Let  $Y_1, Y_2, \dots$  be a sequence of non-negative independent copies of stochastic process  $\{Y(x) : x \in \chi\}$  with continuous sample paths. If there are such continuous functions  $c_n > 0$  and  $d_n \in \mathbb{R}$  that marginal process  $\{Z(x) : x \in \chi\}$

defined as

$$\frac{\max_{i=1,\dots,n} Y_i(x) - d_n(x)}{c_n(x)} \rightarrow Z(x), \quad x \in \chi, \quad n \rightarrow \infty \quad (1)$$

is non-degenerate, then  $\{Z(x) : x \in \chi\}$  is max-stable process. For the consistency of this theorem with one-dimensional case it is considered that marginal distribution  $\{Z(x) : x \in \chi\}$  in its condition must be distributed according to GEV.

Their spectral representation [4] has the following form:

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \zeta_i Y_i(x), \quad x \in \chi,$$

where  $\{\zeta_i : i \geq 1\}$  ... are points of the Poisson process at ...  $(0, \infty)$  and  $Y_1, Y_2, \dots$  is a sequence of non-negative independent copies of stochastic process  $\{Y(x) : x \in \chi\}$  such that  $\mathbb{E}\{Y(x)\} = 1$  for all  $x \in \chi$ . Points  $\{\zeta_i : i \geq 1\}$  in the spectral characterization are radii while the stochastic processes  $\{Y_i(x) : i \geq 1\}$  are angles. Further, four main families of max-stable processes will be considered:

1) Smith process [5]:

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \zeta_i \varphi(x - U_i; 0, \Sigma), \quad x \in \chi; \quad (2)$$

2) Schlather process [6]:

$$Z(x) = \sqrt{2\pi} \max_{i \geq 1} \zeta_i \max\{0, W_i(x)\}, \quad x \in \chi; \quad (3)$$

3) Brown–Resnick process [4]:

$$Z(x) = \max_{i \geq 1} \zeta_i \exp\{\{W_i(x) - \gamma(x)\}\}, \quad x \in \chi; \quad (4)$$

4) Extremal-t process [7]:

$$Z(x) = c_\nu \max_{i \geq 1} \zeta_i \max[0, W_i(x)]^\nu, \quad x \in \chi. \quad (5)$$

Here, the Brown–Resnick process is characterized by Gaussian stationary process  $W_i(x)$  with variogram  $\gamma(x)$ .

It is possible to derive a formula for finite-dimensional distribution  $\{Z(x) : x \in \chi\}$  from spectral characterization. For each  $x = (x_1, \dots, x_k) \in \chi^k, k \geq 1$  and  $z = (z_1, \dots, z_k) \in (0, \infty)^k$  we obtain next formula:

$$\begin{aligned} Pr\{Z(z) \leq z\} &= Pr[\text{No observation } (\zeta, Y) \in \Phi : \zeta Y(x_j) > Z_j \text{ for } j \in \overline{1, k}] = \\ &= \exp \left[ - \int_0^\infty Pr \left\{ \zeta > \min_{j=\overline{1, k}} \frac{z_j}{Y(x_j)} \right\} \zeta^{-2} d\zeta \right] = \exp\{-V_x(z_1, \dots, z_k)\}, \end{aligned}$$

where function  $V_x(z_1, \dots, z_k)$  is

$$V_x(z_1, \dots, z_k) = \mathbb{E} \left\{ \max_{j=\overline{1, k}} \frac{Y(x_j)}{z_j} \right\}.$$

It fully describes the joint distribution  $Z(x)$  and is called exponential function.

It is obvious from the formula above that

$$V_x(z, \dots, z) = \frac{\theta(x)}{z}, \quad \theta(x) = \mathbb{E} \left\{ \max_{j=1, k} Y(x_j) \right\}.$$

Function  $\theta(x)$  is called  $k$ -dimensional extremal coefficient [8] and represents total dependence measure between elements of random vector  $Z(x)$ . Due to independence of radial and angular components of the multidimensional extreme value the extremal coefficient doesn't depend on the radius, that is, from  $z$  in  $V_x(z, \dots, z)$  and shows relation we are interested in.

We focus on the two-dimensional case and define the function of the extremal coefficient:

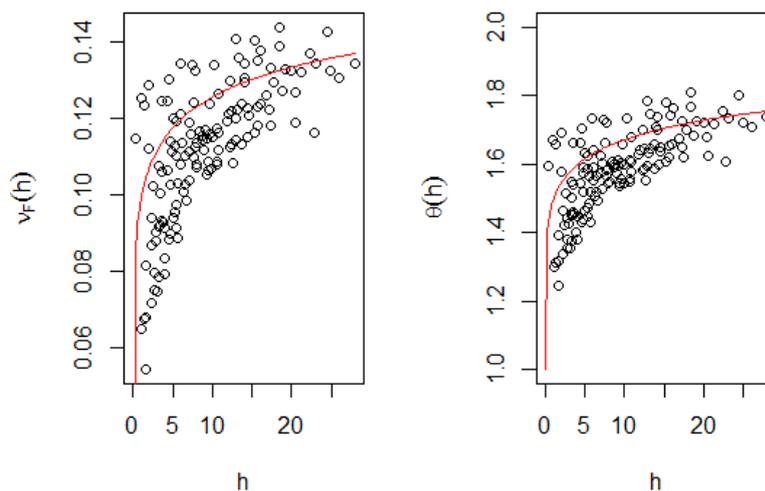
$$\theta : h \mapsto \mathbb{E} [\max\{Y(x), Y(x+h)\}].$$

Extremal coefficient function takes values in the interval  $[1, 2]$ , where the smallest value corresponds to complete dependence, and the largest corresponds to complete independence. For these two cases we obtain

$$\begin{aligned} \Pr \{Z(x+h) \leq z | Z(x) \leq z\} &= \Pr \{Z(x+h) \leq z\}^{\theta(h)-1} = \\ &= \begin{cases} 1 & \text{(complete dependence)} \\ \Pr \{Z(x+h) \leq z\} & \text{(complete independence)} \end{cases} \end{aligned}$$

It is important to note that the calculation of the exponential function for  $k > 2$  can be difficult [9], therefore the consideration of finite-dimensional distributions of max-stable processes is mostly reduced to the two-dimensional case.

Example of spatial dependence measurement is shown in Fig. 1; here we plot pairwise f-madogram and extremal coefficient to show how dependence changes with distance.



**Figure 1.** Pairwise F-madogram (left panel) and extremal coefficient (right panel) for the best fitting max-stable process for our data (that will be shown below).  
Distance between stations can be calculated as  $\text{Distance} \approx h \cdot 111 \text{ km}$

#### 4. Modeling of Extreme Precipitation Spatial Fields

In this study precipitation data of the All-Russian Research Institute of Hydrometeorological Information — the World Data Center of the Russian Federation is used, which show monthly precipitation in 14 cities of the European part of Russia. The data is freely available (on the website <http://aisori.meteo.ru/ClimateR>) and is represented by a set of tables (a separate table for each city); each table contains daily rainfall value for the period 1966–2016 years. Thus, we face not only the problem of analyzing the statistical properties of one-dimensional time series for each station, but also the problem of model development that contains spatial structure of the statistical relationships in various locations [10].

Preliminary analysis of empirical data distribution properties in observed locations showed significant deviations of their statistical properties from the Gaussian distribution. It is for this reason that the use of GEV is justified, yet we need to evaluate the quality of fitting our data with GEV models. Diagnostic plots that are shown in Fig. 2 help us with that.

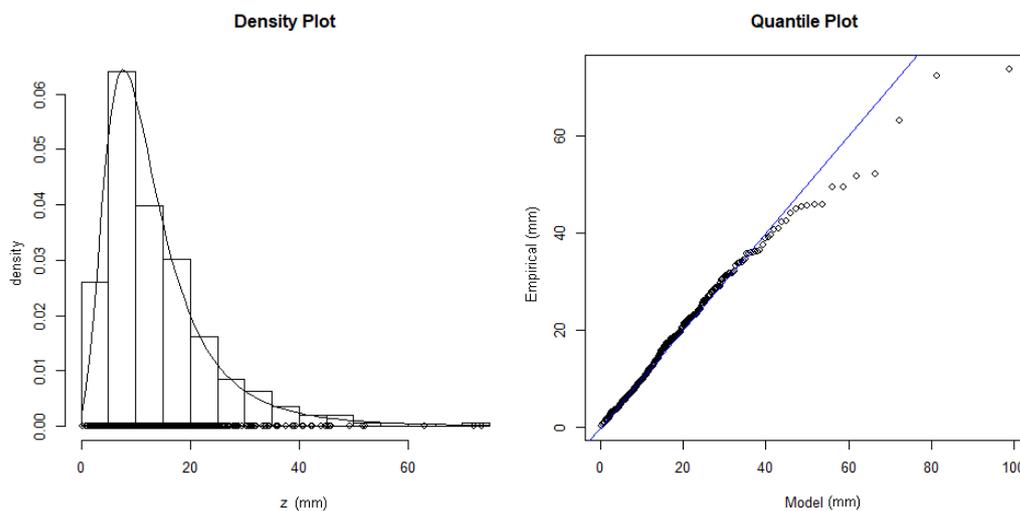


Figure 2. Diagnostic plots for GEV distribution in Ryazan (density plot and quantile plot)

Then GEV parameters were found for each city, they are shown in Table 1.

Developing trend surfaces for GEV parameters is important next step in our research because it might help us to estimate GEV parameters at any point of the field under study. It is important to note that the form parameter  $\xi$  should be constant since it is the one that determines the model behaviour; position and scale parameters depend on the spatial coordinates, therefore they include latitude, longitude and their joint contribution. Thus, selection is made among models described as

$$\begin{aligned}\mu(s) &= \beta_{\mu,0} + \beta_{\mu,1}lon(s) + \beta_{\mu,2}lat(s) + [\beta_{\mu,3} \cdot lon(s) \cdot lat(s)], \\ \sigma(s) &= \beta_{\sigma,0} + [\beta_{\sigma,1}lon(s) + \beta_{\sigma,2}lat(s) + \beta_{\sigma,3} \cdot lon(s) \cdot lat(s)], \\ \xi(s) &= \beta_{\xi,0}.\end{aligned}$$

Table 2 shows the results of calculations, the choice of the best model is made using the Takeuchi information criterion (TIC) [11].

**Table 1**

**GEV parameters in observed locations (location  $\mu$ , scale  $\sigma$ , shape  $\xi$ )**

| Station (City)     | $\mu$  | $\sigma$ | $\xi$ |
|--------------------|--------|----------|-------|
| St. Petersburg     | 39.764 | 22.911   | 0.059 |
| Pskov              | 40.072 | 22.882   | 0.077 |
| Zheleznodorozhny   | 40.891 | 24.541   | 0.037 |
| Smolensk           | 42.843 | 25.261   | 0.09  |
| Bryansk            | 40.268 | 24.644   | 0.028 |
| Kostroma           | 36.57  | 22.254   | 0.073 |
| Pereslavl-Zalessky | 36.252 | 21.984   | 0.092 |
| Nizhny Novgorod    | 39.389 | 23.786   | 0.034 |
| Mozhaysk           | 38.547 | 23.755   | 0.097 |
| Moscow VDNH        | 43.327 | 25.309   | 0.017 |
| Kolomna            | 33.606 | 20.851   | 0.098 |
| Ryazan             | 33.546 | 20.801   | 0.107 |
| Tambov             | 30.413 | 20.217   | 0.08  |
| Penza              | 32.414 | 21.085   | 0.048 |

**Table 2**

**Comparison of 4 models of trend surfaces for GEV parameters. The best model is chosen by the least value of TIC**

| GEV Trend Surface  | TIC      |
|--|----------|
| $\hat{\mu}(s) = 36.15 + 0.001 \cdot lat(s)$<br>$\hat{\sigma}(s) = 24.94 - 0.05 \cdot lon(s)$<br>$\hat{\xi}(s) = 0.06803$   | 96840.95 |
| $\hat{\mu}(s) = -124.67 + 2.89 \cdot lon(s) + 3.07 \cdot lat(s) - 0.06 \cdot lon(s)lat(s)$<br>$\hat{\sigma}(s) = 22.7$<br>$\hat{\xi}(s) = 0.06956$   | 96768.01 |
| $\hat{\mu}(s) = -123.67 + 2.87 \cdot lon(s) + 3.09 \cdot lat(s) - 0.06 \cdot lon(s)lat(s)$<br>$\hat{\sigma}(s) = -12.42 + 0.63 \cdot lon(s) + 0.73 \cdot lat(s) - 0.01 \cdot lon(s)lat(s)$<br>$\hat{\xi}(s) = 0.06924$ | 96741.95 |
| $\hat{\mu}(s) = 52.9160 - 0.2064 \cdot lon(s) - 0.1261 \cdot lat(s)$<br>$\hat{\sigma}(s) = 30.298 - 0.114 \cdot lon(s) - 0.045 \cdot lat(s)$<br>$\hat{\xi}(s) = 0.06768$   | 96797.6  |

Finally, we compare the various models of max-stable processes [12]. The Table 3 below shows various families of processes and correlation functions are given in parentheses. The best model corresponds to the smallest value of TIC. We don't consider comparing Smith model [13, 14] with presented ones because, despite being easy to understand and even easier to implement, it's quite ineffective in terms of modeling and fitting real environmental problems. 5 out of 7 models belong to Schlather family that can be explained by its popularity in comparison with more complex Brown–Resnick and Extremal-t processes yet last ones show better results [15]. Their modeling and fitting are still very consuming, both in terms of time and in terms of computing resources.

The best model is an extremal-t process with the Whittle–Matern correlation function.

Table 3

## Results of max-stable processes' parameters estimating

| Model                             | Parameters  | TIC      |
|-----------------------------------|---|----------|
| Brown–Resnick                     | nugget = 0.4543<br>range = 6.4889<br>smooth = 0.7099  | 454911.7 |
| Schlather<br>(Whittle–Matern)     | nugget = $3.97 \cdot 10^{-5}$<br>range = $7.569 \cdot 10$<br>smooth = $8.006 \cdot 10^{-2}$ | 455315.8 |
| Schlather<br>(Cauchy)             | nugget = 0.4543<br>range = 6.4889<br>smooth = 0.7099  | 455151.4 |
| Schlather<br>(Power Exponential)  | nugget = 0.4679<br>range = $9.6612 \cdot 10$<br>smooth = 2.0                                | 455170.3 |
| Schlather<br>(Bessel)             | nugget = 0.4655<br>range = 0.4309<br>smooth = 120.2719                                      | 455170.9 |
| Schlather<br>(Generalized Cauchy) | nugget = 0.4513<br>range = 6.9826<br>smooth = 1.5525<br>smooth2 = 2.0                       | 455155.1 |
| Extremal-t<br>(Whittle–Matern)    | nugget = 0.2552<br>range = 2.7715<br>smooth = 96.3061<br>df = 3.2056                        | 454108.9 |

## 5. Discussion

In this paper we propose using the extreme value theory methods for modeling daily maximum precipitation fields in the European part of Russia. Our approach consists in estimating parameters of one-dimensional extreme distributions (1) for each metering station and developing models of statistical dependence spatial structures with the use of max-stable processes for the entire measurement domain. Using the data of the All-Russian Scientific Research Institute of Hydrometeorological Information — World Data Center, the fields of precipitation of daily measurements converted into monthly maximum precipitation were studied in 14 cities of the European part of Russia for the period 1966–2016 years. Parameters of precipitation fields models were estimated using the censored method of pairwise maximum likelihood [16] which further allows us to simulate daily precipitation amount throughout the region. Various parametric families of max-stable processes are developed and their estimates are obtained. The best model is the t-extremal process with the parameters shown above (in Table 3).

Interpolation of precipitation values in unobservable regions adjacent to the observed ones is usually solved by kriging [17] but despite the fact that this yields the optimal result for Gaussian processes, it can give erroneous forecasts for extreme values due to the unsuitability of the Gaussian model for the data. Approach that uses conditional max-stable simulation [18] is more suitable for these purposes.

Proposed approach can be used in other areas where spatial modeling of extreme values and processes is required. The models of the max-stable processes used by us are also suitable for time scales in which precipitation measurements are stationary series. However the influence of estimation errors' autocorrelation increases in case of more frequent measurements and then it is necessary to develop models of space-time dependence structures [19,20]. This is one of the directions for the further development of this work.

## References

1. V. A. Akimov, A. A. Bykov, E. Y. Shchetinin, Introduction to Extreme Value Statistics and Its Applications, FGU "All-Russian research institute on problems of civil defence and emergencies of Emergency Control Ministry of Russia", Moscow, 2009, in Russian.
2. L. de Haan, A. Ferrari, Extreme Value Theory: an Introduction, Springer-Verlag, New York, 2006.
3. R.-D. Reiss, M. Thomas, Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields, Birkhauser, Basel, 2007.
4. B. M. Brown, S. I. Resnick, Extreme Values of Independent Stochastic Processes, *Journal of Applied Probability* 14 (1977) 732–739.
5. J. Smith, A. Karr, A Statistical Model of Extreme Storm Rainfall, *Journal of Geophysical Research: Atmospheres* 95 (1990) 2083–2092.
6. M. Schlather, Models for Stationary Max-Stable Random Fields, *Extremes* 5 (1) (2002) 33–44.
7. T. Opitz, Extremal t Processes: Elliptical Domain of Attraction and a Spectral Representation, *Journal of Multivariate Analysis* 122 (2013) 409–413.
8. A. Aghakouchak, N. Nasrollahi, Semi-parametric and Parametric Inference of Extreme Value Models for Rainfall Data, *Water Resources Management* 24 (6) (2010) 1229–1249.
9. A. C. Davison, S. A. Padoan, M. Ribatet, Statistical Modeling of Spatial Extremes, *Statistical Science* 27 (2) (2012) 161–186.
10. S. Coles, An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values, Springer-Verlag, London, 2001.
11. J. Galambos, Order Statistics of Samples from Multivariate Distributions, *Journal of the American Statistical Association* 70 (351) (1975) 674–680.
12. R. Davis, C. Kluppelberg, C. Steinkohl, Max-Stable Processes for Modeling Extremes Observed in Space and Time, *Journal of the Korean Statistical Society* 42 (3) (2013) 399–414.
13. P. Embrechts, F. Lindskog, A. McNeil, Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, Elsevier, 2001.
14. P. Diggle, P. J. Ribeiro, Model-Based Geostatistics, Springer-Verlag, New York, 2007.
15. Z. Kabluchko, M. Schlather, L. de Haan, Stationary Max-Stable Fields Associated to Negative Definite Functions, *The Annals of Probability* 37 (5) (2009) 2042–2065.
16. S. Padoan, M. Ribatet, S. Sisson, Likelihood-Based Inference for Max-Stable Processes, *Journal of the American Statistical Association (Theory & Methods)* 105 (489) (2010) 263–277.
17. J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Teugels, J. Segers, Statistics of Extremes: Theory and Applications, Wiley, New York, 2004.
18. C. Dombry, F. Eyi-Minko, M. Ribatet, Conditional Simulation of Max-Stable Processes, *Biometrika* 100 (1) (2013) 111–124.
19. G. Frahm, M. Junker, R. Schmidt, Estimating the Tail-Dependence Coefficient: Properties and Pitfalls, *Insurance: Mathematics and Economics* 37 (1) (2005) 80–100.
20. R. Schmidt, U. Stadtmuller, Non-Parametric Estimation of Tail Dependence, *Scandinavian Journal of Statistics* 33 (2) (2006) 307–335.

УДК 519.246.5

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-74-83

## Моделирование полей экстремальных осадков на территории Европейской части России

Е. Ю. Щетинин\*, Н. Д. Рассакхан†

\* *Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России ул. Давыдовская, д. 7, Москва, Россия, 121352*

† *Кафедра прикладной математики Московский государственный технологический университет «Станкин» Вадковсий переулок, д. 3а, Москва, Россия, 127055*

В настоящей работе исследована проблема моделирования пространственно-временных статистических структур экстремального типа с использованием процессов устойчивых максимумов. Рассмотрена теория одномерных экстремальных величин и её расширение до двумерного случая, для чего вводятся процессы устойчивых максимумов.

Предложена математическая модель процесса устойчивых максимумов и представлены основные параметрические семейства — Шлатера, Смита, Брауна–Резника, Экстремальное- $t$ . При помощи модификации метода максимального правдоподобия, а именно с использованием парной функции правдоподобия, были получены оценки параметров для каждой из моделей, эффективность которых была затем сравнена при помощи информационного критерия Такеучи (TIC).

Полученные модели согласуются с классической теорией экстремальных значений и позволяют рассматривать устойчивую пространственную зависимость осадков. Эффективность предложенных моделей проверялась на ежедневных данных по суммарным осадкам, зарегистрированных на 14 станциях в центральной европейской части России на период 1966–2016 гг.: сравниваются статистические модели из различных семейств, подходящих для пространственных экстремумов, после чего выбираются те, которые наилучшим образом описывают существующие данные. Этот метод можно использовать и в других приложениях для создания симуляций, необходимых для гидрологических моделей и, в частности, для создания пространственно-неоднородных осадков над водосборами. Было показано, что наилучшей моделью оказался экстремальный- $t$  процесс с корреляционной функцией Уиттла–Матерна.

**Ключевые слова:** пространственное моделирование, экстремальные осадки, процессы устойчивых максимумов, теория экстремальных величин, пространственные структуры статистической зависимости, парная функция правдоподобия

## Литература

1. *Акимов В. А., Быков А. А., Щетинин Е. Ю.* Введение в статистику экстремальных величин и ее приложения. — М.: ФГУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) МЧС России, 2009.
2. *de Haan L., Ferraria A.* Extreme Value Theory: an Introduction. — New York: Springer-Verlag, 2006.
3. *Reiss R.-D., Thomas M.* Statistical Analysis of Extreme Values with Applications to Insurance, Finance, Hydrology and Other Fields. — Basel: Birkhauser, 2007.
4. *Brown B. M., Resnick S. I.* Extreme Values of Independent Stochastic Processes // Journal of Applied Probability. — 1977. — Vol. 14. — Pp. 732–739.
5. *Smith J., Karr A.* A Statistical Model of Extreme Storm Rainfall // Journal of Geophysical Research: Atmospheres. — 1990. — Vol. 95. — Pp. 2083–2092.
6. *Schlather M.* Models for Stationary Max-Stable Random Fields // Extremes. — 2002. — Vol. 5, No 1. — Pp. 33–44.
7. *Opitz T.* Extremal  $t$  Processes: Elliptical Domain of Attraction and a Spectral Representation // Journal of Multivariate Analysis. — 2013. — Vol. 122. — Pp. 409–413.
8. *Aghakouchak A., Nasrollahi N.* Semi-Parametric and Parametric Inference of Extreme Value Models for Rainfall Data // Water Resources Management. — 2010. — Vol. 24, No 6. — Pp. 1229–1249.

9. Davison A. C., Padoan S. A., Ribatet M. Statistical Modeling of Spatial Extremes // *Statistical Science*. — 2012. — Vol. 27, No 2. — Pp. 161–186.
10. Coles S. An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values. — London: Springer-Verlag, 2001.
11. Galambos J. Order Statistics of Samples from Multivariate Distributions // *Journal of the American Statistical Association*. — 1975. — Vol. 70, No 351. — Pp. 674–680.
12. Davis R., Kluppelberg C., Steinkohl C. Max-Stable Processes for Modeling Extremes Observed in Space and Time // *Journal of the Korean Statistical Society*. — 2013. — Vol. 42, No 3. — Pp. 399–414.
13. Embrechts P., Lindskog F., McNeil A. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. — Elsevier, 2001.
14. Diggle P., Ribeiro P. J. Model-Based Geostatistics. — N.-Y.: Springer-Verlag, 2007.
15. Kabluchko Z., Schlather M., de Haan L. Stationary Max-Stable Fields Associated to Negative Definite Functions // *The Annals of Probability*. — 2009. — Vol. 37, No 5. — Pp. 2042–2065.
16. Padoan S., Ribatet M., Sisson S. Likelihood-Based Inference for Max-Stable Processes // *Journal of the American Statistical Association (Theory & Methods)*. — 2010. — Vol. 105, No 489. — Pp. 263–277.
17. *Statistics of Extremes: Theory and Applications* / J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Teugels, J. Segers. — New York: Wiley, 2004.
18. Dombry C., Eyi-Minko F., Ribatet M. Conditional Simulation of Max-Stable Processes // *Biometrika*. — 2013. — Vol. 100, No 1. — Pp. 111–124.
19. Frahm G., Junker M., Schmidt R. Estimating the Tail-Dependence Coefficient: Properties and Pitfalls // *Insurance: Mathematics and Economics*. — 2005. — Vol. 37, No 1. — Pp. 80–100.
20. Schmidt R., Stadtmüller U. Non-Parametric Estimation of Tail Dependence // *Scandinavian Journal of Statistics*. — 2006. — Vol. 33, No 2. — Pp. 307–335.

© Shchetinin E. Yu., Rassakhan N. D., 2018

**Для цитирования:**

Shchetinin E. Yu., Rassakhan N. D. Modeling of Extreme Precipitation Fields on the Territory of the European Part of Russia // *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics*. — 2018. — Vol. 26, No 1. — Pp. 74–83. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-74-83.

**For citation:**

Shchetinin E. Yu., Rassakhan N. D. Modeling of Extreme Precipitation Fields on the Territory of the European Part of Russia, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 26 (1) (2018) 74–83. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-74-83.

**Сведения об авторах:**

**Щетинин Евгений Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник ФГБУ ВНИИ ГОЧС (ФЦ) (e-mail: riviera-molto@mail.ru, тел.: +7 (917)539-06-98)

**Рассахан Никита Дмитриевич** — магистрант кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ «Станкин» (e-mail: rassahan@gmail.com, тел.: +7 (906)095-02-87)

**Information about the authors:**

**Shchetinin E. Yu.** — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher of FGU “All-Russian research institute on problems of civil defence and emergencies of Emergency Control Ministry of Russia” (e-mail: riviera-molto@mail.ru, phone: +7 (917)539-06-98)

**Rassakhan N. D.** — Master of Science of the Applied Mathematics Department, MSTU “Stankin” (e-mail: rassahan@gmail.com, phone: +7 (906)095-02-87)



# Информатика и вычислительная техника

UDC 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-84-92

## Analysis of the File Distribution Time in Peer-to-Peer Network

E. V. Bobrikova, Yu. V. Gaidamaka

*Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

Peer-to-peer (P2P) file sharing systems are responsible for a significant part of the Internet traffic today. File sharing is perhaps the most popular application among P2P applications. In comparison with traditional Client/Server file distribution, P2P file sharing has some advantages, namely, scalability, bandwidth and others. In this paper we study the minimum distribution time for getting the entire file by all of the users in the system, who need this file. This parameter is closely associated with the mentioned bandwidth. The expression for the minimum distribution time uses fluid-flow arguments and includes such terms as the file size, the upload rates of the seeds and the upload and download rates of the leechers. Using numerical examples and the expression for the minimum distribution time, we show the efficiency of P2P file sharing. We consider the system behaviour, when there are two types of leechers in the system. These types differ from each other by their upload bandwidths.

**Key words and phrases:** peer-to-peer network (P2P), file distribution, minimum distribution time, leecher, seeder, peer, file sharing, fluid-flow arguments

## 1. Introduction

The classical methods of resource distribution are based on the paradigm Client/Server. Here a set of servers distributes a file to receiving users. This file could be a software, a content such as a movie or a TV show, etc. The servers and the servers' bandwidth can be bottlenecks in the process of the file distribution, when the file size and the number of receiving nodes become large.

Peer-to-peer (P2P) file sharing is an alternative to the classical Client/Server file distribution and allows to amplify the uploading capacity of the receiving users to aid in the process of the file distribution [1]. We should notice, that a node, participating in P2P file sharing, is usually called a peer. In particular, as soon as a peer has got any portion of the file, it can redistribute that portion to any of the other receiving peers. There are lots of examples of P2P networks today, for instance: Napster [2], Gnutella [3], Freenet [4], etc. P2P file sharing systems, transferring files via the BitTorrent protocol [5], for instance, Vuse [6], etc., are widespread. The intrinsic scalability of these protocols enables to distribute the files of large sizes to several thousand participants. Here the usage of high bandwidth at the distribution servers is not demanded. A user with an ordinary PC with a regular connection can apply such a way to distribute large files to an audience, which size is significantly higher than what is possible with the classical Client/Server approach.

Obviously, P2P file sharing systems have become well known in the Internet today. But there are a lot of different questions, which demand answers. It is necessary to explore: how good quantitatively P2P is in the file sharing process. Can P2P be essentially better than Client/Server distribution? Can P2P scale well when the number of receiving peers increases and becomes very large? How does the cooperation of the server upload

---

Received 8<sup>th</sup> September, 2017.

The publication was prepared with the support of the "RUDN University Program 5-100" and funded by RFBR according to the research projects No 15-07-03608, No 17-07-00845.

The authors would like to express thanks to Prof. Konstantin Samouylov for useful remarks in preparing the paper.

bandwidth, the upload bandwidth of a receiving peer, and the download bandwidth of a receiving peer influence the total distribution time?

Various considerable papers have been dedicated to mathematical models, measurements, and simulation results for P2P networks, [7–12].

In this paper, we consider fundamental questions of P2P file sharing, which are in a basis of P2P file sharing. We propose an expression for the minimum achievable file distribution time. In the expression we use fluid arguments. In the expression we also use terms of the basic parameters of a P2P file sharing system, precisely, the file size, the number of servers, the number of receiving peers, and the upload and download bandwidths of all the peers, who participate. The expression takes place for arbitrary and heterogeneous upload and download bandwidths. The expression has a closed and simple form. The problem statement was given in [13]. The mentioned result allows to address many of the questions posed above.

The rest of the paper is organized as follows. In Section 2 we describe the main problem and demonstrate the main result of the paper. We discuss the applicability of the result. In Section 3 we present numerical results for the case of the receiving peers with different upload bandwidths. In Section 4 there is a conclusion.

## 2. Main Problem Description

The fundamental problem in P2P file sharing is how to distribute a file to peers in P2P network. In P2P a file is divided into parts or portions to distribute it. We consider two sets of peers: seeds and leechers. Any seed has a whole copy of the file and stays in the system to allow other peers to download from itself. Any leecher needs a copy of the file. At first leechers have no portions of the file and have to download portions from the seeds. But as soon as a leecher gets a portion, it begins to upload the portion to other leechers. So leechers can get portions of the file from any of the seeds and from other leechers that have portions. A leecher is allowed to leave the system after getting the whole file. The problem is to minimize the distribution time, i.e. the time, which is needed to obtain the file by all of the leechers.

We consider the following parameters:  $\mathcal{P}$  — a set of all peers in P2P network,  $P = |\mathcal{P}|$  — a number of all peers;  $\mathcal{S}$  — a set of seeds,  $S = |\mathcal{S}|$  — a number of seeds;  $\mathcal{L}$  — a set of leechers,  $L = |\mathcal{L}|$  — a number of leechers, so we have  $\mathcal{P} = \mathcal{S} \cup \mathcal{L}$  and  $P = S + L$ ;  $F$  — the size of a file;  $d_i$  — a download bandwidth of a leecher  $i$ ;  $u_i$  — an upload bandwidth of a peer  $i$ .

A peer  $i$  can transfer bits at a maximum rate of  $u_i$  and can download bits at a maximum rate of  $d_i$ . We take into account the condition  $d_i \geq u_i$ , that is usual in the Internet today, but we can also consider arbitrary upload and download rates. Furthermore,

$r_i(t)$  — the rate, at which a leecher  $i$  downloads “new” content from seeds and other leechers combined at time  $t$ , so  $R = \{r_i(t), t \geq 0, i \in \mathcal{L}\}$  — a rate profile;  $T$  — a distribution time for a rate profile  $R$ ;  $T_{\min} = \min T$  — minimum distribution time achievable over all possible rate profiles.

The rate profile  $\{r_i(t), t \geq 0, i \in \mathcal{L}\}$  can achieve  $T_{\min}$  for arbitrary values of  $F$ ,  $u_i$ ,  $i \in \mathcal{P}$ , and  $d_i$ ,  $i \in \mathcal{L}$ . So we aim to determine the corresponding minimum distribution time  $T_{\min}$ .

In fact the model, which is considered in the paper, is a fluid model [14]. Particularly, we imply that a leecher can replicate and forward a bit as soon as it receives the bit. This key assumption allows us to derive remarkably explicit expressions for the minimum distribution time for general, heterogeneous models. This assumption is core and important. Due to it clear expressions for the minimum distribution time for general, heterogeneous models are obtained.

As we mentioned, BitTorrent is a very popular protocol for real P2P file sharing systems. The idea of BitTorrent is to divide the file to be distributed into parts, named chunks. The size of the chunks is typically 256 KB [8]. In BitTorrent a peer can only forward a chunk as soon as it has fully got the chunk. So chunk-based models are more realistic than fluid-based models. For the chunk-based model, closed form expressions for the minimum

distribution time are only available for very simple cases of peers, who have homogeneous bandwidths and infinite download bandwidths, and for the case of heterogeneous systems it is difficult to obtain closed-form expressions for the minimum distribution time. The explicit expressions for the minimum distribution time  $T_{\min}$ , demonstrated in the paper and obtained for the fluid-based model, are lower bounds for more realistic chunk-based models. We can compare the minimum distribution time  $T_{\min}(f)$  for a fluid-based model and the minimum distribution time  $T_{\min}(c)$  for a chunk-based model. It is possible to show that for homogeneous systems, the error is about

$$\frac{T_{\min}(c) - T_{\min}(f)}{T_{\min}(f)} = \frac{\log_2 L}{N}, \quad (1)$$

where  $N$  is the number of chunks in the file. It turns out this error is negligibly small for cases of practical interest, even when file sizes are medium. Thus although the chunk-based model is more realistic than our fluid-based model, the last one leads to a clear expression for the minimum distribution time for heterogeneous systems. This expression is a good approximation of the minimum distribution time for the chunk-based model for homogeneous systems.

We imply, that the bandwidth bottlenecks are in upload and download rates and not in the basis of Internet. This postulate dominate in Internet today. Further, we do not take into account the impacts of network congestion and TCP congestion control. Thus, our expressions for the minimum distribution time  $T_{\min}$  are really approximations for real file distribution times. However, the expressions can be used to make useful, relevant calculations. Further that can be a base for a file-distribution protocol for arbitrary upload and download rates.

We also make an assumption that each peer in the system takes participation in the file distribution up until the peer has gained the whole file. This enables to understand the main aspect: how different system parameters affect the P2P file distribution process.

Further, the following parameters are also considered:

$$u(\mathcal{A}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} u_i, \quad d_{\min}(\mathcal{A}) = \min_{i \in \mathcal{A}} u_i$$

for any subset  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$ ,  $d_{\min} = d_{\min}(\mathcal{L})$ .

### 3. Minimum File Distribution Time

In this section we demonstrate the result for the minimum distribution time  $T_{\min}$  of a file [13]. We consider all the leechers are equal, but their download and upload bandwidth can differ. Thus, P2P system is heterogeneous.

**Theorem 1.** *The minimum distribution time for the general heterogeneous P2P file sharing system is*

$$T_{\min} = \frac{F}{\min\{d_{\min}, \frac{u(\mathcal{P})}{L}, u(\mathcal{S})\}}. \quad (2)$$

The expression (2) has a rather simple and explicit form. The theorem gives some distribution scheme for any upload and download parameters and can be used as a reference point for the distribution time for any P2P file distribution protocol.

We can notice, that we actually choose  $T_{\min}$  from three values. Each value has its own sense. We have  $T_{\min} \geq F/d_{\min}$ , because the leecher with the lowest download rate cannot receive the file faster than  $F/d_{\min}$ . We also have  $T_{\min} \geq F/u(\mathcal{S})$ , because the set of seeds cannot distribute fresh bits at a rate faster than  $u(\mathcal{S})$ , a leecher cannot obtain the file at a rate faster than  $u(\mathcal{S})$ . Finally, we have  $T_{\min} \geq LF/u(\mathcal{P})$ , because the total upload bandwidth of the system is  $u(\mathcal{P})$  and because leechers need to obtain

a total of  $LF$  bits. So we have the lower bound for P2P file distribution:  $T_{\min} \geq \max\{F/d_{\min}, LF/u(\mathcal{P}), F/u(\mathcal{S})\}$ . The theorem finds that the right-hand side of this inequality is not only a lower bound, but also the exact value of the minimum distribution time  $T_{\min}$ .

As we can see, four cases are possible here (the proof of the theorem is based on these cases):

$$d_{\min} \leq \min\{u(\mathcal{P})/L, u(\mathcal{S})\} \quad \text{and} \quad d_{\min} \leq u(\mathcal{L})/(L-1);$$

$$d_{\min} \leq \min\{u(\mathcal{P})/L, u(\mathcal{S})\} \quad \text{and} \quad d_{\min} \geq u(\mathcal{L})/(L-1);$$

$$u(\mathcal{P})/L \leq \min\{d_{\min}, u(\mathcal{S})\}; \quad u(\mathcal{S}) \leq \min\{d_{\min}, u(\mathcal{P})/L\}.$$

Let  $s_i(t)$  be the rate at which the seeds send bits to leecher  $i$  at time  $t$ . In each case, a rate profile has the same general structure, based on the following assumptions. As soon as each leecher  $i$  begins to obtain its bits from the seeds, it replicates the obtained bits to each of the other  $L-1$  leechers at some rate less than or equal  $s_i(t)$  as shown in Figure 1.

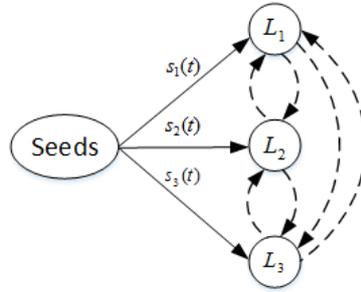


Figure 1. The scheme of P2P file distribution

Thus, for each case, the distribution scheme consists of  $L$  application-level multicast trees. Each tree has a root in the seed, passes through one of the leechers, and ends at each of the  $L-1$  other leechers.

Now we consider three examples to show the significance and the usefulness of the presented theorem. In each example, it is necessary to distribute a file of size  $F = 1.25$  GB and to calculate  $T_{\min}$  according to the expression (2). There are one seed ( $S = 1$ ) and ten leechers ( $L = 10$ ) in P2P network. The seed's upload bandwidth  $u_s$  is usually higher than leecher's upload bandwidth. We distinguish two types of leechers: ordinary leechers and super leechers. The number of ordinary leechers is denoted as  $L_{\text{ord}}$  and the number of super leechers is denoted as  $L_{\text{sup}}$ . A super leecher has the same upload bandwidth  $u_s$  as a seed, and an ordinary leecher's upload bandwidth  $u_{\text{ord}}$  is lower.

**Example 1.** Each leecher has download bandwidth  $d = 2000$  Kbps. Each ordinary leecher has upload bandwidth  $u_{\text{ord}} = 200$  Kbps. If we change the number of the ordinary leechers  $L_{\text{ord}}$  from 1 to 10, the value of the minimum distribution time  $T_{\min}$  increases.

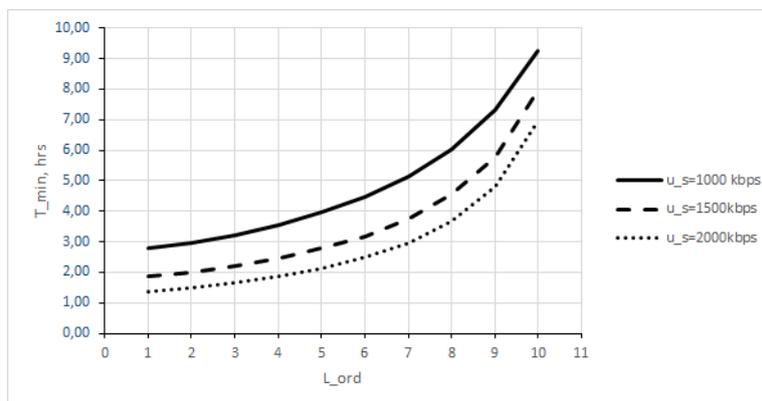
In Figure 2 we present the dynamics of  $T_{\min}$  at three values of a seed's upload bandwidth:  $u_s = 1000$  Kbps,  $u_s = 1500$  Kbps,  $u_s = 2000$  Kbps.

We can see, the higher  $u_s$  the less time is necessary to distribute the file.

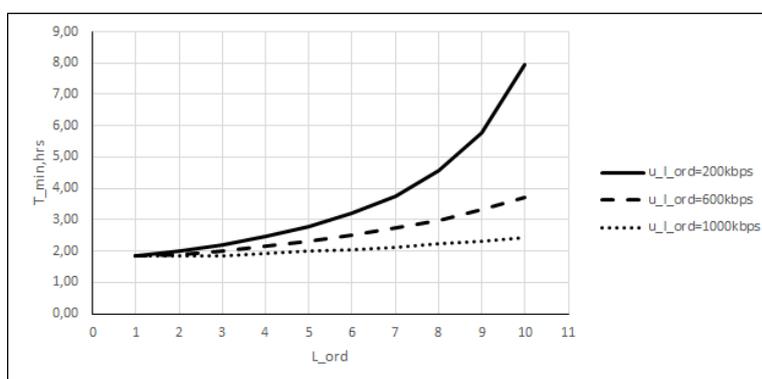
**Example 2.** Here again the download bandwidth of an each leecher is  $d = 2000$  Kbps. A seed's upload bandwidth is a constant  $u_s = 1500$  Kbps.

Now we present in Figure 3 the same function, but now we change leecher's upload bandwidth, we have  $u_{\text{ord}} = 200$  Kbps,  $u_{\text{ord}} = 600$  Kbps,  $u_{\text{ord}} = 1000$  Kbps.

Here we can observe similar effect: the higher  $u_{\text{ord}}$  the less time is necessary to distribute the file.



**Figure 2.**  $T_{\min} = T_{\min}(L_{ord}), u_s = \text{const}$



**Figure 3.**  $T_{\min} = T_{\min}(L_{ord}), u_{l_{ord}} = \text{const}$

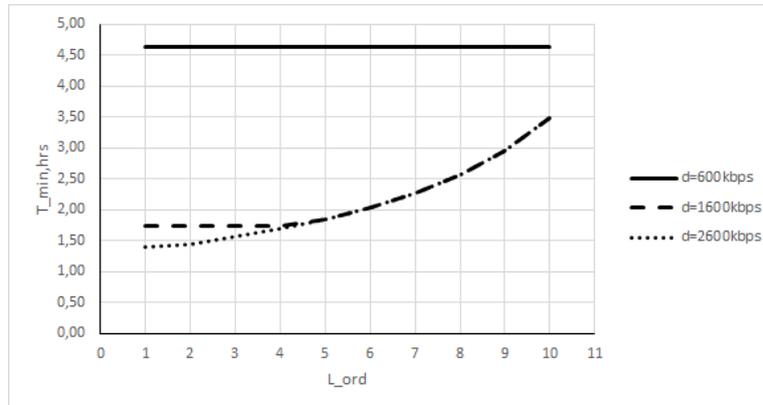
**Example 3.** In this example each ordinary leecher has constant upload bandwidth  $u_{l_{ord}} = 600$  Kbps, and a seed has constant upload bandwidth  $u_s = 2000$  Kbps. Again we draw the plot for function  $T_{\min}$ , depending on a number of ordinary leechers  $L_{ord}$ . The parameter of leecher's download bandwidth is changed:  $d = 600$  Kbps,  $d = 1600$  Kbps,  $d = 2600$  Kbps. The plot is presented in Figure 4.

Here  $T_{\min} = 4.63$  hours is a constant at low download bandwidth  $d = 600$  Kbps. In other cases of  $d$  first the values of  $T_{\min}$  vary, then from the number of ordinary leechers 5 they coincide and increase.

The presented examples allow to conclude that our calculations for fluid-based model is rather good for a description of a real P2P file distribution process in the Internet.

The study of the implications of theorem are made in [13]. In (1) we present the fractional error between a chunk-based model and a fluid-based model. This error is obtained for the minimum distribution time  $T_{\min}$  for a homogeneous system with peers having infinite download capacity. It turns out, that for file size of 350 MB or more, the percentage error between  $T_{\min}(f)$  and  $T_{\min}(c)$  is less than 1%, even when there are 10,000 leechers in the network.

We can conclude from (1) that, for homogeneous systems, the error can be surely neglected if  $N \gg \log_2 L$ . This condition is also easily satisfied for typical file sizes of the order of several GB. We suppose this is true for heterogeneous systems as well.



**Figure 4.**  $T_{\min} = T_{\min}(L_{\text{ord}})$ ,  $d = \text{const}$

The fluid-based model is very accurate, even though the fluid-based model is not as realistic as the chunk-based model. The fluid-based model has the advantage of providing a simple, explicit expression for the minimum distribution time for general, heterogeneous systems.

## 4. Conclusion

Today P2P file sharing is an important application in the Internet. The determination of a minimum achievable time for distribution of a file to all leechers is a fundamental problem in P2P file sharing network. Distribution of a file to all leechers means, that all equal small pieces of the file, named chunks, are obtained by all leechers. The mentioned fundamental problem becomes a complex optimal scheduling problem, when we consider a model in which discrete chunks are kept and forwarded at the peers.

In this paper we consider a version of a fluid-based model for the problem of the determination of the minimum achievable distribution time. We get an explicit expression for this fundamental problem, using this fluid-based model. The result is simple, useful. On the basis of the expression we construct three numerical examples, demonstrating the behaviour of the minimum distribution time depending on the number of super leechers with the high upload bandwidth and ordinary leechers with the ordinary upload bandwidth.

As it was expected, with the growing number of ordinary leechers, the total bandwidth available on the network for distribution is reduced, which leads to the increase of the value of the minimum distribution time  $T_{\min}$ . As we can see from the plot in Figure 2, this time depends on the upload bandwidth  $u_s$ , and for super leechers with  $u_s = 2$  Mbps the minimum distribution time  $T_{\min}$  is minimal.

From the plot in Figure 3 we can see the minimum distribution time  $T_{\min}$  also depends on the upload bandwidth  $u_{l_{\text{ord}}}$ , and for ordinary leechers with  $u_{l_{\text{ord}}} = 1$  Mbps the minimum distribution time  $T_{\min}$  is minimal. Finally, from the plot in Figure 4 we see the minimum distribution time  $T_{\min}$  depends on the download bandwidth  $d$ , and for leechers with  $d = 2.6$  Mbps the minimum distribution time  $T_{\min}$  is minimal. Note that, the values of  $T_{\min}$  are the same for  $d = 1.6$  Mbps and  $d = 2.6$  Mbps starting with the value  $L_{\text{ord}} = 5$ .

The obtained expression is rather close to the similar result for a more realistic chunk-based model in the case of homogeneous system. The result of this paper has a very high accuracy. The given fractional error demonstrates this fact. It turns out, that the discussed fluid-based model is a rather good approximation to a real network.

The results of the paper can be developed in different directions. One direction is to compare the minimum distribution time in the fluid-based model with the minimum

distribution time in the chunk-based model for heterogeneous systems. Another direction is a determination of the minimum distribution time for networks which limit the number of simultaneous connections between participating peers.

## References

1. Yu. V. Gaidamaka, A. K. Samuilov, Analysis of Playback Continuity for Video Streaming in Peer-to-Peer Networks with Data Transfer Delays, T-Comm: Telecommunications and Transport (11) (2013) 77–81, in Russian.
2. Napster Company Info.  
URL <http://us.napster.com/availability>
3. The Gnutella Protocol Specification v0.4.  
URL <https://gnunet.org/node/147>
4. What is Freenet? Freenet Company Info.  
URL <https://freenetproject.org>
5. The BitTorrent Protocol Specification.  
URL [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003)
6. Vuse BitTorrent Client.  
URL <http://www.vuze.com>
7. X. Yang, G. de Veciana, Service Capacity of Peer to Peer Networks, in: Proceedings of IEEE INFOCOM, Vol. 4, 2004, pp. 2242–2252.
8. D. Qiu, R. Srikant, Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks, in: Proceedings of ACM SIGCOMM, Vol. 34, 2004, pp. 367–378.
9. Z. Mordji, M. Amad, D. Aissani, A Derived Queueing Network Model for Structured P2P Architectures, in: VECoS 2014, 2014, pp. 76–84.
10. A. Ferragut, F. Paganini, Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks, IEEE Trans. on Control of Network Systems 3 (1) (2016) 34–45.
11. Yu. V. Gaidamaka, E. V. Bobrikova, E. G. Medvedeva, The Application of Fluid Models to the Analysis of Peer-to-Peer Network, Bulletin of PFUR. Series: Mathematics. Informatics. Physics (4) (2016) 15–25, in Russian.
12. Yu. V. Gaidamaka, E. G. Medvedeva, S. I. Salpagarov, E. V. Bobrikova, Analysis of Model for Multichannel Peer-to-peer TV Network with View-upload Decoupling Scheme, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (2) (2017) 123–132, in Russian. doi:10.22363/2312-9735-2017-25-2-123-132.
13. R. Kumar, K. W. Ross, Optimal Peer-Assisted File Distribution: Single and Multi-Class Problems, 2006.
14. K. E. Samouylov, E. V. Bobrikova, A Simple Fluid Model of P2P File Sharing Network, T-Comm: Telecommunications and Transport (7) (2012) 180–184, in Russian.

УДК 621.39

DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-84-92

### **Анализ времени распространения файла для одноранговой сети**

**Е. В. Бобрикова, Ю. В. Гайдамака**

*Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Передача данных по одноранговым сетям или P2P-сетям занимает значительную долю трафика в современной сети Интернет. Наибольшей популярностью пользуется обмен файлами по P2P-сетям. Обмен файлами по P2P-сети обладает рядом преимуществ такими, как, например, хорошая масштабируемость, высокая пропускная способность, по сравнению

с традиционным подходом Клиент/Сервер к передаче файлов. Данная работа посвящена изучению минимального времени распространения файла. Речь идёт о минимальном времени, которое необходимо затратить для получения целого файла всеми пользователями сети, которым необходим этот файл. Этот параметр имеет прямое отношение к уже упомянутой пропускной способности сети. Для получения выражения для минимального времени распространения файла используется так называемая жидкостная модель P2P-сети. Выражение оперирует такими понятиями, как размер файла, скорость передачи сидов, скорость передачи и скорость загрузки личеров. С использованием численных примеров для минимального времени распространения файла показана эффективность применения жидкостной модели для описания файлообмена по P2P. Рассматривается поведение системы в случае, когда в сети имеются личеры двух типов, которые отличаются друг от друга скоростью передачи данных.

**Ключевые слова:** одноранговая сеть, жидкостная модель, личер, сид, пир, время загрузки файла

## Литература

1. *Гайдамака Ю. В., Самуйлов А. К.* Анализ стратегий заполнения буфера оборудования пользователя при предоставлении услуги потокового видео в одноранговой сети // Т-Comm: Телекоммуникации и Транспорт. — 2013. — № 11. — С. 77–81.
2. Napster Company Info. — <http://us.napster.com/availability>.
3. The Gnutella Protocol Specification v0.4. — <https://gnunet.org/node/147>.
4. What is Freenet? Freenet Company Info. — <https://freenetproject.org>.
5. The BitTorrent Protocol Specification. — [http://www.bittorrent.org/beps/bep\\_0003](http://www.bittorrent.org/beps/bep_0003).
6. Vuse BitTorrent Client. — <http://www.vuze.com>.
7. *Yang X., de Veciana G.* Service Capacity of Peer to Peer Networks // Proceedings of IEEE INFOCOM. — Vol. 4. — 2004. — Pp. 2242–2252.
8. *Qiu D., Srikant R.* Modeling and Performance Analysis of BitTorrent-Like Peer-to-Peer Networks // Proceedings of ACM SIGCOMM. — Vol. 34, No 4. — 2004. — Pp. 367–378.
9. *Mordji Z., Amad M., Aissani D.* A Derived Queueing Network Model for Structured P2P Architectures // VECoS 2014. — 2014. — Pp. 76–84.
10. *Ferragut A., Paganini F.* Fluid Models of Population and Download Progress in P2P Networks // IEEE Trans. on Control of Network Systems. — 2016. — Vol. 3, No 1. — Pp. 34–45.
11. *Гайдамака Ю. В., Бобрикова Е. В., Медведева Е. Г.* Применение жидкостных моделей к анализу одноранговой сети // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2016. — № 4. — С. 15–25.
12. Анализ модели многоканальной одноранговой сети вещательного телевидения для схемы с разделением видеопотока / Ю. В. Гайдамака, Е. Г. Медведева, С. И. Салпагаров, Е. В. Бобрикова // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 123–132.
13. *Kumar R., Ross K. W.* Optimal Peer-Assisted File Distribution: Single and Multi-Class Problems. — 2006.
14. *Самуйлов К. Е., Бобрикова Е. В.* Простейшая жидкостная модель файлообменной P2P-сети // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. — 2012. — № 7. — С. 180–184.

© Bobrikova E. V., Gaidamaka Yu. V., 2018

### Для цитирования:

*Bobrikova E. V., Gaidamaka Yu. V.* Analysis of the File Distribution Time in Peer-to-Peer Network // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2018. — Vol. 26, No 1. — Pp. 84–92. — DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-84-92.

**For citation:**

Bobrikova E. V., Gaidamaka Yu. V. Analysis of the File Distribution Time in Peer-to-Peer Network, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 26 (1) (2018) 84–92. DOI: 10.22363/2312-9735-2018-26-1-84-92.

**Сведения об авторах:**

**Бобрикова Екатерина Васильевна** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: bobrikova\_ev@rudn.university, тел.: +7 (495) 9550999)

**Гайдамака Юлия Васильевна** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: gaydamaka\_yuv@rudn.university, тел.: +7 (495) 9550999)

**Information about the authors:**

**Bobrikova E. V.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: bobrikova\_ev@rudn.university, phone: +7 (495) 9550999)

**Gaidamaka Yu. V.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: gaydamaka\_yuv@rudn.university, phone: +7 (495) 9550999)



## Правила оформления статей

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе  $\text{\LaTeX}$  (используется версия  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , для набора формул используется макропакет  $\text{\LaTeX}$ - $\text{\LaTeX}$ ). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитируемую литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS,  $\text{\TeX}$ ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе  $\text{\BibTeX}$  и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям: оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3, комн. 313; e-mail: vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru.

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика.  
Информатика. Физика»**

Количество  
комплектов:

на 20\_\_ год по месяцам

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

**ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА**

|    |       |       |
|----|-------|-------|
|    |       |       |
| ПВ | место | литер |

на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика. Информатика. Физика»**

|                |               |                     |                           |
|----------------|---------------|---------------------|---------------------------|
| Стои-<br>мость | подписки      | _____ руб. ___ коп. | Количество<br>комплектов: |
|                | переадресовки | _____ руб. ___ коп. |                           |

на 20\_\_ год по месяцам

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|   |   |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)