



**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ**  
**СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА**

**Том 25 № 4 (2017)**

**DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4**

**Научный журнал**

**Издается с 1993 г.**

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

**Свидетельство о регистрации** ШИ No ФС 77-61205 от 30.03.2015 г.

**Учредитель:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

---

**Главный редактор**

**Рыбаков Юрий Петрович** — Заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор РУДН, Россия, [rybakov\\_ur@rudn.university](mailto:rybakov_ur@rudn.university)

**Заместитель главного редактора**

**Севастьянов Леонид Антонович** — доктор физико-математических наук, профессор РУДН, Россия, [sevastianov\\_la@rudn.university](mailto:sevastianov_la@rudn.university)

**Члены редколлегии**

**Ильгисонис Виктор Игоревич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной физики РУДН, директор Российского научного центра «Курчатовский институт»

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН

**Скубачевский Александр Леонидович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики РУДН

**Гупта Субхашини Датта** (Индия) — профессор Хайдерабадского университета

**Мартикайнен Олли Эркки** (Финляндия) — Ph.D., научный сотрудник Научно-исследовательского института экономики Финляндии

**Медведев М. В.** (США) — доктор физико-математических наук, профессор Канзасского университета

**Орландо Рафаэль Рамирез Инестрозо** (Испания) — профессор Барселонского университета

**Саха Биджан** (Бангладеш) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

**Чулуунбаатар Очбадрах** (Монголия) — доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института математики Монгольского Государственного Университета, начальник сектора лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна

---

**Редактор:** *К. В. Зенкин*

**Компьютерная вёрстка:** *А. В. Королькова*

**Адрес редакции:**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7(495)955-07-16, e-mail: [ipk@rudn.university](mailto:ipk@rudn.university)

**Адрес редакционной коллегии**

**серии «Математика. Информатика. Физика»:**

ул. Орджоникидзе, 3, комн. 313, г. Москва, Россия, 115419

тел. +7(495) 952-02-50, e-mail: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru)

сайт: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Подписано в печать 13.10.2017. Выход в свет 23.10.2017. Формат 70×100/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура «Computer Modern».

Усл. печ. л. 12,5 Тираж 500 экз. Заказ № 1587. Цена свободная

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, г. Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3,

тел. (495) 952-04-41, e-mail: [ipk@rudn.university](mailto:ipk@rudn.university)

**ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ**  
**СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА. ФИЗИКА**

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 выпуска в год

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог периодических изданий Ульрих (Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>).

Языки: русский, английский, французский, немецкий, испанский.

Материалы журнала размещаются на платформе РИНЦ Российской научной электронной библиотеки, Electronic Journals Library Cyberleninka.

**Цель и тематика**

Журнал «Вестник Российского университета дружбы народов» существует с 1993 г., а серия «Математика. Информатика. Физика» была создана в 2006 г. путем объединения серий «Физика», «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Прикладная и компьютерная математика».

В журнале обсуждаются современные проблемы физики, математики, теории массового обслуживания, теории телетрафика, информатики, компьютерных наук, проектирования и разработки программного обеспечения, баз данных.

Журнал входит в список периодических изданий, публикации в которых принимаются к рассмотрению ВАК РФ при защите докторских диссертаций.

На журнал можно подписаться в любом почтовом отделении (каталог агентства «Роспечать») или в издательстве.

Выпуски Журнала в реферативно-библиографическом и полнотекстовом виде доступны в базе данных Российского индекса научного цитирования (РИНЦ) на платформе Научной электронной библиотеки (НЭБ) [elibrary.ru](http://elibrary.ru).

Правила оформления статей, архив и дополнительная информация размещены на сайте: <http://journals.rudn.ru/miph>.

Электронный адрес: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).



**RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES  
AND PHYSICS**

**Volume 25 Number 4 (2017)**  
**DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4**  
**Founded in 1993**  
**Founder: RUDN University**

---

**Editor-in-Chief**

**Rybakov Yu. P.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Honored Scientist of Russia  
RUDN University, Russia,  
rybakov\_yp@rudn.university

**Vice Editor-in-Chief**

**Sevastianov L. A.** — DSc in Physics and Mathematics, professor  
RUDN University, Russia,  
sevastianov\_la@rudn.university

**Members of the editorial board**

**Il'gisonis V. I.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Physics of PFUR, Director of National Research Center “Kurchatov Institute”

**Samouylov K. E.** — DSc in Engineering, professor, Head to the Department of Applied Probability and Informatics of PFUR

**Skubachevski A. L.** — DSc in Physics and Mathematics, professor, Head to the Department of Applied Mathematics of PFUR

**Gupta Subhasish Dutta** (India) — PhD in Physics and Mathematics, professor of Hyderabad University

**Martikainen Olli Erkki** (Finland) — PhD in Engineering, member of the Research Institute of the Finnish Economy (ETLA, Helsinki)

**Medvedev M. V.** (USA) — DSc in Physics and Mathematics, professor of the Kansas University

**Ramirez Inostrozo Orlando Raphael** (Spain) – DSc in Physics and Mathematics, professor of the Barcelona University

**Saha Bijan** (Bangladesh) – DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

**Chuluunbaatar Ochbadrah** (Mongolia) — DSc in Physics and Mathematics, leading researcher in the Institute of Mathematics State University of Mongolia, Head to the Department in Laboratory of Information Technologies of the Joint Institute for Nuclear Research (Dubna)

---

**Editor:** *K. V. Zenkin*

**Computer design:** *A. V. Korolkova*

**Address of editorial board:**

Peoples' Friendship University of Russia

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 955-07-16, e-mail: ipk@rudn.university

**Address of editorial board**

**“RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics”:**

Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

Tel. +7 (495) 952-02-50, miphj@rudn.university, vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru

site: <http://journals.rudn.ru/miph>

---

Printing run 500 copies. Open price.

Federal State Autonomous Educational Institution of Higher Education “RUDN University”

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia,

Ph. +7 (495) 952-04-41; e-mail: ipk@rudn.university

## **RUDN JOURNAL OF MATHEMATICS, INFORMATION SCIENCES AND PHYSICS**

ISSN 2312-9743 (online); 2312-9735 (print)

4 issues per year

Languages: Russian, English, French, German, Spanish

Indexed in Ulrich's Periodicals Directory: <http://www.ulrichsweb.com>

### **Aim and Scope**

RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics was created in 2006 by combining the series "Physics", "Mathematics", "Applied Mathematics and Computer Science", "Applied Mathematics and Computer Mathematics".

Discussed issues affecting modern problems of physics, mathematics, queuing theory, the Teletraffic theory, computer science, software and databases development.

Journal has a high qualitative and quantitative indicators. The Editorial Board consists of well-known scientists of world renown, whose works are highly valued and are cited in the scientific community. Articles are indexed in the Russian and foreign databases. Each paper is reviewed by at least two reviewers, the composition of which includes PhDs, are well known in their circles. Author's part of the magazine includes both young scientists, graduate students and talented students, who publish their works, and famous giants of world science.

The Journal is published in accordance with the policies of COPE (Committee on Publication Ethics).

The editors are open to thematic issue initiatives with guest editors.

Further information regarding notes for contributors, subscription, and back volumes is available at <http://journals.rudn.ru/miph>.

E-mail: [miphj@rudn.university](mailto:miphj@rudn.university), [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).

## СОДЕРЖАНИЕ

### Математика

- Дьячков М. Ю.** Индуктивное моделирование объектов и явлений методом группового учёта аргументов: недостатки и способы их устранения . . . . . 323
- Максимова И. С., Розова В. Н.** Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства . . . . . 331
- Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х.** Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса . . . . . 340
- Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С.** Обзор систем параллельной обработки заявок . . . . . 350

### Математическое моделирование

- Демидова А. В., Дружинина О. В., Масина О. Н.** Построение и анализ устойчивости недетерминированных многомерных моделей динамики популяций 363
- Сердюкова С. И.** Вычисление ВАХ для систем джозефсоновских переходов. О построении асимптотики вблизи точки излома . . . . . 373

### Физика

- Янишевский Д. М.** Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями . . . . . 380
- Павлов А. Е.** Два подхода к интерпретации диаграммы Хаббла . . . . . 390
- Дорофеев В. Г., Красовицкий В. Б., Туриков В. А.** Уединённая правополяризованная электромагнитная волна в релятивистской плазме . . . 401

### Информатика и вычислительная техника

- Панкратов А. С., Мазри А.** Построение интегрированной информационной системы, объединяющей базы данных компаний, обеспечивающих грузоперевозки . . . . . 410
- Правила оформления статей** . . . . . 420

# CONTENTS

## Mathematics

- Dyachkov M. Y.** Inductive Modeling of Objects and Phenomena by the Group Method of Data Handling: the Shortcomings and Ways of Their Elimination . . . 323
- Maksimova I. S., Rozova V. N.** Local Controllability in the Problem with Phase Space Change . . . . . 331
- Almohammad Kh., Alkhalil N.** Integral Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type . . . . . 340
- Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Samouylov K. E., Sopin E. S.** A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers . . . . . 350

## Mathematical Modeling

- Demidova A. V., Druzhinina O. V., Masina O. N.** Design and Stability Analysis of Nondeterministic Multidimensional Populations Dynamics Models . . . 363
- Serdyukova S. I.** IVC Calculation Problem for Josephson Junction Stacks. On Asymptotic Construction near the Breakpoint . . . . . 373

## Physics

- Yanishevskiy D. M.** Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Fluid Sources . . . . . 380
- Pavlov A. E.** Two Approaches to Interpretation of Hubble Diagram . . . . . 390
- Dorofeenko V. G., Krasovitskiy V. B., Turikov V. A.** Solitary Right Hand Polarized Electromagnetic Wave in Relativistic Plasma . . . . . 401

## Computer Science and Computer Engineering

- Pankratov A. S., Mazri A.** Building an Integrated Information System that Merge the Databases of Companies Providing Cargo Carriers . . . . . 410
- Guidelines for Authors** . . . . . 420

---

# Математика

УДК 519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-323-330

## Индуктивное моделирование объектов и явлений методом группового учёта аргументов: недостатки и способы их устранения

М. Ю. Дьячков

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклуто-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

Представлены оригинальные результаты исследования эффективного вычислительного метода — метода группового учёта аргументов. Выявлены и систематизированы ключевые недостатки на каждой значимой процедуре классического алгоритма, а также представлены способы их устранения, в том числе авторские модификации. В частности, предложено использование дисперсии и её оценки (критерий Фишера) в качестве оценки точности полученного результата, дополнительного «внутреннего» критерия оценки адекватности модели в различных тестах при фиксации исходных данных и изменении характеристик алгоритма, а также определения оптимальной сложности модели. Для решения проблемы сходимости классического алгоритма было предложено использование методов дисперсионного, факторного и корреляционного анализов для исключения неинформативных признаков, модификации критерия останова алгоритма. Предложено использование регуляризирующих функционалов для разрешения проблемы мультиколлинеарности входных признаков и повышения устойчивости полученной модели и др. Разработан комплекс программ компьютерного моделирования, реализующий модифицированный эффективный алгоритм метода группового учёта аргументов с рассмотренными авторскими модификациями, а также методами дисперсионного анализа, корреляционного анализа, факторного анализа, элементы регрессионного анализа и др. Проведённые исследования и полученные практические результаты могут стать основой для разработки с применением современных технологий Machine Learning и Data Science автоматизированной системы компьютерного моделирования, интеллектуального анализа и обработки данных.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, индуктивное моделирование, метод группового учёта аргументов, эффективный алгоритм МГУА, адекватная модель, комплекс программ

## 1. Введение

Математическое моделирование стало неотъемлемой частью построения и исследования функционирования сложных систем. В условиях неполноты информации активно используются методы индуктивного моделирования, позволяющие последовательно строить модели возрастающей сложности непосредственно по выборке данных без привлечения дополнительной априорной информации в фиксированном классе функций, предназначенные для функционального описания входо-выходных характеристик систем.

Среди индуктивных методов математического моделирования выделяется эффективный вычислительный метод — метод группового учёта аргументов (МГУА) [1–3]. Его основой являются алгоритм массовой селекции (принцип самоорганизации моделей), теорема Геделя о неполноте, принцип сохранения свободы выбора Габора [2, 3]. МГУА относится к методам анализа данных (Data Science), успешно применяется для решения задач моделирования, прогнозирования, распознавания образов и др. Его алгоритмы позволяют находить взаимосвязности и закономерности, обнаруживать новые знания, неявно отражённые в данных, и представлять их

в виде адекватной математической модели оптимальной сложности, представленной в явном функциональном виде [1–3]. Проверка соответствия математической модели исходным данным, то есть её адекватность, оценивается точностью прогноза и сложностью структуры, а также согласованностью обнаруженных знаний результатам исследования.

Однако классический многорядный алгоритм МГУА не лишён недостатков, которые могут не позволить корректно решить поставленную задачу. Некоторые из них могут быть устранены за счёт приведённых в статье ранее предложенных исследователями научно обоснованных решений, а также авторских модификаций, использование которых может варьироваться при решении различных классов задач [1–3]. На каждой значимой процедуре МГУА исследователи предлагали свои идеи, создавая модифицированные алгоритмы для решений отдельных задач, однако их синтеза не проводилось.

МГУА относится к методам вычислительной математики [4]. При его реализации выполняется большое количество операций: решение систем линейных уравнений, вычисление псевдообратных матриц, решение задач численной оптимизации и др. Поэтому его применение без программной реализации невозможно. Любой алгоритм МГУА должен допускать эффективную программную реализацию, в том числе с применением современных компьютерных технологий: организации параллельных вычислений, использованием доступных вычислительных ресурсов и пр.

## 2. Общий класс задач индуктивного моделирования

Рассмотрим класс задач индуктивного моделирования, которые так или иначе сводятся к выбору оптимальной по заданному критерию модели из множества генерируемых моделей для случая объекта с одним выходом. Пусть имеется  $n$  наблюдений за поведением объекта или явления, т.е. задана выборка исходных данных  $D = (Xy)$ , содержащая информацию об изменении  $n$  входных признаков  $X[m \times n]$  и одного выходного  $y[m \times 1]$ . Индуктивный процесс решения задачи определения структуры и параметров адекватной модели состоит в использовании данных одной части выборки (обучающая выборка) для создания постепенно усложняемых моделей и селекции (отбора) наиболее адекватных из них с применением принципа внешнего дополнения, выражающегося в виде ошибки моделей с использованием данных из другой части (контрольная выборка). В общем случае задача построения адекватной модели сводится к формированию по выборке экспериментальных данных некоторого множества  $\Phi$  моделей различной структуры:

$$\hat{y}_f = (X, \hat{\Theta}_f), \quad f \in \Phi$$

и поиску оптимальной модели из этого множества. Проблема множественности математических моделей, используемых для описания объекта или явления, с точки зрения общих и частных целей исследования решается как задача дискретной оптимизации по условию минимума заданного внешнего критерия селекции  $CR(\cdot)$ :

$$f^* = \operatorname{argmin}_{f \in \Phi} CR(y, f(X, \hat{\Theta}_f)),$$

где оценка параметров  $\hat{\Theta}_f$  для каждой  $f \in \Phi$  есть решение задачи непрерывной оптимизации [5]:

$$\hat{\Theta}_f = \operatorname{argmin}_{\Theta \in R^s} QR(y, X, \Theta_f),$$

где  $CR(\cdot) \neq QR(\cdot)$  — функционал «качества» решения задачи параметрической идентификации модели в процессе структурной идентификации,  $s_f$  — сложность модели  $f$ .



Определение произвольного многорядного алгоритма МГУА, как и вообще любой итерационной процедуры, предполагает указание:

- матрицы для начального приближения;
- оператора перехода к следующей итерации;
- правила останова алгоритма.

### 3. Классический алгоритм МГУА

С учётом этого рассмотрим классический многорядный алгоритм МГУА и его некоторые авторские модификации.

1. Матрица для начального приближения алгоритма — исходная выборка из  $m$  измерений  $n$  входных признаков и выходного признака:  $D = (Xy)$ , где  $y[m \times 1]$ ,  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_j[m \times 1]$ ,  $j = (1, \dots, n)$ .
2. Общий вид оператора перехода к следующему ряду алгоритма (итерации) есть некоторый функционал  $\varphi : \gamma(x_i, x_j)$ , где  $x_i, x_j$  — произвольная пара решений предыдущего ряда. В фиксированном классе функций задаётся функция  $\hat{y} = f(x_i, x_j)$ , называемая *частным описанием*. С её помощью порождаются модели на каждом ряде алгоритма. Если достоверные знания о свойствах исследуемого объекта (явления) отсутствуют, то целесообразно использовать полиномиальные функции, так как ими можно представить любую непрерывную функцию с достаточной точностью. На практике обычно используют линейно-квадратичные функции, зависящие явно от двух переменных, например:

$$\hat{y} = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_ix_j + a_4x_i^2 + a_5x_j^2,$$

если в качестве класса функций выбран функциональный ряд Вольтерра, также называемый полиномом Колмогорова–Габор [1]:

$$y = w_0 + \sum_{i=1}^n (w_i x_i) + \sum_{i,j=1}^n (w_{ij} x_i x_j) + \sum_{i,j,k=1}^n (w_{ijk} x_i x_j x_k) + \dots$$

Оценку неизвестных параметров моделей производят, например, методом наименьших квадратов:

$$QR(\cdot) = \sum_{i=1}^m (\hat{y}_i(\cdot) - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

3. Алгоритм останавливается при выполнении критерия ОСТАНОВ:  $CR_{Q+1} \geq CR_Q$ , где  $CR$  — внешний критерий качества модели,  $Q$  — номер ряда. Внешний критерий характеризует «качество» модели, а также используется для отбора «лучших» моделей на следующий ряд алгоритма. Стоит отметить, что для использования любого внешнего критерия необходимо разбить исходную выборку  $D$  на непересекающиеся обучающую  $T$  и контрольную  $S$  выборки. Приведём примеры хорошо зарекомендовавших себя внешних критериев [1–3]:

– *критерий регулярности* — физический смысл критерия состоит в том, что он ориентирован на выбор модели, которая будет наиболее точной на множестве объектов, которых ещё нет в выборке, но они появятся в ближайшем будущем:

$$\Delta^2(T, S) = \sum_{i=1}^{m_T} (y_i^* - y_i^T)^2 + \sum_{i=1}^{m_S} (y_i^* - y_i^S)^2 \rightarrow \min,$$

где  $y_i^T$  — значения выходной величины модели, коэффициенты которой были определены по данным обучающей выборки;  $y_i^S$  — значения выходной величины модели, коэффициенты которой были определены по данным контрольной выборки;  $y_i^*$  — значения выходной величины модели на исходных данных;  $m_T$  — количество объектов (строк) в обучающей выборке;  $m_S$  — количество объектов в контрольной выборке;

- *критерий несмещённости (минимума смещения)* позволяет выбрать модель, наименее чувствительную к изменению множества опытных точек, по которым она получена. Этот критерий требует максимального совпадения выходного параметра двух моделей, полученных на данных обучающей и контрольной выборок:

$$\eta_{\text{см}}^2(T, S) = \frac{\sum_{i=1}^m (y_i^S - y_i^T)^2}{\sum_{i=1}^m (y_i^*)} \rightarrow \min;$$

- *комбинированный критерий*, в частном случае, представляет собой объединение показателей оценки несмещённости  $\eta_{\text{см}}^2(T, S)$  и среднеквадратичной ошибки  $\Delta^2(T, S)$  обеих моделей, построенных на выборках  $T$  и  $S$ , — построение одного «обобщённого» критерия:

$$\eta_{\text{комб}}^2 = (1 - \mu) * \eta_{\text{см}}^2(T, S) + \mu * \Delta^2(T, S) \rightarrow \min,$$

где  $\eta$  — коэффициент веса (экспертная оценка), представляющий объединение двух критериев. Этот подход имеет существенное допущение о «квалифицированном» эксперте и проблему компенсирования одних показателей за счёт других.

Рассмотрим подробнее процедуры, выполняемые на первом и произвольном ( $Q + 1$ ) рядах классического многорядного алгоритма МГУА.

*Первый ряд.* Из входных векторов-аргументов  $x_1, \dots, x_n$  выбираются всевозможные пары  $x_i \neq x_j$  и составляются частные описания, т.е. функции вида  $y_l^1 = f(x_i, x_j)$ ,  $l = 1, 2, \dots, C_n^2$ , и методами регрессионного анализа [6, 7], например, методом наименьших квадратов на обучающей выборке находят оценки неизвестных параметров  $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3, \dots$ . По заданному внешнему критерию на контрольной выборке отбираются  $q * C_n^2$ , где  $q \in (0, 1]$  (*свобода выбора*), лучших моделей  $\hat{y}_k^1$ ,  $k = 1, 2, \dots, q * C_n^2$ . Выполняется ряд селекций. Выходы этих  $q * C_n^2$  моделей используются в качестве аргументов для формирования моделей следующего ряда. Далее находится минимальное  $CR_{\text{min}}^1$  среди всех  $q * C_n^2$  значений внешнего критерия на первом ряде.

*Произвольный  $Q + 1$  ряд.* Из векторов-аргументов  $\hat{y}_k^Q$ ,  $k = 1, 2, \dots, p$  предыдущего  $Q$ -го ряда формируются всевозможные частные описания:

$$y_l^{Q+1} = f(z_i, z_j), \quad l = 1, 2, \dots, C_p^2, \quad z \doteq \hat{y}^Q, \quad i \neq j.$$

На обучающей выборке находятся оценки неизвестных параметров. Затем по значению внешнего критерия отбираются  $S$  «лучших» моделей из полученных частных описаний  $\hat{y}_l^{Q+1}$ ,  $l = 1, 2, \dots, C_p^2$ , находится минимальное значение  $CR_{\text{min}}^{Q+1}$ . Проверяется критерий ОСТАНОВ:  $CR_{\text{min}}^{Q+1} \geq CR_{\text{min}}^Q$ , при выполнении которого итерационный (многорядный) процесс останавливается, иначе — переход к следующему ряду. В случае останова в качестве оптимальной принимается модель, соответствующая значению  $CR_{\text{min}}^Q$  на предыдущем  $Q$ -м ряде.

#### 4. Недостатки классического алгоритма и способы их устранения

В рамках данной работы обобщены значимые научно обоснованные решения исследователей и предложены авторские модификации общего классического алгоритма МГУА для устранения выявленных недостатков.

Проблему разбиения исходных данных на обучающую и контрольную выборки исследователи предлагают разрешать разными способами в зависимости от цели исследования, а также знаний о свойствах моделируемых явлений и объектов. Например, в [1] было показано, что при использовании критерия минимума смещения разделение исходных данных целесообразно производить 50% на 50% для обучающей и контрольной выборки. Исследователями предложены соответствующие методики по разбиению объектов для стационарных и динамических процессов, а также при решении задач прогнозирования и др. Автором предлагается использовать процедуру кросс-валидации (скользящего контроля), которая заключается в следующем. Фиксируется некоторое множество разбиений исходной выборки на две подвыборки: обучающую и контрольную. Для каждого разбиения выполняется алгоритм МГУА: генерируется модель, определяются параметры с помощью обучающей выборки, вычисляется значение внешнего критерия с использованием данных контрольной выборки. В качестве выходной модели выбирается та модель, у которой значение внешнего критерия среди выбранного множества разбиений минимально. Возможно наложение некоторых условий на множество разбиений, например, чтобы каждый объект хотя бы один раз попал в обучающую и контрольную выборки при различных разбиениях. С использованием методики скользящего контроля можно ввести дополнительную оценку полученной модели путём вычисления среднего по всем значениям внешнего критерия на всех разбиениях.

В классическом многорядном алгоритме МГУА возможно ухудшение обусловленности систем уравнений с ростом числа рядов селекции. Исследователи предлагают для разрешения данной проблемы произвести нормализацию или стандартизацию исходной выборки различными способами. Например, нормализация предполагает замену номинальных признаков так, чтобы каждый из них лежал в диапазоне от 0 до 1. Стандартизация же подразумевает такую предобработку данных, после которой каждый признак имеет нулевое среднее и единичное среднеквадратическое отклонение.

Автором предлагается использовать дисперсию и её оценку (критерий Фишера) в качестве точности полученного результата, дополнительного *внутреннего* (т.е. на всех объектах исходной выборки) критерия оценки адекватности модели (соответствие математической модели исходным данным) в различных тестах при фиксации исходных данных и изменении характеристик алгоритма, например частного описания, внешнего критерия, свободы выбора и др. Также критерий Фишера может быть использован для определения оптимальной сложности структуры модели.

Итерационные алгоритмы не гарантируют построения адекватной модели, так как они базируются на неполных процедурах иерархического усложнения моделей. Возможна потеря значимых признаков, если они были исключены в первом или последующих рядах селекции. Эту проблему целесообразно решать за счёт:

- расширения порога отбора моделей-претендентов в следующий ряд алгоритма с учётом возможностей современных персональных компьютеров и общего программного обеспечения;
- полного или направленного перебора моделей-претендентов с учётом ограничений на количество исходных (промежуточных) признаков, а также возможностей персонального компьютера, общего программного обеспечения, языка программирования и др.;
- включения начальных признаков в перебор на всех рядах селекции;
- решения задачи оптимального количества моделей-претендентов, пропускаемых в следующий ряд алгоритма;

- отбора модели на ряде  $Q$ , если её эффективность по критерию отбора улучшится на  $Q + 1$  ряде — реализация обратной связи.

В классическом алгоритме МГУА существует возможность включения неинформативных признаков в исходную выборку и искомую модель. Для устранения этого недостатка необходимо:

- решить задачу оптимизации сложности моделей-претендентов;
- использовать методы дисперсионного анализа после завершения процедуры поиска оптимальной модели для оценки вклада в общую дисперсию каждого параметра полученной модели.

Необходимо отметить, что при квадратичном частном описании, т.е.  $y(x_i, x_j) = a_0 + a_1x_i + a_2x_j + a_3x_i^2 + a_4x_j^2$ , если усложнение моделей происходит по единому правилу, показанному выше, происходит экспоненциальный рост степени. Этого недостатка можно избежать, если:

- варьировать в разном сочетании линейные, билинейные и квадратичные частные описания в соседних рядах селекции;
- изменить оператор перехода к следующему ряду алгоритма  $\varphi : \gamma(x_i, x_j)$ , например, для второго ряда алгоритма:  $z_{klqv} = y_{kl} + y_{qv} = a_0 + a_kx_k + a_lx_l + a_qx_q + a_vx_v$  при частном описании вида  $y(x_i, x_j) = a_0 + a_1x_i + a_2x_j$ ;
- решить задачу комбинаторной оптимизации структуры частных описаний.

Проблему сходимости алгоритма МГУА можно решить за счёт модификаций критерия ОСТАНОВ, например, определить ограничения на количество рядов селекции  $Q_{\max}$ , останавливать работу алгоритма в тот момент, как  $CR_{\min}^{Q+1} - CR_{\min}^Q < \epsilon$ . Модификация критерия ОСТАНОВ также позволит решить задачу переусложнения выходной модели.

Повысить устойчивость классического алгоритма возможно за счёт применения теории регуляризации, а именно использовать различные методы регуляризации для каждой модели-претендента на каждом ряде селекции, например, функционалы регуляризации  $L_1$  или  $L_2$ , путём добавления «штрафного» слагаемого вида  $\sum_i |a_i|$  и

$\sum_i (a_i)^2$  соответственно при вычислении неизвестных параметров  $a_i$ .

Представить модель в явном функциональном виде можно за счёт разработки алгоритма «обратного хода», который возвращает искомую функцию, зависящую от значимых исходных входных признаков, вида  $y(X)$ ;  $X = (x_1, \dots, x_n)$ . Из решений, отобранных во всех предыдущих рядах селекции, отбрасываются все, которые не используются для образования единственного решения из последнего ряда алгоритма.

## 5. Заключение

Выявлены и систематизированы ключевые недостатки классического алгоритма метода группового учёта аргументов. В рамках данной работы обобщены значимые научно обоснованные решения исследователей и предложены авторские модификации классического алгоритма МГУА для устранения выявленных недостатков. Автором разработан комплекс программ, реализующий модифицированный эффективный алгоритм МГУА с рассмотренными модификациями, а также использующий методы дисперсионного анализа, корреляционного анализа, факторного анализа, элементы регрессионного анализа и др. для выделения значимых признаков, обнаружения значимых корреляций, повышения достоверности прогноза и др. [8]. Проведённые исследования и полученные практические результаты являются актуальными и могут стать основой для разработки автоматизированной системы компьютерного моделирования объектов и явлений, интеллектуального анализа и обработки данных, получения новой качественной информации и синтеза сложных систем.

## Литература

1. *Ивахненко А. Г.* Системы эвристической самоорганизации в технической кибернетике. — Киев: Техніка, 1971. — 372 с.
2. *Ивахненко А. Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1982. — 296 с.
3. *Ивахненко А. Г., Юрчаковский Ю. П.* Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. — М.: Радио и связь, 1978. — 120 с.
4. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 664 с.
5. *Моисеев Н. Н., Иванюков Ю. П., Столярова Е. М.* Методы оптимизации. — М.: Наука, 1978. — 351 с.
6. *Кобзарь А. И.* Прикладная математическая статистика. — М.: Физматлит, 2006. — 816 с.
7. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
8. *Дьячков М. Ю.* О программной реализации усовершенствованного алгоритма метода группового учета аргументов // Международная научно-методическая конференция «Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования» Воронежского государственного педагогического университета. — Воронеж: 2015. — С. 78–79.

UDC 519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-323-330

### Inductive Modeling of Objects and Phenomena by the Group Method of Data Handling: the Shortcomings and Ways of Their Elimination

M. Y. Dyachkov

*Department of Nonlinear Analysis and Optimization  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, Russian Federation, 117198*

Original results of a research of an efficient computing method — group method of data handling are presented. Key shortcomings on each significant procedure of a classical algorithm are revealed and systematized, and also ways of their elimination, including author's modifications are presented. In particular, the use of dispersion and an assessment of dispersion (Fischer's criterion) is proposed as an assessment of accuracy of the received result, additional "internal" criterion for evaluation of adequacy of model in various tests during the fixing of input data and changing of characteristics of an algorithm, and determining the optimal complexity of the model. To solve the convergence problem of the classical algorithm, it was proposed to use the methods of dispersion, factor and correlation analysis to eliminate non-informative features, modify the criterion for stopping the algorithm. The use of regularizing functionals is suggested to solve the problem of multicollinearity of input characteristics and increase the stability of the obtained model, etc. A complex of computer modeling programs was developed, realizing an efficient modified algorithm of GMDH with the considered modifications and also methods of a dispersion analysis, correlation analysis, component analysis, elements of the regression analysis and others. The conducted researches and the received practical results can become a basis for development with use of Machine Learning and Data Science technologies of the automatic system of computer modeling, the intellectual analysis and the data processing.

**Key words and phrases:** mathematical modelling, inductive modeling, group method of data handling, efficient algorithm of GMDH, adequate model, complex of programs

## References

1. A. G. Ivakhnenko, Systems of Heuristic Self-Organization in Technical Cybernetics, Tehnika, Kiev, 1971, in Russian.

2. A. G. Ivakhnenko, The Inductive Method of Self-Organization Models of Complex Systems, Naukova Dumka, Kiev, 1982, in Russian.
3. A. G. Ivakhnenko, Ю. П. Юрчаковский, Simulation of Complex Systems from Experimental Data, Radio i Svyaz, Moscow, 1978, in Russian.
4. B. P. Demidovich, I. A. Maron, Basics of Computational Mathematics, Nauka, M., 1966, in Russian.
5. N. N. Moiseev, Y. P. Ivanilov, E. M. Stolyarova, Optimization Methods, Nauka, Moscow, 1978, in Russian.
6. A. I. Kobzar, Applied Mathematical Statistics, FIZMATLIT, Moscow, 2006, in Russian.
7. A. A. Samarskiy, A. V. Gulin, Numerical Methods, Nauka, Moscow, 1989, in Russian.
8. M. Y. Dyachkov, On the Software Implementation of the Modified Algorithm of Group Method of Data Handling, in: International Scientific-Methodical Conference “Some Questions of Analysis, Algebra, Geometry, and Mathematical Education” of Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, 2015, pp. 78–79, in Russian.

© Дьячков М. Ю., 2017

**Для цитирования:**

*Дьячков М. Ю.* Индуктивное моделирование объектов и явлений методом группового учёта аргументов: недостатки и способы их устранения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 323–330. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-323-330.

**For citation:**

Dyachkov M. Y. Inductive Modeling of Objects and Phenomena by the Group Method of Data Handling: the Shortcomings and Ways of Their Elimination, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 323–330. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-323-330. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Дьячков Михаил Юрьевич** — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: mihdyachkov@gmail.com, тел.: +7 (903)5411591)

**Information about the authors:**

**Dyachkov M. Yu.** — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: mihdyachkov@gmail.com, phone: +7 (903)5411591)

## Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства

И. С. Максимова, В. Н. Розова

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В данной работе исследуется задача управляемости со сменой фазового пространства. В настоящее время растёт интерес к задачам управляемости с переменной структурой по причине расширения зоны их практического применения. Подобные задачи возникают как в физике, в биологии, так и в экономике. Итак, на заданных отрезках времени рассматривается задача перевода объекта из заданного множества одного пространства в заданное множество другого пространства через точку нуль. Фазовые пространства могут иметь разные размерности. Возможен переход как из пространства большей размерности в пространство меньшей размерности, так и наоборот. Движение объекта описывается двумя нелинейными системами дифференциальных уравнений, при этом управляющее воздействие первой системы имеет специальный вид, обусловленный некоторыми физическими приложениями. Переход объекта из одного пространства в другое задаётся некоторым отображением. Для задачи, в которой нелинейная система в первом пространстве является локально нуль-управляемой, а правая часть дифференциального включения во втором пространстве является вогнутым отображением, получены достаточные условия управляемости. Задача исследуется с помощью аппарата теории управляемости, выпуклого анализа и теории многозначных отображений. Принимая во внимание прикладной характер поставленной задачи, полученные в данной работе результаты представляют как теоретический, так и практический интерес.

**Ключевые слова:** управляемость, локальная управляемость, смена фазового пространства, множество достижимости, многозначное отображение, опорная функция

### 1. Постановка задачи

В фазовых пространствах  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$  переменных  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)$  движение объекта описывается следующими нелинейными системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u, \quad u(t) \in U, \quad x(t) \in \mathcal{X}, \quad t \in [0, \tau], \quad (1)$$

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in \mathcal{Y}, \quad t \in [\tau, T], \quad (2)$$

где  $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$ ,  $B(t)$  — матрица размера  $n \times r$  вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$

Управляющее воздействие имеет специальную структуру, которая обусловлена физическими приложениями. Так, например, при некоторых конкретных функциях  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  подобные управляющие воздействия возникают в задачах космической навигации [1].

Функции  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  имеют непрерывные производные вплоть до  $(n-1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки  $t = t^* \in [0, \tau]$ , также  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  являются чётными.

Моменты времени  $\tau$  и  $T$  заданы. Допустимыми управлениями являются всевозможные функции  $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r | u(\cdot) \in L_\infty[0, \tau]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}$ ,  $0 \in \text{int}\Omega$ ,  $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], \mathbb{R}^m)$ , для которых  $u(t) \in U$  при п.в.  $t \in [0, \tau]$  и  $v(t) \in V$  при п.в.

$t \in [\tau, T]$ . Решениями систем (1) и (2) при  $t \in [0, \tau]$  и  $t \in [\tau, T]$  являются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на  $[0, \tau]$  и  $[\tau, T]$  системам (1) и (2) соответственно. Функции  $f(x)$ ,  $g(t, y, v)$  таковы, что решение задачи Коши для систем (1) и (2) существует и единственно.

В  $\mathcal{X}$  задано некоторое начальное множество  $M_0$ . На отрезке времени  $[0, \tau]$  объект движется по закону (1), в момент времени  $\tau$  он попадает в точку ноль и далее происходит переход в пространство  $\mathcal{Y}$ , заданный отображением  $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , и дальнейшее движение осуществляется в пространстве  $\mathcal{Y}$  по закону (2). Наконец, в пространстве  $\mathcal{Y}$  задано конечное выпуклое множество  $M_1$  такое, что  $q(x(\tau)) \notin M_1$  (если  $q(x(\tau)) \in M_1$ , то задача решена).

Задача заключается в том, чтобы найти условия, при которых объект, описываемый системами (1) и (2), будет управляемым из  $M_0$  в  $M_1$ .

В соответствии с [2] объект, описываемый системами (1) и (2), называется управляемым из  $M_0$  в  $M_1$ , если существуют такие допустимые управления  $u(\cdot)$  и  $v(\cdot)$ , что соответствующие им решения систем удовлетворяют граничным условиям  $x(0) \in M_0$ ,  $x(\tau) = 0$  и  $y(\tau) = q(x(\tau))$ ,  $y(T) \in M_1$ .

Рассмотрим следующий подход к исследованию поставленной задачи: пусть при выполнении некоторых условий объект, описываемый системой (1), является локально управляемым в ноль на отрезке времени  $[0, \tau]$ . Если множество  $M_0$  содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, причём  $0 \notin M_0$ , то по определению локальной управляемости мы имеем возможность из множества  $M_0$  попасть в ноль в некоторый момент времени  $\tau$ . Далее в момент времени  $\tau$  осуществляем переход в пространство  $\mathcal{Y}$ , используя отображение  $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ . Получаем точку  $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau)$ , которая является начальной точкой для движения объекта, описываемого системой (2), в пространстве  $\mathcal{Y}$ . Выписываем множество достижимости  $K(T)$  для системы (2) из точки  $y(\tau)$  на отрезке времени  $[\tau, T]$ . Рассматриваем пересечение полученного множества достижимости  $K(T)$  с конечным множеством  $M_1$ . В случае, если пересечение не пусто, объект, описываемый системами (1) и (2), является управляемым на отрезке времени  $[0, T]$  из множества  $M_0$  пространства  $\mathcal{X}$  в  $M_1$  пространства  $\mathcal{Y}$ . Теперь рассмотрим данный подход в конкретном случае, при этом разобьём поставленную задачу на две подзадачи:

- 1) локальная управляемость в ноль в пространстве  $\mathcal{X}$ ;
- 2) управляемость из точки  $y(\tau) = q(0)$  на множество  $M_1$  в пространстве  $\mathcal{Y}$ .

## 2. Локальная управляемость в ноль в пространстве $\mathcal{X}$

В данном пункте приведём условия локальной нуль-управляемости для нелинейной системы специального вида.

В пространстве  $\mathcal{X}$  рассмотрим управляемую систему:

$$\dot{x} = f(x) + B(t)u, \quad (3)$$

где

$$f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n), \quad f(0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

$$u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^r \mid u(\cdot) \in L_\infty[0, \tau]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^r\}, \quad 0 \in \text{int}\Omega, \quad t \in [0, \tau],$$

$B(t)$  — матрица размера  $n \times r$  специального вида:

$$B(t) = B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t).$$



Функции  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  имеют непрерывные производные вплоть до  $(n-1)$ -го порядка включительно в окрестности некоторой точки  $t = t^* \in [0, \tau]$ , также  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  являются чётными.

**Задача:** найти условия локальной нуль-управляемости системы (3) на  $[0, \tau]$  и выразить их через элементы матриц  $A$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , где

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0.$$

Обозначим через  $S_\varepsilon(0)$  открытый шар радиуса  $\varepsilon$  с центром в точке 0.

**Определение 1 (см. [3]).** Управляемый объект, описываемый системой (3), называется локально нуль-управляемым на отрезке времени  $[0, \tau]$ , если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что для любой точки  $x_0 \in S_\varepsilon(0)$  объект является управляемым на отрезке  $[0, \tau]$  из начального положения  $x_0$  на конечное множество  $M = 0$ . Это означает, что для любой точки  $x_0 \in S_\varepsilon(0)$  существует допустимое управление  $u(t)$ , такое, что соответствующее этому управлению решение  $x(t)$  системы (3) перейдёт из точки  $x_0$  в нуль на отрезке времени  $[0, \tau]$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены все предположения на  $f(x)$ ,  $B(t)$  и  $u(t)$  и на отрезке  $[0, \tau]$  существует точка  $t^*$ , в которой ранг матрицы  $L(t)$  равен  $n$ , где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \dots, \\ C_{n-1}^0 A^{n-1} B(t) - C_{n-1}^1 A^{n-2} B'(t) + \dots + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} A^0 B^{(n-1)}(t)).$$

Тогда система (3) локально нуль-управляема на отрезке  $[0, \tau]$ .

Сформулируем следующие утверждения, необходимые для доказательства теоремы.

**Лемма 1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + B(t)u. \quad (4)$$

Система (4) полностью управляема на  $[0, \tau]$ , если на отрезке  $[0, \tau]$  существует точка  $t^*$ , в которой ранг матрицы  $L(t)$  равен  $n$ , где

$$L(t) = (B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \dots, \\ C_{n-1}^0 A^{n-1} B(t) - C_{n-1}^1 A^{n-2} B'(t) + \dots + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} A^0 B^{(n-1)}(t)).$$

**Лемма 2 (см. [4]).** Пусть система (4) полностью управляема, и пусть  $e_1, \dots, e_n$  — точки на осях координат. Тогда существуют  $\varepsilon > 0$ , дифференцируемые функции  $u^i(t)$ ,  $\|u^i(t)\| < \varepsilon$  и окрестность нуля  $S_\delta(0)$  такие, что  $\forall e_i \in S_\delta(0)$  функции  $u^i(t)$  переводят систему (4) из  $e_i$  в ноль.

**Определение 2.** Рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x, u). \quad (5)$$

Система (5) называется полностью управляемой на отрезке  $[0, \tau]$ , если для любых точек  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$  найдётся допустимое управление  $u(t)$ , переводящее систему (5) из состояния  $x_0$  в момент времени  $t = 0$  в состояние  $x_1$  в момент времени  $t = \tau$ . Система (5) называется полностью нуль-управляемой при  $x_1 = 0$ .

**Доказательство (теоремы 1).** Сделаем замену переменных  $\tau = -t$  в системах (3) и (4), получим движение объекта в обратном времени. Тогда

$$\dot{x} = -f(x) - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u, \quad (6)$$

$$\dot{x} = -Ax - (B_1\varphi_1(t) + B_2\varphi_2(t))u, \quad (7)$$

где  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0)$ .

Известно, что для данной системы (3) при сделанных предположениях существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что при  $\|u\| < \varepsilon$  все траектории системы (6) с начальным условием  $x(0) = 0$  продолжаемы на  $[0, 1]$ .

Действительно, рассмотрим множество

$$Q_\delta = \{(x, u) \mid \|x\| < \delta, \quad \|u\| < \delta\}.$$

Учитывая, что  $f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , имеем по непрерывности на множестве  $Q_\delta$ :

$$\max_{x \in Q_\delta} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| = M_\delta < \infty.$$

Оценим  $x(t)$ . Поскольку  $x(t)$  является решением системы (3), то оно имеет вид:

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(x)dt + \int_0^t B(t)u dt.$$

Далее, используя формулу Тейлора и оценку, полученную выше, имеем:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \int_0^t \|f(x)\|dt + \int_0^t \|B(t)u\|dt \leq \int_0^t M_\delta \|x\|dt + \int_0^t M_1 \|u\|dt \leq \\ &\leq \int_0^t M \|x\|dt + \int_0^t M \|u\|dt, \end{aligned}$$

где  $M = \max\{M_\delta, M_1\}$ .

Пусть  $t = 1$ , тогда имеем

$$\|x(t)\| \leq \int_0^1 M \|x\|dt + M\varepsilon.$$

По лемме Гронуолла при соответствующем выборе  $\varepsilon$  получаем

$$\|x(t)\| \leq M\varepsilon e^{\int_0^1 M dt} \leq M\varepsilon e^M < \delta.$$

Таким образом, решения  $x(t, 0, 0, u)$  системы (6) определены на отрезке  $[0, 1]$  для допустимых управлений  $u$ :  $\|u\| < \varepsilon$ .

По условию теоремы 1 получаем, что лемма 1 выполнена и система (7) полностью управляема на отрезке  $[0, \tau]$ . Тогда, по лемме 2 для системы (7) существуют  $\varepsilon > 0$

и  $u^i(t)$ ,  $\|u^i(t)\| < \varepsilon$ , переводящие систему из нуля на  $e_i$ ,  $\|e_i\| < \delta(\varepsilon)$ , принадлежащие осям координат. Кроме того,  $u^i(t)$  можно выбрать дифференцируемыми.

Рассмотрим управление  $u(t, \xi) = \xi_1 u^1(t) + \dots + \xi_n u^n(t)$ , где  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\xi\| = \max_i |\xi_i| \leq 1$ . Тогда  $\|u\| < \varepsilon$ , так как  $\|u^i(t)\| < \varepsilon$ . Подставим управление  $u(t, \xi)$  в систему (6). Получим систему

$$\dot{x} = -f(x) - (B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t))u(t, \xi), \quad (8)$$

с начальным условием  $x(0) = 0$ , решение которой имеет вид  $x(t, \xi) = x(t, 0, 0, u(t, \xi))$ . Заметим, что  $u(t, 0) = 0$  и  $x(t, 0) = 0$  и полученное решение  $x(t, \xi)$  определено на  $[0, 1]$ .

Покажем, что образы  $x(1, \xi)$  покрывают некоторую окрестность начала координат при  $\|\xi\| \leq 1$ , т.е.  $x(1, \xi) = x_0$  для любой точки  $x_0 \in S_\delta(0)$ . Для уравнения  $x(1, \xi) = x_0$  воспользуемся теоремой о неявной функции.

Рассмотрим матрицу  $Z(t, \xi) = \partial x(t, \xi) / \partial \xi$ . Покажем, что матрица  $Z(1, \xi)$  является невырожденной.

Из теории дифференциальных уравнений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} &= -f(x(t, \xi)) - (B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t))u(t, \xi), \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} &= - \left. \frac{\partial f(x(t, \xi))}{\partial x} \right|_0 \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - (B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t)) \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

т.е.

$$\dot{Z} = -AZ - (B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t)) \frac{\partial u(t, \xi)}{\partial \xi},$$

где  $\frac{\partial u}{\partial \xi} = (u^1, \dots, u^n)$ .

Пусть  $Z(t, \xi)$  — матрица, столбцами которой являются  $z_1, \dots, z_n$ , тогда

$$\dot{z}_j = -Az_j - (B_1 \varphi_1(t) + B_2 \varphi_2(t)) u^j, \quad j = \overline{1, n}.$$

Элементы  $z_j(1) = e_j$  из свойств управления  $u^j$ , и  $e_j$  линейно независимы по условию. Тогда  $\det Z(1, \xi) \neq 0$ . Итак, по теореме о неявной функции имеем, что если  $\|\xi\| \leq 1$ , то концы траектории системы (6) покрывают некоторую окрестность нуля. Таким образом, система (3) является локально нуль-управляемой на  $[0, \tau]$ , что и доказывает теорему.  $\square$

Таким образом, при выполнении условий теоремы 1 объект, описываемый системой (3), локально нуль-управляем на  $[0, \tau]$ . Если множество  $M_0$  содержится в окрестности локальной управляемости или имеет с ней непустое пересечение, тогда при выполнении условий теоремы 1 и в силу локальной управляемости системы (3) объект попадает из множества  $M_0$  в нуль. Используя отображение  $q: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , осуществим переход в пространство  $\mathcal{Y}$  и приступим к решению второй задачи.

### 3. Управляемость из точки $y(\tau)$ на множество $M_1$ в пространстве $\mathcal{Y}$

Пусть в пространстве  $\mathcal{Y}$  движение объекта описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений:

$$\dot{y}(t) = g(t, y(t), v(t)), \quad v(t) \in V, \quad y(t) \in \mathcal{Y}, \quad t \in [\tau, T]. \quad (9)$$

Обозначим через  $\Omega(\mathbb{R}^m)$  совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств пространства  $\mathbb{R}^m$ . Пусть задано множество  $V \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ . Допустимыми управлениями являются всевозможные функции  $v(\cdot) \in L_\infty([\tau, T], \mathbb{R}^m)$ , для которых  $v(t) \in V$  при п.в.  $t \in [\tau, T]$ . Решениями системы (9) при  $t \in [\tau, T]$  являются абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие почти всюду на  $[\tau, T]$  системе (9). Пусть функция  $g(t, y, v)$  такова, что решение задачи Коши для системы (9) существует и единственно.

Используя отображение  $g$ , мы получили точку  $q(x(\tau)) = q(0) = y(\tau)$ , которая является начальной точкой при движении объекта в пространстве  $\mathcal{Y}$ . Также в  $\mathcal{Y}$  задано конечное множество  $M_1 \in \Omega(\mathbb{R}^m)$ , такое, что  $q(x(\tau)) \notin M_1$ .

В фазовом пространстве  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$  в точке  $y$  для нелинейной системы (9) рассмотрим множество  $g(t, y, V)$ , которое состоит из всех векторов  $g(t, y, v)$ , где  $v$  принадлежит множеству  $V$ . Если  $y(t)$  является некоторой траекторией системы (9), соответствующей допустимому управлению  $v(t)$ , то при почти всех  $t \in [\tau, T]$  выполнено включение

$$\dot{y}(t) \in g(t, y(t), V). \quad (10)$$

Таким образом, получаем дифференциальное включение

$$\dot{y} \in g(t, y, V). \quad (11)$$

Под решением дифференциального включения (11) понимается абсолютно непрерывная функция  $y(t)$ , определённая на интервале  $[\tau, T]$ , удовлетворяющая включению (11) при почти всех  $t \in [\tau, T]$ .

Итак, при довольно общих предположениях система (9) эквивалентна дифференциальному включению (11), т.е. для любого решения  $y(\cdot)$  включения (11) будет существовать допустимое управление  $v(\cdot)$ , такое, что функция  $y(\cdot)$  будет являться траекторией системы (9) с этим управлением  $v(\cdot)$ .

Далее с учётом всех сделанных замечаний вместо нелинейной системы дифференциальных уравнений (9) будем рассматривать следующее дифференциальное включение (11). Введём обозначение  $g(t, y, V) = G(t, y)$ . Теперь в фазовом пространстве  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^m$  движение объекта будет описываться дифференциальным включением

$$\dot{y} \in G(t, y), \quad t \in [\tau, T], \quad (12)$$

где  $G(t, y)$  — многозначное отображение.

Через  $K(T)$  обозначим множество достижимости для нелинейной системы (9) из точки  $y(\tau)$  в момент времени  $T$ . Предположим, что многозначное отображение  $G(t, y)$  является вогнутым по  $y$  на множестве достижимости  $K(T)$  и  $K(T)$  компактно. Используя результаты, полученные в [2], из вогнутости отображения  $G(t, y)$  по  $y$  на множестве достижимости  $K(T)$  следует выпуклость множества достижимости  $K(T)$ . Тогда для управляемости нелинейной системы (9) достаточно, чтобы пересечение множества достижимости и конечного множества было непусто, т.е.  $K(T) \cap M_1 \neq \emptyset$ . Также, используя свойства опорных функций, данное условие управляемости можно преобразовать к виду  $c(K(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$ , для любого  $\psi \in \mathbb{R}^m$  (см. [3]).

Таким образом, условия управляемости для поставленной задачи из множества  $M_0$  пространства  $\mathcal{X}$  в множество  $M_1$  пространства  $\mathcal{Y}$  для систем (1) и (2) можно сформулировать в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть выполнены все сделанные предположения и на отрезке времени  $[0, \tau]$  существует такая точка  $t^*$ , в которой ранг матрицы  $L(t)$  равен  $n$ , где

$$L(t) = \left( B(t), AB(t) - B'(t), A^2B(t) - 2AB'(t) + B''(t), \dots, \right. \\ \left. \dots, C_{n-1}^0 A^{n-1} B(t) - C_{n-1}^1 A^{n-2} B'(t) + \dots + (-1)^{n+1} C_{n-1}^{n-1} A^0 B^{(n-1)}(t) \right).$$

Тогда для управляемости объекта, движение которого описывается системами (1) и (2), на отрезке времени  $[0, T]$  достаточно выполнения следующего соотношения  $c(K(T), \psi) + c(M_1, -\psi) \geq 0$ , для любого  $\psi \in \mathbb{R}^m$ .

**Пример 1.** Рассмотрим пример, иллюстрирующий изложенный выше подход к исследованию вопроса управляемости объекта, движение которого задаётся двумя дифференциальными системами на последовательных интервалах времени в разных фазовых пространствах.

Даны два фазовых пространства  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  и  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ . Движение объекта в первом пространстве описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2 + x_2 + (\cos t + t \sin t)u_1, \\ \dot{x}_2(t) = x_2^2 + x_1 + (2 \cos t)u_2, \end{cases} \quad (13)$$

$t \in [0, 1]$ ,  $u(\cdot) \in U = \{u(t) \in \mathbb{R}^2 | u(\cdot) \in L_\infty[0, 1]; u(t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2\}$ ,  $0 \in \text{int}\Omega$ .

Также в пространстве  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  задано отображение  $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , такое, что  $q(0, 0) = (0, 0, 0)$ .

Движение объекта в пространстве  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$  описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2, \\ \dot{y}_2(t) = y_3 + v_2, \\ \dot{y}_3(t) = 0. \end{cases} \quad (14)$$

$t \in [1, 5]$ ,  $V = \{v \in \mathbb{R}^3 : v_1 = 0, |v_2| \leq 1, v_3 = 0\}$ .

В пространстве  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$  задано конечное множество  $M_1 = \{y \in \mathbb{R}^3 : (y_1 - 6)^2 + (y_2 - 4)^2 \leq 4, y_3 = 0\}$ .

**Задача:** исследовать, является ли объект, описываемый системами (13) и (14), управляемым из точки 0 пространства  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  на множество  $M_1$  пространства  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ .

**Решение.** Возьмём в качестве точки  $t^*$  точку  $t = \pi/4$ . Тогда ранг матрицы

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

равен двум и по теореме 1 система (13) является локально нуль-управляемой на отрезке  $[0, 1]$ .

Теперь, используя отображение  $q(x_1, x_2) = (y_1, y_2, y_3)$ , такое, что  $q(0, 0) = (0, 0, 0)$ , перейдём в пространство  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^3$ . Начальным множеством при движении объекта в пространстве  $\mathcal{Y}$  будет точка  $y_0 = (0, 0, 0)$ .

Множество достижимости  $K(t)$  для системы (14) — это множество, ограниченное двумя парабололами  $(y_2 + 4)^2 \leq 4y_1 + 32$  и  $(y_2 - 4)^2 \leq -4y_1 + 32$ . Пересечение данного множества достижимости и конечного множества  $M_1$  непусто, следовательно, система (14) является управляемой из точки  $y_0$  на множество  $M_1$  на отрезке времени  $[1, 5]$ .

Таким образом, получаем, что объект, описываемый системами (13) и (14), является управляемым из точки 0 пространства  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$  на множество  $M_1$  пространства  $\mathcal{U} = \mathbb{R}^3$  на отрезке времени [1, 5].

## Литература

1. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. — М., 1963.
2. Максимова И. С., Розова В. Н. Достаточные условия управляемости в задаче со сменой фазового пространства // Вестник ТГУ. Серия: Естественные и технические науки. — 2011. — Т. 3. — С. 742–747.
3. Благодатских В. И. Введение в оптимальное управление (линейная теория). — М.: Высшая школа, 2001.
4. Ли Э. В., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.

UDC 517.977

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339

## Local Controllability in the Problem with Phase Space Change

I. S. Maksimova, V. N. Rozova

*Department of Nonlinear Analysis and Optimization  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)  
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

This work researches the problem of controllability with phase space change. Nowadays the interest to the controllability problems with variable structure is on the rise due to the continuous widening of their practical application space. The tasks of this sort are appearing in physics, biology as well as in economics. The problem of transfer of object from the constrain set of one space to the constrain set of different space through the null point at the given lengths of time is examined. The spaces may be of the different dimensionality. The transfer is possible both from the space of higher dimensionality to the space of lower dimensionality and vice versa. The movement of the object is described by two nonlinear systems of differential equations, while the control action of the first system has a special form, due to some physical applications. The transfer of the object from one space to another is given by certain mapping. For the problem in which the nonlinear system in the initial space is locally null-controlled and the right part of differential inclusion in the second space is the concave mapping the sufficient controllability conditions were achieved. The problem is researched using the controllability theory apparatus, convex analysis and multiple-valued mapping theory. Taking into the account the practical value of the given problem the results achieved are of both theoretical and practical significance.

**Key words and phrases:** controllability, local controllability, phase space change, set of attainability, multiple-valued mapping, function of support

## References

1. E. V. Tarasov, Optimal Flight Modes of Aircraft, M., 1963, in Russian.
2. I. S. Maksimova, V. N. Rozova, The Sufficient Conditions for Controllability in the Problem with Phase Space Change, Tambov University Reports, Series: Natural and Technical Sciences 3 (2011) 742–747, in Russian.
3. V. I. Blagodatskikh, Introduction to Optimal Control, Vysshaya Shkola, M., 2001, in Russian.
4. E. V. Li, L. Marcus, Foundations of Optimal Control Theory, Nauka, M., 1972, in Russian.

**Для цитирования:**

Максимова И. С., Розова В. Н. Локальная управляемость в задаче со сменой фазового пространства // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 331–339. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339.

**For citation:**

Maksimova I. S., Rozova V. N. Local Controllability in the Problem with Phase Space Change, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 331–339. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-331-339. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Максимова Ирина Сергеевна** — старший преподаватель кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: [maksimova\\_is@rudn.university](mailto:maksimova_is@rudn.university))

**Розова Валентина Николаевна** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: [rozova\\_vn@rudn.university](mailto:rozova_vn@rudn.university))

**Information about the authors:**

**Maksimova I. S.** — senior lecturer of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [maksimova\\_is@rudn.university](mailto:maksimova_is@rudn.university))

**Rozova V. N.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [rozova\\_vn@rudn.university](mailto:rozova_vn@rudn.university))

---

УДК 517.951  
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349

## Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса

Х. Алмохаммад, Н. Х. Альхалиль

*Кафедра нелинейного анализа и оптимизации  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В работе изучаются интегральные свойства свёрток функций с ядрами, обобщающими классические ядра Бесселя–Макдональда  $G_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . Локальное поведение ядер Бесселя–Макдональда в окрестности начала координат характеризуется наличием особенности степенного типа  $|x|^{\alpha-n}$ . Ядра обобщённых потенциалов Бесселя–Рисса могут иметь нестепенные особенности в окрестности начала координат. Их поведение на бесконечности связано лишь с условием интегрируемости, так что в рассмотрение включены и ядра с компактным носителем. В статье получена конкретизация общих критериев вложения потенциалов в перестановочно-инвариантные пространства в случае, когда базовое пространство для потенциалов есть весовое пространство Лоренца. Получены явные описания оптимального перестановочно-инвариантного пространства для такого вложения.

**Ключевые слова:** потенциалы типа Рисса, пространства Лоренца, убывающие перестановки, перестановочно-инвариантные пространства, оптимальные вложения

### 1. Введение

В данной статье мы изучаем обобщения ядер Бесселя–Макдональда. В отличие от классического случая в них допускаются нестепенные особенности ядер в окрестности начала координат. Их поведение на бесконечности связано лишь с условием интегрируемости, так что в рассмотрение включены и ядра с компактным носителем. В связи с этим порождённые ими пространства обобщённых потенциалов Бесселя относятся к так называемым пространствам обобщённой гладкости. Оценки свёрток, возникающих при описании пространства потенциалов исследованы О’Нейлом [1].

Общие критерии вложений обобщённых потенциалов Бесселя и Рисса в различные перестановочно инвариантные пространства исследовались в работах М. Л. Гольдмана [2]. Постановки задач об оптимальных вложениях пространств обобщённой гладкости и ряд важных результатов в этом направлении содержатся в работах Ю. В. Нетрусова [3, 4], М. Л. Гольдмана и др. [5, 6].

### 2. Вспомогательные определения. Потенциалы типа Бесселя и типа Рисса

Всюду в этой работе  $E = E(\mathbb{R}^n)$  есть перестановочно инвариантное пространство (кратко: ПИП),  $E' = E'(\mathbb{R}^n)$  — ассоциированное ПИП.

Вводим также пространства  $\tilde{E} = \tilde{E}(\mathbb{R}_+)$ ,  $\tilde{E}' = \tilde{E}'(\mathbb{R}_+)$  — их представления Люксембурга, т. е. такие ПИП, что

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}}, \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'},$$

где  $f^*$  — убывающая перестановка функции  $f$ , т. е. неотрицательная убывающая непрерывная справа функция на  $R_+ = (0, \infty)$ , которая равноизмерима с  $f$ .



Пространство потенциалов  $H_E^G \equiv H_E^G(\mathbb{R}^n)$ : определяем как множество свёрток ядер потенциалов с функциями из базового пространства

$$H_E^G \{(\mathbb{R}^n) = u = G * f : f \in E(\mathbb{R}^n)\},$$

где  $E$  — перестановочно-инвариантное пространство, а ядро  $G$  — специального вида,

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf \{\|f\|_E : f \in E(\mathbb{R}^n), G * f = u\},$$

(фактор-норма). Ядро представления  $G$  назовём допустимым, если

$$G \in L_1(\mathbb{R}^n) + E'(\mathbb{R}^n).$$

Здесь свёртка  $G * f$  определяется как интеграл

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} G(x-y)f(y) dy.$$

**Замечание 1.** В случае допустимых ядер мы можем для потенциалов  $u \in H_E^G$  определить убывающие перестановки  $u^*$ .

Пусть  $\delta$  — положительная измеримая функция (вес),  $\Delta(s) = \int_0^s \delta(t) dt$

$$f_\delta^{**}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \int_0^t f^*(\tau)\delta(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

В частности, когда  $\delta = 1$ ,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(\tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

**Определение 1.** Функция  $\Phi : (0, R) \rightarrow \mathbb{R}_+$  принадлежит классу  $\text{Im}_n(R)$ , если:

- 1)  $\Phi$  — убывающая и непрерывная на  $(0, R)$  функция;
- 2) существует постоянная  $c \in \mathbb{R}_+$  такая, что

$$r^{-n} \int_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1} d\rho \leq c\Phi(r), \quad r \in (0, R),$$

$$\varphi(\tau) = \Phi\left(\left(\frac{\tau}{V_n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \in \text{Im}_1(T), \quad f_\varphi(t; \tau) = \min\{\varphi(t), \varphi(\tau)\}.$$

**Определение 2.** Пусть  $\Phi \in \text{Im}_n(\infty)$ .

Считаем, что  $G \in S_R(\Phi)$ , если  $G(x) \cong \Phi(|x|)$ ,  $0 < \rho = |x| < R$ .

Считаем, что  $G \in S_R(\Phi; X)$ , где  $X(\mathbb{R}^n)$  ПИП, если при  $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ ,  $R \in \mathbb{R}_+$  справедливо представление

$$G(x) = G_R^0(x) + G_R^1(x),$$

где  $G_R^0(x) = G(x)\chi_{B_R}(x)$ ;  $G_R^1(x) = G(x)\chi_{B_R^c}(x)$ ,  $G_R^0(x) \cong \Phi(|x|)$ , при  $|x| < R$ ,  $G_R^1 \in X(\mathbb{R}^n)$ .

**Определение 3.** Пусть  $\Phi \in \text{Im}_n(\infty)$ ,  $f_\Phi(t; \cdot) \in E'(\mathbb{R}_+)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $G \in S_\infty(\Phi)$ . Тогда потенциалы  $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$  называются обобщёнными потенциалами Рисса.

**Определение 4.** Пусть  $\Phi \in \text{Im}_n(R)$ . Потенциалы  $u \in H_E^G(\mathbb{R}^n)$  называются обобщёнными потенциалами Бесселя, если

$$G \in S_R(\Phi; L_1 \cap E'), \quad \int_{\mathbb{R}^n} G dx \neq 0,$$

где  $R \in \mathbb{R}_+$ .

**Определение 5.** Пусть оператор  $\text{Re}_{\varphi, T} : \tilde{E}_0(0, T) \rightarrow \tilde{X}(0, T)$ ,  $T \in (0, \infty]$  определён по формуле:

$$\text{Re}_{\varphi, T}[g](t) = \int_0^T f_\varphi(t; \tau)g(\tau) d\tau, \quad g \in \tilde{E}_0(0, T).$$

**Определение 6.** Пространствами Лоренца  $\Lambda^q(u)$  и  $\Gamma^q(u)$ , где  $\delta$  и  $u > 0$  — измеримые функции, называются пространства измеримых функций с конечной нормой.

$$\|f\|_{\Lambda^q(u)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty f^{*q}(t)u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f^*(t)u(t)\}, & q = \infty; \end{cases}$$

$$\|f\|_{\Gamma_\delta^q(u)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty f_\delta^{**q}(t)u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f_\delta^{**}(t)u(t)\}, & q = \infty. \end{cases}$$

В частности когда  $\delta = 1$ ,

$$\|f\|_{\Gamma^q(u)} = \begin{cases} \left( \int_0^\infty f^{**q}(t)u(t) dt \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < \infty; \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f^{**}(t)u(t)\}, & q = \infty. \end{cases}$$

Ассоциированными к пространствам Лоренца являются пространства

$$\Lambda^q(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty \left( \frac{t}{U(t)} \right), & q = \infty; \\ \Gamma^{q'} \left( \frac{t^{q'} u(t)}{U^{q'}(t)} \right), & 1 < q < \infty; \\ \Lambda^1 \left( \frac{1}{\text{ess sup}_{0 < s < t} u(s)} \right), & q = 1. \end{cases}$$

### 3. Интегральные свойства потенциалов

Пусть  $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E} \rightarrow \tilde{X}} = \sup \left\{ \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\tilde{X}} : g \in \tilde{E}; \|g\|_{\tilde{E}} \leq 1 \right\}$ . Тогда

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\| \leq \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}\|_{\tilde{E} \rightarrow \tilde{X}} \|g\|_{\tilde{E}}; \quad \forall g \in \tilde{E}(\mathbb{R}_+).$$

Задача — описать оптимальное ПИП  $X_0(\mathbb{R}^n)$  для вложения  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ , т. е. такое ПИП  $X_0(\mathbb{R}^n)$ , что

- 1)  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X_0(\mathbb{R}^n)$ ;
- 2) если ПИП  $X(\mathbb{R}^n)$  такое, что есть вложение  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ , то  $X_0(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 1 (см. [6]).** Для потенциалов типа Рисса вложение  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$  эквивалентно ограниченности оператора  $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \rightarrow \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ .

**Теорема 2 (см. [6]).** В случае обобщённых потенциалов Бесселя вложение  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$  справедливо тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

- 1) оператор  $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty} : \Lambda^q(u)(\mathbb{R}_+) \rightarrow \tilde{X}(\mathbb{R}_+)$  ограничен;
- 2) справедливо вложение  $\Lambda^q(u)(\mathbb{R}^n) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 3 (см. [6]).** При  $T = \infty$  для потенциалов типа Рисса,  $T = V_n(R/2)^n \in \mathbb{R}_+$  для потенциалов типа Бесселя имеет место эквивалентность

$$H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset L_\infty(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \varphi \in [\Lambda^q(u)]'(0, T).$$

### 4. Основная часть

**Замечание 2.** Мы будем использовать результат из работы [7]. Именно, при  $1 < p \leq q < \infty$

$$\|f\|_{\Gamma^q(\omega)} \leq c \|f\|_{\Lambda^p(\nu)} \Leftrightarrow$$

$$A = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{x+t} \right)^q \omega(t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left( \int_0^\infty \left( \frac{t}{t+x} \right)^{p'} \cdot \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \right\} < \infty.$$

**Лемма 1.**  $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \Leftrightarrow$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{x+t} \right)^{p'} \cdot \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left( \int_0^\infty \left( \frac{t}{t+x} \right)^p \cdot \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

**Доказательство.** Из замечания 2 получим  $q \rightarrow p'$ ,  $p \rightarrow p'$ ,  $\omega = \nu$   
 $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \leq c \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)} \Leftrightarrow$

$$\tilde{A} = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{x+t} \right)^{p'} \cdot \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left( \int_0^\infty \left( \frac{t}{t+x} \right)^p \cdot \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

Всегда  $\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \geq \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)}$  ( $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*] \geq \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^*[g^*]$ )  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)}$ .

При этом:

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} = \left( \int_0^\infty (\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*])^{p'} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)},$$

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)} &= \left( \int_0^\infty (\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^*[g^*])^{p'} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= (0 < \operatorname{Re}_{\varphi,\infty} \downarrow, \Rightarrow \operatorname{Re}_{\varphi,\infty} = \operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^*) = \left( \int_0^\infty (\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*])^{p'} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)}, \end{aligned}$$

$$\|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \cong \|\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} \Leftrightarrow \tilde{A} < \infty.$$

**Теорема 4.** Пусть  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , а функции  $u, v, \omega, V$  и  $U$  определены следующим образом

$$\begin{aligned} U(s) &= \int_0^s u(t) dt, \quad v(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)}, \quad V(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau, \\ \omega(t) &= \frac{t^{p+p'-1} V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau) d\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau) d\tau}. \end{aligned}$$

Кроме того, пусть

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{x+t} \right)^{p'} \cdot \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{t}{t+x} \right)^p \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty. \\ C &= \sup_{r>0} \left( \int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p'} u^{\frac{p}{p'}}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \end{aligned}$$

Тогда оптимальное ПИП для вложения  $H_{\Lambda^q(u)}^G(\mathbb{R}^n) \subset X(\mathbb{R}^n)$  имеет эквивалентную норму  $\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(\omega)}$ .

**Доказательство.** Учитывая определение ассоциированных пространств для пространств Лоренца, мы можем представить норму оператора  $\operatorname{Re}_{\varphi,\infty}$ :

$$\| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Lambda^{p'}(u)'} \cong \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} = \left( \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}_{\varphi, \infty}^{**} [g^*])^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Применяя результат леммы 1, получим

$$\begin{aligned} \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} &= \left( \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}_{\varphi, \infty}^{**} [g^*])^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty}^{**} [g^*] \|_{L^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} \cong \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{L^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} = \\ &= \left( \int_0^{\infty} (\operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*])^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left( \int_0^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} f_{\varphi}(t, \tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Из определения функции  $f_{\varphi}$  мы можем представить норму оператора  $\operatorname{Re}_{\varphi, \infty}$  в пространстве  $\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)$  в виде суммы:

$$\begin{aligned} \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} &= \left( \int_0^{\infty} \left[ \varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau + \int_t^{\infty} \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cong \\ &\cong \left( \int_0^{\infty} \left[ \varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \left( \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Но у нас  $\| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Lambda^{p'}(u)'} \cong \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)}$ .

Итак,  $\| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Lambda^{p'}(u)'} \cong J_1 + J_2$ , где

$$J_1 = \left( \int_0^{\infty} \left[ \varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad J_2 = \left( \int_0^{\infty} \left[ \int_t^{\infty} \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Мы хотим оценить слагаемое  $J_2$  слагаемым  $J_1$ . Из убывания функции  $g^*$  получим для  $J_1$ :

$$J_1 \geq \left( \int_0^{\infty} \left[ \varphi(t) g^*(t) \int_0^t d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left( \int_0^{\infty} [\varphi(t) g^*(t)]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} := S,$$

$$J_2 < \alpha S,$$

где  $\alpha$  — постоянная, не зависящая от функций  $\varphi$  и  $g^*$ , такая, что  $J_2 \leq \alpha S$ . Достаточно, чтобы определённая следующим образом постоянная  $C$  была конечна:

$$C = \sup_{r>0} \left( \int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_r^\infty \frac{U^p(t)}{t^{2p'} u^{\frac{p}{p'}}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Эта постоянная и есть константа  $C$  из условия теоремы.

Здесь мы применили обобщённое неравенство Харди для функции одной переменной, приведённое в книге В. Г. Мазыи [8, Глава 1].

Итак, мы получили, что  $J_1 \geq S$  и  $J_2 \leq \alpha S$ , поэтому можно писать  $J_2 \leq C J_1$ .

Эти оценки дают, что

$$\| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} \cong J_1 + J_2 \cong J_1,$$

$$\begin{aligned} \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} \right)} &\cong \left( \int_0^\infty \left[ \varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \left( \int_0^\infty \left[ \varphi(t) \frac{1}{t} \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left( \int_0^\infty [\varphi(t) g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \left( \int_0^\infty [g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'} \left( \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{U^{p'}(t)} \right)}. \quad (1) \end{aligned}$$

Формула

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} = \sup \left\{ \int_0^\infty f^* g^* dt; g \in L_0(\mathbb{R}_+); \| \operatorname{Re}_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\tilde{E}'(\mathbb{R}_+)} \leq 1 \right\}$$

даёт, что норма в оптимальном ПИП  $\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)$  является ассоциированной к норме (1), т. е.  $\|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'}$ , где  $v(t) = t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t) / U^{p'}(t)$ .

Осталось заметить, что можно описать эквивалентную норму ассоциированного пространства в следующем виде (см. [7]):

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'} = \left( \int_0^\infty \frac{t^{p+p'-1} f^{**}(t) V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau) d\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'} v(\tau) d\tau} dt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где

$$V(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\tau^{2p'} u(\tau) \varphi^{p'}(\tau)}{U^{p'}(\tau)} d\tau.$$

Учтём теперь обозначение

$$\omega(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau) d\tau}{V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau) d\tau}.$$

Отсюда следует, что  $\|f\|_{\Gamma^p(\omega)} \cong \|f\|_{\tilde{X}_0(\mathbb{R}_+)}$ .

Итак, теорема доказана.  $\square$

**Замечание 3.** Условие  $\int_0^r \varphi(\rho) d\rho \leq c\varphi(r)r$ , приведённое в работе [9], гарантирует эквивалентность  $\text{Re}_{\varphi,\infty}^{**}[g^*] \cong \text{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]$ .

Мы не накладываем это требование, заменив его условием на весовые функции:

$$\tilde{A} = \sup_{x>0} \left\{ \left( \int_0^\infty \left( \frac{x}{x+t} \right)^{p'} \nu(t) dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_0^\infty \left( \frac{t}{t+x} \right)^p \frac{\nu(t)}{V(t)^{p'}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \right\} < \infty.$$

При его выполнении получаем эквивалентность норм

$$\|\text{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}(\nu)} \cong \|\text{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{\Lambda^{p'}(\nu)} = \|\text{Re}_{\varphi,\infty}^*[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)} = \|\text{Re}_{\varphi,\infty}[g^*]\|_{L^{p'}(\nu)}.$$

Последнее равенство опирается на соотношение  $\text{Re}_{\varphi,\infty}^*[g^*](t) = \text{Re}_{\varphi,\infty}[g^*](t)$ .

Формула в правой части неотрицательна, убывающая и непрерывная, т. е. она совпадает со своей убывающей перестановкой.

## 5. Заключение

В работе получены следующие основные результаты.

1. Рассмотрены общие свойства потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
2. Установлены эквивалентные описания конусов убывающих перестановок для потенциалов, построенных на базе весовых пространств Лоренца с общими весами.
3. Получены критерии вложений пространства потенциалов в перестановочно инвариантные пространства и даны описания оптимальных перестановочно инвариантных пространств для таких вложений. Приведена конкретизация этих вложений в случае базовых весовых пространств Лоренца.

## Литература

1. *O'Neil R.* Convolution Operators and  $L(p, q)$  Spaces // Duke Mathematical Journal. — 1963. — Vol. 30. — Pp. 129–142.
2. *Goldman M. L.* On the Cones of Rearrangements for Generalized Bessel and Riesz Potentials // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2010.
3. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Лизоркина–Трибеля // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 103–112.
4. *Нетрусов Ю. В.* Теоремы вложения пространств Бесова в идеальные пространства // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1987. — Т. 159. — С. 69–82.

5. Гольдман М. Л., Энрикес Ф. Описание перестановочно инвариантной оболочки анизотропного пространства Кальдерона // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2005. — Т. 248. — С. 94–105.
6. Гольдман М. Л. Об оптимальных вложениях обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса // Труды Математического института им. В. А. Стеклова. — 2010. — Т. 269. — С. 91–111.
7. Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization / A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson // Bulletin of the Australian Mathematical Society. — 2007. — Vol. 76. — Pp. 69–92.
8. Мазья В. Г. Пространства Соболева. — Ленинград: Издательство ЛГУ, 1985.
9. Мальмшева А. В. Оптимальные вложения обобщенных потенциалов Рисса // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2013. — № 2. — С. 28–37.

UDC 517.951

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349

## Integral Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type

Kh. Almohammad, N. Alkhalil

*Department of Nonlinear Analysis and Optimization  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN university)  
6, Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

In the paper we study integral properties of convolutions of functions with kernels generalizing the classical Bessel–Macdonald kernels  $G_\alpha(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < n$ . The local behavior of Bessel–Macdonald kernels in the neighborhood of the origin are characterized by the singularity of power type  $|x|^{\alpha-n}$ . The kernels of generalized Bessel–Riesz potentials may have non-power singularities in the neighborhood of the origin. Their behavior at the infinity is restricted only by the integrability condition, so that the kernels with compact support are included too. In the paper the general criteria for the embedding of potentials into rearrangement invariant spaces are concretized in the case when the basic space coincides with the weighted Lorentz space. We obtain the explicit descriptions for the optimal rearrangement invariant space for such an embedding.

**Key words and phrases:** Riesz potentials, Lorentz spaces, decreasing rearrangement, rearrangement-invariant spaces, optimal embedding

## References

1. R. O’Neil, Convolution Operators and  $L(p, q)$  Spaces, Duke Mathematical Journal 30 (1963) 129–142.
2. M. L. Goldman, On the Cones of Rearrangements for Generalized Bessel and Riesz Potentials, Complex Variables and Elliptic Equations.
3. Yu. V. Netrusov, Embedding Theorems of Lizorkin–Triebel Spaces, Notes of scientific seminars LOMI 159 (1987) 103–112, in Russian.
4. Yu. V. Netrusov, Embedding Theorems of Besov Spaces into Ideal Spaces, Notes of scientific seminars LOMI 159 (1987) 69–82, in Russian.
5. M. L. Goldman, F. Henriques, Description of Rearrangement Invariant Shell of an Anisotropic Calderon Space, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 248 (2005) 94–105, in Russian.
6. M. L. Goldman, On Optimal Investment Potentials of the Generalized Bessel and Riesz, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 269 (2010) 91–111, in Russian.



7. A. Gogatishvili, M. Johansson, C. A. Okpoti, L. E. Persson, Characterization of Embeddings in Lorentz Spaces Using a Method of Discretization and Anti-Discretization, *Bulletin of the Australian Mathematical Society* 76 (2007) 69–92.
8. V. G. Mazya, *Sobolev Spaces*, Publishing house Leningrad state University, Leningrad, 1985, in Russian.
9. A. V. Malysheva, Optimal Embedding of the Generalized Riesz Potentials, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (2) (2013) 28–37, in Russian.

© Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х., 2017

**Для цитирования:**

*Алмохаммад Х., Альхалиль Н. Х. Интегральные свойства обобщённых потенциалов типа Бесселя и типа Рисса // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 340–349. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349.*

**For citation:**

Almohammad Kh., Alkhalil N. Integral Properties of Generalized Potentials of the Type Bessel and Riesz Type, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (4) (2017) 340–349. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-340-349. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Алмохаммад Халиль** — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, тел.: +7 (968) 0806641)

**Альхалиль Нисрин Хамадех** — студент кафедры нелинейного анализа и оптимизации РУДН (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, тел.: +7 (968) 0806641)

**Information about the authors:**

**Almohammad Kh.** — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, phone: +7 (968) 0806641)

**Alkhalil N.** — student of Nonlinear Analysis and Optimization Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: khaleel.almahamad1985@gmail.com, phone: +7 (968) 0806641)

---

УДК 519.21  
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362

## Обзор систем параллельной обработки заявок

А. В. Горбунова\*, И. С. Зарядов\*<sup>†</sup>, К. Е. Самуйлов\*, Э. С. Сопин\*<sup>†</sup>

\* *Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

<sup>†</sup> *Институт проблем информатики  
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН  
ул. Вавилова, д. 44, кор. 2, Москва, Россия, 119333*

Данная работа является первой в серии из двух статей, посвящённых обзору систем массового обслуживания вида «fork-join» (в западной классификации) или системам с расщеплением запросов. Указанная система является естественной моделью для многих других реальных систем. В статье описаны особенности построения этой модели и родственных ей систем, основные их характеристики. Отдельное внимание уделяется методам анализа времени отклика системы. Поскольку точное выражение для среднего времени отклика известно только для случая двух приборов, в статье приведено подробное описание подхода к получению точного выражения этой характеристики. Для случая, когда число приборов больше двух, различными методами получены аппроксимации среднего времени отклика, что объясняется сложностью исследований из-за существующей зависимости между очередями подзапросов в силу общих моментов поступления. В работе представлено несколько методов приближенного анализа: различные варианты эмпирической аппроксимации, т.е. методы, уточняющие полученные характеристики благодаря использованию результатов имитационного моделирования; интерполяция с помощью предельных значений загрузки системы в случаях с отличными от экспоненциальными распределениями для входящего потока и времени обслуживания.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, расщепление заявок, параллельное обслуживание заявок, параллельная обработка, время отклика

## 1. Введение

Название исследуемой системы с параллельной обработкой запросов или с расщеплением запросов не имеет утвердившегося в русском языке терминологического аналога, в англоязычной же литературе используется термин «fork-join queueing system» [1–3]. Интерес к указанной системе объясняется тем, что она является естественной моделью для многих других реальных систем. В качестве примеров можно привести сферу обслуживания, медицинские приложения, производственные системы, системы облачных вычислений и др. [4]. Если же говорить об информационных технологиях, то прежде всего стоит упомянуть распределённые вычисления, технология которых оказала значительное влияние и на концепцию облачных вычислений, а также параллельные вычисления, например обработку пакетов данных, телефонных вызовов и др. Однако, несмотря на широкий спектр задач, которые решаются с помощью систем массового обслуживания с параллельной обработкой запросов, и их популярность среди зарубежных авторов, в нашей стране данная система исследовалась значительно меньше [4–9]. Статья организована следующим образом: в разделе 2 описываются особенности построения системы с расщеплением запросов и родственных ей систем, в разделе 3 подробно описан метод точного анализа среднего времени отклика для случая расщепления на два подзапроса, в разделе 4 представлены два метода аппроксимации среднего времени отклика, в

---

Статья поступила в редакцию 22 июня 2017 г.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (соглашение № 02.А03.21.0008) и при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 15-07-03051, 15-07-03608.

заключении кратко подведены итоги и анонсировано содержание второй части работы.

## 2. Системы параллельного обслуживания заявок

Общая идея функционирования системы fork-join (рис. 1) заключается в следующем: на вход поступает поток заявок (запросов)  $T_1, T_2, \dots$ , в момент поступления в точке «расщепления» (англ. fork point) заявка  $T_i, i = \overline{1, \infty}$  разделяется на  $K$  родственных заявок (подзапросов):  $ST_1^i \stackrel{\text{def}}{=} ST_1, ST_2^i \stackrel{\text{def}}{=} ST_2, \dots, ST_K^i \stackrel{\text{def}}{=} ST_K$ , каждая из которых отправляется в очередь на обслуживание к приборам или серверам с номерами  $1, 2, \dots, K$  соответственно. Предполагается, что запросы имеют одну и ту же структуру и каждый сервер предназначен для выполнения конкретных задач: подзапрос  $ST_k$  может обслуживаться только на  $k$ -м сервере,  $k = \overline{1, K}$ . Обработанные подзапросы попадают в буфер синхронизации, где дождаются родственными им подзапросов. В момент поступления последнего родственного подзапроса одного из запросов происходит их синхронизация, т.е. объединение, после чего обработанный запрос покидает систему. Здесь и далее будем считать, что синхронизация происходит мгновенно.

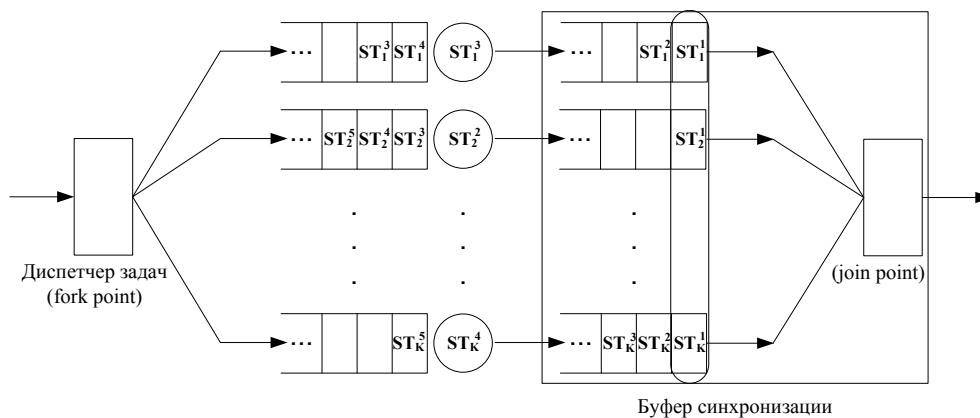


Рис. 1. Система массового обслуживания типа fork-join

Стоит отметить, что описанную модель рассматривают и как сеть массового обслуживания (СМО): после расщепления подзапросы одновременно поступают на вход ветвей, которые представляют собой одноканальные системы массового обслуживания (СМО) с очередями. Однако данный подход предполагает дальнейший переход к рассмотрению независимых СМО, что является упрощающим допущением в силу существующей зависимости между очередями подзапросов вследствие общих моментов поступления. Тем не менее таких сложностей не возникает для случая, когда каждая подсистема состоит из бесконечного числа приборов [6, 7].

Анализ *SPM (splitting and matching queueing system) системы массового обслуживания* в [10] является одной из самых ранних работ на эту тему. В ней рассматриваются авиапассажиры и их багаж, которые прибывают вместе на самолёте в аэропорт, но разделены до тех пор, пока пассажиры не получат свои вещи в зоне выдачи багажа. В этой статье анализируется система с двумя ветвями  $D|M|1$ , т.е. с детерминированным входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания на каждом из серверов.

*SM (split-merge queueing system) система* является одним из вариантов fork-join системы массового обслуживания (рис. 2). Её отличие заключается в том, что на

свободные серверы не поступит ни один подзапрос следующего запроса до того момента, пока не обслужатся все подзапросы текущего запроса [11], т.е. происходит блокировка каждого освободившегося сервера до окончания обработки всех задач запроса.

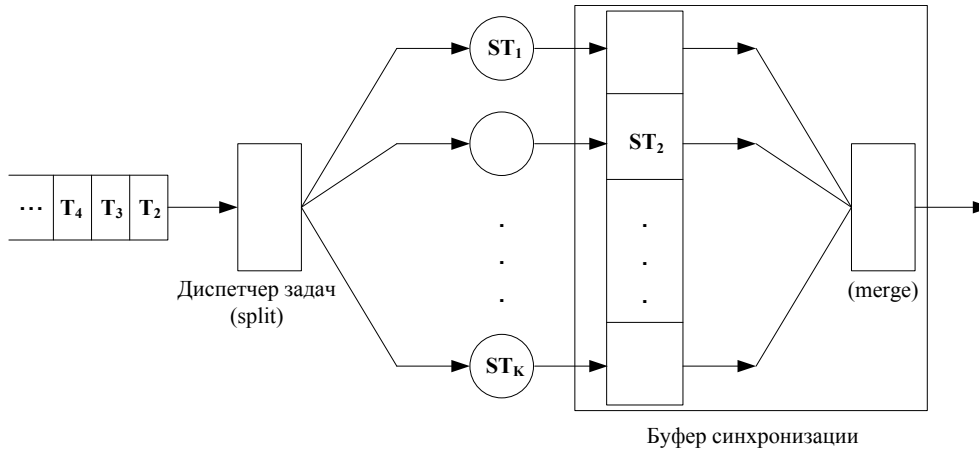


Рис. 2. Система массового обслуживания типа split-merge

*FF (fission-fusion queueing system) система* — это ещё одна разновидность fork-join системы (рис. 3). Если допустить, что все подзапросы  $ST_1, ST_2, \dots, ST_K$  являются идентичными и неразличимыми:  $ST_k = ST, k = \overline{1, K}$ , то запрос может покинуть систему после обработки любых  $K$  подзапросов, иначе говоря, подзапросы могут принадлежать разным запросам [11].

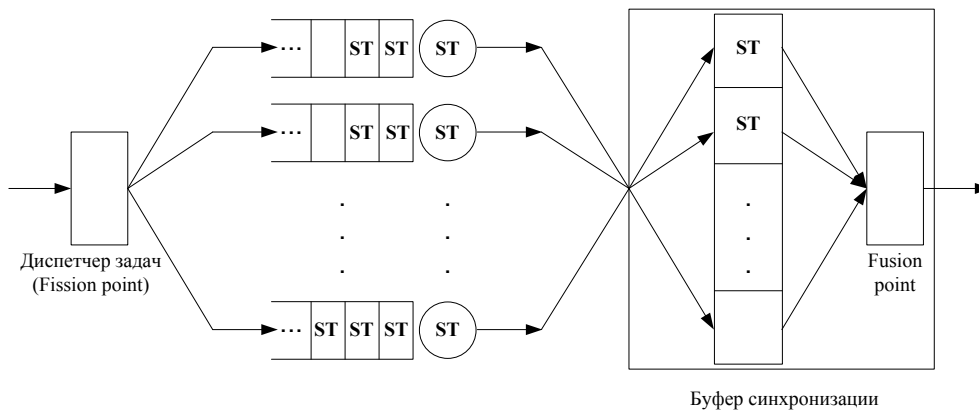


Рис. 3. Система массового обслуживания типа fission-fusion

*Модель независимых серверов (independent server model, ISM)* представляет собой многоканальную систему массового обслуживания. Для обслуживания поступившего запроса требуется случайное число серверов, не превышающее их общее количество, причём обслуживание очередного запроса не может начаться до тех пор, пока число свободных серверов не станет по крайней мере равно числу серверов, требуемых для обслуживания. В частности, в работе [12] рассматриваемая система состоит из однородных серверов, времена обслуживания являются независимыми и имеют экспоненциальное распределение. Входящий поток является пуассоновским,

а число серверов, требуемых для обработки запроса, определяется некоторой вероятностью. Запросы обслуживаются в порядке поступления (First Come First Served, FCFS) и могут покинуть систему только после освобождения всех затребованных серверов. Поскольку времена обслуживания на отдельных серверах являются независимыми, то сервер, закончивший обслуживание запроса, становится доступным для других задач. Таким образом, время обслуживания запроса является максимумом случайного числа экспоненциально распределённых случайных величин. Для модели были получены такие характеристики, как распределение времени обслуживания, распределение числа занятых серверов, а также достаточные условия для существования стационарного распределения.

В случае *модели группового обслуживания (team service model, TSM)*, так же как и в случае ISM системы, для обработки задач требуется наличие нескольких свободных серверов одновременно, но при этом серверы начинают обслуживание этих задач и освобождаются одновременно [13, 14].

Также существует такой вариант fork-join системы, когда поступающие на вход в систему несколько потоков запросов делятся на подзапросы и отправляются на обслуживание на серверы в соответствии с заданной матрицей вероятностей, т.е. запросы поступают как  $K$  независимых потоков, затем делятся на части, которые распределяются по серверам в соответствии с некоторой стратегией (политикой), которая и определяется матрицей [15, 16].

Первые результаты исследования fork-join системы массового обслуживания были получены для случая расщепления заявки на два подзапроса  $ST_1, ST_2$  с пуассоновским входящим потоком и экспоненциальным временем обслуживания на обоих серверах [17]. Однако несмотря на марковость предположений анализ fork-join систем массового обслуживания даже для случая  $K = 2$  затруднителен по следующим причинам: процесс поступления подзапросов на серверы коррелируют; модель описывается двумерной цепью Маркова с бесконечным числом состояний для каждой размерности.

В силу указанных выше факторов точного решения для распределения числа подзапросов  $ST_k, k = \overline{1, K}$  в fork-join системе не было найдено. Но при этом для случая пуассоновского входящего потока и экспоненциальных времён обслуживания можно получить явные выражения для маргинальных вероятностей [4].

Приближенное же решение для распределения числа подзапросов в случае очередей неограниченных размеров может быть получено для достаточно большой ёмкости накопителя — такой, что вероятность потери запросов в связи с этой большой ёмкостью будет пренебрежимо мала, и в данном случае будут применимы итерационные численные методы решения систем линейных уравнений большой размерности [18].

Большинство авторов в своих работах исследуют один из основных показателей качества функционирования подобных систем массового обслуживания — время отклика  $W_{K, \max} = \max(\xi_1, \dots, \xi_K)$ , где  $\xi_k$  — случайная величина времени пребывания подзапроса  $ST_k$  в системе до его попадания в буфер синхронизации,  $k = \overline{1, K}$ . Стоит сразу отметить, что точное выражение для среднего времени отклика было получено только для fork-join системы с двумя ветвями  $M|M|1$  ( $K = 2$ ) в [1] с помощью результатов работы [17]. Для случая  $K > 2$  с помощью различных методов были получены аппроксимации среднего времени отклика.

### 3. Анализ системы с двумя ветвями $M|M|1$

Модель цепи Маркова с непрерывным временем для fork-join системы с двумя ветвями  $M|M|1$  и накопителем неограниченной ёмкости рассматривается в [17]. Этот анализ был расширен для ветвей  $M|G|2$  в [19]. Для изучения стационарного и нестационарного режимов основной краевой задачи (дифференциальное уравнение

вместе с набором дополнительных ограничений) в работе [19] использовались методы исследования функций комплексной переменной, представленные, например, в [20]. В ходе последующего обсуждения более подробно остановимся на анализе статьи [17], поскольку она ведёт к точному решению задачи для fork-join системы с двумя ветвями  $M|M|1$ .

Итак, рассмотрим fork-join систему, попадая в которую запрос расщепляется на  $K = 2$  подзапроса, входящий поток является пуассоновским с интенсивностью  $\lambda = 1$ , а интенсивности обслуживания на двух серверах удовлетворяют условию:  $1 < \mu_1 \leq \mu_2$ , гарантируя, что со временем система не переполнится, т.е. число подзапросов не устремится к бесконечности. Поведение системы описывается непрерывным марковским процессом  $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), t \geq 0\}$ , где  $x_k(t)$  — число подзапросов  $k$ -го типа, соответственно  $k = 1, 2$ . Указанные состояния интерпретируются следующим образом: если  $X(t) = \{(i, j), i, j \geq 0\}$  в некоторый момент времени  $t$ , то в системе находится  $i$  заявок 1-го типа, т.е.  $ST_1$ , и  $j$  заявок 2-го типа, т.е.  $ST_2$ , а  $p_{i,j}$  — стационарная вероятность указанного состояния. Далее записывается система уравнений равновесия в терминах двойной производящей функции  $P(z, w) = \sum_i \sum_j p_{i,j} z^i w^j$  [17, 21, 22]:

$$Q(z, w)P(z, w) = N(z, w), \quad |z|, |w| \leq 1,$$

где

$$Q(z, w) = 1 + \mu_1 \mu_2 z w - \mu_1 w - \mu_2 z - z^2 w^2,$$

$$N(z, w) = \mu_2 z (w - 1) P(z, 0) + \mu_1 w (z - 1) P(0, w).$$

Анализ производящей функции позволяет получить выражения для  $P(z, 0)$  и  $P(0, w)$ , которые для симметричного случая  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  равны между собой:

$$P(z, 0) = P(0, z) = \frac{(\mu - 1)^{3/2}}{\mu(\mu - z)^{1/2}}. \quad (1)$$

Также с помощью преобразований производящей функции в граничных точках:  $P(z, 0)$  и  $P(0, w)$ , в [17] были получены асимптотические выражения для стационарных вероятностей состояний  $p_{i,0}$  и  $p_{0,j}$  при  $i \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty$  соответственно. Это ещё раз свидетельствует о том, что данная задача требует более совершенных математических методов решения.

Используя результаты анализа в [17], среднее время отклика для fork-join системы с двумя симметричными ветвями выводится в Приложении В в [1]. Интенсивность пуассоновского входящего потока имеет значение  $\lambda$ , интенсивности обслуживания на двух серверах равны  $\mu$ , т.е.  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , причём  $\lambda < \mu$ , так, что нагрузка на каждый из серверов  $\rho = \lambda/\mu$  меньше единицы:

$$E[W_{2,\max}] = \left[ H_2 - \frac{\rho}{8} \right] E[W_{1,\max}] = \frac{12 - \rho}{8} E[W_{1,\max}],$$

где  $H_2 = 1, 5$ ,  $E[W_{1,\max}] = (\mu - \lambda)^{-1}$  — среднее время отклика для СМО  $M|M|1$  [22–24].

Вывод  $E[W_{2,\max}]$  основан на наблюдении, что эта величина есть сумма времени пребывания в системе  $M|M|1$ , т.е.  $W_{1,\max}$ , и времени, проведённого подзапросом в системе после обслуживания на сервере в ожидании второго, и до ухода из неё (время синхронизации)  $S$ :  $E[W_{2,\max}] = E[W_{1,\max}] + E[S]$ .

Согласно формуле Литтла,  $N = 2\lambda E[S]$ , где  $N$  — это среднее число подзапросов, которые обслужились на приборе и ждут свою пару [22–24]. Через  $q_k$  обозначим

вероятность того, что число подзапросов во второй очереди превышает число подзапросов в первой очереди на  $k$ . Благодаря симметрии  $q_k = q_{-k}$ ,  $k \geq 1$  и, таким образом,  $N = 2 \sum_{k=1}^{\infty} kq_k$ , следовательно  $E[S] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} kq_k$ .

Из уравнений, представленных в [1], можно получить:

$$q_k = \sum_{i=k}^{\infty} p_{i,0}. \quad (2)$$

Тогда  $q_k = q_{k+1} + p_{k,0}$ , где  $p_{k,0}$  — это вероятность того, что в первой очереди находится  $k$  подзапросов, а во второй — ноль. Далее с учётом формулы (1) можем записать:

$$P(z, 0) = P(0, z) \stackrel{\text{def}}{=} P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_{i,0} z^i = \frac{(1-\rho)^{3/2}}{(1-\rho z)^{1/2}}. \quad (3)$$

Затем подставляем в формулу для времени синхронизации выражение для  $q_k$  из (2) и меняем порядок суммирования:

$$E[S] = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{i=k}^{\infty} p_{i,0} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} p_{i,0} \sum_{k=1}^i k = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(i+1)i}{2} p_{i,0}. \quad (4)$$

Потом вычисляем значения первой и второй производной при  $z = 1$  от выражения для производящей функции  $P(z, 0)$ , полученном в (3) и от выражения, которое записывается исходя из определения этой функции:

$$\left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1} = \frac{1}{2}\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i p_{i,0}, \quad \left. \frac{d^2 P(z)}{dz^2} \right|_{z=1} = \frac{3\rho^2}{4(1-\rho)}\rho = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_{i,0} - \sum_{i=1}^{\infty} i p_{i,0}.$$

Теперь можем подставить полученные формулы в (4):

$$E[S] = \frac{1}{2\lambda} \left( \sum_{i=1}^{\infty} i^2 p_{i,0} + \sum_{i=1}^{\infty} i p_{i,0} \right) = \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{\rho^2 + 2\rho}{4(1-\rho)} + \frac{\rho}{2} \right) = \frac{\rho(4-\rho)}{8\lambda(1-\rho)}, \quad (5)$$

следовательно, среднее время отклика определяется следующим выражением:

$$E[W_{2,\max}] = E[W_{1,\max}] + E[S] = \frac{12-\rho}{8} \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{12-\rho}{8} E[W_{1,\max}].$$

## 4. Аппроксимация времени отклика

### 4.1. Эмпирическая формула аппроксимации

Один из способов аппроксимации времени отклика для fork-join системы с  $K$  ветвями  $M|M|1$  и одинаковыми интенсивностями обслуживания на серверах был предложен в [1]. Идея предложенного метода аппроксимации появилась из наблюдения за поведением времени отклика при проведении численных экспериментов.

Верхнюю границу для среднего времени отклика можно получить, сделав допущение о независимости случайных величин времён пребывания подзапросов в системе, или, что тоже самое, рассмотреть СеМО, состоящую из  $K$  независимых параллельно функционирующих систем  $M|M|1$ . Данное предположение подтверждается приведённым в [1] доказательством того факта, что случайные величины времён

пребывания подзапросов в системе являются положительно ассоциированными. По определению [25] две случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  являются положительно ассоциированными, если  $E[f(\xi)g(\eta)] \geq E[f(\xi)]E[g(\eta)]$ , т.е. ковариация любых пар неубывающих функций  $f$  и  $g$  является неотрицательной, а одно из свойств положительно ассоциированных случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_K$  заключается в том, что [25]

$$P\left(\max_{1 \leq i \leq K} \xi_i > x\right) \leq 1 - \prod_{i=1}^K P(\xi_i < x).$$

Нижняя граница для среднего времени отклика получается, если «пренебречь» очередями (т.е. для значений  $\rho$  близких к нулю): в этом случае время отклика будет являться максимумом  $K$  независимых одинаково распределённых случайных величин (н.о.р.с.в.) со средним  $1/\mu$ .

Таким образом, имеем:

$$H_K(1/\mu) \leq E[W_{K,\max}] \leq H_K E[W],$$

где  $H_K = \sum_{i=1}^K 1/i$  — это частичная сумма гармонического ряда. Верхняя и нижняя границы растут с одной и той же скоростью  $H_K$ , иными словами, для больших значений  $K$  границы имеют порядок  $O(\ln K)$ . Поэтому, зная значение  $E[W_{2,\max}]$ , можем записать:  $E[W_{K,\max}] \approx S_K(\rho)E[W_{2,\max}]$ , где  $S_K(\rho)$  — это коэффициент масштабирования, растущий со скоростью  $O(\ln K)$ . Следовательно, аппроксимация времени отклика может быть представлена в следующем виде:  $S_K = \alpha(\rho) + \beta(\rho)H_K$ . Поскольку по определению  $S_2(\rho) = 1$ , то, подставив это значение в предыдущее выражение, получим, что  $\beta(\rho) = (1 - \alpha(\rho))/H_2$ , таким образом,

$$S_K(\rho) = \alpha(\rho) + \frac{1 - \alpha(\rho)}{H_2} H_K, \quad K \geq 2.$$

Посредством имитационного моделирования в [1] определяется значение  $\alpha(\rho) \approx 4\rho/11$ . Окончательно имеем

$$E[W_{K,\max}] \approx \left[ \frac{H_K}{H_2} + \frac{4}{11} \left(1 - \frac{H_K}{H_2}\right) \rho \right] \frac{12 - \rho}{8} \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad K \leq 2. \quad (6)$$

Полученное приближение, исходя из численного анализа, проведённого авторами, имеет погрешность аппроксимации, не превышающую 5% для значений  $2 \leq K \leq 32$ .

В статье [26] исследуется аналогичная fork-join система с  $K$  ветвями  $M|M|1$ . Полученная аппроксимация является средним арифметическим верхней и нижней оценок. В качестве верхней оценки используется видоизменённое выражение для верхней оценки из вышеупомянутой работы [1]. Нижняя оценка получается при анализе эквивалентной величины времени отклика, но для системы с непараллельной организацией очереди [27]. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \left( H_K + \rho \sum_{k=1}^K \frac{1}{k(k-\rho)} \right) &\leq E[W_{K,\max}] \leq \frac{H_K}{\mu} \left( 1 + \frac{\rho}{1-\rho} \right) = \\ &= \frac{1}{\mu} \left( H_K + \rho \sum_{k=1}^K \frac{1}{k(1-\rho)} \right). \end{aligned}$$



Далее вычисляется среднее арифметическое полученных оценок, в результате чего имеем:

$$E[W_{K,\max}] \approx \frac{1}{\mu} \left[ H_K + \frac{\rho}{2(1-\rho)} \left( \sum_{k=1}^K \frac{1}{k-\rho} + (1-2\rho) \sum_{k=1}^K \frac{1}{k(k-\rho)} \right) \right]. \quad (7)$$

#### 4.2. Интерполяция с помощью предельных значений загрузки системы

В [28] предложен другой метод аппроксимации времени отклика — комбинация методов интерполяции высокой и слабой входных нагрузок (heavy and light traffic interpolation approximations). Указанные техники в отличие от описанного выше метода не используют результаты имитационного моделирования, однако их применение может быть расширено и до анализа fork-join систем не только с экспоненциальным временем обслуживания или с пуассоновским входящим потоком.

Для рассматриваемой задачи найти решение в аналитическом виде очень затруднительно, однако возможно получить асимптотические формулы для искомых характеристик. Интерполяция слабой загрузкой системы является результатом её работы в режиме слабой нагрузки, т.е. когда интенсивность входящего потока  $\lambda$  очень мала. В этом случае целесообразно обратиться к разложению в ряд Тэйлора характеристик производительности системы (в частности, функции распределения времени отклика — как функции от  $\lambda$  — в окрестности нуля), с помощью которого можно определить неизвестные величины в представлении исследуемой функции в виде полинома от  $\lambda$  порядка  $n$ . Рассматриваются только полиномы нулевой и первой степени. Если же говорить об интерполяции с помощью высокой загрузки, то для fork-join системы речь идёт об анализе такого режима, в котором значение  $\lambda$  очень близко к значению  $\mu$ . Ключевым параметром при интерполяции с помощью метода высокой нагрузки является параметр  $\beta$ , два крайних значения которого интерпретируются как два предельных случая: если  $\beta = 0$ , то это означает, что входящий поток является детерминированным, если  $\beta = 1$ , то время обслуживания — детерминированное, а ветви fork-join системы являются  $K$  независимыми  $D|GI|1$  и  $GI|D|1$  СМО, соответственно.

Таким образом, благодаря исследованию поведения функции времени отклика в граничных значениях загрузки системы удаётся, в отличие от метода, описанного в [1], не прибегая к численным экспериментам для определения констант в интерполяционной формуле, определить их точные выражения в замкнутой форме.

Для случая fork-join системы с  $K$  ветвями  $M|M|1$  аппроксимация времени отклика имеет вид:

$$E[W_{K,\max}] \approx \left[ H_K + (V_K - H_K) \frac{\lambda}{\mu} \right] \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad 0 \leq \mu, \quad K \geq 2, \quad (8)$$

где

$$V_K = \sum_{i=1}^K \binom{K}{i} (-1)^{i-1} \sum_{m=1}^i \binom{i}{m} \frac{(m-1)!}{i^{m+1}}.$$

В случае распределения Эрланга второго порядка для входящего потока с функцией распределения  $A(x) = 1 - (1 + 2\lambda x)e^{-2\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  и для времени обслуживания с функцией распределения  $B(x) = 1 - (1 + 2\mu x)e^{-2\mu x}$ ,  $x \geq 0$ :

$$E[W_{K,\max}] \approx \left[ F_K + \left( \frac{V_K}{2} - F_K \right) \frac{\lambda}{\mu} \right] \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad 0 \leq \lambda < \mu, \quad K = 2, 3, \dots, \quad (9)$$

где

$$F_K \equiv \frac{1}{\mu} \sum_{r=1}^K \binom{K}{r} (-1)^{r-1} \sum_{m=0}^r \binom{r}{m} \frac{m!}{2r^{m+1}}, \quad K = 2, 3, \dots$$

Также в работе [28] для того, чтобы получить оценку среднего времени отклика в случаях с другими распределениями для входящего потока и времени обслуживания, метод интерполяции высокой нагрузки был модифицирован, и анализировались три значения ключевой константы  $\beta = 0, 1/2, 1$ , что привело к квадратичной интерполяции, благодаря которой, в сочетании с методом низкой нагрузки, были получены формулы аппроксимации среднего времени отклика для следующих немарковских случаев:

- распределение Эрланга второго порядка для входящего потока с функцией распределения  $A(x) = 1 - (1 + 2\lambda x)e^{-2\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  и экспоненциальное время обслуживания с функцией распределения  $B(x) = 1 - e^{-\mu x}$ ,  $x \geq 0$ :

$$E[W_{K,\max}] \approx \left[ H_K + \left( \frac{2}{3}V_K - \frac{5}{6}H_K - \frac{1}{12} \right) \frac{\lambda}{\mu} \right] \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad 0 \leq \lambda < \mu, \quad K = 2, 3, \dots;$$

- пуассоновский входящий поток с функцией распределения  $A(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ,  $x \geq 0$  и распределение Эрланга второго порядка времени обслуживания с функцией распределения  $B(x) = 1 - (1 + 2\mu x)e^{-2\mu x}$ ,  $x \geq 0$ :

$$E[W_{K,\max}] \approx \left[ F_K + \left( \frac{1}{6} - \frac{H_K}{12} + \frac{2}{3}V_K - F_K \right) \frac{\lambda}{\mu} \right] \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad 0 \leq \lambda < \mu, \quad K = 2, 3, \dots,$$

а также для гиперэкспоненциального входящего потока и экспоненциального времени обслуживания, пуассоновского входящего потока и гиперэкспоненциального времени обслуживания, формулы для которых в силу их громоздкости приводить не будем.

## 5. Заключение

В статье рассмотрены особенности построения систем массового обслуживания с расщеплением запросов. Представлен метод точного анализа среднего времени отклика ( $K = 2$ ), а также его аппроксимации. Во второй части работы будут рассмотрены другие подходы к приближенному анализу времени отклика: матрично-геометрический метод, анализ с помощью порядковых статистик для различных типов распределения времени пребывания подзапросов в системе.

## Литература

1. Nelson R., Tantawi A. N. Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues // IEEE Transactions on Computers. — 1988. — Vol. 37. — Pp. 739–743.
2. Thomasian A. Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems // ACM Computing Surveys (CSUR). — 2014. — Vol. 47, No 2. — Pp. 17:1–17:71.
3. Tsimashenka I., Knottenbelt W. J. Reduction of Subtask Dispersion in Fork-Join Systems // Computer Performance Engineering. — Springer Berlin Heidelberg, 2013. — Pp. 325–336.
4. Аппроксимация времени отклика системы облачных вычислений / А. В. Горбунова, И. С. Зарядов, С. И. Матюшенко, К. Е. Самуйлов, С. Я. Шоргин // Информатика и её применения. — 2015. — Т. 9, вып. 3. — С. 32–38.

5. *Вьшенский С. В., Григорьев П. В., Дубенская Ю. Ю.* Идеальный синхронизатор маркированных пар в сети разветвление-объединение // *Обозрение прикладной и промышленной математики.* — 2008. — Т. 15, № 3. — С. 385–399.
6. *Моисеева С. П., Ивановская И. А.* Исследование математической модели параллельного обслуживания заявок смешанного типа // *Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* — 2010. — Т. 317, № 5. — С. 32–34.
7. *Моисеева С. П., Жидкова Л. А.* Исследование системы параллельного обслуживания кратных заявок простейшего потока // *Известия Томского политехнического университета. Управление, вычислительная техника и информатика.* — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 49–54.
8. The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests / A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matushenko, E. S. Sopin // *Proceedings of the Nineteenth International Scientific Conference Russia: Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016).* — Vol. 3. — 2016. — Pp. 467–472.
9. Оценка вероятностных характеристик системы облачных вычислений с расщеплением запросов / А. В. Горбунова, И. С. Зарядов, С. И. Матюшенко, Э. С. Сопин // *Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2016): Материалы XV Международной конференции имени А. Ф. Терпугова.* — 2016. — С. 167–172.
10. *Mandelbaum M., Itzhak A.-B.* Introduction to Queueing with Splitting and Matching // *Israel Journal of Technology.* — 1968. — Vol. 6, No 5. — Pp. 376–382.
11. *Duda A., Czachórski T.* Performance Evaluation of Fork and Join Synchronization Primitives // *Acta Informatica.* — 1987. — Vol. 24, No 5. — Pp. 525–533.
12. *Green L.* A Queueing System in which Customers Require a Random Number of Servers // *Operations Research.* — 1980. — Т. 28, № 6. — С. 1335–1346.
13. *Omahen K. J., Schrage L.* A Queueing Analysis of a Multiprocessor System with Shared Memory // *Proc. of the Symposium on Computer Communication Networks and Teletraffic.* — 1972. — Pp. 77–88.
14. *Thomasian A., Avizienis A.* Dynamic Scheduling of Tasks Requiring Multiple Processors // *Proceedings of the 11th IEEE Computer Society International Conference (COMPCON'75 Fall).* — 1975. — Pp. 77–80.
15. *Javidi T.* Cooperative and Non-Cooperative Resource Sharing in Networks: a Delay Perspective // *IEEE Transactions on Automatic Control.* — 2008. — Vol. 53, No 9. — Pp. 2134–2142.
16. *Kumar A., Shorey R.* Performance Analysis and Scheduling of Stochastic Fork-Join Jobs in a Multicomputer System // *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems.* — 1993. — Vol. 10, No 4. — Pp. 1147–1164.
17. *Flatto L., Hahn S.* Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands I // *SIAM Journal on Applied Mathematics.* — 1984. — Vol. 44, No 5. — Pp. 1041–1053.
18. *Queueing Networks and Markov Chains: Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications / G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer, K. S. Trivedi.* — John Wiley & Sons, 2006. — P. 896.
19. *Baccelli F.* Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands: the  $M|G|2$  Symmetrical Case // *INRIA Rapport de Recherche.* — 1985. — Vol. 426.
20. *Boyce W. E., DiPrima R. C.* Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. — John Wiley & Sons, 2012. — P. 809.
21. *Башарин Г. П.* Введение в теорию вероятностей. — Москва: РУДН, 1990. — 228 с.
22. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — Москва: Изд-во РУДН, 1995. — С. 529.
23. *Башарин Г. П.* Лекции по математической теории телеграфика. — Москва: РУДН, 2009. — 342 с.
24. *Queueing Theory / P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno.* — Brill

- Academic Publishers, 2004. — P. 457.
25. *Barlow R. E., Proschan F.* Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models. — John Wiley & Sons, 1981. — P. 290.
  26. *Varki E., Merchant A., Chen H.* The  $M|M|1$  Fork-Join Queue with Variable Subtasks. — <http://www.cs.unh.edu/~varki/publication/2002-nov-open.pdf>.
  27. *Varki E.* Response Time Analysis of Parallel Computer and Storage Systems // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. — 2001. — Vol. 12, No 11. — Pp. 1146–1161.
  28. *Varma S., Makowski A. M.* Interpolation Approximations for Symmetric Fork-Join Queues // Performance Evaluation. — 1994. — Vol. 20. — Pp. 245–265.

UDC 519.21

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362

## A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers

A. V. Gorbunova\*, I. S. Zaryadov\*<sup>†</sup>, K. E. Samouylov\*, E. S. Sopin\*<sup>†</sup>

\* *Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

<sup>†</sup> *Institute of Informatics Problems  
Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences  
44-2 Vavilova St., Moscow, 119333, Russian Federation*

This paper is the first in a series of two articles devoted to the review of “fork-join” (in the western classification) queuing systems or systems with the splitting of incoming queries. This system is a natural model for many other real systems. The article describes the fork-join queueing model construction and main characteristics of this model. Special attention is paid to methods of analysis of the response time of the system. Since the exact expression for the mean response time is known only for the case of two servers, the article gives a detailed description of the approach to obtaining an accurate expression of this characteristic. For the case when the number of servers is more than two, approximations of the mean response time are obtained by different methods, which is explained by the complexity of the studies due to the existing dependence between the queues of subqueries due to common arrival moments. The paper presents several methods of approximate analysis: various variants of empirical approximation, i.e. methods that refine the obtained characteristics by using the results of simulation modeling; interpolation methods using system load limit values in cases when the incoming flow and service time distributions are not exponential.

**Key words and phrases:** queuing system, splitting of requests, parallel service of requests, parallel processing, response time

## References

1. R. Nelson, A. N. Tantawi, Approximate Analysis of Fork/Join Synchronization in Parallel Queues, IEEE Transactions on Computers 37 (1988) 739–743.
2. A. Thomasian, Analysis of Fork/Join and Related Queueing Systems, ACM Computing Surveys (CSUR) 47 (2) (2014) 17:1–17:71.
3. I. Tsimashenka, W. J. Knottenbelt, Reduction of Subtask Dispersion in Fork-Join Systems, in: Computer Performance Engineering, Springer Berlin Heidelberg, 2013, pp. 325–336.
4. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matyushenko, K. E. Samouylov, S. Ya. Shorgin, The Approximation of Response Time of a Cloud Computing System, Informatics and applications 9 (2015) 32–38, in Russian.

5. S. V. Vyshenski, P. V. Grigoriev, Yu. Yu. Dubenskaya, Ideal Synchronizer for Marked Pairs in Fork-Join Network, Review of applied and industrial mathematics 15 (3) (2008) 385–399, in Russian.
6. S. P. Moiseeva, I. A. Ivanovskaya, Analysis of the Mathematical Model of Parallel Service of Mixed Type Requests, Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Control, Computer Science and Technology 317 (5) (2010) 32–34, in Russian.
7. S. P. Moiseeva, L. A. Zhidkova, Investigation of the Parallel Service System with Multiple Claims of the Poisson Process, Bulletin of the Tomsk Polytechnic University. Control, Computer Science and Technology 17 (4) (2011) 49–54, in Russian.
8. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matushenko, E. S. Sopin, The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests, in: Proceedings of the Nineteenth International Scientific Conference Russia: Distributed computer and communication networks: control, computation, communications (DCCN-2016), Vol. 3, 2016, pp. 467–472.
9. A. V. Gorbunova, I. S. Zaryadov, S. I. Matushenko, E. S. Sopin, The Estimation of Probability Characteristics of Cloud Computing Systems with Splitting of Requests, in: Proceedings of the 15th International Conference named after A.F. Terpugov: Information technologies and mathematical modelling (ITMM-2016), 2016, pp. 167–172, in Russian.
10. M. Mandelbaum, A.-B. Itzhak, Introduction to Queueing with Splitting and Matching, Israel Journal of Technology 6 (5) (1968) 376–382.
11. A. Duda, T. Czachórski, Performance Evaluation of Fork and Join Synchronization Primitives, Acta Informatica 24 (5) (1987) 525–533.
12. L. Green, A Queueing System in which Customers Require a Random Number of Servers, Operations Research 28 (6) (1980) 1335–1346.
13. K. J. Omahen, L. Schrage, A Queueing Analysis of a Multiprocessor System with Shared Memory, in: Proc. of the Symposium on Computer Communication Networks and Teletraffic, 1972, pp. 77–88.
14. A. Thomasian, A. Avizienis, Dynamic Scheduling of Tasks Requiring Multiple Processors, in: Proceedings of the 11th IEEE Computer Society International Conference (COMPCON'75 Fall), 1975, pp. 77–80.
15. T. Javidi, Cooperative and Non-Cooperative Resource Sharing in Networks: a Delay Perspective, IEEE Transactions on Automatic Control 53 (9) (2008) 2134–2142.
16. A. Kumar, R. Shorey, Performance Analysis and Scheduling of Stochastic Fork-Join Jobs in a Multicomputer System, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 10 (4) (1993) 1147–1164.
17. L. Flatto, S. Hahn, Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands I, SIAM Journal on Applied Mathematics 44 (5) (1984) 1041–1053.
18. G. Bolch, S. Greiner, H. de Meer, K. S. Trivedi, Queueing Networks and Markov Chains: Modeling and Performance Evaluation with Computer Science Applications, John Wiley & Sons, 2006.
19. F. Baccelli, Two Parallel Queues Created by Arrivals with Two Demands: the  $M|G|2$  Symmetrical Case, INRIA Rapport de Recherche 426.
20. W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, 2012.
21. G. P. Basharin, Introduction to Probability Theory, PFUR, Moscow, 1990, in Russian.
22. P. P. Bocharov, A. V. Pechinkin, Queueing Theory, PFUR, Moscow, 1995, in Russian.
23. G. P. Basharin, Lectures on the Mathematical Theory of Teletraffic, PFUR, Moscow, 2009, in Russian.
24. P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin, S. Salerno, Queueing Theory, Brill Academic Publishers, 2004.
25. R. E. Barlow, F. Proschan, Statistical Theory of Reliability and Life Testing: Probability Models, John Wiley & Sons, 1981.
26. E. Varki, A. Merchant, H. Chen, The  $M|M|1$  Fork-Join Queue with Variable

Subtasks.

URL <http://www.cs.unh.edu/~varki/publication/2002-nov-open.pdf>

27. E. Varki, Response Time Analysis of Parallel Computer and Storage Systems, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems 12 (11) (2001) 1146–1161.
28. S. Varma, A. M. Makowski, Interpolation Approximations for Symmetric Fork-Join Queues, Performance Evaluation 20 (1994) 245–265.

© Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С., 2017

**Для цитирования:**

*Горбунова А. В., Зарядов И. С., Самуйлов К. Е., Сопин Э. С.* Обзор систем параллельной обработки заявок // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 350–362. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362.

**For citation:**

Gorbunova A. V., Zaryadov I. S., Samouylov K. E., Sopin E. S. A Survey on Queuing Systems with Parallel Serving of Customers, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 350–362. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-350-362. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Горбунова Анастасия Владимировна** — ассистент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [gorbunova\\_av@rudn.university](mailto:gorbunova_av@rudn.university), тел.: +7(495)9550927)

**Зарядов Иван Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, старший научный сотрудник ИПИ ФИЦ ИУ РАН (e-mail: [zaryadov\\_is@rudn.university](mailto:zaryadov_is@rudn.university), тел.: +7(495)9550927)

**Самуйлов Константин Евгеньевич** — профессор, доктор технических наук, заведующий кафедрой прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: [samuylov\\_ke@rudn.university](mailto:samuylov_ke@rudn.university), тел.: +7(495)9550956)

**Сопин Эдуард Сергеевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН, старший научный сотрудник ИПИ ФИЦ ИУ РАН (e-mail: [sopin\\_es@rudn.university](mailto:sopin_es@rudn.university), тел.: +7(495)9550927)

**Information about the authors:**

**Gorbunova A. V.** — assistant of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [gorbunova\\_av@rudn.university](mailto:gorbunova_av@rudn.university), phone: +7(495)9550927)

**Zaryadov I. S.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Senior Researcher of Institute of Informatics Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences (e-mail: [zaryadov\\_is@rudn.university](mailto:zaryadov_is@rudn.university), phone: +7(495)9550927)

**Samouylov K. E.** — professor, Doctor of Engineering Science, head of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [samuylov\\_ke@rudn.university](mailto:samuylov_ke@rudn.university), phone: +7(495)9550956)

**Sopin E. S.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University); Senior Researcher of Institute of Informatics Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control" Russian Academy of Sciences (e-mail: [sopin\\_es@rudn.university](mailto:sopin_es@rudn.university), phone: +7(495)9550927)

---

# Математическое моделирование

UDC 519.21;51-76

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-363-372

## Design and Stability Analysis of Nondeterministic Multidimensional Populations Dynamics Models

A. V. Demidova\*, O. V. Druzhinina<sup>†‡</sup>, O. N. Masina<sup>§</sup>

\* *Department of Applied Probability and Informatics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

<sup>†</sup> *Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS  
40 Vavilov Str., Moscow, 119333, Russian Federation*

<sup>‡</sup> *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS  
65 Profsoyuznaya St., Moscow, 117997, Russian Federation*

<sup>§</sup> *Yelets State Ivan Bunin University  
28 Communards St., Yelets, 399770, Russian Federation*

The multidimensional models of the population dynamics are considered in the paper. These models are the generalizations of the Lotka–Volterra model in case of interaction of the finite number of populations. The deterministic description of the models is given by the systems of the ordinary nonlinear differential equations presented in the paper in the form of the multidimensional vector differential equations. The qualitative properties of the specified models are sufficiently well studied by means of Lyapunov methods. However, the probabilistic factors influencing on the behavior of models are not taken into account at the deterministic description of models. The new approaches to the modeling and stability analysis are of theoretical and applied interest in the nondeterministic case.

In this paper, the methods for design of multidimensional nondeterministic models of interaction of populations are considered. The first method is connected with the transition from the vector nonlinear ordinary differential equation to the corresponding vector differential inclusions, fuzzy and stochastic differential equations. On the basis of the reduction principle, which makes it possible to reduce the problem of the stability of solutions of a differential inclusion to the problem of stability of solutions of other types of equations, stability conditions for the constructed models are obtained. The second method is connected with the technique of design of the self-consistent stochastic models. The scheme of interaction is received on the basis of this technique. This scheme includes a symbolical record of possible interactions between the system elements. The structure of the multidimensional stochastic Lotka–Volterra models is described, and the transition to the corresponding Fokker–Planck vector equations is carried out by means of the system state operators and the system state change operator. The rules for the transition to the multidimensional stochastic differential equation in the Langevin form are formulated. The execution of the numerical experiment with the application of the developed program complex for solving the systems of the stochastic differential equations is possible for the models which are the concretizations of the studied general models. The described approach to the modeling of the stochastic systems can be applied in the problems of comparing of the qualitative properties of the models in deterministic and stochastic cases. The obtained results are aimed at the development of the methods for the analysis of nondeterministic nonlinear models.

**Key words and phrases:** model of population dynamics, stability, differential inclusions, stochastic model, principle of the reduction

---

Received 30<sup>th</sup> June, 2017.

The work is partially supported by RFBR grants No's 15-07-08795 and 16-07-00556. Also the publication was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (the Agreement No 02.A03.21.0008).

## 1. Introduction

The stability research of the models of the population dynamics is an important problem. Some directions of the solution of the specified problem are presented in the works [1–7]. The questions of existence and stability of the solutions of the models described by the differential equations of various types were considered in [8–12] and in other works.

Lyapunov functions method is one of the widely used methods of the stability research [10, 11]. The stability of the solutions of classical and generalized models of the population dynamics by Lyapunov function method was considered in [1]. The systemic approach is described in [2, 6–9] which allows us to consider properties of stability of the models described by the differential equations of various types from the unified point of view. The specified approach is based on the transition from the deterministic description of the model to stochastic description and on the principle of reduction of the stability problem of solutions of differential inclusion to the stability problem of other types of the equations. The approach allows us to study the stability properties of solutions of differential inclusions, the fuzzy and stochastic differential equations from the unified point of view.

In this work we consider a nonlinear multidimensional model of the dynamics of the populations interaction. The determined description of model is given by system of the ordinary nonlinear differential equations. The transition from the specified model to the corresponding nondeterministic models given by means of finite-dimensional differential inclusions, the fuzzy and stochastic differential equations is performed. The stability analysis is performed on the basis of the reduction principle in this work.

It is known [5, 13–15] that in the deterministic description of the model the probabilistic factors affecting the behavior of the model are not taken into account. In this connection, an important problem is construction and study of adequate stochastic models, as well as a comparative analysis of the properties of deterministic and corresponding stochastic models.

The technique of design of the self-consistent stochastic models [14] allows us to take into account stochastics in the structure of the model without adding additive stochastic terms. In this work the structure of the multidimensional stochastic Lotka–Volterra models is described, and the transition to the corresponding Fokker–Planck vector equations is carried out by means of the system state operators and the system state change operator. The rules for the transition to the multidimensional stochastic differential equation in the Langevin form are formulated. It is shown that the used approach to construct multidimensional stochastic models can find application in problems of comparing the qualitative properties of the generalized Lotka–Volterra models.

## 2. Deterministic Models

We consider the model described by the system of differential equations of the form [1, 3]:

$$\dot{x}_i = x_i \left( a_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

where  $x_i$  is density of  $i$ -th population in moment  $t$ ,  $\dot{x}_i = dx_i/dt$ ,  $a_i$  and  $p_{ii}$  are growth coefficients of  $i$ -th population in the absence of others, constants  $p_{ij}$  at  $i \neq j$  characterize the influence of interaction between populations on the rate of growth,  $P = (p_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , is interaction matrix.

The model (1) is the classical Lotka–Volterra model for the  $n$ -dimensional case. This model describes the dynamics of the biological community under the following conditions:



- 1) the relative growth rate of each population does not depend on the intrapopulation structure;
- 2) this rate depends linearly on the number of populations in the community. These conditions, characteristic of the Lotka–Volterra equation, represent a simplified hypothesis about the nature of the interactions between populations in the community.

This hypothesis, known as the principle of pair interactions, suggests the additivity of each population contribution to the relative growth rate, which is reasonably well founded biologically. However, the linear nature of this contribution is much worse in the processes occurring in biological communities, and can be taken into account in approximating the equilibrium state in some neighborhood [1]. In this connection, the study of the model (1) can be considered as an important stage preceding the study of the models that are generalizations of the model (1).

A generalization of the model (1) is a model of the following form:

$$\dot{x}_i = x_i \left( a_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} f_j(x_j) \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

where  $f_i: (R^1 \rightarrow R^1) \in C^1$ ,  $f_i(0) = 0$ ,  $\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i} > 0$  with  $x_i \geq 0$ .

The stability conditions for solutions of the model (1), (2) on the basis of the Lyapunov functions method are obtained in [1]. The stability conditions on the basis of the divergent method are obtained in [3] for indicated models. The transition is possible from the deterministic model (1), (2) to different types of the corresponding nondeterministic models.

### 3. Design of Nondeterministic $n$ -dimensional Lotka–Volterra Models and Stability Analysis Based on the Reduction Principle

The nonlinear model (1) is presented in the form of the vector equation

$$\dot{x} = f(x), \quad (3)$$

where  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n) = (x_1(a_1 - p_{11}x_1 - \dots - p_{1n}x_n), \dots, x_n(a_n - p_{n1}x_1 - \dots - p_{nn}x_n))$ ,  $x \in R_+^n$ ,  $R_+^n$  —  $n$ -fold Cartesian product of the set  $R_+$  on itself,  $R_+ = [0, \infty)$ ,  $f: R_+^n \rightarrow R_+^n$ .

For the model (3) the coefficients  $a_i$  and  $p_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ , can take different values from the corresponding intervals  $[\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}]$  and  $[\gamma_{ij_1}, \gamma_{ij_2}]$  taking into account the ecological meaning accordingly. The transition from the model (3) to the finite-dimensional differential inclusion is the following

$$\dot{x}_1 \in x_1 (a_1 - p_{11}x_1 - \dots - p_{1n}x_n), \dots, \dot{x}_n \in x_n (a_n - p_{n1}x_1 - \dots - p_{nn}x_n). \quad (4)$$

The model (4) in the vector form is presented as follows:

$$\dot{x} \in F(x), \quad (5)$$

where

$$F(x) = \{f(x) | a_i \in A_i, p_{ij} \in C_{ij}\}, \quad A_i ::= [\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}], \quad C_{ij} ::= [\gamma_{ij_1}, \gamma_{ij_2}], \quad F: R_+^n \rightarrow 2^{R_+^n}.$$

The introduced sets  $A_i$  and  $C_{ij}$  define the sets of values of the corresponding parameters  $a_i$  and  $p_{ij}$ .

Subsets  $\{A_i\}_\alpha = \{a_i | \mu_{A_i}(a_i) \geq \alpha\}$  and  $\{C_{ij}\}_\alpha = \{p_{ij} | \mu_{C_{ij}}(p_{ij}) \geq \alpha\}$  represent the narrower sets that we obtain when we take into account the additional conditions  $\alpha \in (0, 1]$ , that affect the interaction of the components and, consequently, the stability of the model (3). Then equation (3) can be replaced by a fuzzy finite-dimensional differential equation

$$\dot{x} = F(x), \quad (6)$$

where  $F : Z_+^n \rightarrow P(R_+^n)$ ,  $P(R_+^n)$  is the set of all fuzzy subsets of  $R_+^n$ .

The differential inclusion corresponding to the equation (6) has the form  $\dot{\varphi} \in F_\alpha(\varphi)$ , where  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $F_\alpha(\varphi) = \{f(\varphi(t)) | a_i \in \{A_i\}_\alpha, p_{ij} \in \{C_{ij}\}_\alpha\}$ .

The following stability conditions of the differential inclusion (5) and the fuzzy equation (6) we formulate by means of the principle of reduction [7, 8] and by means of the transition from model (1) to models (5) and (6):

- 1) if there is a Lyapunov function  $V$  for the closed set  $M \subset R_+^n$  regarding the inclusion (5), such that the inequality  $D_+V(x) \leq 0 \forall x \in B(M, r)$  is satisfied, where  $D_+V(x) = \sup DV(x)$  is upper derivative of Lyapunov function, set  $B(M, r)$  is  $r$ -neighborhood of the set  $M$ , then the set  $M$  is stable in small regarding this inclusion;
- 2) if the inequality  $D_+V(x) \leq -w(e(x, M)) \forall x \in B(M, r)$  is satisfied, where function  $w : B(M, r) \rightarrow R$  is the continuous and positive function in  $R_+^n \setminus M$ , then the set  $M$  is asymptotically stable in small regarding the inclusion (5);
- 3) if there is a Lyapunov function  $V$  regarding the equation (6) for the closed set  $M \subset P(R_+^n)$ , where  $P(R_+^n)$  is the set of all fuzzy subsets of  $R_+^n$ , such that the inequality  $D_+V_\alpha(x) \leq 0 \forall x \in B(M_\alpha, r)$  is satisfied at  $\alpha \in (0, 1]$ , then the set  $M$  is  $\alpha$ -stable regarding this equation;
- 4) if the inequality  $D_+V_\alpha(x) \leq -w_\alpha(e(x, M_\alpha)) \forall x \in B(M_\alpha, r)$  is satisfied, where  $w_\alpha : (0, r) \rightarrow R$  is the continuous and positive function, then the set  $M$  is  $\alpha$ -asymptotically stable regarding the equation (6).

In this work we consider the generalization of the model (3) to the stochastic case, namely, the transition is carried out from the equation (3) to the corresponding stochastic differential equation

$$\dot{x} = S(x), \quad (7)$$

where  $S(x)$  is the stochastic function. By means of the principle of reduction we formulate the stability conditions of the fuzzy equation (6) and the stochastic equations (7).

It is shown that if the trivial solution of a fuzzy equation (6) is  $\alpha$ -stable (asymptotically  $\alpha$ -stable) for every  $\alpha \in (0, 1]$ , then the trivial solution of the corresponding stochastic equation (7) is stable on probability (asymptotically stable on probability). In addition, the conditions of almost surely stability and stability on average we give by the aid of the principle of reduction. The comparative analysis of the qualitative properties of the deterministic and stochastic models is given on the basis of the obtained sufficient stability conditions.

System (2) is represented as a nonlinear vector equation

$$\dot{x} = g(x),$$

where

$$g(x) = (g_1, g_2, \dots, g_n) = (x_1(a_1 - p_{11}f_1(x_1) - \dots - p_{1n}f_n(x_n)), \dots, \\ \dots, x_n(a_n - p_{n1}f_1(x_1) - \dots - p_{nn}f_n(x_n))), \\ g : R_+^n \rightarrow R_+^n.$$

We consider the transition from this vector equation to the nondeterministic models described by differential inclusion, fuzzy and stochastic differential equations. This

transition is similar to the transition from the vector equation (3) to the models (5)–(7). The stability conditions of the indicated differential inclusion, fuzzy differential equation and stochastic differential equation are obtained using the reduction principle.

#### 4. Design of the Self-Consistent $n$ -dimensional Lotka–Volterra Stochastic Models

The synthesis of some models of population dynamics on the basis of the method of construction of self-consistent stochastic models [14] is implemented in [5,6]. According to the main idea of the method it is possible for the system under consideration to describe the scheme of interaction in the form of symbolic representation of all possible interaction between the system elements. The operators of the system state and the operator of change of the system state are used for this purpose. Then we give the intensities of transitions and master equation, for which we can obtain an approximate Fokker–Planck equation by the aids of formal series expansion. It is not difficult to transit from the Fokker–Planck equation to the equivalent stochastic differential equation in Langevin form:

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + b(t, x(t))dW, \quad (8)$$

where  $x(t) \in R^n$  is the vector of the system state,  $a(t, x(t))$  is the vector of demolition,  $b(t, x(t))$  is the diffusion matrix. In addition, in equation (8)  $W \in R^n$  is the standard  $n$ -dimensional Wiener process.

In practice, the stochastic differential equation can be written immediately after the representation of the interaction scheme. It is connected with the fact that for the obtained coefficients of the Fokker–Planck equation it is necessary to know only the intensities of transitions and operators of state changes.

We present the scheme of interaction elements for the system (1) in the form:



where  $i, j = 1, \dots, n$ . Thus, the scheme (9) describes the system of  $n$  species in which individuals can interact  $n(n+1)$  various ways.

The first row of the scheme of interaction corresponds to natural reproduction  $i$ -th species in the absence of other factors. The second row corresponds to intraspecific competition at  $i = j$ , corresponds to interspecific competition at  $i \neq j$ .

The operator of state change is presented in the form:

$$R = \{R_{lk}, l = 1, \dots, n, k = 0, \dots, n\},$$

where

$$R_{ij} = \begin{cases} (0, \dots, \overbrace{1}^{i\text{-th}}, \dots, 0), & l = 1, \dots, n, \quad k = 0, \\ (0, \dots, \underbrace{-1}_{i\text{-th}}, \dots, 0), & l = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

The state of the system can be described by means of vector  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . The following relations are given for intensities of transitions from the state  $x$  to the state  $x + R$  in the unit of the time:

$$s_{l,k}(x) = p_{lk}x_lx_k,$$

where  $l = 1, \dots, n, k = 0, \dots, n$ , and let  $x_k = 1$  if  $k = 0$ .

Let us present Fokker–Planck equation corresponding to the model in the form:

$$\partial_t P(x, t) = - \sum_{i=1}^n \partial_{x_i} [A_i(x)P(x, t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} \partial_{x_j} [B_{ij}(x)P(x, t)],$$

where

$$A_i(x) = \sum_{j=1}^n R_{ij} s_{ij}(x) = p_{i0} x_i - \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j,$$

$$B_{ij}(x) = \sum_{j=0}^n R_{ij} (R_{ij})^T s_{ij}(x) = p_{i0} x_i + \sum_{j=1}^n p_{ij} x_i x_j, \text{ and } B_{ij} = 0, i \neq j.$$

We have the following relations for the coefficients of stochastic equation (8) and coefficients of Fokker–Planck equation:

$$a(x) = A(x),$$

$$b(x) = B(x)B(x)^T.$$

The obtaining of analytical solution for the constructed self-consistent stochastic Lotka–Volterra model is difficult, however, for special cases of the general  $n$ -dimensional model, it is possible to conduct a numerical experiment using the developed software package for the solution systems of stochastic differential equations [16, 17]. In the future, it is planned to conduct a numerical analysis to obtain numerical solutions for the obtained models, as well as to reveal the influence of stochastics on the behavior of the system.

The investigation of the obtained stochastic differential equation in Langevin form allows us to study the influence of stochastics on the behavior of the considered system. This approach to the construction and analysis of nonlinear models can serve to the solving of problems aimed at the comparative analysis of deterministic and stochastic models.

Note that the technique of design of the self-consistent stochastic models can be applied to the system (2), but for this it is necessary to specify the form of the functions  $f_j(x_j)$  taking into account the physical sense. In the problems of constructing of self-consistent stochastic models that generalize models (1) and (2), the consideration of two-dimensional, three-dimensional and four-dimensional models is of prime interest, and it becomes necessary to compare stability properties in deterministic and stochastic cases.

## 5. Conclusions

The principle of reduction allowed us to obtain the conditions of stability of the multidimensional model of the population dynamics with the transition to the differential inclusion, fuzzy and stochastic differential equations. The specified transition takes into account the changing parameters of the model and allows us to perform a comparative analysis of the properties of the models based on the principle of reduction. The stability conditions can be used to study the population dynamics models. The application of self-consistent stochastic models construction method for Lotka–Volterra multidimensional systems allows us to estimate the impact of the introduction of stochastics onto the behavior of these systems. The obtained results are aimed at further development of methods of design and stability analysis of stochastic models.

## References

1. Y. A. Pykh, *Equilibrium and Stability in Models of Population Dynamics*, Nauka, Moscow, 1983, in Russian.
2. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, *Methods of Stability Research and Controllability of Fuzzy and Stochastic Dynamic Systems*, Dorodnicyn Computing Center of RAS, Moscow, 2009, in Russian.
3. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, E. V. Igonina, *Stability Research of Equilibrium States of the Ecological Equations by the Index-Divergent Method. Qualitative Properties, Asymptotics and Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems*, Publishing house of the Mordovian University, Saransk, 2010, pp. 105–111, in Russian.
4. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, A. V. Shcherbakov, *Structure and qualitative analysis of mathematical models of population dynamics in the presence of mutualism*, *Nonlinear World* 14 (6) (2016) 32–42, in Russian.
5. A. V. Demidova, O. V. Druzhinina, O. N. Masina, *Stability Research of Population Dynamics Model on the Basis of Construction of the Stochastic Self-Consistent Models and the Principle of the Reduction*, *Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2015) 18–29, in Russian.
6. A. V. Demidova, O. V. Druzhinina, M. Jacimovic, O. N. Masina, *Construction and Analysis of Nondeterministic Models of Population Dynamics*, Vol. 678, Springer, Cham, 2016, pp. 498–510.
7. O. V. Druzhinina, O. N. Masina, *System Approach to Stability Research of the Models Described by the Differential Equations of Different Types*, *Bulletin of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential Equations*. (3) (2015) 24–30, in Russian.
8. I. Y. Katz, N. N. Krasovskii, *On the Stability of Systems with Random Parameters*, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 24 (5) (1960) 809–823.
9. F. Kozin, *Stability of the Linear Stochastic Systems*, *Lecture Notes in Mathematics* 294 (1972) 189–192.
10. A. A. Shestakov, *Generalized Direct Lyapunov Method for Systems with Distributed Parameters*, URSS, Moscow, 2007, in Russian.
11. Yu. N. Merenkov, *Stability-Like Properties of Differential Inclusions, Fuzzy and Stochastic Differential Equations*, PFUR, Moscow, 2000, in Russian.
12. O. N. Masina, *On the existence of solutions of differential inclusions*, *Differential Equations* 44 (6) (2008) 845–847, in Russian.
13. I. P. Pavlotsky, V. M. Suslin, *Stochastic model of evolution of populations in space*, *Mathematical modeling* 6 (3) (1994) 9–24, in Russian.
14. A. V. Demidova, M. N. Gevorgyan, A. D. Egorov, D. S. Kulyabov, A. V. Korolkova, L. A. Sevastyanov, *Influence of Stochastization on One-Step Models*, *Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (1) (2014) 71–85.
15. A. V. Korolkova, E. G. Eferina, E. B. Laneev, I. A. Gudkova, L. A. Sevastyanov, D. S. Kulyabov, *Stochastization of One-Step Processes in the Occupations Number Representation*, in: *Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation*, Springer, Regensburg, Germany, 2016, pp. 698–704. doi:10.7148/2016-0698.  
URL <http://www.scs-europe.net/dlib/2016/2016-0698.htm>
16. M. N. Gevorkyan, T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, *Stochastic Runge–Kutta Software Package for Stochastic Differential Equations*, *Dependability Engineering and Complex Systems* (470) (2016) 169–179.
17. E. G. Eferina, A. V. Korolkova, M. N. Gevorkyan, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov, *One-Step Stochastic Processes Simulation Software Package*, *Bulletin of Peoples Friendship University of Russia. Series: Mathematics. Information Sciences. Physics* (3) (2014) 46–59.

УДК 519.21;51-76

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-363-372

## Построение и анализ устойчивости недетерминированных многомерных моделей динамики популяций

А. В. Демидова\*, О. В. Дружинина<sup>†‡</sup>, О. Н. Масина<sup>§</sup>

\* Кафедра прикладной информатики и теории вероятностей  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

† Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН  
ул. Вавилова, д. 40, Москва, Россия, 119333

‡ Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН  
ул. Профсоюзная, д. 65, Москва, Россия, 117997

§ Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина  
ул. Коммунаров, д. 28, г. Елец, Россия, 399770

Рассмотрены многомерные модели популяционной динамики, являющиеся обобщениями модели Лотки–Вольтерра на случай взаимодействия конечного числа популяций. Детерминистическое описание моделей даётся системами обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, представленными в работе в виде многомерных векторных дифференциальных уравнений. Качественные свойства указанных моделей достаточно хорошо изучены с помощью методов Ляпунова. Однако при детерминистическом описании моделей не учитываются вероятностные факторы, влияющие на поведение моделей. В недетерминистическом случае новые подходы к моделированию и анализу устойчивости представляют теоретический и прикладной интерес.

В настоящей работе рассмотрены способы построения многомерных недетерминированных моделей взаимодействия популяций. Первый способ связан с переходом от векторного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения к соответствующим векторным дифференциальным включениям, нечётким и стохастическим дифференциальным уравнениям. На основе принципа редукции, позволяющего свести задачу об устойчивости решений дифференциального включения к задаче об устойчивости решений других типов уравнений, получены условия устойчивости для построенных моделей. Второй способ связан с методикой построения самосогласованных стохастических моделей. На основе этой методики получена схема взаимодействия, которая включает в себя символическую запись возможных взаимодействий между элементами системы. С помощью операторов состояния системы и оператора изменения состояния системы описана структура многомерных стохастических моделей Лотки–Вольтерра, и осуществлён переход к соответствующим векторным уравнениям Фоккера–Планка. Сформулированы правила перехода к многомерному стохастическому дифференциальному уравнению в форме Ланжевена. Для моделей, являющихся конкретизациями изучаемых общих моделей, возможно проведение численного эксперимента с применением разработанного программного комплекса для решения систем стохастических дифференциальных уравнений. Описанный подход к моделированию стохастических систем может найти применение в задачах сравнения качественных свойств моделей в детерминированном и стохастическом случаях. Полученные результаты направлены на развитие методов анализа недетерминированных нелинейных моделей.

**Ключевые слова:** модель популяционной динамики, устойчивость, дифференциальные включения, стохастическая модель, принцип редукции

## Литература

1. Пых Ю. А. Равновесие и устойчивость в моделях популяционной динамики. — Москва: Наука, 1983.
2. Дружинина О. В., Масина О. Н. Методы исследования устойчивости и управляемости нечетких и стохастических динамических систем. — Москва: ВЦ РАН, 2009. — 180 с.

3. Друзинина О. В., Масина О. Н., Игонина Е. В. Исследование устойчивости состояний равновесия экологических уравнений индексно-дивергентным методом // Качественные свойства, асимптотика и стабилизация нелинейных динамических систем. Межвузовский сборник научных трудов. — Саранск: Изд-во Мордовского университета, 2010. — С. 105–111.
4. Друзинина О. В., Масина О. Н., Щербаков А. В. Структура и качественный анализ математических моделей динамики популяций при наличии мутуализма // Нелинейный мир. — 2016. — Т. 14, № 6. — С. 32–42.
5. Демидова А. В., Друзинина О. В., Масина О. Н. Исследование устойчивости модели популяционной динамики на основе построения стохастических самосогласованных моделей и принципа редукции // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2015. — № 3. — С. 18–29.
6. Construction and Analysis of Nondeterministic Models of Population Dynamics / A. V. Demidova, O. V. Druzhinina, M. Jacimovic, O. N. Masina // Communications in Computer and Information Science book series. DCCN-2016: Distributed Computer and Communication Networks / Ed. by V. Vishnevskiy, K. Samouylov, D. Kozurev. — Springer, Cham, 2016. — Vol. 678. — Pp. 498–510.
7. Друзинина О. В., Масина О. Н. Системный подход к исследованию устойчивости моделей, описываемых дифференциальными уравнениями различных типов // Вестник Российской академии естественных наук. Тематический номер «Дифференциальные уравнения». — 2015. — № 3. — С. 24–30.
8. Кац И. Я., Красовский Н. Н. Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикладная математика и механика. — 1960. — Т. 24, № 5. — С. 809–823.
9. Kozin F. Stability of the Linear Stochastic Systems // Lecture Notes in Mathematics. — 1972. — Vol. 294. — Pp. 189–192.
10. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределёнными параметрами. — Москва: УРСС, 2007.
11. Меренков Ю. Н. Устойчивоподобные свойства дифференциальных включений, нечетких и стохастических дифференциальных уравнений. Монография. — Москва: РУДН, 2000.
12. Масина О. Н. О существовании решений дифференциальных включений // Дифференциальные уравнения. — 2008. — Т. 44, № 6. — С. 845–847.
13. Павлоцкий И. П., Суслин В. М. Стохастическая модель эволюции популяции в пространстве // Математическое моделирование. — 1994. — Т. 6, № 3. — С. 9–24.
14. Влияние стохастизации на одношаговые модели / А. В. Демидова, М. Н. Геворкян, А. Д. Егоров, Д. С. Кулябов, А. В. Королькова, Л. А. Севастьянов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — № 1. — С. 71–85.
15. Stochastization of One-Step Processes in the Occupations Number Representation / A. V. Korolkova, E. G. Eferina, E. B. Laneev, I. A. Gudkova, L. A. Sevastianov, D. S. Kulyabov // Proceedings 30th European Conference on Modelling and Simulation. — Regensburg, Germany: Springer, 2016. — Pp. 698–704. — <http://www.scs-europe.net/dlib/2016/2016-0698.htm>.
16. Stochastic Runge–Kutta Software Package for Stochastic Differential Equations / M. N. Gevorkyan, T. R. Velieva, A. V. Korolkova, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov // Dependability Engineering and Complex Systems. — 2016. — No 470. — Pp. 169–179.
17. Программный комплекс стохастического моделирования одношаговых процессов / Е. Г. Еферина, А. В. Королькова, М. Н. Геворкян, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2014. — № 3. — С. 46–59.

**Для цитирования:**

*Demidova A. V., Druzhinina O. V., Masina O. N.* Design and Stability Analysis of Nondeterministic Multidimensional Populations Dynamics Models // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2017. — Vol. 25, No 4. — Pp. 363–372. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-363-372.

**For citation:**

Demidova A. V., Druzhinina O. V., Masina O. N. Design and Stability Analysis of Nondeterministic Multidimensional Populations Dynamics Models, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 363–372. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-363-372.

**Сведения об авторах:**

**Демидова Анастасия Вячеславовна** — кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры прикладной информатики и теории вероятностей РУДН (e-mail: demidova\_av@rudn.university, тел.: +7(495)9520250)

**Дружинина Ольга Валентиновна** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник отдела нелинейного анализа и проблем безопасности ФИЦ ИУ РАН (e-mail: ovdruzh@mail.ru, тел.: +7 (499)1350440)

**Масина Ольга Николаевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина (e-mail: olga121@inbox.ru, тел.: +7(47467)22426)

**Information about the authors:**

**Demidova A. V.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of Department of Applied Probability and Informatics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: demidova\_av@rudn.university, phone: +7(495)9520250)

**Druzhinina O. V.** — Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Chief Researcher of the Department of Nonlinear Analysis and Security Problems of Federal Research Center "Computer Science and Control" of RAS (e-mail: ovdruzh@mail.ru, phone: +7 (499)1350440)

**Masina O. N.** — Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, head of Department of Mathematical Modeling and Computer Technologies of Yelets State Ivan Bunin University (e-mail: olga121@inbox.ru, phone: +7(47467)22426)



---

UDC 519.6  
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-373-379

## IVC Calculation Problem for Josephson Junction Stacks. On Asymptotic Construction near the Breakpoint

S. I. Serdyukova

*Laboratory of Information Technologies  
Joint Institute for Nuclear Research  
6 Joliot-Curie str., Dubna, Moscow region, 141980, Russian Federation*

Solving the system of  $n$  essentially nonlinear differential equations for different  $I$  we obtain the current-voltage characteristics (IVC) for a system of  $n$  Josephson junctions (JJ) as a hysteresis loop. When the current  $I$  approaches on the back way the breakpoint  $I_b$  the voltage  $V(I)$  falls sharply to zero. In addition, in numerical modelling (non-periodic boundary conditions (NPBC)) IVC multiple branching is observed near  $I_b$ . It is interesting to study this phenomenon analytically developing asymptotic methods. There had been developed simple “asymptotic” formulas suitable for calculation of all IVC points except near to  $I_b$ . A numerical-analytical method allowing to shorten IVC calculation time essentially was proposed. This method showed good results in IVC multiple branching calculation in particular. All calculations were performed using the REDUCE system. We succeeded first to calculate analytically all points of IVC. An approximate solution at the breakpoint region (periodic boundary conditions (PBC)) has been developed using the Bogolyubov–Krylov method.

**Key words and phrases:** Josephson junctions, superconduction, high temperature, current-voltage characteristics, breakpoint, multiple branching, cross-scheme of the second order accuracy, asymptotic formulas developing, the Levinson method, the Bogolyubov-Krylov method, the REDUCE system

### 1. Introduction

The definition of the singular points of the current voltage characteristics together with the estimation of the width of their influence region provide adequate input for physical experiments aiming at studying the finite JJ stacks [1–3].

The mathematical problem of IVC calculation for the stack of  $n$  Josephson junction [4] asks for the solution of the following essentially nonlinear system:

$$\ddot{\varphi}_l = \sum_{l'=1}^n A_{l,l'}(I - \sin(\varphi_{l'}) - \beta\dot{\varphi}_{l'}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Here  $\dot{\varphi}_l$  is derivative of  $\varphi_l$  of  $t$ ,  $t \in [0, T_{\max}]$ .

Solving the Cauchy problem for different  $I$ :  $I = I_0 + k\Delta I \leq I_{\max}$  (right way) and  $I = I_{\max} - k\Delta I$  we obtain IVC of  $n$  Josephson junctions as hysteresis loop. The points  $(I, V(I))$ , with  $I$  corresponding to the right way, form the right branch of the loop. And the points  $(I, V(I))$ , with  $I$  corresponding to the back way, form the back branch of the loop.  $V(I)$  is the total voltage of the stack.

For  $I = I_0$  the system (1) is solved with zero initial data. For each next  $I : I = I_{k+1}$ , found  $\varphi_l(I_k, T_{\max})$ ,  $\dot{\varphi}_l(I_k, T_{\max})$  are used as initial data.

The coefficients  $A_{l,l'}$  of the system (1) are elements of the matrix  $A$ . In the case of PBC  $A$  is symmetric square matrix of order  $n$ :

$$\begin{pmatrix} 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha \end{pmatrix}. \quad (2)$$

And in the case of NPBC  $A$  is symmetric square tridiagonal matrix of order  $n$ :

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha(1+\gamma) & -\alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1+2\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha & 1+\alpha(1+\gamma) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

The dynamics of phase differences  $\phi_l(t)$  had been simulated [4] by solving the equation system (1) using the fourth order Runge–Kutta method. The aim was to shorten the time of IVC calculation, and it was achieved. First the number of the system equations was reduced to one in the case of PBC and halved in the case of NPBC. The longtime “asymptotics” formulas were developed. The mixed numerical–analytical method was suggested: all points of IVC are calculated using the asymptotics except points of the little arc of the back branch of the loop calculated numerically [5]. And Fig. 5 shows that the Runge–Kutta method of the fourth order accuracy can be replaced by the simplest explicit cross–scheme of the second order accuracy. This shortens the time of IVC calculation complementarily.

## 2. On Long-Time “Asymptotics” Construction

In the case of PBC IVC calculation for a stack of  $n$  intrinsic Josephson junctions is reduced to solving a unique equation [5]

$$\ddot{\eta}(t) = -\beta\dot{\eta}(t) - \sin(\eta(t)) + I.$$

Solving this equation with given initial data  $\eta(0) = d_1$ ,  $\dot{\eta}(0) = d_2$  is equivalent to solving the following integral equation

$$\eta(t) = \xi_1 + \frac{(\xi_2 - \omega)}{\beta}(1 - e^{-\beta t}) + \omega t - \frac{1}{\beta} \int_0^t (1 - e^{-\beta(t-s)}) \sin(\eta(s)) ds. \quad (4)$$

The simple iteration method starting from zero gives on the second step

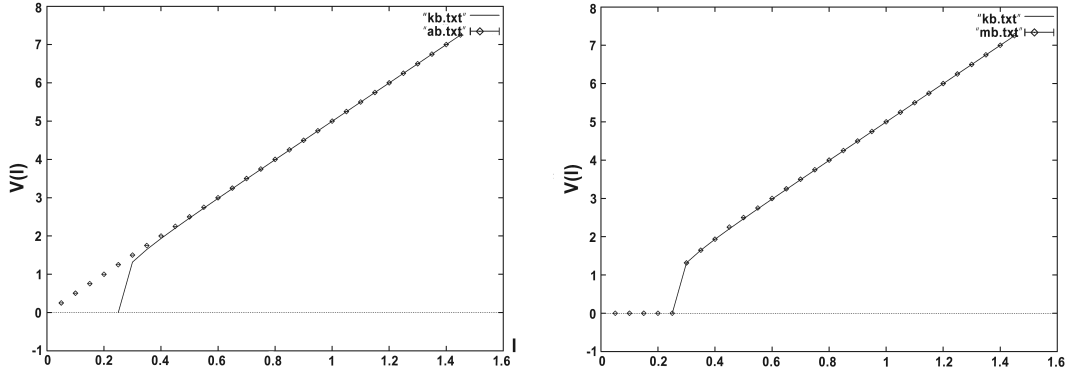
$$\eta_2 = \omega t + A + \vartheta + \frac{\sin(\omega t + A + \arctg(\beta/\omega))}{\omega\sqrt{\beta^2 + \omega^2}} + O(\omega^{-3} + e^{-\beta t}), \quad (5)$$

where  $\omega = I/\beta$ ,  $A = d_1 + (d_2 - \omega)/\beta$ ,  $\vartheta = -\cos(A)/(\omega\beta)$ .

And the total voltage of the stack of  $n$  Josephson junctions is calculated as

$$V(I, n) = n \frac{\eta(I, T_{\max}) - \eta(I, T_{\min})}{T_{\max} - T_{\min}}.$$

In Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3 the solid curve is the IVC back branch calculated using the Runge–Kutta method. In Fig. 1 the pictures of the back way of the hysteresis loop for 9 Josephson junctions are shown. The circles refer to “asymptotic” (using (5)) calculations respectively. Here we put  $T_{\min} = 50$ ,  $T_{\max} = 1000$ ,  $\alpha = \beta = 0.2$ ,  $\Delta I = 0.05$ , the step in the Runge–Kutta method  $h = 0.1$ .



**Figure 1. IVC back branch,  $n = 9$ . PBC. Figure 2. IVC back branch,  $n = 9$ . PBC. The circles were calculated using (5) The circles refer to he mixed numerical–analytical calculation**

In Fig. 2 the circles refer to calculation performed by the following mixed analytical–numerical method. The right branch of the hysteresis loop and the back branch on the interval  $0.4 < I < 1.45$  were computed using (5). The rest ones were computed numerically. The REDUCE system [6] was used in all calculations performed.

We proved [7] that in the case of NPBC with  $\gamma = 1$  the problem of hysteresis loop calculation reduces to solving the following system of  $ns$  integral equations:

$$\psi_{2l-1} = \omega_{2l-1}t + \xi_1(2l - 1) + \frac{\xi_2(2l - 1) - \omega_{2l-1}}{\beta\lambda_{2l-1}} (1 - \exp(-\beta\lambda_{2l-1}t)) - \frac{1}{\beta} \int_0^t (1 - \exp(-\beta\lambda_{2l-1}(t - s))) \sum_{m=1}^n d_{m,2l-1} \sin(\varphi_m) ds, \quad (6)$$

where

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{ns} d_{m,2k-1} \psi_{2k-1}, \quad l = 1, 2, \dots, ns$$

and  $\omega_{2l-1} = S_{2l-1}I/\beta$ .  $\lambda_l$  are eigenvalues of  $A$  matrix, the corresponding eigenvectors are  $E_l = [d_{1,l}, \dots, d_{n,l}]^*$ ,  $S_l = \sum_{k=1}^n d_{k,l}$ . And  $ns$  is integer part of  $\frac{n+1}{2}$ ,  $ns = \frac{n+1}{2}$ .

The system (6) was solved using simple iterations starting at zero. The results obtained on the second step are regarded as long-time “asymptotics” of the system (6) solution.

We constructed “asymptotics” following to [8]. In the introduction N. Levinson declared: “A method is given for showing that formal “approximate solutions” of non-linear differential equations are in fact the leading terms in an asymptotic representation of actual solutions”.

The Fig. 3, Fig. 4 confirm this declaration. At the same time these pictures show efficiency of the suggested mixed numerical–analytical method. This time  $\Delta I = 0.001$ .

Fig. 3 refers to numerical calculation: all points of IVC were calculated using the Runge–Kutta method. Fig. 4 refers to calculation performed by the mixed numerical–analytical method: the right branch of IVC and the part of the back branch ( $1.45 \geq I > 0.4$ ) were calculated analytically (using the long-time “asymptotics” of (6) system solution). The rest points ( $0.4 \geq I \geq 0.2$ ) were calculated numerically using the Runge–Kutta method.

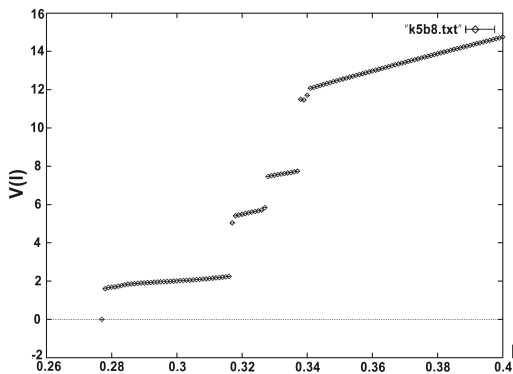


Figure 3. Multiple branching of IVC back branch,  $n = 8$ . NPBC. All points of IVC were calculated using the Runge–Kutta method

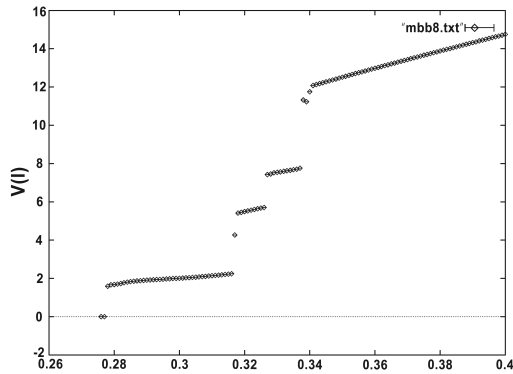


Figure 4. Multiple branching of IVC back branch,  $n = 8$ . NPBC. All points of IVC were calculated using “asymptotics” formulas except points of the interval on the picture calculated using the Runge–Kutta method

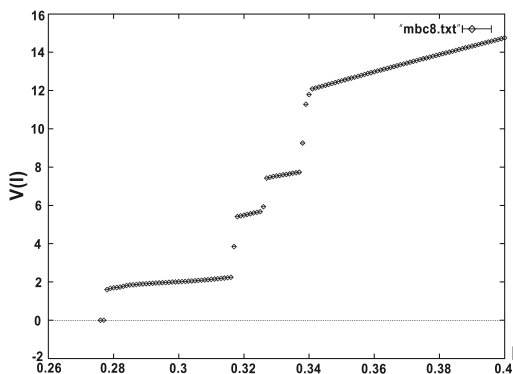


Figure 5. Multiple branching of IVC back branch,  $n = 8$ . NPBC. All points of IVC were calculated using “asymptotics” formulas except points of the interval on the picture calculated using simplest cross–scheme of the second order accuracy

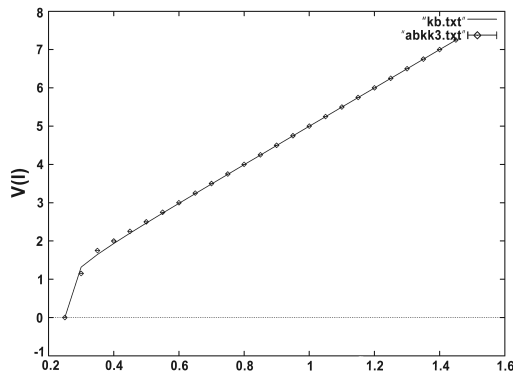


Figure 6. IVC back branch,  $n = 9$ . PBC. In difference with Fig. 1 two circles ( $I = 0.3, I = 0.25$ ) were calculated by (7), obtained by Bogolyubov–Krylov method

The Fig. 5 is similar to Fig. 4, but here the simplest explicit cross–scheme of the second order accuracy instead of the fourth order accuracy Runge–Kutta method was used. Remark that in both cases  $\Delta t = 0.1$  was chosen.

### 3. The Bogolyubov–Krylov Method Employment

For studying multiple branching in current-voltage characteristics analytically we dream to prolong “asymptotics” till  $\omega = 1$ ,  $I = 0.2$ . This moment we succeeded only to calculate analytically the whole hysteresis loop in the case of PBC. We developed approximate solution for the equation

$$\ddot{\eta}(t) = -\beta\dot{\eta}(t) - \sin(\eta(t)) + I$$

with given initial data  $\eta(0) = d_1$ ,  $\dot{\eta}(0) = d_2$ , in the case of small  $\beta$ ,  $I$ , using the Bogolyubov–Krylov method [9]. We consider  $\beta = 0.2$ ,  $0.2 < I < 0.4$ . Let  $\eta_0 = \arcsin(I)$ ,  $I = \sin(\eta_0)$ ,

$$\sin(\eta) - I = \cos(\eta_0)(\eta - \eta_0) - \frac{\sin(\eta_0)}{2}(\eta - \eta_0)^2 - \frac{\cos(\eta_0)}{6}(\eta - \eta_0)^3 + \dots$$

New variable  $\varphi = \eta - \eta_0$  satisfying equation

$$\ddot{\varphi} = -\beta\dot{\varphi} - \cos(\eta_0)\varphi + \frac{\sin(\eta_0)}{2}\varphi^2 + \frac{\cos(\eta_0)}{6}\varphi^3,$$

which can be rewritten as

$$\ddot{\varphi} + \beta\dot{\varphi} + \omega^2 \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{6} - \operatorname{tg}(\eta_0)\frac{\varphi^2}{2} \right) = 0, \quad \dot{\varphi} + \omega^2\varphi = \beta f(\varphi, \dot{\varphi}),$$

$\omega^2 = \cos(\eta_0) = (1 - I^2)^{1/4}$ . This equation has solution  $\varphi = a \cos(\psi)$ ,  $\dot{\varphi} = -a\omega \sin(\psi)$ ,  $\psi = \omega t + \vartheta$ , where  $a$  and  $\psi$  are determined by the first approximation equations

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\beta}{2}a, \quad \frac{d\psi}{dt} = \omega \left( 1 - \frac{a^2}{16} \right).$$

Following step by step to [9], we obtain

$$a = a_0 \exp(-\beta t/2), \quad \psi = \omega \left( t + \frac{a_0^2}{16\beta} (\exp(-\beta t) - 1) \right) + \vartheta,$$

$$\eta = \eta_0 + a_0 \exp(-\beta t/2) \cos \left( \omega \left( t + \frac{a_0^2 (\exp(-\beta t) - 1)}{16\beta} \right) + \vartheta \right), \quad (7)$$

$a_0$  and  $\vartheta$  are determined by given initial data:

$$d_1 = \eta_0 + a_0 \cos(\vartheta), \quad d_2 = -a_0\beta/2 - a_0\omega(1 - a_0^2/16) \sin(\vartheta). \quad (8)$$

Let  $x = a_0 \cos(\vartheta)$ ,  $y = a_0 \sin(\vartheta)$ ,  $a_0^2 = x^2 + y^2$ , the first equation of (5) gives  $x = d_1 - \eta_0$ , and  $y$  is determined of the third order polynomial equation

$$d_2 + \beta(d_1 - \eta_0)/2 + \omega y(1 - ((d_1 - \eta_0)^2 + y^2)/16) = 0.$$

This equation has at least one real root. When  $x$ ,  $y$  are found,  $a_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$  and  $\vartheta = \arcsin(y/a_0)$ . By such a way we could correct Fig. 1. In Fig. 6 the back branches of the hysteresis loop for the case of PBC are presented.

The solid curve is the same as in Fig. 1. The circles on the solid curve were found analytically using mixed analytical method: all points of the hysteresis loop were calculated using (5) — except two points ( $I = 0.3, 0.25$ ) calculated using (7).

## References

1. H. H. Zappe, Minimum Current and Related Topics in Josephson Tunnel Junction Devices, *Journal of Applied Physics* 44 (3) (1973) 1371–1377.
2. Y. Matsuda, M. B. Gaifullin, K. Kumagai, et al., Collective Josephson Plasma Resonance in the Vortex State of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ , *Physical Review Letters* 75 (24) (1995) 4512–4515.
3. M. Machida, T. Koyama, M. Tachiki, Dynamical Breaking of Charge Neutrality in Intrinsic Josephson Junctions: Common Origin for Microwave Resonant Absorptions and Multiple-Branch Structures in I-V Characteristics, *Physical Review Letters* 83 (22) (1999) 4618–4621.
4. Yu. M. Shukrinov, F. Mahfouzi, N. F. Pedersen, Investigation of the Breakpoint Region in Stacks with a Finite Number of Intrinsic Josephson Junctions, *Physical Review B* 75 (10) (2007) 104508.
5. S. I. Serdyukova, Numerical-Analytical Method for Computing the Current-Voltage Characteristics for a Stack of Josephson Junctions, *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 52 (11) (2012) 1590–1596.
6. W. Neun, REDUCE User's Guide for Unix Systems. Version 3.8 (2004).  
URL <http://sid.ethz.ch/debian/reduce/reduce-algebra-0+20110221/ps1/unix-oper.pdf>
7. S. I. Serdyukova, Determination of IVC Breakpoint for Josephson Junction Stack. Non-Periodic Boundary Conditions with  $\gamma = 1$ , *Particles and Nuclei, Letters* 11 (4) (2014) 784–795.
8. N. Levinson, Asymptotic Behavior of Solutions of Non-linear Differential Equations, *Studies in Applied Mathematics* 48 (4) (1969) 285–297.
9. N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolskiy, *Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations*, Fizmatlit, Moscow, 1963, in Russian.

УДК 519.6

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-373-379

### Вычисление ВАХ для систем джозефсоновских переходов. О построении асимптотики вблизи точки излома

С. И. Сердюкова

*Лаборатория информационных технологий  
Объединённый институт ядерных исследований  
ул. Жолио-Кюри, д. 6, Дубна, Московская область, Россия, 141980*

Решая систему  $n$  существенно нелинейных дифференциальных уравнений, мы получаем вольт-амперную характеристику (ВАХ) для системы  $n$  джозефсоновских переходов (JJ) в виде петли гистерезиса. На обратном пути при подходе к точке излома  $I_b$  напряжение  $V(I)$  резко падает к нулю. Кроме того, при численном моделировании (случай неперодических граничных условий) ВАХ в окрестности точки излома наблюдается множественное ветвление ВАХ вблизи точки  $I_b$ . Интересно исследовать это явление аналитически, развивая асимптотические методы. Удалось построить простые «асимптотические» формулы, пригодные для вычисления всех точек ВАХ, кроме близких к  $I_b$ . Был предложен численно аналитический метод, позволивший существенно сократить время вычисления ВАХ. Этот метод показал хорошие результаты в частности при вычислении множественных ветвлений ВАХ. Система REDUCE использовалась во всех проведённых расчётах. Впервые удалось вычислить аналитически все точки петли гистерезиса. Приближённое решение в окрестности точки излома (случай периодических граничных условий) построено по методу Боголюбова–Крылова.

**Ключевые слова:** джозефсоновские переходы, сверхпроводимость, высокие температуры, вольт-амперные характеристики, точка излома, множественные ветвления, схема-крест второго порядка точности, вывод асимптотических формул, метод Левинсона, метод Боголюбова–Крылова, система REDUCE

## Литература

1. *Zappe H. H.* Minimum Current and Related Topics in Josephson Tunnel Junction Devices // Journal of Applied Physics. — 1973. — Vol. 44, No 3. — Pp. 1371–1377.
2. Collective Josephson Plasma Resonance in the Vortex State of  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$  / Y. Matsuda, M. B. Gaifullin, K. Kumagai et al. // Physical Review Letters. — 1995. — Vol. 75, No 24. — Pp. 4512–4515.
3. *Machida M., Koyama T., Tachiki M.* Dynamical Breaking of Charge Neutrality in Intrinsic Josephson Junctions: Common Origin for Microwave Resonant Absorptions and Multiple-Branch Structures in I-V Characteristics // Physical Review Letters. — 1999. — Vol. 83, No 22. — Pp. 4618–4621.
4. *Shukrinov Yu. M., Mahfouzi F., Pedersen N. F.* Investigation of the Breakpoint Region in Stacks with a Finite Number of Intrinsic Josephson Junctions // Physical Review B. — 2007. — Vol. 75, No 10. — P. 104508.
5. *Serdyukova S. I.* Numerical-Analytical Method for Computing the Current-Voltage Characteristics for a Stack of Josephson Junctions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, No 11. — Pp. 1590–1596.
6. *Neun W.* REDUCE User's Guide for Unix Systems. Version 3.8. — 2004. — <http://sid.ethz.ch/debian/reduce/reduce-algebra-0+20110221/ps1/unix-oper.pdf>.
7. *Serdyukova S. I.* Determination of IVC Breakpoint for Josephson Junction Stack. Non-Periodic Boundary Conditions with  $\gamma = 1$  // Particles and Nuclei, Letters. — 2014. — Vol. 11, No 4. — Pp. 784–795.
8. *Levinson N.* Asymptotic Behavior of Solutions of Non-linear Differential Equations // Studies in Applied Mathematics. — 1969. — Vol. 48, No 4. — Pp. 285–297.
9. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Физматлит, 1963.

© Serdyukova S. I., 2017

### Для цитирования:

*Serdyukova S. I.* IVC Calculation Problem for Josephson Junction Stacks. On Asymptotic Construction near the Breakpoint // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2017. — Vol. 25, No 4. — Pp. 373–379. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-373-379.

### For citation:

Serdyukova S. I. IVC Calculation Problem for Josephson Junction Stacks. On Asymptotic Construction near the Breakpoint, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 373–379. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-373-379.

### Сведения об авторах:

**Сердюкова Светлана Ивановна** — профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник научного отдела вычислительной физики лаборатории информационных технологий Объединённого института ядерных исследований, г. Дубна (e-mail: [sis@jinr.ru](mailto:sis@jinr.ru), тел.: +7 (49621) 64731)

### Information about the authors:

**Serdyukova S. I.** — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, leading researcher of Scientific Department of Computational Physics of Information Technology Laboratory of Joint Institute for Nuclear Research, Dubna (e-mail: [sis@jinr.ru](mailto:sis@jinr.ru), phone: +7 (49621) 64731)

---

# Физика

УДК 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389

## Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями

Д. М. Янишевский

*Кафедра высшей математики*

*Пермский государственный национальный исследовательский университет (ПГНИУ)  
ул. Букирева, д. 15, г. Пермь, Россия, 614990*

В рамках общей теории относительности построены космологические модели с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки в присутствии в первом случае поля излучения, а во втором — идеальной жидкости с пылевидным уравнением состояния. Вращающаяся тёмная энергия моделируется анизотропной идеальной жидкостью. Рассмотрены статические и динамические космологические режимы, при этом уравнения состояния материальных параметров в первом случае вводятся отчасти как исходные данные для анизотропной жидкости, а во втором — для идеальной изотропной жидкости, моделирующей барионную материю. Методом анализа замкнутых времениподобных линий получены ограничения, которые требуется наложить на параметры метрики, обеспечивающие причинность. Выяснены условия, при которых изначально анизотропная тёмная энергия энергетически доминирует, а также когда имеет место осциллирующий космологический режим. Показано, что модели при рассмотрении расширения от планковских масштабов до современного размера наблюдаемой Вселенной дают удовлетворительную величину порядка угловой скорости её вращения. Полученные решения могут быть применены к изучению эффектов, имеющих место в современную эпоху, а также во время инфляционной стадии.

**Ключевые слова:** космологическое расширение, пылевидное уравнение состояния, анизотропия Вселенной, ускоренное расширение, метрика VIII типа Бьянки

## 1. Введение

Обращение к анизотропной космологии обусловлено наблюдательными фактами [1–3]. В нынешнюю эпоху Вселенная расширяется с ускорением, причиной которого является, скорее всего, тёмная энергия. В работах [4–6] авторами были получены результаты для метрики рассматриваемого типа, но с другими материальными источниками, а в работах [7, 8] — в других метриках. В данной работе в рамках общей теории относительности построена космологическая модель с расширением и вращением с метрикой типа VIII по Бьянки вида

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} \vartheta^\alpha \vartheta^\beta, \quad (1)$$

где  $\eta_{\alpha\beta}$  — элементы лоренцевой матрицы,  $\alpha, \beta = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\vartheta^\alpha$  — ортонормированные 1-формы, выражающиеся через масштабный фактор  $R$  следующим образом:

$$\vartheta^0 = dt - R\nu_A e^A, \quad \vartheta^A = dt - RK_A e^A,$$

при этом  $\nu_A = \{0, 0, d\}$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$ .

Базисные 1-формы  $e^A$  имеют следующий вид:

$$e^1 = \operatorname{ch}(y) \cos(z) dx - \sin(z) dy, \quad e^2 = \operatorname{ch}(y) \sin(z) dx + \cos(z) dy, \quad e^3 = \operatorname{sh}(y) dx + dz. \quad (2)$$



Источниками гравитации являются анизотропная жидкость, чистое излучение, а также идеальная изотропная жидкость. Для метрики (1) ищется космологическое решение уравнений Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}R = T_{\alpha\beta}. \quad (3)$$

## 2. Космологическая модель с анизотропной жидкостью и чистым излучением

Возьмём параметры метрики  $K_A$  в самом общем виде  $K_A = \{a, b, c\}$ , при этом тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik}^{(1)} = (p + \rho) u_i u_k + (\sigma - p) \chi_i \chi_k + (\pi - p) \xi_i \xi_k - p \eta_{ik}, \quad (4)$$

где векторы анизотропии  $\chi = \{0, 0, 1, 0\}$ ,  $\xi = \{0, 0, 0, 1\}$  и  $u^i = \delta_0^i$  — 4-скорость сопутствующей анизотропной жидкости.

Тензор энергии-импульса чистого излучения

$$T_{\alpha\beta}^{(2)} = w k_\alpha k_\beta \quad (w > 0), \quad (5)$$

причём тетрадные компоненты волнового вектора излучения  $k_\alpha = \{k_0, 0, 0, k_3\}$ , т. е.  $k_0 = k_3$ . Результирующий тензор энергии-импульса даётся формулой

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}^{(1)} + T_{\alpha\beta}^{(2)}. \quad (6)$$

В итоге из (3) для метрики (1) получим систему уравнений

$$\frac{-(a^4 + 2a^2(-b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 - 3c^2d^2 + 4a^2b^2((d^2 - 3c^2)\dot{R}^2 + 2d^2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \rho + wk_0^2, \quad (7)$$

$$\frac{3a^4 + 2a^2(-b^2 + c^2) - (b^2 + c^2)^2 + c^2d^2 - 4a^2b^2(c^2 - d^2)(\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R)}{4a^2b^2c^2R^2} = p, \quad (8)$$

$$\frac{-(a^4 - 3b^4 - 2b^2c^2 + c^4 + 2a^2(b^2 + c^2) - c^2d^2 + 4a^2b^2((c^2 - d^2)(\dot{R}^2 + 2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \sigma, \quad (9)$$

$$\frac{-(a^4 + b^4 - 2b^2c^2 - 3c^4 - 2a^2(b^2 + c^2) + c^2d^2 + 4a^2b^2((c^2 - 3d^2)\dot{R}^2 + 2c^2\ddot{R}R))}{4a^2b^2c^2R^2} = \pi + wk_0^2, \quad (10)$$

$$\frac{d(c^2/a^2b^2 + 4\dot{R}^2 - 4\ddot{R}R)}{2cR^2} = wk_0^2, \quad (11)$$

$$\frac{d(a^2 - b^2)\dot{R}}{abc^2R^2} = 0. \quad (12)$$

Последнее уравнение из системы (7)–(12) открывает два возможных космологических сценария: статический, если масштабный фактор не зависит от времени, и динамический, когда  $a = b$ .

### 2.1. Статическое решение с излучением

Если  $dR/dt = 0$ , т. е.  $R = \text{const}$ , то из системы уравнений (9)–(12) следует, что материальные параметры равны следующим значениям:

$$\rho = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 - 2c^2(a^2 + b^2) - b^4 - c^4 - 2c^3d + 3c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \quad (13)$$

$$p = \frac{3a^4 + 2a^2(c^2 - b^2) - (b^2 + c^2)^2 + c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{-a^4 + 3b^4 - c^4 + 2b^2c^2 + c^2d^2 - 2a^2(b^2 + c^2)}{4a^2b^2c^2R^2}, \quad (15)$$

$$\pi = \frac{-a^4 + 2a^2b^2 + 2c^2(a^2 + b^2) - b^4 + 3c^4 - 2c^3d - c^2d^2}{4a^2b^2c^2R^2}, \quad (16)$$

$$wk_0^2 = \frac{cd}{2a^2b^2R^2}. \quad (17)$$

Данное решение можно использовать для исследования космологических эффектов, обусловленных только вращением Вселенной.

### 2.2. Нестатическое решение

Если  $a = b$ , то из системы уравнений (9)–(12) следует, что  $\sigma = p$ , а также

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)\dot{R}^2 + 8a^4(c - d)dR\ddot{R}}{4a^4c^2R^2}, \quad (18)$$

$$\pi + \rho = \frac{(c - d)^2(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R}))}{2a^4c^2R^2}, \quad (19)$$

$$p + \rho = \frac{-c(2a^2 + (c - d)(c + 2d)) + 4a^4(c - d)(\dot{R}^2 - R\ddot{R})}{2a^4cR^2}. \quad (20)$$

Для нас представляют интерес модели с вращением и ускорением, поэтому рассмотрим нашу жидкость в качестве вакуумоподобной среды вдоль одной оси. В случае такого уравнения состояния  $p = -\rho$  получается следующее уравнение:

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \quad (21)$$

где  $L = c(2a^2 + (c - d)(c + 2d))/4(c - d)a^4$ . Оно имеет следующие возможные решения:

$$\begin{aligned} R &= R_0 \operatorname{sh}(Ht), & R_0 &= \sqrt{L}/H, & \text{если } L > 0, \\ R &= R_0 \operatorname{ch}(Ht), & R_0 &= \sqrt{-L}/H, & \text{если } L < 0, \\ R &= R_0 e^{Ht}, & & & \text{если } L = 0. \end{aligned}$$

Постоянная интегрирования  $H$  характеризует темп раздувания. При  $L > 0$  получается следующий вид эволюции параметров материи:

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)H^2R_0^2\operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2\operatorname{sh}^2(Ht)} +$$

$$+ \frac{8a^4(c-d)dH^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (22)$$

$$p = \frac{c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) - 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)H^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} - \frac{8a^4(c-d)dH^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (23)$$

$$k_0^2 = \frac{d(c^2 + 4a^4H^2R_0^2)}{2wca^4R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}, \quad (24)$$

$$\pi = \frac{c^2(4a^2 + 3c^2 - 2cd - d^2) - 4a^4(c^2 + 2cd - 3d^2)H^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} + \frac{8a^4(d-c)cH^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}. \quad (25)$$

Чтобы плотность энергии была положительной, требуется выполнение условия  $c^2 > d^2$ . Легко убедиться, что при  $t \rightarrow \infty$ :  $\rho \rightarrow 3(c^2 - d^2)H^2/c^2$ ,  $k_0 \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 3(c^2 - d^2)H^2/c^2$ ,  $\pi \rightarrow 3(d^2 - c^2)H^2/c^2$ , т. е. на больших временах анизотропная жидкость энергетически доминирует, а её давление асимптотически изотропизируется. В случае  $L \leq 0$  имеет место такое же асимптотическое поведение материи.

Также в рамках использования уравнения состояния  $p = -\rho$  при  $L > 0$  имеет место особое решение  $R = \sqrt{Lt}$ , тогда эволюция материальных параметров даётся следующими соотношениями:

$$\rho = \frac{-c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) + 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}, \quad (26)$$

$$p = \frac{c^2(4a^2 + c^2 + 2cd - 3d^2) - 4a^4(3c^2 - 2cd - d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}, \quad (27)$$

$$k_0^2 = \frac{d(c^2 + 4a^4L)}{2wca^4Lt^2}, \quad (28)$$

$$\pi = \frac{c^2(4a^2 + 3c^2 - 2cd - d^2) - 4a^4(c^2 + 2cd - 3d^2)L}{4a^4c^2Lt^2}. \quad (29)$$

В случае уравнения состояния  $\pi = -\rho$  из (18)–(20) получается следующее уравнение:

$$R\ddot{R} - \dot{R}^2 = c^2/4a^4. \quad (30)$$

Его общее решение  $R = Me^{Ht} + c^2e^{-Ht}/(16MH^2a^4)$  выбором константы интегрирования  $M = c/4Ha^2 = R_0/2$  приводится к виду  $R = R_0 \operatorname{ch}(Ht)$ , т. е. является несингулярным независимо от коэффициентов метрики. Его асимптотическое поведение аналогично случаю, охватываемому уравнениями (26)–(29), т. е. и в этом случае положительность плотности энергии обеспечивается условием  $c^2 > d^2$ , а давления  $p$  и  $\pi$  стремятся к общему пределу.

Определим, является ли модель с метрикой, определяемой условиями (1)–(2), причинной, методом, предложенным в работе [9]. Для этого предположим существование замкнутых времениподобных кривых, тогда на каждой из которых найдётся

точка, удовлетворяющая условию  $dt/dS = 0$ , тогда как  $V^\mu V_\mu > 0$  в силу времениподобности. Чтобы удовлетворить этим двум условиям, квадратичная форма из компонент касательного вектора, с матрицей коэффициентов из пространственных компонент метрического тензора, должна быть положительно определена. Матрица формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -(1/2)(a^2 - c^2 + d^2 + (a^2 + c^2 - d^2) \operatorname{ch}(2y))R^2 & 0 & (d^2 - c^2)R^2 \operatorname{sh}(y) \\ 0 & -a^2 R^2 & 0 \\ (d^2 - c^2)R^2 \operatorname{sh}(y) & 0 & (d^2 - c^2)R^2 \end{pmatrix}.$$

Вид этой матрицы, в силу условия  $c^2 - d^2 > 0$  при выполнении неравенства  $a^2 > c^2 - d^2$  таков, что с помощью критерия Сильвестра легко убедиться в неположительной определённости соответствующей квадратичной формы. Таким образом, мы пришли к противоречию с гипотезой о существовании замкнутых времениподобных линий, следовательно, рассмотренные в работе динамические модели являются причинными.

### 3. Космологическая модель с изотропной и анизотропной жидкостями

В данном случае источниками гравитации являются анизотропная жидкость, которая описывает вращающуюся тёмную энергию, и идеальная жидкость с уравнением состояния пыли, описывающая барионную материю. Коэффициенты  $K_A$  метрики (1) взяты в виде  $K_A = \{a, b, b\}$ . Тензор энергии-импульса анизотропной жидкости в тетрадном представлении имеет вид

$$T_{ik}^{(1)} = (p + \rho) u_i u_k + (\pi - p) \xi_i \xi_k - p \eta_{ik}, \quad (31)$$

где  $p, \pi$  — давления анизотропной жидкости в трёх направлениях, определяемых тетрадой,  $\rho$  — плотность энергии идеальной жидкости,  $\xi = \{0, 0, 0, 1\}$  — вектор анизотропии,  $u^i \delta_0^i$  — 4-скорость сопутствующей анизотропной жидкости.

Тензор энергии-импульса идеальной пылевидной жидкости имеет вид:

$$T_{ik}^{(2)} = \mu v_i v_k, \quad (32)$$

где, соответственно,  $v = \{v_0, 0, 0, v_3\}$  и  $\mu$  — 4-скорость и плотность идеальной изотропной жидкости.

В итоге тензор энергии-импульса имеет вид

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)} = (p + \rho) u_i u_k + (\pi - p) \xi_i \xi_k - p \eta_{ik} + \mu v_i v_k. \quad (33)$$

Из (3) для метрики (1) получим систему уравнений Эйнштейна:

$$\frac{c^2(3d^2 - c^2 - 4a^2) + 4a^4(3c^2 - d^2)\dot{R}^2 - 8a^4 d^2 R \ddot{R}}{4a^4 c^2 R^2} = \mu v_0^2 + \rho, \quad (34)$$

$$\frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 + 2R\ddot{R}))}{4a^4 c^2 R^2} = p, \quad (35)$$

$$\frac{c^2(4a^2 + 3c^2 - d^2) + 4a^4(3d^2 - c^2)\dot{R}^2 - 8a^4 c^2 R \ddot{R}}{4a^4 c^2 R^2} = \pi + \mu v_3^2, \quad (36)$$

$$\frac{d(c^2 + 4a^4(\dot{R}^2 - R\ddot{R}))}{2a^4 c R^2} = \mu v_0 v_3. \quad (37)$$

### 3.1. Нестатические решения

В данном случае число неизвестных превышает число уравнений. Избавляемся от этой проблемы наложением следующих условий:

$$v_0 = Sv_3, \quad S > 1, \quad \rho = k/a^2 R^2, \quad k > 0. \quad (38)$$

Из системы уравнений (34)–(37) при условиях (38) следует следующее уравнение для определения масштабного фактора:

$$2d(cS - d)R\ddot{R} + (3c^2 - d^2 - 2cdS)\dot{R}^2 = c^2(4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2)/4a^4. \quad (39)$$

Если  $cS = d$ , то найдутся такие  $c$  и  $d$ , что решение уравнения (39) даётся соотношением

$$R = R_0 t, \quad (40)$$

где

$$R_0 = c \sqrt{\frac{4a^2(1 + k) + 2cdS + c^2 - 3d^2}{(3c^2 - d^2 - 2cdS)4a^4}}. \quad (41)$$

Эволюция параметров материи даётся условием (39) и следующими уравнениями:

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0^2)}{4a^4 c^2 R_0^2 t^2}, \quad (42)$$

$$v_3 = \text{const}, \quad (43)$$

$$\mu = \frac{d(c^2 + 4a^4 R_0^2)}{2Sv_3^2 a^4 c R_0^2 t^2}, \quad (44)$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2 S - c^2 S - 2cd)R_0^2 + c^2(2cd + d^2 S - 4a^2 S - 3c^2 S)4a}{4a^4 c^2 R_0^2 t^2}. \quad (45)$$

Рассмотрим ситуацию, когда вместо условия (38) выполняется  $\mu = \alpha/R^2$ ,  $\alpha > 0$ . В этом случае вместо (34)–(37) следует, что

$$\dot{R}^2 - R\ddot{R} = L, \quad (46)$$

$$L = \frac{\alpha c S v_3^2}{2d} - \frac{c^2}{4a^4}. \quad (47)$$

Решение уравнения (47) даётся интегралом  $\int dR/\sqrt{L + DR^2} = \int dt$ , где  $D$  — постоянная. Рассмотрим, как меняется решение уравнения (47) в зависимости от знаков  $D$  и  $L$ . Отметим, что  $L$  и  $D$  не могут быть одновременно отрицательными.

Если  $L > 0$ ,  $D > 0$ , то  $R = R_0 \text{sh}(Ht)$ , где  $H = \sqrt{D}$ ,  $R_0 = \sqrt{L/D}$ .

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2 R_0^2 \text{ch}^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0^2 \text{sh}^2(Ht)} + \frac{8a^4(cS - d)dH^2 R_0^2 \text{sh}^2(Ht)}{4a^4 c^2 R_0^2 \text{sh}^2(Ht)}, \quad (48)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4 R_0^2 H^2 (\text{ch}^2(Ht) + 2 \text{sh}^2(Ht)))}{4a^4 c^2 R_0^2 \text{sh}^2(Ht)}, \quad (49)$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S) + 4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2SR_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} + \frac{8a^4(d - cS)dH^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} \quad (50)$$

при  $t \rightarrow \infty$   $\rho \rightarrow 3(c^2 - d^2)H^2/c^2$ ,  $k_0 \rightarrow 0$ ,  $p \rightarrow 3(d^2 - c^2)H^2/c^2$ ,  $\pi \rightarrow 3(d^2 - c^2)H^2/c^2$ ,  $\mu \rightarrow 0$ , т.е. анизотропная жидкость в рассматриваемом случае вакуумоподобна и асимптотически изотропизируется.

Если же  $L < 0$ ,  $D > 0$ , то  $R = R_0 \operatorname{ch}(Ht)$ , где  $H = \sqrt{D}$ ,  $R_0 = \sqrt{-L/D}$ .

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)} + \frac{8a^4(cS - d)dH^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}, \quad (51)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4R_0^2H^2(\operatorname{sh}^2(Ht) + 2 \operatorname{ch}^2(Ht)))}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}, \quad (52)$$

$$\pi = \frac{4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht) + 8a^4c(d - cS)H^2R_0^2 \operatorname{ch}^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)} + \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S)}{4a^4c^2R_0^2 \operatorname{sh}^2(Ht)}. \quad (53)$$

Асимптотическое поведение плотностей и давлений останется таким же, как и в предыдущем случае, стоит лишь отметить, что именно эта модель позволяет корректно моделировать предельный переход в силу соотношения (47).

Если  $L = 0$ ,  $D > 0$ , то  $R = R_0 e^{Ht}$ , где  $H = \sqrt{D}$ . В данном случае для параметров материи также выполняются соотношения, аналогичные (51)–(53) при замене гиперболических функций экспонентой.

В случае  $L > 0$ ,  $D < 0$   $R = R_0 \sin(Ht)$ , где  $H = \sqrt{-D}$ ,  $R_0 = \sqrt{-L/D}$ . При этом

$$\rho = \frac{c^2(3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS) + 4a^4(3c^2 - d^2 - 2cDS)H^2R_0^2 \cos^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \sin^2(Ht)} - \frac{8a^4(cS - d)dH^2R_0^2 \sin^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \sin^2(Ht)}, \quad (54)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)(c^2 + 4a^4R_0^2H^2(1 - 3 \sin^2(Ht)))}{4a^4c^2R_0^2 \sin^2(Ht)}, \quad (55)$$

$$\pi = \frac{c^2(-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S) + 4a^4(3d^2S - c^2S - 2cd)H^2R_0^2 \cos^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \sin^2(Ht)} - \frac{8a^4c(d - cS)H^2R_0^2 \sin^2(Ht)}{4a^4c^2R_0^2 \sin^2(Ht)}, \quad (56)$$

$$\mu = \frac{\alpha}{R_0^2 \sin^2(Ht)}, \quad (57)$$

т. е. эта космологическая модель является осциллирующей.

Качественное рассмотрение первой стадии инфляции при расширении Вселенной от планковского масштаба до современного размера наблюдаемой Вселенной  $10^{28}$  см, как и в работе [10], даёт в настоящее время угловую скорость вращения, равную по порядку  $10^{-11}$  рад/год, что совпадает с оценками [11, 12]. Параметры тёмной энергии — расширение  $\vartheta$ , ускорение  $A$  и параметр вращения  $\omega$  — даются следующими формулами:

$$\vartheta = 3\dot{R}/R, \quad (58)$$

$$A = \dot{R}/cR, \quad (59)$$

$$\omega = d/2a^2R. \quad (60)$$

Помимо ситуаций, рассмотренных выше, возможен ещё и случай особого решения при условии  $L > 0$ , с точностью до значения  $R_0$  описывающийся формулой (40). Эволюция плотностей и давлений такой модели имеет вид, аналогичный (42)–(45).

### 3.2. Статическое решение

Наконец, отметим особое решение уравнения (46), соответствующее ситуации  $L = 0$ , а именно  $R = \text{const}$ . Для данного статического решения имеют место следующие значения плотностей и давлений, обладающие физическим смыслом при всех  $d \notin [(cS - \sqrt{c^2(S^2 + 3) + 4a^2})/3; (cS + \sqrt{c^2(S^2 + 3) + 4a^2})/3]$ :

$$\rho = \frac{3d^2 - 4a^2 - c^2 - 2cdS}{4a^4R^2}, \quad (61)$$

$$p = \frac{(d^2 - c^2)}{4a^4R^2}, \quad (62)$$

$$\pi = \frac{-2cd + 4a^2S + 3c^2S - d^2S}{4a^4SR^2}, \quad (63)$$

$$\mu = \frac{\alpha}{R^2}. \quad (64)$$

Во всех случаях данная статическая модель является причинной, если  $a^2 > c^2 - d^2$  при условии  $|c| > |d|$ .

## 4. Заключение

В рассмотренных космологических моделях с двумя типами источников найдены стационарные и нестационарные решения. Обнаружены условия, при которых модели причинны, а также становятся асимптотически изотропными. Модели предсказывают согласующийся с экспериментами порядок угловой скорости вращения Вселенной в современную эпоху.

## Литература

1. Land K., Magueijo J. Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 95. — Pp. 071301–071304.

2. *Payez A., Cudell J. R., Hutsemékers D.* New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2012. — Vol. 2012, No 07. — P. 041.
3. *Liddle A. R., Cortes M.* Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe // *Physical Review Letters*. — 2013. — Vol. 111. — P. 111302.
4. *Панов В. Ф.* Вращающиеся космологические модели типа VIII по Бьянки // *Известия Вузов. Физика*. — 1989. — № 5. — С. 98–103.
5. *Bradley G. M., Sviestins E.* Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow // *GRG*. — 1984. — Vol. 16, No 12. — Pp. 1119–1133.
6. *Kuvshinova E. V., Pavelkin V. N., Panov V. F.* Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy // *Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Vol. 20, No 1. — Pp. 141–143.
7. *Бобровских Е. И., Панов В. Ф.* Нестационарные космологические модели с вращением типа II по Бьянки // *Известия Вузов. Физика*. — 2012. — Т. 55, № 4. — С. 113–114.
8. *Панов В. Ф., Сандакова О. В.* Космологические модели типа IX по Бьянки // *Известия Вузов. Физика*. — 2011. — Т. 54, № 3. — С. 82–85.
9. *Maitra S. C.* Stationary Dust — Filled Cosmological Solution with  $\Lambda = 0$  and without Closed Timelike Lines // *Journal of Mathematical Physics*. — 1966. — Vol. 7, No 6. — Pp. 1025–1030.
10. *Янишевский Д. М.* Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с анизотропной жидкостью, скалярным полем и излучением // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика*. — 2017. — Т. 25, № 2. — С. 192–198.
11. *Кречет В. Г.* Современные космологические данные и вращение вселенной // *Известия Вузов. Физика*. — 2005. — Т. 48, № 3. — С. 3–6.
12. *Kuvshinova E. V., Panov V. F., Sandakova O. V.* Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations // *Gravitation and Cosmology*. — 2014. — Vol. 20, No 2. — Pp. 138–140.

UDC 530.12:531.551

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389

## Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Fluid Sources

D. M. Yanishevskiy

*Department of Higher Mathematics  
Perm State University  
15, Bukireva St., Perm, 614990, Russian Federation*

Within the general theory of relativity the Bianchi type VIII cosmological models with rotation and expansion have been built. The first case includes a field of radiation, the second one — a perfect fluid with dust-like equation of state. Perfect anisotropic fluid imitates the rotating dark energy. Static and dynamic cosmological modes have been observed, at the same time the equations of state are partly postulated in the first case for the anisotropic fluid and in the second case — for the perfect isotropic fluid, that imitates baryon matter. The analysis of absence of closed time-like curves has been done, so the models have been proved to be casual when the metric parameters satisfy the found conditions. Also the conditions, when the anisotropic fluid's equation of state becomes vacuum-like, the energy of the fluid dominates and it becomes asymptotically isotropic, have been cleared out. Specialities of the oscillating mode have been observed. The order of present angular velocity value, calculated within the cosmological models, has been found to be quite satisfactory when expanding from the Plank



scale to the present size of observed part of the Universe. The found solutions may be used for effects taking place nowadays and also during the inflationary stage.

**Key words and phrases:** cosmological expansion, dust-like equation of state, anisotropy of the Universe, accelerated expansion, type VIII Bianchi metric

## References

1. K. Land, J. Magueijo, Examination of Evidence for a Preferred Axis in the Cosmic Radiation Anisotropy, *Physical Review Letters* 95 (2005) 071301–071304.
2. A. Payez, J. R. Cudell, D. Hutsemékers, New Polarimetric Constraints on Axion-Like Particles, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2012 (07) (2012) 041.
3. A. R. Liddle, M. Cortes, Cosmic Microwave Background Anomalies in an Open Universe, *Physical Review Letters* 111 (2013) 111302.
4. G. M. Bradley, E. Sviestins, Some Rotating, Time-Dependent Bianchi Type VIII Cosmologies with Heat Flow, *GRG* 16 (12) (1984) 1119–1133.
5. E. V. Kuvshinova, V. N. Pavelkin, V. F. Panov, Bianchi Type VIII Cosmological Models with Rotating Dark Energy, *Gravitation and Cosmology* 20 (1) (2014) 141–143.
6. E. I. Bobrovskikh, V. F. Panov, Unstationary Bianchi Type II Cosmological Models with Rotation, *Russian Physics Journal* 55 (4) (2012) 113–114.
7. V. F. Panov, O. V. Sandakova, Bianchi Type IX Cosmological Models, *Russian Physics Journal* 54 (3) (2011) 82–85.
8. S. C. Maitra, Stationary Dust-Filled Cosmological Solution with  $\Lambda = 0$  and without Closed Timelike Lines, *Journal of Mathematical Physics* 7 (6) (1966) 1025–1030.
9. D. M. Yanishevskiy, Rotating Bianchi Type VIII Cosmological Models with Anisotropic Fluid, Scalar Field and Radiation, *RUDN Journal of Mathematics, Information Science and Physics* 25 (2) (2017) 192–198.
10. V. G. Krechet, Modern Cosmological Data and Rotation of the Universe, *Russian Physics Journal* 48 (3) (2005) 219–223.
11. E. Kuvshinova, V. F. Panov, O. V. Sandakova, Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical Observations, *Rotating Nonstationary Cosmological Models and Astrophysical observations* 20 (2) (2014) 138–140.

© Янишевский Д. М., 2017

### Для цитирования:

Янишевский Д. М. Космологические модели с вращением типа VIII по Бьянки с источниками-жидкостями // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 380–389. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389.

### For citation:

Yanishevskiy D. M. Rotating Cosmological Bianchi Type VIII Models with Fluid Sources, *RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics* 25 (4) (2017) 380–389. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-380-389. In Russian.

### Сведения об авторах:

**Янишевский Даниил Михайлович** — соискатель кафедры высшей математики ПГНИУ (e-mail: ydm86@yandex.ru, тел.: +7 (922) 6465325)

### Information about the authors:

**Yanishevskiy D. M.** — applicant of the Department of Higher Mathematics of Perm State University (e-mail: ydm86@yandex.ru, phone: +7 (922) 6465325)

---

UDC 530.12  
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-390-400

## Two Approaches to Interpretation of Hubble Diagram

A. E. Pavlov

*Department of Strength of Materials and Machine Parts  
Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy  
49 Timiryazevskaya St., Moscow, 127550, Russian Federation*

Supernovae of type Ia are used as standard candles in modern cosmology, they serve to test cosmological models. Interpretation of the Hubble diagram based on the standard cosmological model led cosmologists to conclusion that the Universe is filled mostly with cosmic dust and mysterious dark energy.

In this paper we present exact solutions of the Friedmann equation in standard cosmology and conformal cosmology. The theoretical curves interpolating the Hubble diagram for the latest supernova data are expressed in an analytical form. The functions belong to the class of meromorphic Weierstrass functions. Both approaches describe the modern Hubble diagram with the same accuracy. Physical interpretation from the standpoint of conformal cosmology is preferable, since supernova data are described without using a  $\Lambda$ -term. In the standard cosmology, the Hubble diagram is described by some characteristics: a Hubble parameter  $H(t)$ , a deceleration  $q(t)$ , and a jerk  $j(t)$ . As calculations show, the deceleration parameter  $q$  changes its sign during the evolution of the Universe, the  $j$ -parameter remains constant. In the modern era, the Universe expands with acceleration, and in the past its acceleration was negative. The change in the sign of acceleration, without a clear physical reason, puzzles cosmologists.

It seems obvious to us that to study objects dislocated from us at distances of billions of light years, we should not use the coordinate time customary for work in laboratories, but the conformal time. In conformal coordinates, the behavior of photons is described as in the Minkowski space. The time intervals  $dt$  and  $d\eta$  are different, they are related by the scale factor:  $dt = ad\eta$ . The conformal luminosity distance is longer than the standard luminosity distance, which is manifested when observing distant stellar objects. As a result, the effective magnitude value — the redshift relationship, on which the Hubble diagram is constructed, will be different. Using the conformal Friedmann equation, we introduce the conformal parameters  $H(\eta)$ ,  $q(\eta)$ ,  $j(\eta)$ . All parameters remain positive during the evolution of the Universe. The scale factor grows with deceleration. The Universe does not experience a jerk.

**Key words and phrases:** supernovae of type Ia, Friedmann equation, Weierstrass functions, Hubble diagram, cosmological parameters,  $\Lambda$ -term

### 1. Introduction

A type Ia supernova occurs when a white dwarf in a double star system accumulates a mass by accretion that sufficient to overcome the Chandrasekhar limit. The nature of explosion of such a supernova depends on its prehistory insignificantly. Redshifts  $z > 0.1$  are large enough to ignore peculiar motions of light sources. Supernovae type Ia, sufficiently bright stars whose absolute luminosity is known with good accuracy, they serve as standard candles for testing cosmological models. Two collaborations The Supernova Cosmology Project and High-z Supernova Search Team compared the results of observations of supernovae with theoretical predictions for luminosity distances as redshift functions. Interpretation of the Hubble diagram on the basis of a standard cosmological model with adjustable cosmological parameters led cosmologists to conclusion that the Universe is filled mainly with dust and, so-called, dark energy — a substance with an equation of state not found in Nature [1–3]. Phenomenological approach has not led to an understanding of the state of matter from which the Universe consists.

Conformal cosmological model [4], based on conformal Dirac's variables [5], allows to explain data on supernovae without  $\Lambda$ -term [6–9]. We show that solutions of

the differential Friedmann equation belong to the class of Weierstrass meromorphic functions [10]. Therefore, it is natural to use them to compare predictions of these two approaches [11–13]. In conclusion, we show that the difference between distance modulus is interpolated by means of the Chebyshev polynomial of the fourth order with a sufficient degree of accuracy.

## 2. Friedmann equation in classical cosmology

In the standard cosmological model the Friedmann equation

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1)$$

is used for fitting SNe Ia data. It ties a scale of the Universe  $a(t)$  with density of matter  $\rho$ . Here  $G$  is Newton's constant,  $k$  is a sign of curvature of a space, a dot denotes a derivative with respect to coordinate time  $t$ . In generic case, the equation (1) is represented in the following form

$$\frac{1}{x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = H_0^2 [\Omega_\Lambda + \Omega_{\text{curv}}x^{-2} + \Omega_Mx^{-3} + \Omega_{\text{rad}}x^{-4} + \Omega_{\text{rigid}}x^{-6}], \quad (2)$$

where the variable  $x$  is given as a ratio of a scale  $a(t)$  to a modern one  $a_0 = 1$ :

$$x \equiv \frac{a(t)}{a_0} = \frac{1}{1+z}, \quad (3)$$

$z$  is a redshift of spectral lines (observed variable),  $H_0 = h \cdot 10^5$  m/s/Mpc,  $h = 0.72 \pm 0.08$  – Hubble constant. In the right hand of the Friedmann equation (2)  $\Omega_i$  are partial densities of, correspondingly,  $\Lambda$ -term, curvature of the space, dust-like matter, radiation, stiff-state matter. For distant sources with  $z > 1$  the interpretation of the cosmological redshift as a Doppler shift is not valid [14]. An equation of continuity

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p),$$

with an equation of state of matter  $p = w\rho$ , which connects the density  $\rho$  and the pressure  $p$ , yields the dependence of the density on the scale factor. So,

- for interstellar dust  $p = 0$ :  $\rho \sim a^{-3}$ ;
- for radiation  $p = \rho/3$ :  $\rho \sim a^{-4}$ ;
- for contribution from  $\Lambda$ -term  $p = -\rho$ :  $\rho \sim \Lambda$ ;
- for stiff state of matter  $p = \rho$ :  $\rho \sim a^{-6}$ .

The data of modern astronomical observations are fitted using cosmological parameters [2]:  $\Omega_\Lambda = 0.72$ ,  $\Omega_M = 0.28$ . A solution of the Friedmann equation (2) with such parameters is presented in analytical form

$$a(t) = a_0 \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}} \left[ \text{sh} \left( \frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right) \right]^{2/3}. \quad (4)$$

The second derivative of the scale factor is

$$\ddot{a} = \frac{H_0^2 a_0}{2} \left[ 2\Omega_\Lambda \left(\frac{a}{a_0}\right) - \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right]. \quad (5)$$

Hence, in the modern era the Universe expands with acceleration, since  $2\Omega_\Lambda > \Omega_M$ ; in the past, its acceleration was negative  $\ddot{a} < 0$ . This change of the sign of acceleration without a clear physical cause is noted by cosmologists. From the solution (4), taking into account the relation between the scale factor and the redshift (3), it follows *age — redshift relationship*

$$H_0 t = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \operatorname{Arsh} \left( \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \frac{1}{(1+z)^{3/2}} \right). \quad (6)$$

The age  $t_0$  of the modern Universe in the coordinate time can be obtained by setting  $z = 0$  in (6)

$$t_0 = \frac{2}{3\sqrt{\Omega_\Lambda}} \frac{1}{H_0} \operatorname{Arsh} \sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}}. \quad (7)$$

If we know the redshift  $z$  of a certain galaxy, how do we find the coordinate distance  $r$  to it? Since for the rays of light the spacetime interval is zero

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dr^2 = 0,$$

we have the relation between intervals of space and time  $cdt = -a(t)dr$ , and, using the notation introduced above (3)  $x \equiv a/a_0$ ,

$$-a_0 r = c \int \frac{dt}{x} = c \int \frac{dx}{x} \frac{1}{dx/dt}. \quad (8)$$

Substituting now the Friedmann equation (2) into (8)

$$\frac{dx}{dt} = H_0 \sqrt{\Omega_M/x + \Omega_\Lambda x^2}, \quad (9)$$

we get an integral

$$H_0 r = \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 4a_3 x}}, \quad (10)$$

where we denote the ratio of partial densities as  $4a_3 \equiv \Omega_M/\Omega_\Lambda$ . The integral is calculated using the inverse Weierstrass  $\wp$ -function [12] and one obtains *coordinate distance — redshift relationship*

$$H_0 r = -\frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \wp^{-1} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda(1+z)^3}}{2(1+z)^2} \right] + \frac{c}{\sqrt{\Omega_\Lambda}} \wp^{-1} \left[ \frac{(1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda})}{2} \right]. \quad (11)$$

The resulting formula is expressed in terms of the Weierstrass  $\wp$ -function [10], satisfying the differential equation

$$\left[ \frac{d\wp(u)}{du} \right]^2 = 4[\wp(u) - e_1][\wp(u) - e_2][\wp(u) - e_3], \quad (12)$$

where  $\wp(\omega_\alpha) = e_\alpha$ ,  $\wp'(\omega_\alpha) = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$  — three roots of a cubic polynomial on the right-hand side of the differential equation (12)

$$e_1 \equiv \frac{1}{8} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} (1 + i\sqrt{3}), \quad e_2 \equiv -\frac{1}{4} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3}, \quad e_3 \equiv \frac{1}{8} \left( \frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right)^{2/3} (1 - i\sqrt{3}).$$

Invariants of the Weierstrass function are the following

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -a_3^2 = -\left( \frac{\Omega_M}{4\Omega_\Lambda} \right)^2;$$

the discriminant of a cubic polynomial is negative:  $\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2 < 0$ .

In astronomy, the method of determining distances to ultra-distant objects is based on measuring their luminosity. The radiation power  $L$  of an object (a star or a galaxy) is called its *absolute luminosity*. The flux density  $\ell$ , i.e., the radiation power per unit area, is called its *visible luminosity*. In Euclidean geometry they are connected by the formula

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2}, \quad (13)$$

where  $d$  is the distance from us to the radiation object. In the second century BC the Greek astronomer Hipparchus classified the stars visible to the naked eye into six classes according to their brightness. The brightest stars were assigned the first magnitude, and barely visible — the sixth magnitude. According to Norman Pogson in 1856 it was decided that the luminosity of the objects of the first stellar magnitude is a hundred times greater than the luminosity of the objects of the sixth stellar magnitude [14], i.e.,

$$\ell = \ell_0 \cdot 100^{-m/5}, \quad L = L_0 \cdot 100^{-M/5}, \quad (14)$$

where  $\ell_0$  and  $L_0$  are some relevant luminosities. With the creation of photomultipliers at the beginning of the XX-th century, the factors  $\ell_0$  and  $L_0$  were fixed. We express from (14) the apparent stellar magnitude  $m$  and the absolute stellar magnitude of the object  $M$  using the decimal logarithms

$$m = -\frac{5}{2} \lg \frac{\ell}{\ell_0}, \quad M = -\frac{5}{2} \lg \frac{L}{L_0}. \quad (15)$$

Then we express from (15) *the distance modulus* ( $m - M$ ) through the distance  $d$  to the radiation object, using (13)

$$m - M = -\frac{5}{2} \lg \left( \frac{\ell}{L} \cdot \frac{L_0}{\ell_0} \right) = \frac{5}{2} \lg \left( 4\pi d^2 \cdot \frac{L_0}{\ell_0} \right) = 5 \lg d + \frac{5}{2} \lg \left( 4\pi \frac{\ell_0}{L_0} \right).$$

For performing calculations, the factors  $\ell_0$  and  $L_0$  in (14) are chosen in such a way that the distance  $d$  is measured in megaparsecs

$$m - M = 5 \lg d (\text{Mpc}) + \mathcal{M}, \quad (16)$$

where  $\mathcal{M} = 25$ .

In the Friedman–Robertson–Walker cosmology, by analogy with the formula for the distance  $d$  in Euclidean geometry (13), we determine a *luminosity distance*  $d_L$  to a star object

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi\ell}}. \quad (17)$$

In standard cosmology, the luminosity distance  $d_L(z)_{SC}$  is related to the coordinate distance  $r$  [2]:

$$d_L(z)_{SC} = (1+z)a_0r. \quad (18)$$

Here it was taken into account that the area of the sphere around the luminous object passing through the Earth increases, the frequency of photons decreases during their motion. Substituting the formula for the coordinate distance (11) into (18), we get an analytical expression for luminosity distance

$$d_L(z)_{SC} = \frac{c(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \left( \wp^{-1} \left[ \frac{(1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda})}{2} \right] - \wp^{-1} \left[ \frac{1 - \sqrt{1 + \Omega_M/\Omega_\Lambda}(1+z)^3}}{2(1+z)^2} \right] \right).$$

Modern observational cosmology is based on the Hubble diagram. *Effective stellar magnitude – redshift relationship*

$$m(z) - M = 5\lg[d_L(z)_{SC}] + \mathcal{M}, \quad (19)$$

is used to test cosmological theories ( $d_L$  in megaparsecs) [2]. Here  $m(z)$  is the apparent magnitude,  $M$  is its absolute magnitude, and  $\mathcal{M} = 25$  is a constant.

### 3. Friedmann equation in conformal cosmology

Interpretation of the Hubble diagram, based on a conformal cosmological model with parameters  $\Omega_{\text{rigid}} = 0.755$ ,  $\Omega_M = 0.245$ , yields the same qualitative approximation as the standard cosmological model with parameters  $\Omega_\Lambda = 0.72$ ,  $\Omega_M = 0.28$  [9]. A parameter  $\Omega_{\text{rigid}}$  corresponds to a stiff state of matter, when the energy density is equal to the pressure  $p = \rho$  [15, 16] that is happened under a nucleosynthesis regime in stars. We write out *conformal Friedmann equation* [4] with using meaningful conformal partial parameters, discarding insignificant contributions

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{\mathcal{H}_0}{c}\right)^2 \left[ \Omega_{\text{rigid}} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right) \right]. \quad (20)$$

The right-hand side of the equation (20) includes the densities of the state of matter  $\rho(a)$  in accordance with their conformal weights; in the left, the prime denotes the derivative with respect to the conformal time. After introducing the dimensionless variable  $x \equiv a/a_0$ , the conformal Friedmann equation (20) takes the form

$$\left(\frac{2c}{\sqrt{\Omega_M}\mathcal{H}_0}\right)^2 x^2 \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 = 4x^3 - g_3 \equiv 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3), \quad (21)$$

where one root in the cubic polynomial on the right-hand side (21) is real, while the other ones are complex conjugated

$$e_1 \equiv \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M} \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}, \quad e_2 \equiv -\sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M}}, \quad e_3 \equiv \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M} \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}}.$$

The invariants of the cubic polynomial are as following:

$$g_2 = 0, \quad g_3 = -\frac{4\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_M}.$$

where  $\mathcal{H}_0$  is a conformal Hubble constant. The conformal Hubble parameter is related to the usual parameter as  $\mathcal{H} \equiv (a/a_0)H$ . Then we introduce a new variable  $u$  by the rule

$$x = \wp(u) = -\frac{d\zeta(u)}{u}. \tag{22}$$

The Weierstrass  $\zeta$ -function satisfies the quasi-periodicity conditions [10]

$$\zeta(u + 2\omega) = \zeta(u) + 2\zeta(\omega), \quad \zeta(u + 2\omega') = \zeta(u) + 2\zeta(\omega'),$$

where  $\omega$  and  $\omega'$  are semi-periods of the function  $\wp(u)$ .

The conformal Friedmann equation (21) is integrated and we obtain *the conformal age – redshift relationship* in explicit form

$$\eta = \frac{2c}{\sqrt{\Omega_M}\mathcal{H}_0} \left( \zeta \left[ \wp^{-1} \left( \frac{1}{1+z} \right) \right] - \zeta \left[ \wp^{-1}(1) \right] \right). \tag{23}$$

The equation written out in integral form is known in cosmology as the *Hubble law*. An explicit formula for conformal age of the Universe  $\eta_0$  can be obtained by putting in (23)  $z = 0$ :

$$\eta_0 = \frac{2c}{\sqrt{\Omega_M}\mathcal{H}_0} \left( \zeta \left[ \wp^{-1}(0) \right] - \zeta \left[ \wp^{-1}(1) \right] \right). \tag{24}$$

The interval of the coordinate conformal distance is equal to the interval of the conformal time  $dr = d\eta$ , so we can represent (23) as *the conformal distance – redshift relationship*.

In conformal coordinates, the behavior of photons is exactly the same as in the Minkowski space. The time intervals between the emission of two photons and between their absorption are the same. The time interval  $dt = -adr$ , used in standard cosmology, and the time interval  $d\eta = -dr$ , used in conformal cosmology, are different. The conformal luminosity distance  $d_L(z)_{CC}$  is related to the standard luminosity distance  $d_L(z)_{SC}$  [9]

$$d_L(z)_{CC} = (1+z)d_L(z)_{SC} = (1+z)^2r(z),$$

where  $r(z)$  is a coordinate distance. For photons  $dr/d\eta = -1$ , so we get an explicit dependence: *luminosity distance – redshift relationship*

$$d_L(z)_{CC} = \frac{2c(1+z)^2}{\sqrt{\Omega_M}\mathcal{H}_0} \left( \zeta \left[ \wp^{-1} \left( \frac{1}{1+z} \right) \right] - \zeta \left[ \wp^{-1}(1) \right] \right). \tag{25}$$

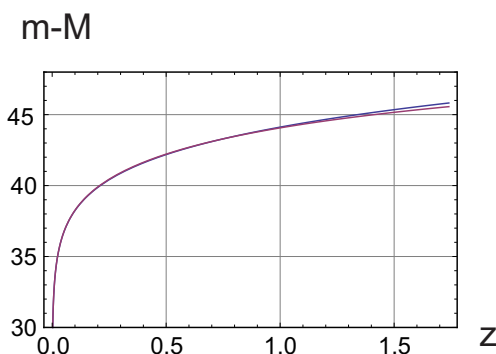
The *effective magnitude – redshift relationship* in the conformal cosmology has the form

$$m(z) - M = 5\lg[d_L(z)_{CC}] + \mathcal{M}. \tag{26}$$

### 4. Comparative analysis

According to the conformal cosmological model, the conformal quantities are physical observables. Pearson’s criterion  $\chi^2$  was applied in [9] for statistical fitting of results on supernovae Ia [2]. The contribution from the component corresponding to the rigid state of matter  $\rho_{\text{rigid}}$  in the conformal model replaced the contribution from the  $\Lambda$ -term in the standard model. In the rigid state of matter, its energy density is equal to the pressure. As a result of the analysis, the conclusion was drawn: the best fitting of the conformal model was not inferior to the best fitting of the standard model [9].

The curves for the two models, according to (26) and (19), are shown in Fig. 1.

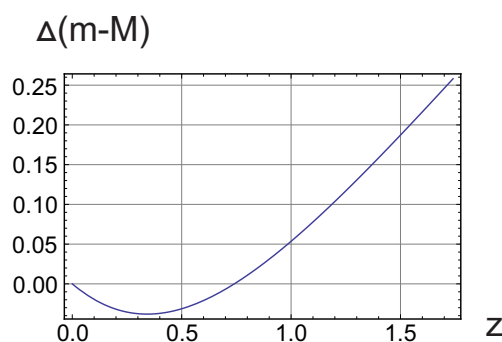


**Figure 1. Curves: effective stellar magnitude – redshift for cosmological models considered**

The difference between the curves: effective magnitude value – redshift

$$\Delta(m(z) - M) = 5\lg[d_L(z)_{CC}] - 5\lg[d_L(z)_{SC}] \quad (27)$$

– predictions of models (26) and (19), is demonstrated in Fig. 2. A slight difference between the curves, within the error of observations, is manifested in the early and late stages of the evolution of the Universe [12].



**Figure 2. Difference between curves: effective magnitude – redshift for the two models**

The function (27) has a complex form, but it is easy interpolated, with a sufficient degree of accuracy, Chebyshev polynomials of the first kind, the least deviating from zero on the interval  $[-1; 1]$

$$\Delta(m - M) = \frac{a_0}{2} + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + a_3T_3(x) + a_4T_4(x).$$

Here you have utilized a variable  $-1 \leq x \leq 1$ :  $x \equiv (20/17)z - 1$ , and the coefficients of the expansion have the form:  $a_0/2 = 0.0703$ ,  $a_1 = 0.0513$ ,  $a_2 = 0.0513$ ,  $a_3 = -0.0123$ ,  $a_4 = 0.0015$ . Chebyshev polynomials [17, 18]:

$$T_0 = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \quad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$



In the standard cosmology, the following characteristics are introduced to describe the Hubble diagram: Hubble parameter, a deceleration and a jerk [2]

$$H(t) \equiv + \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_M}{a^3} + \Omega_\Lambda}, \tag{28}$$

$$q(t) \equiv - \left( \frac{\ddot{a}}{a} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-2} = \frac{\Omega_M/2 - \Omega_\Lambda a^3}{\Omega_M + \Omega_\Lambda a^3}, \tag{29}$$

$$j(t) \equiv + \left( \frac{\dot{\ddot{a}}}{a} \right) \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^{-3} = 1. \tag{30}$$

As we see, the deceleration parameter  $q$  (29) changes its sign during the evolution of the Universe at the inflection point

$$a^* = \sqrt[3]{\frac{\Omega_M}{2\Omega_\Lambda}},$$

$j$ -parameter remains constant.

We define analogous parameters for the conformal cosmology

$$\mathcal{H}(\eta) \equiv + \left( \frac{a'}{a} \right), \tag{31}$$

$$q(\eta) \equiv - \left( \frac{a''}{a} \right) \left( \frac{a'}{a} \right)^{-2}, \tag{32}$$

$$j(\eta) \equiv + \left( \frac{a'''}{a} \right) \left( \frac{a'}{a} \right)^{-3}. \tag{33}$$

We calculate the conformal parameters using the conformal Friedmann equation (20). Hubble parameter

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{\mathcal{H}_0}{a^2} \sqrt{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_M a^3} > 0;$$

deceleration parameter

$$q(\eta) = \left( \frac{\Omega_{\text{rigid}} - (\Omega_M/2)a^3}{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_M a^3} \right) > 0$$

changes from 1 to  $(\Omega_{\text{rigid}} - \Omega_M/2)$ ; hence, the scale factor grows with deceleration; the jerk parameter

$$j(\eta) = \frac{3\Omega_{\text{rigid}}}{\Omega_{\text{rigid}} + \Omega_M a^3} > 0$$

changes from 3 to  $3\Omega_{\text{rigid}}$ . Dimensionless parameters  $q(\eta)$  and  $j(\eta)$  remain positive during the evolution. The Universe does not undergo, during its evolution, the so-called jerk – artifact of approach of the standard cosmological model.

## 5. Conclusions

We present exact solutions of the Friedmann equation in standard cosmology and conformal cosmology. The theoretical curves interpolating the Hubble diagram for the

latest supernova data are expressed in an analytical form. The functions belong to the class of meromorphic Weierstrass functions. Both approaches describe the modern Hubble diagram with the same accuracy. We introduce conformal parameters describing the Hubble diagram. All parameters remain positive during the evolution of the Universe.

## Acknowledgments

I am grateful to Professor V. N. Pervushin for discussions on modern theoretical problems that have arisen in cosmology, and comprehensive friendly support, the Laboratory of Theoretical Physics named after N. N. Bogoliubov, Joint Institute for Nuclear Research (Dubna) for hospitality. I express my gratitude for the interest in the work to the participants of the International Winter School “Seminar on gravitation, cosmology and astrophysics” (Petrov readings), Kazan Federal University, participants of the seminar of the Department of Theoretical Physics and Mechanics of the People’s Friendship University of Russia (Moscow).

## References

1. A. G. Riess, et al., The Farthest Known Supernova: Support for an Accelerating Universe and a Glimpse of the Epoch of Deceleration, *The Astrophysical Journal* 560 (2001) 49–71.
2. A. G. Riess, et al., Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolutions, *The Astrophysical Journal* 607 (2004) 665–687.
3. A. G. Riess, Nobel Lecture: My Path to the Accelerating Universe, *Reviews of Modern Physics* 84 (2012) 1165–1175.
4. V. N. Pervushin, A. E. Pavlov, *Principles of Quantum Universe*, Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2014.
5. P. A. M. Dirac, Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation, *Physical Review* 114 (1959) 924–930.
6. D. Behnke, et al., Description of Supernova Data in Conformal Cosmology without Cosmological Constant, *Physics Letters* 30 B (2002) 20–26.
7. D. Behnke, Conformal cosmology approach to the problem of dark matter, Ph.D. thesis, PhD Thesis, Rostock Report MPG-VT-UR 248/04 (2004).
8. A. F. Zakharov, V. N. Pervushin, V. A. Zinchuk, Tetrad Formulation and Frames of Reference in General Relativity, *Physics of Particles and Nuclei* 37 (2006) 104–134.
9. A. F. Zakharov, V. N. Pervushin, Conformal Cosmological Model Parameters with Distant SNe Ia Data: “Gold” and “Silver”, *International Journal of Modern Physics* 19 D (2010) 1875–1886.
10. E. T. Whittaker, G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.
11. A. E. Pavlov, Exact Solutions of Friedmann Equation for Supernovae Data (2015). URL <https://arxiv.org/pdf/1511.00226.pdf>
12. A. E. Pavlov, Intrinsic Time in Geometrodynamics: Introduction and Application to Friedmann Cosmology (2016). URL <https://arxiv.org/pdf/1606.09460>
13. A. E. Pavlov, Parameters of the Hubble Diagram, in: 2-nd International Winter School–Seminar on gravity, cosmology, and astrophysics. “Petrov School – 2016”, Kazan Federal University, 2016, pp. 29–30.
14. S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, Oxford, 2008.
15. Ya. B. Zel’dovich, The Equation of State at Ultrahigh Densities and its Relativistic Limitations, *Soviet Physics JETP* 14 (1962) 1143–1147.
16. J. Narlikar, *Violent Phenomena in the Universe*, Oxford University Press, Oxford, 1984.

17. N. I. Akhiezer, Lectures on Theory of Approximation, Nauka, Moscow, 1965.  
 18. N. I. Akhiezer, Elements of Theory of Elliptic Functions, Nauka, Moscow, 1970.

УДК 530.12

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-390-400

## Два подхода к интерпретации диаграммы Хаббла

А. Е. Павлов

*Кафедра сопротивления материалов и деталей машин*

*Российский государственный аграрный университет — МСХА им. К. А. Тимирязева  
 Тимирязевская ул., д. 49, Москва, Россия, 127550*

Сверхновые типа Ia используются как стандартные свечи в современной космологии, служат для проверки космологических моделей. Интерпретация диаграммы Хаббла на основе стандартной космологической модели привела космологов к заключению, что Вселенная заполнена в основном космической пылью и загадочной тёмной энергией.

В настоящей работе представлены точные решения уравнения Фридмана в стандартной космологии и конформной космологии. Теоретические кривые, интерполирующие диаграмму Хаббла для последних данных по сверхновым, выражаются в аналитическом виде. Функции принадлежат классу мероморфных функций Вейерштрасса. Оба подхода описывают современную диаграмму Хаббла с одинаковой точностью. Физическая интерпретация с позиций конформной космологии предпочтительнее, поскольку данные по сверхновым описываются без использования  $\Lambda$ -члена. В стандартной космологии для описания диаграммы Хаббла введены характеристики: параметры Хаббла  $H(t)$ , замедления  $q(t)$  и толчка  $j(t)$ . Как показывают расчёты, параметр замедления  $q$  меняет свой знак в течение эволюции Вселенной,  $j$ -параметр остаётся постоянным. В современную эпоху Вселенная расширяется с ускорением, а в прошлом её ускорение было отрицательным. Изменение знака ускорения, без ясной физической причины, озадачивает космологов.

Нам представляется очевидным, что для исследования объектов, находящихся от нас на расстояниях миллиардов световых лет, следует пользоваться не координатным временем, привычным для работы в лабораториях, а конформным временем. В конформных координатах поведение фотонов описывается как в пространстве Минковского. Интервалы времени  $dt$  и  $d\eta$  отличаются, их связывает масштабный фактор:  $dt = ad\eta$ . Конформное фотометрическое расстояние длиннее стандартного фотометрического расстояния, что проявляется при наблюдении за удалёнными звёздными объектами. В результате соотношения: эффективная звёздная величина – красное смещение, на которых строится диаграмма Хаббла, будут разными. Используя конформное уравнение Фридмана, в работе вводятся конформные параметры  $H(\eta)$ ,  $q(\eta)$ ,  $j(\eta)$ . Все параметры остаются положительными в течение эволюции Вселенной. Масштабный фактор растёт с замедлением. Вселенная не испытывает толчка.

**Ключевые слова:** сверхновые типа Ia, уравнение Фридмана, функции Вейерштрасса, диаграмма Хаббла, космологические параметры,  $\Lambda$ -член

## Литература

1. *Riess A. G. et al.* The Farthest Known Supernova: Support for an Accelerating Universe and a Glimpse of the Epoch of Deceleration // *The Astrophysical Journal*. — 2001. — Vol. 560. — Pp. 49–71.
2. *Riess A. G. et al.* Type Ia Supernova Discoveries at  $z > 1$  from the Hubble Space Telescope: Evidence for Past Deceleration and Constraints on Dark Energy Evolution // *The Astrophysical Journal*. — 2004. — Vol. 607. — Pp. 665–687.
3. *Riess A. G.* Nobel Lecture: My Path to the Accelerating Universe // *Reviews of Modern Physics*. — 2012. — Vol. 84. — Pp. 1165–1175.
4. *Pervushin V. N., Pavlov A. E.* Principles of Quantum Universe. — Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2014. — 480 p.

5. *Dirac P. A. M.* Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation // Physical Review. — 1959. — Vol. 114. — Pp. 924–930.
6. *Behnke D. et al.* Description of Supernova Data in Conformal Cosmology without Cosmological Constant // Physics Letters. — 2002. — Vol. 30 B. — Pp. 20–26.
7. *Behnke D.* Conformal cosmology approach to the problem of dark matter: Ph.D. thesis / PhD Thesis, Rostock Report MPG-VT-UR 248/04. — 2004. — 155 p.
8. *Zakharov A. F., Pervushin V. N., Zinchuk V. A.* Tetrad Formulation and Frames of Reference in General Relativity // Physics of Particles and Nuclei. — 2006. — Vol. 37. — Pp. 104–134.
9. *Zakharov A. F., Pervushin V. N.* Conformal Cosmological Model Parameters with Distant SNe Ia Data: “Gold” and “Silver” // International Journal of Modern Physics. — 2010. — Vol. 19 D. — Pp. 1875–1886.
10. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н.* Курс современного анализа. — Москва: ГИФМЛ, 1963. — Т. 2, 500 с.
11. *Pavlov A. E.* Exact Solutions of Friedmann Equation for Supernovae Data. — 2015. — <https://arxiv.org/pdf/1511.00226.pdf>.
12. *Pavlov A. E.* Intrinsic Time in Geometrodynamics: Introduction and Application to Friedmann Cosmology. — 2016. — <https://arxiv.org/pdf/1606.09460>.
13. *Pavlov A. E.* Parameters of the Hubble Diagram // 2-nd International Winter School–Seminar on gravity, cosmology, and astrophysics. “Petrov School – 2016”, Kazan Federal University. — 2016. — Pp. 29–30.
14. *Вайнберг С.* Космология. — Москва: УРСС, 2013. — 608 с.
15. *Zel'dovich Ya. B.* The Equation of State at Ultrahigh Densities and its Relativistic Limitations // Soviet Physics JETP. — 1962. — Vol. 14. — Pp. 1143–1147.
16. *Нарликар Д.* Неистовая Вселенная. — Москва: Мир, 1985. — 256 с.
17. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — Москва: Наука, 1965. — 408 с.
18. *Ахиезер Н. И.* Элементы теории эллиптических функций. — Москва: Наука, 1970. — 304 с.

© Pavlov A. E., 2017

**Для цитирования:**

*Pavlov A. E.* Two Approaches to Interpretation of Hubble Diagram // RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. — 2017. — Vol. 25, No 4. — Pp. 390–400. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-390-400.

**For citation:**

*Pavlov A. E.* Two Approaches to Interpretation of Hubble Diagram, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 390–400. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-390-400.

**Сведения об авторах:**

**Павлов Александр Егорович** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры сопротивления материалов и деталей машин Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева (e-mail: alexpavlov60@mail.ru)

**Information about the authors:**

**Pavlov A. E.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Department of Strength of Materials and Machine Parts of Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy (e-mail: alexpavlov60@mail.ru)

---

УДК 533.9  
DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409

## Уединённая правополяризованная электромагнитная волна в релятивистской плазме

В. Г. Дорофеенко\*, В. Б. Красовицкий\*, В. А. Туриков†

\* Отдел кинетических уравнений  
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, Москва, Россия, 125047

† Кафедра прикладной физики  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе проведено исследование свойств нелинейной лазерной волны, распространяющейся в нагретой плазме вдоль сильного внешнего магнитного поля в условиях электронно-циклотронного резонанса. Сильная нелинейность такого процесса обусловлена релятивистским движением электронов и резонансным возрастанием пондеромоторной силы, действующей на электроны со стороны волны. Из гидродинамических уравнений и уравнений Максвелла получена система уравнений, описывающая огибающую импульса правополяризованной лазерной волны. Посредством численного интегрирования этой системы уравнений найдены солитонные решения для случая холодной плазмы. Такие решения имеют вид солитонов огибающих, содержащих внутри себя плазменные колебания. Получено аналитическое выражение для интеграла плотности энергии в холодной плазме. Для нагретой плазмы из численных результатов следует, что в условиях циклотронного резонанса солитонное решение становится неустойчивым. При этом плотность энергии перестаёт сохраняться, но выполняется закон сохранения плотности продольного импульса электронов. Сделан вывод о том, что нелинейное насыщение амплитуды поля возникает в результате разделения зарядов плазмы под действием давления электромагнитного излучения. При этом дискретный набор значений несущей частоты для солитона огибающей определяется отношением частоты нелинейных продольных колебаний электрона в поле электромагнитной волны к ленгмюровской частоте плазмы. В случае плазмы малой плотности найденный численным интегрированием дискретный спектр частот переходит в непрерывный.

**Ключевые слова:** магнитоактивная плазма, правополяризованная волна, релятивистские электроны, фазовая и групповая скорости, солитонные решения

### 1. Введение

Известно [1–3], что электрон может быть ускорен до высоких энергий в электромагнитном поле плоской волны, распространяющейся вдоль внешнего магнитного поля со скоростью света. Характерной особенностью этого способа ускорения является рост энергии частицы поперёк магнитного поля с последующей перестройкой поперечного движения электрона в продольное под действием силы Лоренца.

В работе [4] было показано, что существуют электромагнитные импульсы, распространяющиеся в холодной плазме вдоль сильного магнитного поля в условиях циклотронного резонанса, имеющие вид солитонов со «встроенными» ленгмюровскими колебаниями. При этом насыщение амплитуды поля возникает из-за разделения зарядов плазмы под действием давления излучения, а дискретный набор частот определяется отношением частоты нелинейных колебаний плазмы к ленгмюровской частоте.

Распространение уединённой ионно-акустической волны большой амплитуды в замагниченной плазме рассмотрено в работе [5]. Проблема решена без учёта нейтральности плазмы в пределах импульса, а потенциал определялся уравнением

---

Статья поступила в редакцию 8 июня 2017 г.  
Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (Соглашение № 02.а03.21.0008. госзадание 3.2223.2017/4.6).

Пуассона. Найдены решения в форме сверхзвуковых и почти звуковых уединённых волн, распространяющихся относительно магнитного поля. Импульс имеет несколько пиков и существует для дискретного набора параметров волны. Амплитуда и частота уединённой волны определены как функции числа Маха, определяющего угол распространения относительно магнитного поля. Динамика солитонов в электронно-ионной плазме аналитически и численно исследована в работе [6].

## 2. Основные уравнения

Рассмотрим электромагнитную волну, распространяющуюся в плазме вдоль внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , направленного вдоль оси  $z$  (см. рис. 1):

$$\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, k), \quad \mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, 0).$$

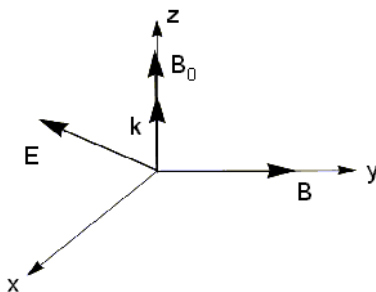


Рис. 1. Геометрия электромагнитной волны

Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  описываются уравнениями Максвелла:

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_x = \frac{4\pi e}{c} n v_x, \quad (1)$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_y = \frac{4\pi e}{c} n v_y, \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi e(n - n_0), \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} + 4\pi e n v_z = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A}$  — вектор-потенциал,  $n$  — плотность электронов,  $n_0$  — плотность невозмущённой плазмы,  $v_z$  — гидродинамическая скорость электронов. Ионы считаем неподвижными.

Движение электронов будем описывать релятивистскими гидродинамическими уравнениями

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p_x = e \left[ E_x + \frac{1}{c} (v_y B_0 - v_z B_y) \right], \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p_y = e \left[ E_y + \frac{1}{c} (v_z B_x - v_x B_0) \right], \quad (5)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) p_z = e \left[ E_z + \frac{1}{c} (v_x B_y - v_y B_x) \right] - \frac{T}{n} \frac{\partial n}{\partial z} \gamma, \quad (6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (nv_z) = 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$  — релятивистский импульс электронов,  $T$  — электронная температура.

Заметим, что в согласии с работой [7], массу электрона  $m$  в уравнениях движения (4)–(6) следует заменить эффективной тепловой массой  $m_T$ , которая определяется соотношением:

$$m_T = m \frac{K_3(mc^2/T)}{K_2(mc^2/T)},$$

где  $K_2(z)$  и  $K_3(z)$  — функции Макдональда.

### 3. Поперечное и продольное движения плазмы

Введём поперечные  $\tilde{x}(t, z)$ ,  $\tilde{y}(t, z)$  и продольную  $\tilde{z}(t, z)$  координаты смещения электрона от положения равновесия с помощью соотношений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{x} = v_x, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{y} = v_y, \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \tilde{z} = v_z. \quad (8)$$

Уравнения (8) можно рассматривать как определение координат смещения  $\tilde{x}(t, z)$ ,  $\tilde{y}(t, z)$ ,  $\tilde{z}(t, z)$ , которые функционально не связаны с поперечными координатами  $x, y$  системы отсчёта. Заметим, что ненулевое поперечное смещение электрона следует из наличия у него ненулевой поперечной скорости и не приводит к появлению зависимости функций поля от поперечных координат, если все электроны в поперечной плоскости движутся синхронно. Поскольку компоненты поля и гидродинамических переменных не зависят от поперечных координат, прямое интегрирование уравнений (1)–(4) с учётом соотношений (8) приводит к закону сохранения поперечного импульса:

$$p_{\perp} + \frac{e}{c} A_{\perp} + m_T \omega_B r_{\perp} = 0, \quad (9)$$

где  $\omega_B = eB_0/m_T c$  и введены комплексные величины:

$$p_{\perp} = p_x + ip_y, \quad A_{\perp} = A_x + iA_y, \quad r_{\perp} = \tilde{x} + i\tilde{y}.$$

Мы предполагаем, что в отсутствие поля импульс и поперечное смещение электрона равны нулю. Из уравнений (3) для продольного поля и уравнения непрерывности (7) получаем:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) E_z = -4\pi en_0 v_z.$$

Учитывая, что  $v_z \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , интеграл последнего уравнения можно записать в виде:

$$E_z = -4\pi en_0 \tilde{z}. \quad (10)$$

### 4. Нелинейный циклотронный резонанс

После перехода к безразмерным переменным из (1), (2) и (4)–(5) получаем следующую систему уравнений:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial Z} \right) \xi = -\frac{i\xi + A}{\gamma}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{p}{\gamma} \frac{\partial}{\partial Z}\right) p = -\mu \zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{d\xi}{d\tau} \frac{\partial A^*}{\partial Z} + \frac{d\xi^*}{d\tau} \frac{\partial A}{\partial Z}\right) - \Theta \frac{n_0}{n} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{n}{n_0 \gamma}\right), \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial Z^2}\right) A = \mu \frac{n}{n_0} \frac{d\xi}{d\tau}, \quad (13)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\omega_B}{c} (\tilde{x} + i\tilde{y}), & \zeta &= \frac{\omega_B}{c} \tilde{z}, & p &= \gamma \frac{v_z}{c}, & A &= \frac{e}{m_T c^2} (A_x + A_y), & E &= \frac{e E_z}{m_T \omega_B c}, \\ \tau &= \omega_B t, & Z &= \frac{\omega_B}{c} z, & \Theta &= \frac{T}{m_T c^2}, & \mu &= \frac{\omega_p^2}{\omega_B^2}, & \omega_p^2 &= \frac{4\pi e^2 n_0}{m_T}, & \omega_B &= \frac{e B_0}{m_T c}, \\ & & & & \gamma &= \sqrt{1 + p^2 + |i\xi + A|^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Будем искать решение системы уравнений (11)–(13) в виде бегущего импульса огибающей правополяризованной волны:

$$A = \mathbf{A}(\psi) \exp[i\Phi(\tau, Z)], \quad \xi = \Xi(\psi) \exp[i\Phi(\tau, Z)], \quad \zeta = \zeta(\psi), \quad p = p(\psi), \quad (15)$$

где  $\Phi(\tau, Z)$  — фаза волны, которая выбирается таким образом, чтобы величина  $\Xi$  оставалась вещественной, а амплитуда зависела от автомодельной переменной  $\psi = \tau - Z/u$ .

Частота и волновое число определяются равенствами:

$$\omega = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \quad \kappa = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z},$$

так что выполняется следующее соотношение:

$$\frac{\partial \omega}{\partial Z} + \frac{\partial \kappa}{\partial \tau} = 0. \quad (16)$$

В этом случае

$$\kappa = -\frac{\partial \Phi}{\partial Z}, \quad \frac{n}{n_0} = \left(1 - \frac{p}{\gamma u}\right)^{-1},$$

а безразмерные уравнения (11)–(13) можно записать в виде:

$$\omega - \frac{\kappa p}{\gamma} = -\frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{\text{Im}(\mathbf{A})}{\Xi}\right), \quad (17)$$

$$\Xi' = -\text{Re}(\mathbf{A}) \frac{1}{\gamma - \frac{p}{u}}, \quad \zeta' = \frac{p}{\gamma - \frac{p}{u}}, \quad (18)$$

$$\left(1 - \frac{p}{\gamma u}\right) p' = -\mu \zeta + \frac{1}{\gamma u} \left[ \Xi \left( (\omega - \Omega) \text{Re}(\mathbf{A}) + \text{Im}(\mathbf{A}') \right) + \text{Re}(\mathbf{A}' \mathbf{A}^*) - \frac{\Theta \left(\gamma - \frac{p}{u}\right)'}{\gamma - \frac{p}{u}} \right], \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \kappa^2) \mathbf{A} - \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \mathbf{A}'' - 2i \mathbf{A}' \left( \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \omega + \frac{\Omega}{u^2} \right) - \\ - i \mathbf{A} \left( \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \omega + \frac{\Omega}{u^2} \right)' = \frac{\mu}{\gamma - \frac{p}{u}} (\mathbf{A} + i\Xi), \end{aligned} \quad (20)$$



где штрихом обозначена производная по  $\psi$ . Так как  $\omega$  и  $\kappa$  также зависят только от  $\psi$ , то уравнение (16) имеет интеграл:  $\omega - \kappa u = \Omega \equiv \text{const}$ .

Уравнение (17) является нелинейным обобщением условия циклотронного резонанса. Заметим, что система (17)–(20) не требует медленности изменения амплитуды волны и остаётся справедливой при  $|\mathbf{A}'| \sim |\omega \mathbf{A}|$ . Продольное смещение электронов  $\zeta(\psi)$  и продольное электрическое поле  $E = -\mu\zeta(\psi)$  не зависят от циклотронной фазы  $\Phi$ , как это имеет место и в линейной теории, что является следствием предположения (15) о циркулярной поляризации волны. Заметим также, что требование  $\omega = \omega(\psi)$ ,  $\kappa = \kappa(\psi)$  приводит к следующему выражению для циклотронной фазы  $\Phi$ :

$$\Phi = \int \omega(\psi) d\psi + \frac{\Omega}{u} Z.$$

Т.е. наша система математически эквивалентна уравнениям, получаемым из исходных с помощью подстановки:

$$f(\tau, Z) = f(\psi) \exp\left(i \frac{\Omega}{u} Z\right). \quad (21)$$

Однако подстановка (21) не содержит физического осмысленного разделения на поперечные (циклотронные) и продольные (плазменные) колебания.

В отсутствие теплового разброса  $\Theta = 0$  сохраняется интеграл плотности энергии:

$$W = \gamma + \frac{1}{2}\mu\zeta^2 + \frac{1}{2\mu} \left( \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) \omega^2 + \frac{\Omega^2}{u^2} \right) |\mathbf{A}|^2 + \\ + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) (i\omega(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}'^*) + |\mathbf{A}'|^2) = 1. \quad (22)$$

В случае конечного теплового разброса  $\Theta > 0$  плотность энергии перестаёт сохраняться, однако, вводя потенциал

$$\varphi = \int_0^\psi \zeta(\psi) d\psi',$$

можно записать закон сохранения плотности продольного импульса:

$$p + \frac{\mu}{2u}\zeta^2 + \mu\varphi - \frac{\Theta}{\gamma u - p} + \frac{1}{2\mu u} \left( \left( \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) (\omega - \Omega)^2 - \Omega^2 \right) |\mathbf{A}|^2 + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{1}{u^2}\right) |\mathbf{A}'|^2 + i(\omega - \Omega)(\mathbf{A}\mathbf{A}^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}'^*) \right) = P. \quad (23)$$

Заметим, однако, что интеграл продольного импульса (23) требует введения дополнительной переменной  $\varphi$ , и поэтому, в отличие от интеграла энергии (22), не приводит к реальному ограничению траектории движения.

Получить аналитические решения системы уравнений (17)–(20) в общем случае весьма сложно. В связи с этим было проведено численное интегрирование этой системы в широкой области изменения параметров. Результаты расчётов показали, что для холодной плазмы существуют солитоны огибающей (рис. 2) с дискретным спектром несущей частоты. В нагретой плазме полученные решения не удовлетворяли солитонным граничным условиям при  $\psi \rightarrow +\infty$  (рис. 3). Отсюда можно сделать

вывод о том, что при конечных температурах плазмы авторезонансные солитоны огибающей формироваться не могут.

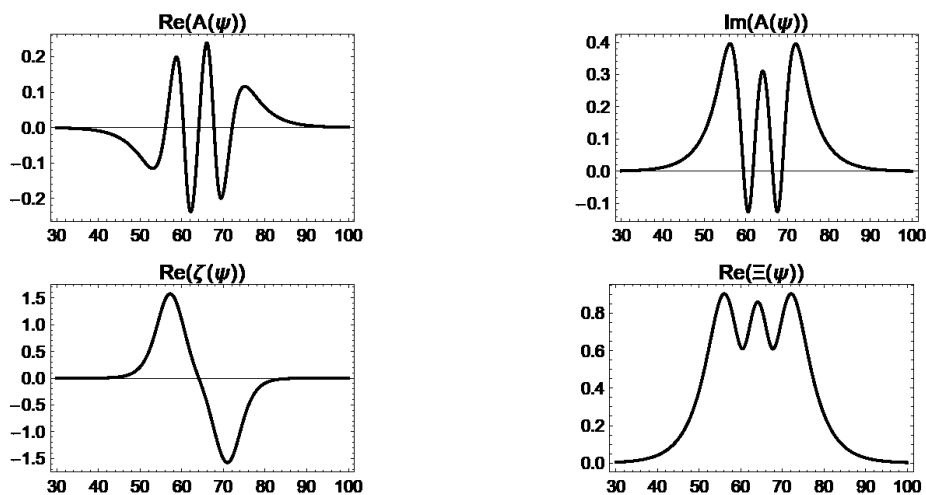


Рис. 2. Солитонное решение в холодной плазме,  
 $\mu = 0,0846$ ,  $u = 0,754$ ,  $\Omega = -0,387$ ,  $\Theta = 0$

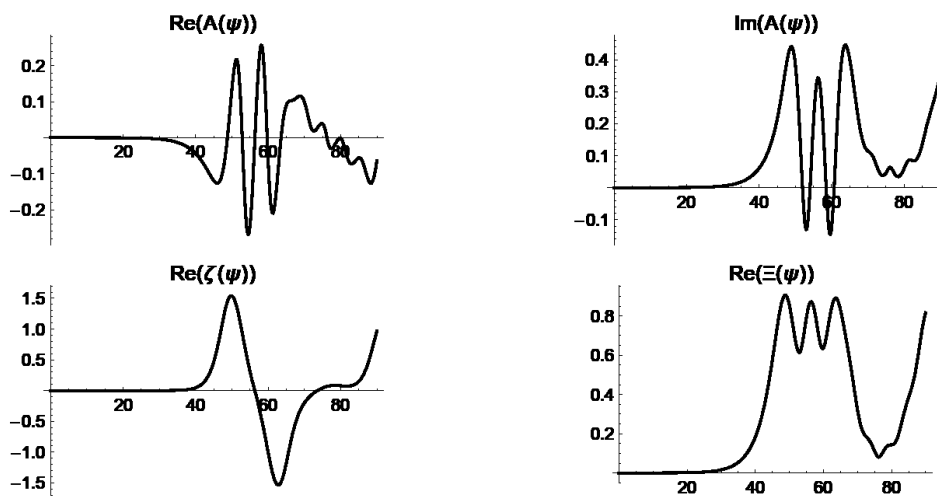


Рис. 3. Электромагнитный импульс в нагретой плазме,  
 $\mu = 0,0846$ ,  $u = 0,754$ ,  $\Omega = -0,387$ ,  $\Theta = 0,1$

## 5. Заключение

В работе получена система уравнений (17)–(20) для огибающей нелинейной правополяризованной лазерной волны в нагретой плазме. Анализ численных решений

этой системы показал, что в условиях электронно-циклотронного резонанса в холодной плазме такая волна может переходить в солитон огибающей. При этом продольные плазменные колебания целиком заперты внутри солитона. Такие решения возникают из-за сильной нелинейности, связанной с релятивистским движением электронов и резонансным возрастанием пондеромоторной силы. Численное интегрирование для плазмы с конечной температурой показало, что в условиях циклотронного резонанса устойчивых солитонных решений не существует. Построено аналитическое выражение для интеграла продольного импульса электронов в нагретой плазме. Сделан вывод о том, что нелинейное насыщение амплитуды излучения связано с возбуждением продольных колебаний плазмы под действием пондеромоторной силы. В этом случае дискретный набор значений несущей частоты солитона огибающей зависит от отношения частоты нелинейных продольных колебаний к ленгмюровской частоте плазмы.

### Литература

1. Коломенский А. А., Лебедев А. Н. Резонансные явления при движении частиц в плоской электромагнитной волне // ЖЭТФ. — 1963. — Т. 44, № 1. — С. 261–269.
2. Давыдовский В. Я. О возможности резонансного ускорения заряженных частиц электромагнитными волнами в постоянном магнитном поле // ЖЭТФ. — 1962. — Т. 43, № 3. — С. 886–888.
3. Roberts C. S., Buchsbaum S. J. Motion of a Charged Particle in a Constant Magnetic Field and a Transverse Electromagnetic Wave Propagating along the Field // Physical Review. — 1964. — Vol. 135. — Pp. 381–389.
4. Красовицкий В. Б., Прудских В. В. Авторезонансный солитон в плазме // Физика плазмы. — 1994. — Т. 20. — С. 564–570.
5. Прудских В. В. Сверхзвуковые и околозвуковые уединенные ионно-звуковые волны в замагниченной плазме // Физика плазмы. — 2010. — Т. 36. — С. 1052–1058.
6. Weakly Relativistic One-Dimensional Laser Pulse Envelope Solitons in a Warm Plasma / S. Poornakala, A. Das, P. K. Kaw, A. Sen, Z. M. Sheng, Y. Sentoku, K. Mima, K. Nishkava // Physics of Plasmas. — 2002. — Vol. 9. — Pp. 3802–3810.
7. Джавахишвили Д. И., Циццадзе Н. Л. Явления переноса в полностью ионизированной ультрарелятивистской плазме // ЖЭТФ. — 1973. — Т. 64. — С. 1214–1325.

UDC 533.9

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409

## Solitary Right Hand Polarized Electromagnetic Wave in Relativistic Plasma

V. G. Dorofeenko\*, V. B. Krasovitskiy\*, V. A. Turikov†

\* Department of Kinetic Equations  
Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences  
4 Miusskaya pl., Moscow, 125047, Russian Federation

† Department of Applied Physics  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation

In this paper of the nonlinear laser wave propagation in the hot plasma along the strong external magnetic field under the electron cyclotron resonance conditions is investigated. The strong nonlinearity of such a process is caused by the relativistic electron movement and resonance wave ponderomotive force acting on the electrons. The system of equations for the envelope right hand polarized laser pulse is derived using the hydrodynamics and Maxwell's equations. The numerical integration of this system for the cold plasma case discovered the soliton solutions. This kind of solutions take a form of the envelope solitons containing inside them the

plasma oscillations. The analytical expression for the energy density integral in a cold plasma is derived. It follows from the numerical results that for a hot plasma under cyclotron resonance conditions the soliton solution becomes unstable. In this case the energy density conservation breaks down, but electron momentum density conserves. It is concluded that the nonlinear saturation of the field amplitude is due to the plasma charge separation under electromagnetic radiation pressure. In this case the discrete set of the envelope soliton carrier frequency is determined by the ratio of the frequency of the nonlinear longitudinal electron oscillations to the Langmuir frequency of plasma. For the low density plasma the discrete frequency spectrum obtained by the numerical integration transforms to the continuous one.

**Key words and phrases:** magnetoactive plasma, right hand polarized wave, relativistic electrons, phase and group velocities, soliton solutions

## References

1. A. A. Kolomensky, A. N. Lebedev, Resonance Phenomena During the Particles Movement in a Plane Electromagnetic Wave, ЖЭТФ 44 (1) (1963) 261–269, in Russian.
2. V. Ya. Davydovskii, About the Possibility of the Resonance Acceleration of Charged Particles by Electromagnetic Waves in a Constant Magnetic Field, ЖЭТФ 43 (3) (1962) 886–888, in Russian.
3. C. S. Roberts, S. J. Buchsbaum, Motion of a Charged Particle in a Constant Magnetic Field and a Transverse Electromagnetic Wave Propagating along the Field, Physical Review 135 (1964) 381–389.
4. V. B. Krsovitskiy, V. V. Prudskikh, Autoresonant Soliton in Plasma, Plasma Physics Reports 20 (1994) 564–570, in Russian.
5. V. V. Prudskikh, Supersonic and Near-Sonic Solitary Ion-Sound Waves in a Magnetized Plasma, Plasma Physics Reports 36 (2010) 1052–1058, in Russian.
6. S. Poornakala, A. Das, P. K. Kaw, A. Sen, Z. M. Sheng, Y. Sentoku, K. Mima, K. Nishkava, Weakly Relativistic One-Dimensional Laser Pulse Envelope Solitons in a Warm Plasma, Physics of Plasmas 9 (2002) 3802–3810.
7. D. I. Dzhevakhishvili, N. L. Tsintsadze, Transport Phenomena in a Completely Ionized Ultrarelativistic Plasma, ЖЭТФ 64 (1973) 1214–1325, in Russian.

© Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б., Туриков В. А., 2017

### Для цитирования:

*Дорофеенко В. Г., Красовицкий В. Б., Туриков В. А. Уединённая правополяризованная электромагнитная волна в релятивистской плазме // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 401–409. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409.*

### For citation:

*Dorofeenko V. G., Krasovitskiy V. B., Turikov V. A. Solitary Right Hand Polarized Electromagnetic Wave in Relativistic Plasma, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 401–409. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-401-409. In Russian.*

### Сведения об авторах:

**Красовицкий Валерий Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, эксперт отдела кинетических уравнений ИПМ РАН им. М. В. Келдыша (e-mail: krasovit@mail.ru, тел.: +7 (495)3304917)

**Дорофеенко Виктор Геннадьевич** — профессор, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела кинетических уравнений ИПМ РАН им. М. В. Келдыша (e-mail: dorofeen@gmail.com, тел.: +7 (909)1505716)

**Туриков Валерий Алексеевич** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной физики РУДН (e-mail: turikov\_va@rudn.university)

**Information about the authors:**

**Krasovitskiy V. B.** — professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, expert of Department of Kinetic Equations of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (e-mail: [krasovit@mail.ru](mailto:krasovit@mail.ru), phone: +7 (495)3304917)

**Dorofeenko V. G.** — professor, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher of Department of Kinetic Equations of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (e-mail: [dorofeen@gmail.com](mailto:dorofeen@gmail.com), phone: +7 (909)1505716)

**Turikov V. A.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, assistant professor of Department of Applied Physics of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [turikov\\_va@rudn.university](mailto:turikov_va@rudn.university))

---

# Информатика и вычислительная техника

УДК 004.65:004.75

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-410-419

## Построение интегрированной информационной системы, объединяющей базы данных компаний, обеспечивающих грузоперевозки

А. С. Панкратов, А. Мазри

*Кафедра информационных технологий  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198*

В статье рассмотрена задача объединения в единое целое информации, содержащейся в базах данных различных компаний, обеспечивающих перевозку грузов. Предполагается, что эти компании являются независимыми и каждая из них поддерживает собственную базу данных о своём рабочем персонале, клиентах, количестве и параметрах транспортных средств, предоставляемых услугах и заказах. В статье моделируются три такие независимые базы данных (источники информации) и описывается схема построения на их основе интегрированной (объединённой) системы, предназначенной, в частности, для удобства клиентов при поиске перевозчиков, обладающих транспортными средствами с нужными параметрами (габаритами и грузоподъёмностью). Для решения данной задачи предлагается использовать комбинированный подход, сочетающий преимущества технологий медиаторов и хранилищ. Предполагается, что все источники имеют сходные концептуальные схемы, но обладают своими особенностями. В частности, могут быть разные наименования таблиц и атрибутов на разных источниках и разное распределение атрибутов по реляционным таблицам. Возможно также отсутствие некоторых атрибутов на отдельных источниках. Строятся таблицы соответствия и медиатор, транслирующий пользовательские запросы на источники. При этом для идентификации нужных источников поддерживается вспомогательное хранилище небольшого объёма, содержащее информацию о параметрах транспортных средств, которыми располагает каждый из источников. Пользователь интегрированной системы вводит данные о весе и габаритах своего груза, далее с помощью информации хранилища система определяет подходящие компании-грузоперевозчики, которым транслируется пользовательский запрос. После объединения всех ответов, пришедших от источников, клиент получает исчерпывающую информацию со списком подходящих компаний, ценах и иных условиях исполнения заказа.

**Ключевые слова:** база данных, СУБД, интеграция информации, мультибазовые системы, медиатор, хранилище, запрос, таблица соответствия, грузоперевозки

## 1. Введение

В деловой или личной сфере часто приходится работать с данными из разных источников, каждый из которых содержит сходную по смыслу информацию. В этой ситуации актуальной является задача объединение в единое целое этой изначально разрозненной информации [1, 2].

Проблема интеграции информации из различных и независимых источников, в частности объединение в единое целое разнородных баз данных (без ущерба их независимости), является достаточно обширной. Различным её аспектам посвящено большое количество работ на протяжении нескольких десятков лет. Среди российских публикаций по проблемам интеграции (как в плане разработки общих подходов, так и в конкретной реализации в различных предметных областях) можно назвать работы Д. В. Торшина, Л. Черняка, С. В. Кирсанова и ряда других авторов [3–9]. В настоящей работе рассматриваются вопросы, связанные с интеграцией данных в конкретной предметной области. Авторами были рассмотрены задачи, выполняемые диспетчерами компаний грузоперевозок. Современные темпы развития

этого бизнеса указывают на необходимость активного внедрения новых методов работы, соответствующих возросшим потребностям потребителей. В этой ситуации все большее число руководителей предприятий грузоперевозок задумывается об автоматизации своей компании и эффективном внедрении специализированного программного комплекса, который позволил наиболее полноценно использовать все его функции.

Современный уровень развития техники требует от фирм — разработчиков программного обеспечения дальнейшей децентрализации, приближения к местам реализации конкретных услуг. В частности, это касается грузоперевозок. С другой стороны, конечный потребитель хочет получить единую информационную систему, которая позволила бы найти ту компанию, которая его устроит по всем или большинству требований.

В данной статье решается задача построения интегрированной информационной системы, которая объединяет базы данных компаний, обеспечивающих грузоперевозки.

## 2. Описание предметной области

Каждый большой бизнес, сфера деятельности которого тесно связана с большими деньгами, будь то производство, оптовая или широкая розничная сеть, строит свой бизнес на правильно сформированной грузоперевозке. Вовремя доставленный груз поддерживает в стабильности весь процесс бизнеса. Если на производство не будет вовремя доставлен хоть один компонент, то все может остановиться, а владелец потерпит убытки. Спрос на грузовые автомобильные перевозки определяется динамикой и структурой изменения объемов производства. В нашей стране около 80% общего объема грузов перевозится автомобильным транспортом. Создание информационных систем требует детальных знаний о работе автоматизируемой предметной области

Основные функции грузоперевозок:

- 1) легко и быстро принять заказ;
- 2) оказание качественной работы по перевозке груза;
- 3) организовать быструю погрузку и разгрузку.

Основной задачей является проектирование базы данных и построение программы, которая обеспечила бы взаимодействие с ней в режиме диалога, для диспетчеров в компании грузоперевозок.

В представленной работе рассматриваются задачи, выполняемые диспетчерами компании грузоперевозок. Представленная в работе информационная система обеспечивает: хранение информации о клиентах, водителях, грузе, автомобилях, дате заказа и маршруте.

В БД могут храниться сведения:

- 1) об отделениях компании (если они есть): номер отделения, адрес отделения, номер телефона отделения, номер факса, ФИО начальника;
- 2) о машинах: гос. номер, габариты, тоннаж;
- 3) о водителях: номер личный, ФИО водителя, адрес водителя, номер телефона водителя;
- 4) о клиентах: ФИО клиента, номер телефона клиента, адрес клиента;
- 5) о заказах: номер заказа, тип заказа, габариты груза, тоннаж груза, дата заказа, пункт отправления, пункт назначения.

Ниже, на рис. 1 представлен один из вариантов концептуальной схемы базы данных «Грузоперевозки».

## 3. Предлагаемая схема решения

Будем предполагать, что существует несколько независимых компаний-грузоперевозчиков (источников информации), и работа каждой из них поддерживается собственной компьютерной системой с использованием некоторой СУБД. Далее

в работе будет осуществлено создание мультибазовой (интегрированной) [1,2] системы, расположенной поверх баз данных источников с целью учёта и распределения процессов грузоперевозок, удобства для конечного пользователя.

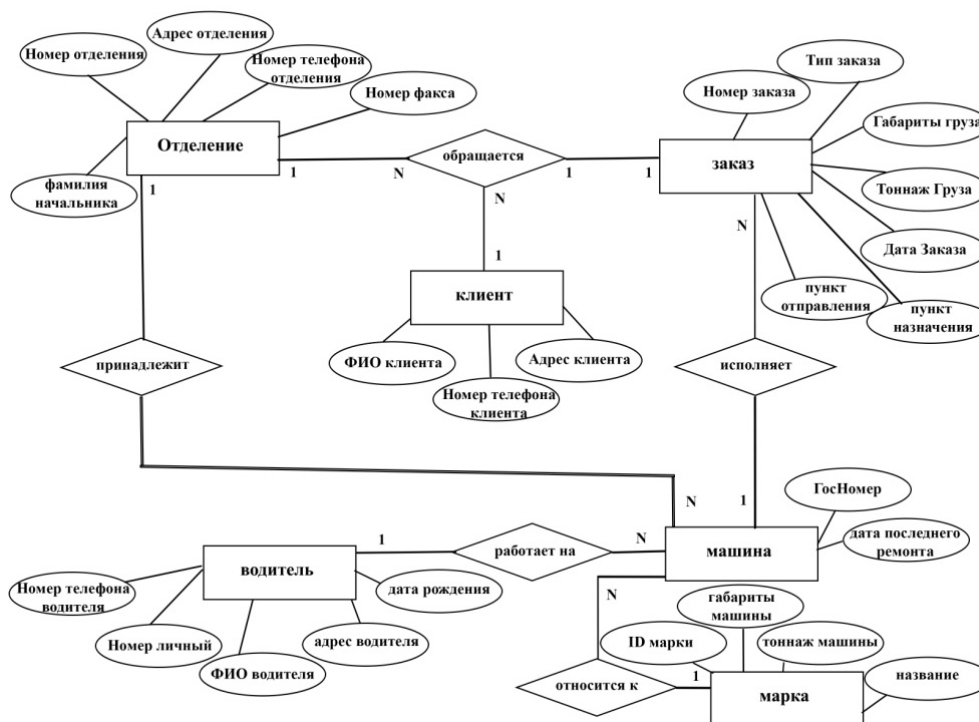


Рис. 1. Концептуальная схема базы данных «Грузоперевозки»

Существуют три основные технологии интеграции информации [2]:

1. Федеративные базы данных – источники независимы, но могут сообщаться между собой для обмена информацией. Федеративные базы данных бывают эффективными при наличии малого числа источников, в противном случае возникает необходимость поддержания большого количества связей между источниками (для экспорта-импорта информации).
2. Хранилища данных – данные от источников на периодической основе загружаются в централизованное хранилище, возможно, с предварительной обработкой с целью приведения их в соответствие со структурой хранилища. В хранилищах существует проблема периодической загрузки большого объёма информации с соответствующими требованиями к ресурсам системы, кроме того, информация, полученная от хранилища, может быть несколько устаревшей (не вполне актуальной).
3. Медиаторы – программные компоненты, принимающие запросы от пользователей и затем направляющие их к соответствующим источникам, возможно, с предварительной трансляцией; полученные ответы от источников приводятся в соответствие со структурой медиатора, объединяются и выдаются пользователю. В медиаторах нет таких проблем, как в хранилищах, но конкретные запросы к ним исполняются медленнее, чем к хранилищу. Кроме того, в медиаторах необходимо поддерживать механизм идентификации необходимых источников.

Для потенциального клиента часто бывает важно получить все возможные варианты, удовлетворяющие его запросу. Для этого следует отправить запрос в разные



компании, соответствующие требованиям клиента. При этом для оптимизации процесса поиска важно запрашивать только те источники, которые заведомо соответствуют этим требованиям и не запрашивать другие источники. Для этой цели наиболее оптимальным вариантом представляется медиатор со вспомогательным хранилищем. Медиатор принимает запрос от пользователя и переадресует его тем источникам, где может находиться нужная информация. Для определения того, к каким источникам следует обращаться, при медиаторе создаётся «мини-хранилище», периодически закачивающее от источников информацию о количестве и параметрах транспортных средств, которыми располагает каждая компания-источник.

#### 4. Описание тестовой модели

Авторами были рассмотрены три источника: Ист1, Ист2, Ист3, на которых хранится следующая информация в реляционных таблицах.

**Ист1:** Об отделениях компании: Номер отделения, Адрес отделения, Телефон отделения, Факс отделения; О машинах: ГосНомер, Марка; О марках: ID, Название, Габариты машины, Тоннаж машины, Цена за км; О водителях: Номер личный, ФИО, Номер контактного телефона, Личные данные; О клиентах: ID, ФИО клиента, Номер контактного телефона, Адрес клиента; О заказах: Номер заказа, Габариты груза, Тоннаж груза, Дата заказа, Пункт отправления, Пункт назначения.

**Ист2:** О компании: Адрес, Телефон; Об автомобилях: ГосНомер, Габариты машины, Тоннаж машины, Цена за час; О шофёрах: Номер личный, ФИО шофёра, Адрес шофёра, Номер телефона шофёра; О клиентах: ID клиента, Номер телефона клиента, ФИО клиента; Об ордерах (заказах): Номер ордера, Габариты груза, Тоннаж груза, Дата ордера, Пункт отправления, Пункт назначения.

**Ист3:** О филиалах: Номер филиала, Адрес филиала, Номер телефона филиала; Об авто: Марка, ГосНомер авто, Габариты, Тоннаж, Цена подачи, Цена за час; О водителях: Номер Вод. Прав, ФИО водителя, Номер телефона водителя; О заказчиках: ID заказчика, ФИО заказчика, Номер телефона заказчика, Адрес заказчика; О заказах: Номер заказа, Габариты груза, Тоннаж груза, Дата заказа, Пункт отправления, Пункт назначения.

Структура медиатора (виртуальная) составляется только из следующих атрибутов (наиболее существенными для конечного пользователя):

Об отделениях компании: Номер отделения, Адрес отделения, Номер телефона отделения, Номер факса; О машинах: ГосНомер, Марка, Габариты, Тоннаж, Цена за км, Цена за час, Цена подачи; О водителях: Номер личный, ФИО, Номер телефона; О клиентах: ФИО, Номер телефона; О заказах: Номер заказа, Габариты груза, Тоннаж груза, Дата заказа, Пункт отправления, Пункт назначения.

Некоторые поля могут содержать значение NULL.

Одними из наиболее существенных требований в клиентском заказе являются технические характеристики машины, в частности, габариты и грузоподъёмность. В связи с этим представляется целесообразным, чтобы по получении заказа от клиента медиатор перенаправлял его не всем компаниям, а только тем, которые располагают машинами в нужном количестве и с нужными характеристиками. С этой целью предлагается устроить вспомогательное хранилище при медиаторе, содержащее информацию об имеющихся машинах и их характеристиках у каждой из компаний-источников. Оно представляет собой таблицу «АвтоНаИсточниках» с колонками: ID\_Источника, ГосНомер машины, Габариты, Грузоподъёмность (тоннаж). Поскольку обновления машинного парка в компаниях происходит не часто, представляются два варианта обновления вспомогательного хранилища:

- 1) каждая компания при обновлении своего автопарка информирует об этом администратора интегрированной системы;
- 2) поддерживается специальное приложение, которое при каждом таком обновлении автоматически их переносит на хранилище при медиаторе [2].

Таблица 1

Таблица соответствия медиатора и источников

Медиатор. таблица	Медиатор. атрибут	Ист1. таблица	Ист1. атрибут	Ист2. таблица	Ист2. атрибут	Ист3. таблица	Ист3. атрибут
Отделение	Номер отделения	Отделение	Номер отделения	–	–	Филиал	Номер филиала
Отделение	Адрес отделения	Отделение	Адрес отделения	Компания	Адрес	Филиал	Адрес филиала
Отделение	Номер телефона отделения	Отделение	Телефон отделения	Компания	Телефон	Филиал	Номер телефона филиала
Отделение	Номер факса	Отделение	Факс отделения	–	–	–	–
Клиент	Номер телефона	Клиент	Номер контактного телефона	Клиент	Номер телефона клиента	Заказчик	Номер телефона заказчика
Клиент	ФИО	ФИО клиента	Адрес клиента	Клиент	ФИО клиента	Заказчик	ФИО заказчика
Машина	ГосНомер	Машина	ГосНомер	Автомобиль	ГосНомер	Авто	ГосНомер авто
Машина	Марка	Марка	название	–	–	Авто	Марка
Машина	Габариты	Марка	Габариты машины	Автомобиль	Габариты машины	Авто	Габариты
Машина	Тоннаж	Марка	Тоннаж машины	Автомобиль	Тоннаж машины	Авто	Тоннаж
Машина	Цена за км	Марка	Цена за км	–	–	–	–
Машина	Цена за час	–	–	Автомобиль	Цена за час	Авто	Цена за час
Машина	Цена подачи	–	–	–	–	Авто	Цена подачи

Машина	Номер отделения	Машина	Номер отделения	–	–	Авто	Номер филиала
Водитель	Номер личный	Водитель	Номер личный	Шофёр	Номер личный	Водитель	Номер вод. прав
Водитель	ФИО	Водитель	ФИО водителя	Шофёр	ФИО шофера	Водитель	ФИО водителя
Водитель	Номер телефона	Водитель	Номер контактного телефона	Шофера	Номер телефона шофера	Водитель	Номер телефона водителя
Заказ	Номер заказа	Заказ	Номер заказа	Ордер	Номер ордера	Заказ	Номер заказа
Заказ	Габариты груза	Заказ	Габариты груза	Ордер	Габариты груза	Заказ	Габариты груза
Заказ	Тоннаж груза	Заказ	Тоннаж груза	Ордер	Тоннаж груза	Заказ	Тоннаж груза
Заказ	Дата заказа	Заказ	Дата заказа	Ордер	Дата ордера	Заказ	Дата заказа
Заказ	Пункт отправления	Заказ	Пункт отправления	Ордер	Пункт отправления	Заказ	Пункт отправления
Заказ	Пункт назначения	Заказ	Пункт назначения	Ордер	Пункт назначения	Заказ	Пункт назначения
Заказ	Телефон клиента	Заказ	Телефон клиента	Ордер	Номер телефона клиента	Заказ	Номер телефона заказчика
Заказ	Номер машины	Заказ	ГосНомер машины	Ордер	ГосНомер машины	Заказ	ГосНомер авто
Заказ	Водитель номер личный	Заказ	Водитель номер личный	Ордер	Водитель номер личный	Заказ	Водитель номер прав

Для трансляции запросов на источник медиатор поддерживает таблицу соответствия с 12 колонками (см. табл. 1): Медиатор.Таблица, Медиатор.Атрибут, Медиатор.Тип, Ист1.Таблица, Ист1.Атрибут, Ист1.Тип, Ист2.Таблица, Ист2.Атрибут, Ист2.Тип, Ист3.Таблица, Ист3.Атрибут, Ист3.Тип. В целях экономии места приведём её сокращённый вариант с 8 колонками — без типов атрибутов.

При медиаторе также поддерживается таблица «Sources» (см. табл. 2), содержащая наименования и сетевые адреса источников.

Таблица 2

Таблица «Sources»

IdSource	Source Name	Адрес в сети
DB1	...	...
DB2	...	...
DB3	...	...

Список запросов в интегрированной системе, предлагаемый для конечного пользователя:

1. Выдаются номера телефона отделений и их адреса, марки и модели машин, цена.
2. Вводятся габариты и тоннаж груза. Выдаются телефонные номера, номера факсов и адреса отделений, типы машин, цены. Если клиента устраивают условия какой-либо из компаний, он может с ней связаться и сделать заказ. Сюда же возможно встроить дополнительное приложение, позволяющее по заданным пунктам отправления и назначения вычислять расстояние между ними (как, например, на сайте [www.avtodispatcher.ru](http://www.avtodispatcher.ru)) и предполагаемую цену заказа (в случае, когда цена завязана с расстоянием).
3. Вводятся ФИО и номер телефона клиента. Выдаётся все информация о заказах, сделанных клиентом.

При поступлении запроса медиатору сначала происходит формирование вспомогательного запроса хранилищу, выявляющего, какие компании-источники располагают машинами, соответствующими требованиям, указанным в запросе. Далее этот запрос перенаправляется выявленным источникам.

Рассмотрим для примера второй запрос из списка как наиболее популярный. Его SQL-код может выглядеть следующим образом:

```
SELECT Отделение.[Номер отделения], Отделение.[Адрес отделения],
       Отделение.[Номер телефона отделения], Отделение.[Номер факса],
       Машина.Марка, Машина.Габариты, Машина.Тоннаж,
       Машина.[Цена за км], Машина.[Цена за час], Машина.[Цена подачи]
FROM Отделение, Машина
WHERE Машина.[Габариты машины] >= [Габариты груза]
      AND Машина.[Тоннаж машины] >= [Тоннаж груза]
      AND Отделение.[Номер отделения] = Машина.[Номер отделения]
```

Габариты груза и Тоннаж груза вводятся пользователем в форму-интерфейс при запуске запроса. Опишем технологию его исполнения.

На первом этапе, исходя из предложения WHERE исходного запроса, формируется вспомогательный запрос, адресованный таблице «АвтоНаИсточниках» хранилища. Отсеиваются источники, которые не располагают машинами с нужными характеристиками:

```
SELECT ID_Источника
FROM АвтоНаИсточниках
WHERE АвтоНаИсточниках.Габариты >= [Габариты груза]
```

AND АвтоНаИсточниках.Грузоподъёмность>=[Тоннаж груза]

Результаты записываются во временную таблицу «SourcesQuery».

На втором этапе происходит обращение с исходным запросом к каждому из найденных на первом этапе источникам (по их сетевым адресам), указанным в таблице «SourcesQuery»). При этом для каждого источника SQL-код исходного запроса с помощью таблицы соответствия преобразуется к виду, который данный источник будет способен воспринять. В случае отсутствия на источнике какого-либо из атрибутов, указанных в предложении SELECT исходного кода, в преобразованной формуле, адресованной этому источнику, он не указывается. К примеру, для источника Ист1 преобразованный код будет выглядеть следующим образом:

```
SELECT Отделение.[Номер отделения],
       Отделение.[Адрес отделения], Отделение.[Телефон отделения],
       Отделение.[Факс отделения], Марка.Название,
       Марка.[Габариты машины], Марка.[Тоннаж машины],
       Марка.[Цена за км]
FROM Отделение, Машина, Марка
WHERE Марка.[Габариты машины]>=[Габариты груза]
AND Марка.[Тоннаж машины]>=[Тоннаж груза]
AND Отделение.[Номер отделения]=Машина.[Номер отделения]
```

Предполагается, что при исполнении этого SQL-кода на источнике будет учтена связь таблиц «Машина» и «Марка» и предложение WHERE дополнится условием Машина.Марка=Марка.ID.

На третьем этапе медиатор получает все ответы от источников и производит их обратное преобразование к структуре медиатора. После этого каждый ответ дополняется необходимыми полями с информацией об источниках (грузоперевозчиках), все ответы объединяются и выдаются пользователю.

## 5. Заключение

В ходе решения поставленной задачи была построена интегрированная информационная система, объединяющая базы данных компаний-грузоперевозчиков. Смоделированы три источника данных. Выделены информационные объекты базы данных и определены их атрибуты. Разработана логическая структура медиатора, таблицы соответствий и структура вспомогательного хранилища. Описан ход исполнения одного из типовых пользовательских запросов к интегрированной системе. Применение разработанной интегрированной системы позволит компаниям привлечь новых клиентов, сократить издержки производства и увеличить прибыль за счёт сокращения длительности оформления заказа и уменьшения затрат на привлечение компетентного персонала.

## Литература

1. Коннолли Т., Бегг К. Базы данных: проектирование, реализация и сопровождение. Теория и практика. — Москва: Вильямс, 2003. — 1436 с.
2. Гарсия-Моллина Г., Ульман Д., Уидом Д. Системы баз данных. Полный курс. — Москва: Вильямс, 2003. — 1088 с.
3. Торшин Д. В. Организация единого интегрированного пространства на основе универсального формата обмена данными // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия: Информатика. Телекоммуникации. Управление. — 2009. — Т. 71, № 2. — С. 26–32.
4. Черняк Л. Интеграция данных: синтаксис и семантика // Открытые системы. СУБД. — 2009. — № 10. — С. 24–29.
5. Технология интеграции архивов медицинских изображений / С. В. Кирсанов, В. Н. Коваленко, Е. И. Коваленко, А. Ю. Куликов, М. А. Шифрин // Врач и информационные технологии. — 2013. — № 2. — С. 59–70.

6. Панкратов А. С. Технология интеграции разнородных баз данных на примере объединения электронных медицинских карт // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2011. — № 4. — С. 60–67.
7. Валуев А. М., Панкратов А. С. Современные технологии интеграции информации из независимых баз данных и возможности их применения в задачах планирования и управления // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал). — 2013. — № 7. — С. 170–174.
8. Панкратов А. С., Пшеунов А. Х. Современные технологии интеграции информации из независимых источников и их применение при построении информационной системы, объединяющей транспортные расписания // Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — № 3. — С. 232–242.
9. Стратегический разрыв: Технологии воплощения корпоративной стратегии в жизнь / М. Ковени, Д. Гэнстер, Б. Хартлен, Д. Кинг. — Москва: Альпина Бизнес Букс, 2004. — 232 с.

UDC 004.65:004.75

DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-410-419

## Building an Integrated Information System that Merge the Databases of Companies Providing Cargo Carriers

A. S. Pankratov, A. Mazri

*Information Technologies Department  
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)  
6 Miklukho-Maklaya St., Moscow, 117198, Russian Federation*

The task of integrating information contained in databases of various companies that provide cargo carriers is considered in the article. It is assumed that these companies are independent and each of them maintains its own database about its employees, customers, number and parameters of carries, services and orders. The article simulates three such independent databases (information sources) and describes a scheme for constructing an integrated system based on them, in particular, for the convenience of customers when searching for carriers with the necessary parameters (dimensions and load-carrying capacity). To solve this problem, it is proposed to use an approach combining the advantages of mediator and data repository technologies. It is assumed that all sources have similar conceptual schemes, but they have their own specific characteristics. In particular, there may be different names of tables and attributes in different sources and different distribution of attributes throw tables. Certain attributes may also be absent at some sources. We construct correspondence tables and a mediator that translate user queries to the sources. To identify the necessary sources, a small auxiliary repository is maintained that contains information about the parameters of the carriers that each source has. The user of the integrated system enters data on the weight and dimensions of his cargo, then, using the information of the repository, the system determines the appropriate trucking companies to which the user request is broadcast. After combining all the answers that came from the sources, the client receives full information with a list of suitable companies, prices and other conditions for the execution of the order.

**Key words and phrases:** database, DBMS, information integration, multi-base systems, mediator, storage, query, correspondence table, cargo transportation

## References

1. T. Connolly, C. Begg, Database Systems: A Practical Approach to Design, Implementation, and Management, Williams, Moscow, 2003.
2. H. Garsia-Molina, J. Ullman, J. Widom, Database Systems: The Complete Book, Williams, Moscow, 2003.

3. D. V. Torshin, Organization of an United, Integrated Space Based on Data Exchange Universal Format, Scientific and technical sheets of St-Petersburg Polytechnic University. Series: Information Sciences. Telecommunications. Management 71 (2) (2009) 26–32, in Russian.
4. L. Chernyak, Data Integration: Syntax and Semantics, Open Systems. DBMS (10) (2009) 24–29, in Russian.
5. S. V. Kirsanov, V. N. Kovalenko, E. I. Kovalenko, A. Y. Kulikov, M. A. Shifrin, The Technology of Integration of Medical Image Archives, Doctor and Information Technology (2) (2013) 59–70, in Russian.
6. A. S. Pankratov, Integration Technology of Heterogeneous Databases Exemplified by Consolidation of Electronic Medical Cards, Artificial Intelligence and Decision Making (4) (2011) 60–67, in Russian.
7. A. M. Valuev, A. S. Pankratov, Modern Technologies for Information Integration from Independed Databases and Ways for Application in the Problems of Planning and Management, Mining informational and analytical bulletin (scientific and technical journal) (7) (2013) 170–174, in Russian.
8. A. S. Pankratov, A. Kh. Psheunov, Modern Technologies Integration of Information from Independent Sources and Their Using for the Construction of an Information System that Combines Transport Timetables, Bulletin of Russian Peoples' Friendship University. Series: Mathematics, Information Sciences and Physics (3) (2017) 232–242, in Russian.
9. M. Coveney, D. Ganster, B. Hartlen, D. King, The Strategy Gap: Leveraging Technology to Execute Winning Strategies, Alpina Business Books, Moscow, 2004, in Russian.

© Панкратов А. С., Мазри А., 2017

**Для цитирования:**

*Панкратов А. С., Мазри А.* Построение интегрированной информационной системы, объединяющей базы данных компаний, обеспечивающих грузоперевозки // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика. Информатика. Физика. — 2017. — Т. 25, № 4. — С. 410–419. — DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-410-419.

**For citation:**

Pankratov A. S., Mazri A. Building an Integrated Information System that Merge the Databases of Companies Providing Cargo Carriers, RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics 25 (4) (2017) 410–419. DOI: 10.22363/2312-9735-2017-25-4-410-419. In Russian.

**Сведения об авторах:**

**Панкратов Александр Серафимович** — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: [pankratov\\_as@rudn.university](mailto:pankratov_as@rudn.university), тел.: +7(495)9550975)

**Мазри Абдеррахим** (Алжир) — студент кафедры информационных технологий РУДН (e-mail: [psheunov.a@yandex.ru](mailto:psheunov.a@yandex.ru))

**Information about the authors:**

**Pankratov A. S.** — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, associate professor of Informational Technologies Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [pankratov\\_as@rudn.university](mailto:pankratov_as@rudn.university), phone: +7(495)9550975)

**Mazri A.** — student of Informational Technologies Department of Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University) (e-mail: [psheunov.a@yandex.ru](mailto:psheunov.a@yandex.ru))

## ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ СТАТЕЙ

Редколлегия журнала «Вестник Российского университета дружбы народов», серия «Математика. Информатика. Физика» просит авторов придерживаться следующих правил при представлении статьи в журнал.

1. Статьи представляются на русском или английском языке.
2. Объём статьи не должен превышать 0,75 авт. печ. л.
3. Автор представляет в редакцию электронную версию рукописи, набранную в системе  $\text{\LaTeX}$  (используется версия  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , для набора формул используется макропакет  $\mathcal{AMS}\text{-}\text{\LaTeX}$ ). К электронному варианту прилагается отпечатанный на бумаге экземпляр или файл в формате Postscript или PDF. Для каждой статьи указываются коды УДК и MSC (PACS).
4. Название, аннотация, ключевые слова, фамилии и инициалы авторов, название организации, где работают авторы, предоставляются на русском и английском языках.
5. Аннотация (от 150 до 250 слов) должна описывать основные цели исследования; объяснять, как было проведено исследование, без методологических деталей; суммировать наиболее важные результаты и их значение; быть написана качественным русским/английским языком. В аннотации не допускаются ссылки на цитированную литературу, аббревиатуры и громоздкие формулы.
6. Текст статьи должен включать введение, заключение, список использованных источников (не менее 5). Глубина разбивки текста не должна превышать трёх уровней (разделы, пункты и подпункты).
7. Рисунки принимаются в электронном виде. Каждый рисунок должен быть помещён в отдельный файл. Принимаемые форматы файлов: 1) векторные: PDF, EPS,  $\text{\TeX}$ ; 2) растровые: PNG, TIFF, GIF (возможна инкапсуляция в EPS).
8. Размер рисунка вместе с подписью не должен превышать 14x19 см. Разрешение растрового рисунка должно находиться в пределах 300–600 dpi.
9. Рисунки должны быть чёрно-белые. Возможность использования полутоновых и фотографических изображений может быть рассмотрена отдельно. Фоны должны быть только штрихованные. Сеточные фоны и полутона не допускаются.
10. Список литературы подготавливается в системе  $\text{\BibTeX}$  и представляется в двух отдельных файлах — по требованиям ГОСТ 7.1-84 (смешанный список источников на русском и других языках) и по стандарту Harvard (полностью на иностранном языке (англ., франц., нем., исп.); для источников на русском языке требуется перевод на английский язык). Ссылки на неопубликованные работы не допускаются.
11. Рукопись должна быть тщательно выверена. Необходимо указать точные сведения об авторах: фамилию, имя, отчество полностью, учёную степень, учёное звание, должность с указанием подразделения и организации, почтовый и электронный адрес места работы авторов и телефоны. После подготовки редакцией к набору размеченный и исправленный автором текст статьи и исправленная электронная версия возвращаются в редакцию. Корректурa для просмотра высылается по e-mail.
12. Возвращение статьи автору на доработку не означает, что она принята к опубликованию. Доработанный вариант статьи редколлегия рассматривает вновь. В случае отклонения статьи редколлегия оставляет за собой право не возвращать автору один её экземпляр.
13. Все статьи, планируемые к публикации в журнале, проходят обязательную процедуру рецензирования двумя рецензентами, являющимися экспертами в данной области. Один из рецензентов может быть выбран из состава редколлегии (внутреннее рецензирование). В обязательном порядке статья направляется независимому эксперту (на внешнее рецензирование). Процедура рецензирования является анонимной для авторов. По результатам рецензирования статья может быть отклонена, направлена автору на доработку или принята к печати. Требования к рецензиям:



оценка существа работы и возможности её публикации в журнале; конкретное перечисление ошибок в методологии и инструментарии (если они есть); предложения по доработке текста.

14. При получении положительного заключения рецензента материалы помещаются в «портфель» редакции для дальнейшего опубликования. При получении отрицательного заключения одного из рецензентов статья рассматривается на заседании редакционной коллегии, которая принимает решение об отклонении статьи или о необходимости получения дополнительной рецензии независимого эксперта.

Контактный адрес для решения технических вопросов по предоставляемым материалам в журнал Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика»: Россия, Москва, ул. Орджоникидзе, д.3, комн. 313; e-mail: [vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru](mailto:vestnik-miph@sci.pfu.edu.ru).

Адрес для переписки: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д.6, факультет физико-математических и естественных наук, профессору Севастьянову Л. А.

ф. СП-1

ФГУП «ПОЧТА РОССИИ»

АБОНЕМЕНТ на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика. Информатика. Физика»**

Количество комплектов:

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)

**ДОСТАВОЧНАЯ КАРТОЧКА**

ПВ	место	литер

на журнал

**18235**

(индекс издания)

**ВЕСТНИК РУДН**

**Серия «Математика. Информатика. Физика»**

Стоимость	подписки	_____ руб. ___ коп.	Количество комплектов:
	переадресовки	_____ руб. ___ коп.	

на 20\_\_ год по месяцам

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Куда

(почтовый индекс)

(адрес)

Кому

(фамилия, инициалы)