УДК 537.8

Понятие реактивной мощности в электродинамике и лагранжевы структуры волновых электромагнитных полей

О. А. Казаков

Кафедра прикладной математики
ФБГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»
Вадковский пер. д. 3а, Москва, Россия, 119136

Получено представление реактивной мощности для негармонических электромагнитных полей и дивергентное уравнение сохранения реактивной энергии. Доказано, что реактивная мощность является функционалом действия, а объёмная плотность реактивной мощности с точностью до знака равна значению плотности функции Лагранжа, которую принято называть лагранжианом. Показано, что лагранжиан можно использовать для выявления структуры электромагнитного поля, подобной структуре стоячих волн.

Ключевые слова: реактивная мощность, уравнение сохранения реактивной энергии, функционал действия, лагранжиан, лагранжева структура, структура стоячих волн.

Введение

В монографиях по классической и технической электродинамике, теории волновых электромагнитных полей при анализе энергетических характеристик волновых полей в средах с постоянными проводимостью $\sigma = \mathrm{const}$, диэлектрической $\varepsilon = \mathrm{const}$ и магнитной $\mu = \mathrm{const}$ проницаемостями и монохроматических полей иногда используют комплексную теорему Умова–Пойнтинга (Complex Poynting's Theorem) (например в [1–11]).

Действительная часть (среднее значение вектора Пойнтинга) имеет чёткий физический смысл мощности диссипации энергии электромагнитного поля (активная мощность), мнимая часть, равная произведению двойной частоты на разность средних за период значений энергий магнитного и электрического поля в объёме среды, называется (часто, но не всегда) реактивной мощностью

$$Q = \mathrm{Im} \int\limits_{\mathrm{S_V}} \mathbf{S} \mathrm{d}\mathbf{s} = \mathrm{Im} \int\limits_{\mathrm{S_V}} \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*}{2} \mathrm{d}\mathbf{s} = 2\omega \int\limits_{\mathrm{V}} \left(\frac{\mu_0 \mu \mathbf{H}\mathbf{H}^*}{4} - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}\mathbf{E}^*}{4} \right) \mathrm{d}v \quad (\text{СИ}), \quad (1)$$

где ε_0, μ_0 — диэлектрическая и магнитная постоянные вакуума; ω — частота; $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — комплексные напряжённости электрического и магнитного полей; V — объём области пространства (объекта); $\mathrm{S_V}$ — площадь поверхности объёма V (объекта).

Это выражение встречается в литературе по электродинамике ещё в первой половине XX века [1, 2] (но не называется реактивной мощностью) и рассматривается в отличие от активной мощности редко [3–8], но вплоть до настоящего времени. По-видимому, это связано с тем, что для этого представления не смогли найти чёткого физического смысла.

Однако для радиофизиков и электротехников выражение (1) важно, хотя только для монохроматических полей, так как позволяет получить «полевую» интерпретацию электротехнической реактивной мощности

Статья поступила в редакцию 13 июня 2012 г.

Работа выполнена на кафедре прикладной математики МГТУ “СТАНКИН” при поддержке РФФИ (грант 12-01-00874-а).

Автор выражает благодарность проф. Виницкому С.И., проф. Дубовику В.М., проф. Егорову А.А., проф. Пупышеву В.В., проф. Рыбакову Ю.П. и проф. Севастьянову Л.А. за обсуждение, замечания и поддержку этой работы.

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^T u \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t, \tag{2}$$

где u — напряжение; i — ток; t — время; T — период. Поэтому выражение (1) часто встречается в монографиях по теории электромагнитного поля для радиофизиков и электротехников (например в [9–11]). Электротехническую реактивную мощность используют для оценки эффективности работы электромагнитных систем (качество передаваемой электроэнергии), электромагнитной совместимости устройств, а также при исследовании резонансных явлений (для синусоидальных токов при $Q = 0$).

Реактивной мощности (1) пытались придать смысл обменной мощности между источником и приёмником электромагнитной системы, но, как отметил Л.А. Вайнштейн в [3], это ошибочная интерпретация.

Если же материальные уравнения среды

$$\mathbf{j}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{j}\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{r}, t\right)\right), \quad \mathbf{D}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{r}, t\right)\right), \quad \mathbf{B}\left(\mathbf{r}, t\right) = \mathbf{B}\left(\mathbf{H}\left(\mathbf{r}, t\right)\right)$$

являются нелинейными функциями напряжённостей электрического и магнитного полей или линейными, но с зависящими от времени или частоты коэффициентами, то электромагнитное поле не будет монохроматическим даже при монохроматическом возбуждении. Здесь $\mathbf{j}$ — плотность тока, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор; $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ — индукции электрического и магнитного полей. Для немонохроматического поля до настоящего времени не удалось получить сколько-нибудь внятную физическую интерпретацию ни электротехнического (2) ни электродинамического (1) понятий реактивной мощности.

Автор заинтересовался проблемой реактивной мощности в начале девяностых годов прошлого века и получил представление электротехнической реактивной мощности (2) в распределённых параметрах электромагнитного поля [12], а также дал её физическую интерпретацию и показал, как использовать плотность реактивной мощности для анализа волновых электромагнитных полей [13, 14]. В данной статье кратко изложены, обобщены и дополнены результаты автора, опубликованные в работах [12–14].

1. Что такое реактивная мощность и уравнение сохранения реактивной энергии?

Отказавшись от попытки интерпретации выражения (1), подставим в выражение (2) для двухполюсника формулы

$$u = -\int\limits_l \nabla\varphi \mathrm{d}l, \quad i\left(t\right) = \int\limits_S \left(\mathbf{j} + \partial\mathbf{D}/\partial t\right) \mathrm{d}s = \oint\limits_C \mathbf{H}\, \mathrm{d}\tau.$$

Далее, с помощью перехода к интегральным суммам и последующего предельного перехода, перейдём от произведения линейного и поверхностного интегралов к интегралу по объёму объекта V, а от произведения линейных интегралов к интегралу по поверхности объекта S_V и, пренебрегая интегралом

$$-\frac{1}{T} \int\limits_0^T \int\limits_{\mathrm{S_V}} \frac{1}{\omega} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\mathbf{s}\mathrm{d}t,$$

получим выражение (в СИ) для реактивной мощности

$$\mathrm{Q} = \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathrm{V}} \frac{1}{\omega}\left\{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\right\}\mathrm{d}v\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\int\limits_{\mathrm{S_V}} \frac{1}{2\omega}\left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H} - \mathbf{E}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right)\mathrm{d}\mathbf{s}\mathrm{d}t \quad (3)$$

где φ — электродинамический потенциал ; $\mathbf{A}$ — векторный магнитный потенциал; C — замкнутый контур пересечения эквипотенциальной поверхности S с поверхностью объекта (двухполюсника) $\mathrm{S_V}$.

Этот переход возможен при следующих допущениях: двухполюсник — протяжённый объект, объем которого не изменяется и не деформируется; внутри объёма объекта и на его поверхности все электромагнитные параметры непрерывны и ограниченны; среда объекта нейтральна; поверхности электрического контакта объекта с соединительными проводниками эквипотенциальны; индуцированным электрическим полем $-\partial\mathbf{A}/\partial t$ вне объёма объекта можно пренебречь (электротехническое приближение).

С помощью уравнений Максвелла можно построить ещё одно уравнение, имеющее, как и уравнение Умова–Пойнтинга, дивергентный вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \mathbf{H}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)\right\} + \left\{\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\right\} =$$

$$= -\nabla\left\{\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\times\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}\right)\right\}, \quad (4)$$

Для этого умножим уравнение, описывающее обобщённый закон Ампера на $-\partial\mathbf{E}/\partial t$, а уравнение закона электромагнитной индукции Фарадея на $\partial\mathbf{H}/\partial t$. Затем продифференцируем уравнения обобщённого закона Ампера и закона Фарадея по времени и умножим их, соответственно, на $\mathbf{E}$ и $-\mathbf{H}$. Сложим полученные четыре равенства и разделим на два.

Для периодических функций напряжения и тока отношение интеграла за период и по объёму двухполюсника от (4) к 2π совпадёт с (3).

Если же в случае монохроматического поля при $\sigma = \mathrm{const}$, $\varepsilon = \mathrm{const}$, $\mu = \mathrm{const}$ подставить $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$, $\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}^*(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^*(\mathbf{r})\exp(i\omega t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mu\mathbf{H}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ в (4), разделить на удвоенную частоту и проинтегрировать по объёму, то получим выражение (1).

Таким образом, можно предположить, что как для монохроматических, так и для немонохроматических полей интеграл

$$q(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int q(\mathbf{r},t)\,\mathrm{d}t$$

от выражения

$$q(\mathbf{r},t) = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} - \mathbf{j}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \quad (5)$$

представляет собой объёмную плотность реактивной мощности. Выражение (5) можно в таком случае назвать 4-плотностью реактивной мощности (в пространстве-времени). Выражение в первых фигурных скобках левой части (4) можно интерпретировать как 4-плотность реактивной энергии, выражение в фигурных скобках правой части (4) — как 4-плотность потока реактивной энергии, а уравнение (4) — как закон сохранения реактивной энергии.

Используя преобразование Фурье из (5), получаем

$$q(\mathbf{r},\omega)=\omega^2\left(\mathbf{B}^*(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{H}(\mathbf{r},\omega)-\mathbf{D}(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\omega)\right)-i\omega\mathbf{j}(\mathbf{r},\omega)\,\mathbf{E}^*(\mathbf{r},\omega) \qquad (6)$$

спектральную плотность объёмной плотности реактивной мощности

$$q(\mathbf{r})=\int\limits_{-\infty}^{\infty} q(\mathbf{r},\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

Возникает вопрос, можно ли считать реактивную мощность мощностью, а именно скоростью изменения энергии?

На этот вопрос в [12] дан положительный ответ. Показано, что для реактивной мощности можно получить выражение

$$Q=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^T \mathrm{d}t\int\limits_{\mathrm{V}}\mathrm{d}v\sum_k\frac{\gamma_k}{E_k}\left(\frac{\partial E_k}{\partial t}\right)^2,$$

позволяющее считать её, все-таки, мощностью — суммой усреднённых определённым образом скоростей изменений составляющих энергии поля и среды. Здесь E_k — плотность энергии: кинетической, внутренней, электрического или магнитного полей; γ_k — коэффициент, положительный (слагаемое ассоциируется с изменением энергии магнитного поля) или отрицательный (слагаемое ассоциируется с изменением энергии электрического поля).

2. Плотность реактивной мощности — это плотность функции Лагранжа

Введём обозначения: E^n, $E^n_{,k}=\partial E^n/\partial x^k$, $n=1,\,2,\,3$; $k=0,\,1,\,2,\,3$, соответственно, для компонент напряжённости электрического поля и их частных производных по времени $x^0=t$ и декартовым пространственным координатам x^m, $m=1,\,2,\,3$.

Если среда объекта однородна, изотропна и нейтральна, а $\sigma=0$, $\varepsilon=\mathrm{const}$, $\mu=\mathrm{const}$, то можно построить лагранжиан (плотность функции Лагранжа) $L_w\left(E^n_{,k}\right)$, зависящий только от производных $E^n_{,k}$ компонент E^n векторного поля $\mathbf{E}$ в виде

$$L_w\left(E^n_{,k}\right)=\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)^2=$$
$$=\varepsilon_0\varepsilon\sum_{n=1}^{3}\left(E^n_{,0}\right)^2-\frac{1}{\mu_0\mu}\left[\left(E^3_{,2}-E^2_{,3}\right)^2+\left(E^1_{,3}-E^3_{,1}\right)^2+\left(E^2_{,1}-E^1_{,2}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

Сформулируем вариационный принцип.

В объёме объекта ищется поле E^n, заданное в начальный момент времени $t=0$ и на поверхности объекта, при котором равна нулю $\delta Q=0$ вариация функционала действия

$$Q=-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^T\int\limits_{\mathrm{V}} L_w\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t. \qquad (8)$$

Варьирование (8) по E^1 приводит к уравнению

$$\frac{1}{\omega}\left\{-2\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial E^1_{,0}}{\partial x^0}+\frac{2}{\mu_0\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}\left(E^1_{,3}-E^3_{,1}\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(E^2_{,1}-E^1_{,2}\right)\right]\right\}=$$
$$=-\frac{1}{\omega}\left\{2\varepsilon_0\varepsilon\;\frac{\partial^2 E^1}{\partial x^0\partial x^0}-\frac{2}{\mu_0\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)|_2-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)|_3\right]\right\}=$$
$$=-\frac{2}{\omega}\left\{\varepsilon_0\varepsilon\;\frac{\partial^2 E^1}{\partial x^0\partial x^0}+\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right)|_1\right\}=0.$$

Очевидно, что варьирование по остальным двум компонентам электрического поля E^12 и E^3 приведёт к оставшимся двум компонентам волнового уравнения

$$\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}+\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right)=\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla^2\mathbf{E}=0. \tag{9}$$

Поэтому можно утверждать, что для рассматриваемой среды при условии существования поля $\mathbf{B}$, удовлетворяющего уравнению электромагнитной индукции $\partial\mathbf{B}/\partial t=-\nabla\times\mathbf{E}$, лагранжиан (7) совпадает с точностью до знака с 4-плотностью реактивной мощности (5), а функционал действия (8), вариация которого приводит к волновому уравнению (9), совпадает с реактивной мощностью.

Для сред с дисперсией $\mathbf{D}\left(\mathbf{r},\omega\right)=\varepsilon_0\varepsilon\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)$, $\mathbf{B}\left(\mathbf{r},\omega\right)=\mu_0\mu\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{H}\left(\mathbf{r},\omega\right)$, $\mathbf{j}\left(\mathbf{r},\omega\right)=\sigma\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)$ и с учётом того, что уравнения электромагнитной индукции в частотной области имеют следующий вид

$$i\omega\mu_0\mu\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{H}\left(\mathbf{r},\omega\right)=\nabla\times\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right),\quad -i\omega\mathbf{B}^*\left(\mathbf{r},\omega\right)=\nabla\times\mathbf{E}^*\left(\mathbf{r},\omega\right), \tag{10}$$

плотность функции Лагранжа равна

$$L_w\left(\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right),\mathbf{E}^*\left(\mathbf{r},\omega\right)\right)=-q\left(\mathbf{r},\omega\right)$$

спектральной плотности реактивной мощности и определяется выражением

$$L_w\left(\mathbf{E},\mathbf{E}^*\right)=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E}^*-i\omega\sigma\mathbf{E}\mathbf{E}^*-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\nabla\times\mathbf{E}^*=$$
$$=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\mathbf{E}^*-i\omega\sigma\mathbf{E}\mathbf{E}^*-\frac{1}{\mu_0\mu}\left[\left(E^3_{,2}-E^2_{,3}\right)\left(E^{*3}_{,2}-E^{*2}_{,3}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(E^1_{,3}-E^3_{,1}\right)\left(E^{*1}_{,3}-E^{*3}_{,1}\right)+\left(E^{*2}_{,1}-E^{*1}_{,2}\right)\left(E^{*2}_{,1}-E^{*1}_{,2}\right)\right],$$

в котором у всех величин опущены скобки $(\mathbf{r},\omega)$.

Варьирование функционала действия (8) по $\mathbf{E}^*\left(\mathbf{r},\omega\right)=\left(E^{*1},E^{*2},E^{*3}\right)$ (поля $\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)$, $\mathbf{E}^*\left(\mathbf{r},\omega\right)$ — независимы) приводит, как это видно на примере варьирования по компоненте E^{*1}

$$\omega^2\varepsilon_0\varepsilon E^1-i\omega\sigma E^1+\frac{1}{\mu_0\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}\left(E^1_{,3}-E^3_{,1}\right)-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(E^2_{,1}-E^1_{,2}\right)\right]=$$
$$=\omega^2\varepsilon_0\varepsilon E^1-i\omega\sigma E^1+\frac{2}{\mu_0\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)|_2-\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)|_3\right]=$$
$$=-\left\{-\omega^2\varepsilon_0\varepsilon E^1+i\omega\sigma E^1+\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right)|_1\right\}=0,$$

к Фурье-образу

$$-\omega^2\varepsilon_0\varepsilon\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)+i\omega\sigma\left(\mathbf{r},\omega\right)\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)+\nabla\times\frac{1}{\mu_0\mu\left(\mathbf{r},\omega\right)}\left(\nabla\times\mathbf{E}\left(\mathbf{r},\omega\right)\right)=0$$

уравнения

$$\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0, \tag{11}$$

которое для нейтральной среды с $\mu=\mathrm{const}$ становится волновым уравнением

$$\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla^2\mathbf{E}=0.$$

Таким образом, для диспергирующих сред и финитных полей спектральная плотность объёмной плотности реактивной мощности (6) совпадает с точностью до знака с плотностью функции Лагранжа, а реактивная мощность равна функционалу действия.

Для однородной, изотропной, нейтральной среды, все электромагнитные свойства которой являются функциями времени $\varepsilon=\varepsilon\left(\mathbf{r},t\right)\neq0$, $\mu=\mu\left(t\right)\neq0$ и $\sigma=\sigma\left(\mathbf{r},t\right)\neq0$, построим плотность функции Лагранжа

$$\begin{aligned}L_w\left(E^n,E^n_{,k},E^{*n},E^{*n}_{,k}\right)&=\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}-\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\left(\nabla\times\mathbf{E}^*\right)-\\&-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}-\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)+2\left(\sigma+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right]\mathbf{E}\mathbf{E}^*-\\&-\frac{1}{2}\left(\sigma+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\left(\mathbf{E}^*\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{E}^*}{\partial t}\right),\end{aligned} \tag{12}$$

зависящую от компонент E^n и их производных $E^n_{,k}$ векторного поля $\mathbf{E}$, а также от компонент E^{*n} и их производных $E^{*n}_{,k}$ векторного поля $\mathbf{E}^*$ сопряжённой задачи, в которой диссипация имеет противоположный знак.

Варьирование функционала действия (8) от плотности функции Лагранжа (12) по компонентам поля $\mathbf{E}^*$ приводит

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mathbf{E}\right)+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\mathbf{E}\right]+\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}\right)+\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}\mathbf{E}\right)+\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)+\\&+\frac{1}{2}\varepsilon_0\left[\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\mathbf{E}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\mathbf{E}\right]+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mathbf{E}\right)=\\&=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}+\frac{\partial\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}}{\partial t}\right)-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla^2\mathbf{E}=0\end{aligned}$$

к волновому уравнению вида

$$\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}+\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}\right)-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla^2\mathbf{E}=0,$$

а варьирование по компонентам поля $\mathbf{E}$ приводит к следующему уравнению для векторного поля $\mathbf{E}^*$ сопряжённой задачи

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^*\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma\mathbf{E}^*\right)-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}^*\right)+\sigma\mathbf{E}^*\right)-\frac{1}{\mu_0\mu}\nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{E}^*\right)+$$
$$+\left\{\left[\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}-\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\right]\mathbf{E}^*-2\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mathbf{E}^*\right)-\frac{\varepsilon_0}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mathbf{E}^*\right]\right\}=0.$$

Отметим, что похожая вариационная задача, но только в сосредоточенных параметрах, рассмотрена в [15].

Используя уравнение электромагнитной индукции и соотношение

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\mu\right)=\frac{1}{2Z}\frac{\partial Z}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\frac{\partial n^2}{\partial t},$$

преобразуем выражение (12), предварительно заменив в нем компоненты векторного поля $\mathbf{E}^*$ компонентами поля $\mathbf{E}$

$$L_w\left(\mathbf{E},\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t},\nabla\times\mathbf{E}\right)=\varepsilon_0\varepsilon\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{\mu_0\mu}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\mathbf{E}^2-$$
$$-\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial t^2}\mathbf{E}^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\right)\mathbf{E}^2-\left(\sigma+\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\right)\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\mathbf{E}^2=$$
$$=\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}-\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{j}}{\partial t}-\mathbf{j}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\frac{\mathbf{E}^2}{2}-\varepsilon_0\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\frac{\mathbf{E}^2}{2}\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\mathbf{H}\nabla\times\mathbf{E}-\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{j}\right)=$$
$$=-q\left(\mathbf{r},t\right)+\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)\frac{\mathbf{DE}}{2}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\nabla\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\right)\right\}=$$
$$=-q\left(\mathbf{r},t\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial t}\frac{\mathbf{DE}}{2}\right)+\nabla\left[\frac{1}{2Z}\frac{\partial Z}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)+\frac{1}{2n^2}\frac{\partial n^2}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\right],$$

где $Z=\sqrt{\mu_0\mu/\varepsilon_0\varepsilon}$, $n=\sqrt{\varepsilon\mu}$ — волновое сопротивление и коэффициент преломления среды объекта.

Из этого выражения видно, что плотность реактивной мощности совпадает с формальным выражением $L_w\left(\mathbf{E},\partial\mathbf{E}/\partial t,\nabla\times\mathbf{E}\right)$ для плотности функции Лагранжа $L_w\left(E^n,E^n_{,k},E^{*n},E^{*n}_{,k}\right)$ с точностью до 4-дивергенции некоторого поля

Для периодических процессов можно не учитывать частную производную по времени этой 4-дивергенции, и если магнитная проницаемость незначительно отклоняется от некоторой постоянной величины, так что

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\mathrm{S_V}}\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=-\int\limits_0^T\ln\mu\int\limits_{\mathrm{S_V}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t\approx$$
$$\approx-\ln\mu\int\limits_0^T\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\mathrm{S_V}}\mathbf{E}\times\mathbf{H}\mathrm{d}s\mathrm{d}t=0,$$

то и в этом случае реактивную мощность, так же как и выше, можно считать равной формальному выражению для функционала действия от плотности функции Лагранжа $L_w\left(\mathbf{E},\partial\mathbf{E}/\partial t,\nabla\times\mathbf{E}\right)$.

Несмотря на то, что полученные выше результаты не позволяют утверждать о безусловном равенстве реактивной мощности действию объекта, но, тем не менее, можно принять этот факт в качестве физической интерпретации реактивной мощности. При этом плотность реактивной мощности можно считать характеристикой электромагнитного поля равной (с точностью до знака) или близкой по физическому смыслу плотности функции Лагранжа (ниже будем называть её волновым лагранжианом электромагнитного поля).

3. Как использовать плотность функции Лагранжа (плотность реактивной мощности) для анализа волновых электромагнитных полей

Плотность реактивной мощности $q(\mathbf{r}, t)$ можно использовать для анализа структуры электромагнитного поля как обычную энергетическую характеристику, так же как плотность энергии электромагнитного поля и её электрическую и магнитную составляющие. В силу предыдущего раздела можно использовать для этих целей лагранжиан $L_w(\mathbf{r}, t) = -q(\mathbf{r}, t)$ и/или плотность функции Лагранжа электромагнитного поля $L(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{DE} - \mathbf{BH})/2 + \mathbf{jA} - \rho\varphi$.

Каждая физическая характеристика помогает обнаружить некоторые физические явления, невидимые с помощью других характеристик. лагранжиан является скалярной характеристикой, поэтому с его помощью проще исследовать структуру электромагнитного поля, чем с помощью векторов напряжённости электрического и магнитного полей, особенно для интерпретации результатов математического моделирования.

Наличие и расположение нулей, экстремумов и других характерных точек, линий и поверхностей (например, асимптот) этих функций является конечным набором информационных параметров, позволяющих классифицировать и анализировать пространственную структуру поля.

Как известно, реактивная мощность идеальной индуктивности величина положительная, а идеальной ёмкости — отрицательная. Поэтому в объёме идеального осциллятора, состоящего из индуктивности и ёмкости в виде двух разделённых в пространстве точечных объектов или объектов, занимающих некоторый объем в пространстве, для усреднённой плотности реактивной мощности в некоторой окрестности индуктивности справедливо неравенство $q(\mathbf{r}) > 0$, а в некоторой окрестности ёмкости — $q(\mathbf{r}) < 0$.

Очевидно, что эти окрестности разделены поверхностью (или, возможно, протяжённой областью) с $q(\mathbf{r}) = 0$, которую можно рассматривать как поверхность (область) “локального резонанса”.

Для выявления пространственной структуры волнового электромагнитного поля, так же как и для идеального осциллятора, удобнее использовать объёмную плотность реактивной мощности $q(\mathbf{r})$ и усреднённые плотности функции Лагранжа

$$L_w(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} L_w(\mathbf{r},\, t)\,\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad L(\mathbf{r}) = \frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} L(\mathbf{r},\, t)\,\mathrm{d}t$$

или спектральную плотность лагранжиана $L_w(\mathbf{r}, \omega) = -q(\mathbf{r}, \omega)$.

Лагранжевыми структурами электромагнитного поля (L-структурами) будем называть разбиение пространства с помощью поверхностей

$$L_w(\mathbf{r}) = 0 \quad (L_w(\mathbf{r}, \omega) = 0)$$

на знакоопределённые подобласти

$$L_w(\mathbf{r}) > 0 \quad (L_w(\mathbf{r}, \omega) > 0), \quad L_w(\mathbf{r}) < 0 \quad (L_w(\mathbf{r}, \omega) < 0).$$

Исследование структуры полей с помощью лагранжиана как функции пространственной координаты и управляющих параметров (например, угла падения плоской волны на поверхность раздела сред), а именно поиск нулей, экстремумов, асимптот и т.п., позволит классифицировать решения задач математического моделирования и дополнить информацию о структуре поля.

Мы можем рассматривать гармоническое электромагнитное поле в объёме идеального осциллятора как стоячую волну и использовать лагранжиан $L_w(\mathbf{r})$ $(L_w(\mathbf{r}, \omega))$ как характеристику, позволяющую определить области пучности напряжённостей электрического и магнитного полей.

Рассмотрим самую простую задачу о падении из области пространства -$\infty <$ $z < 0$, занимаемой транспортирующей средой с $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, плоской монохроматической бегущей волны

$$E(z,\, t) = E_0 \cos(\omega t\, - kz), \quad H(z,\, t) = \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t\, - kz)$$

на плоскую ортогональную оси z поверхность (с координатой $z = 0$) непроводящей среды с $\varepsilon = \varepsilon_1 = \mathrm{const}$ и $\mu = \mu_1 = \mathrm{const}$. Здесь $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$, λ — волновой вектор и длина падающей волны; $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ — волновое сопротивление транспортирующей среды (вакуум); E_0 — амплитуда напряжённости электрического поля падающей волны.

В этом случае результирующее поле в транспортирующей среде можно представить в виде суперпозиции бегущей и отражённой волн

$$E(z,\, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) + E_0 \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos(\omega t + kz),$$

$$H(z,\, t) = \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t - kz) - \frac{E_0}{Z_0} \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos(\omega t + kz)$$

или в виде суперпозиции бегущей (E_r, H_r) и стоячей (E_s, H_s) волн

$$E_r(z,\, t) = E_0 \frac{2Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos(\omega t - kz),\; H_r(z,\, t) = E_0 \frac{2}{Z_1 + Z_0} \cos(\omega t - kz),$$

$$E_s(z,\, t) = 2E_0 \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos \omega t \cos kz,\; H_s(z,\, t) = 2E_0 \frac{Z_1 - Z_0}{Z_0(Z_1 + Z_0)} \sin \omega t \sin kz,$$

где $Z_1 = \sqrt{\mu_0 \mu_1/\varepsilon_0 \varepsilon_1}$ — волновое сопротивление отражающей среды.

Средняя плотность функции Лагранжа и реактивной мощности

$$L_w(z) = \omega L(z) = -q(z) = 2\omega\varepsilon_0 E^2 \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos 2kz = 2\omega\varepsilon_0 E^2 \frac{Z_1 - Z_0}{Z_1 + Z_0} \cos 4\pi \frac{z}{\lambda}$$

при наличии стоячей волны не равны нулю тождественно, как в случае бегущей волны, и могут быть использованы для выявления стоячей волны и её пространственной структуры. Причём решения $z = -\frac{\lambda}{4}\left(\frac{1}{2} + n\right)$, $n = 0,\, 1,\, 2\ldots$ уравнения $L_w(z) = \omega L(z) = -q(z) = 0$ являются границами знакоопределённых областей в данном случае совпадающих L- и L_w-структур, но также и границами областей пучности электрической и магнитной составляющих стоячей электромагнитной волны.

Если отражающая среда имеет преимущественно свойства диэлектрика $Z_1 < Z_0$, то в первой знакоопределённой области транспортирующей среды $(-\lambda/8 < z < 0)$ $L_w(\mathbf{r}) < 0$. Если же нагрузка имеет преимущественно свойства магнетика $Z_1 > Z_0$, то в той же области $L_w(\mathbf{r}) > 0$. При равенстве диэлектрической и магнитной проницаемостей нагрузки $Z_1 = Z_0$ стоячая волна в транспортирующей среде не возникает $L_w(\mathbf{r}) = 0$.

Однако выделить из волнового поля бегущую и стоячую волну в явном виде можно только в случае плоских монохроматических волн. Если волновое поле неплоское немонохроматическое, как например, поле излучения осциллирующего диполя, и/или немонохроматическое, то надо использовать какую-либо физическую характеристику, позволяющую выделить области пучности электрической и магнитной мод поля, суперпозиции волн. По своей структуре (5) плотность функции Лагранжа идеально подходит на эту роль.

Поэтому можно рассматривать лагранжиан как характеристику, позволяющую выявить пространственную структуру электромагнитного поля, подобную структуре стоячей волны (локализацию областей пучностей электрической и магнитной мод стоячей волны).

В [13, 14] продемонстрированы лагранжевы структуры волнового электромагнитного поля, построенные для некоторых простых задач электродинамики: длинной линии электропередачи; об отражении плоской монохроматической волны от плоскости раздела двух непроводящих, немагнитных, диэлектрических сред; о собственных полях волноводов прямоугольного и круглого сечений; о дифракции плоской волны на цилиндре; о дипольном и квадрупольном излучении; об интерференции полей двух осциллирующих электрических диполей.

Даже в такой простой и хорошо известной задаче как отражение плоской монохроматической волны от плоскости раздела двух непроводящих, немагнитных, диэлектрических сред анализ лагранжевых структур позволяет обнаружить новые особые углы падения волны, при которых происходит изменение структуры электромагнитного поля в дополнение к предельному углу полного отражения и углу Брюстера [14]. В частности, для условий $n_{12} < 1$ и $n_{12} > 1$, $\varphi \leqslant \varphi_r$ (где n_{12} — относительный коэффициент преломления), определяемого получено обобщение

$$\varphi_0 = \arcsin\left(\left(n_{12}^2 + 1 - \sqrt{\left(n_{12}^2+1\right)^2 - 4n_{12}^2\sin^2 2\beta}\right)^{1/2}\left(\sqrt{2}n_{12}\sin 2\beta\right)^{-1}\right)$$

угла Брюстера $\varphi_{\mathrm{B}} = \arcsin\left(1\Big/\sqrt{n_{12}^2+1}\right)$ на произвольный угол поляризации β волны в пределах $\pi/4 < \beta < \pi/2$, т.е. угол падения волны $\varphi = \varphi_0$, при котором вырождается $L_w(\varphi_0, \beta) = 0$ лагранжева структура в области с падающей и отражённой волной. Отражённой волны нет только при $\beta = \pi/2$ (Е-волна) $\varphi_0 = \varphi_B$. Если $\beta = \pi/4$, то при $n_{12} > 1$, $\varphi_0 = \varphi_r$, где $\varphi_r = \arcsin(1/n_{12})$ — предельный угол полного отражения.

Ещё одна задача, на которой можно продемонстрировать достоинства использования лагранжиана для анализа структуры волнового электромагнитного поля, — это задача о дипольном излучении.

Монохроматическое электромагнитное поле осциллирующего диполя в среде без диссипации с положительными диэлектрической и магнитной проницаемостями имеет нетривиальную лагранжеву структуру, которую можно охарактеризовать уравнениями асимптот $z = \pm r\big/\sqrt{2}$ поверхности локального резонанса, минимальным расстоянием от диполя до этой поверхности $r_{\min} = \sqrt{2}\lambda\big/4\pi$ и экстремальной точкой лагранжиана с координатами $r_{\mathrm{extr}} = \sqrt{3}\lambda\big/4\pi$, $z_{\mathrm{extr}} = 0$.

Выводы

1. Получено представление реактивной мощности для негармонических электромагнитных полей и дифференциальное уравнение в дивергентном виде, в котором член, обычно интерпретируемый как плотность мощности «источника» или «стока», является плотностью реактивной мощности.

2. Показано, что реактивная мощность является функционалом действия, а объёмная плотность реактивной мощности с точностью до знака равна значению плотности функции Лагранжа, с помощью которого можно выявить структуру поля, подобную структуре стоячих волн.

3. На примере задачи об отражении плоской монохроматической электромагнитной и задачи о поле осциллирующего электрического диполя показано как можно использовать лагранжиан и лагранжевы структуры для исследования волновых полей.

Литература

1. *Абрагам-Беккер.* Теория электричества. — М.-Л.: Главная редакция общетехнической литературы, 1936. [Abraham-Becker. Theorie der Elektrizität. — Teubner–Berlin: Leipzig-B. G., 1932]
2. *Стрэттон Д. А.* Теория электромагнетизма. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. [Stratton J. A. Electromagnetic Theory. — New York: McGraw–Hill, 1941.]
3. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1957. [Vainshtein L. A. Electromagnetic Waves. — Moscow: Sov. Radio, 1957]
4. *Никольский В. В.* Теория электромагнитного поля. — М.: ВШ, 1964. [*Nikoljskiyj V. V.* Teoriya ehlektromagnitnogo polya. — M.: VSh, 1964.]
5. *Джексон Д.* Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965. [Jackson J. D. Classical Electrodynamics. — New York–London: Wiley, 1962]
6. *Семенов А. А.* Теория электромагнитных волн. — М.: МГУ, 1968. [Semenov A. A. Theory of Electromagnetic Waves. — Moscow: Moscow Univ. Press, 1968]
7. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. — М.: Советское радио, 1971. [Goldstein L. D., Zernov, N. V. Electromagnetic Fields and Waves. — Moscow: Sov. Radio, 1971]
8. *Rothwell E. J., Cloud M. J.* Electromagnetics. Boca Raton. — London, New York, Washington: CRC Press LLC, 2001.
9. *Кухаркин Е. С.* Основы технической электродинамики. — М.: Высшая шк., 1969. [*Kukharkin E. S.* Osnovih tekhnicheskoyj ehlektrodinamiki. — M.: Vihsshaya shk., 1969.]
10. *Семенов Н. А.* Техническая электродинамика. — М.: Связь, 1973. [Semenov N. A. Technical Electrodynamics. — Moscow: Svyaz, 1973]
11. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. — М.: Высшая школа, 1986. [*Bessonov L. A.* Teoreticheskie osnovih ehlektrotekhniki. Ehlektromagnitnoe pole. — M.: Vihsshaya shkola, 1986.]
12. *Казаков О. А.* Реактивная мощность как характеристика преобразования составляющих энергии электромагнитного поля // Инженерная физика. — 1999. — № 1. — С. 50–59. [*Kazakov O. A.* Reaktivnaya mothnostj kak kharakteristika preobrazovaniya sostavlyayuthikh ehnergii ehlektromagnitnogo polya // Inzhenernaya fizika. — 1999. — No 1. — S. 50–59.]
13. *Казаков О. А.* Лагранжевы структуры электромагнитного поля // Инженерная физика. — 2000. — № 4. — С. 23–43. [*Kazakov O. A.* Lagranzhevih strukturih ehlektromagnitnogo polya // Inzhenernaya fizika. — 2000. — No 4. — S. 23–43.]
14. *Казаков О. А.* Лагранжевы структуры в задаче об отражении плоской волны от поверхности раздела двух диэлектрических сред // Фундаментальные физико-математические проблемы и моделирование технико-технологических систем: Сборник научных трудов / под ред. Л. А. Уваровой. — М.: Изд-во «Янус-К», 2004. — С. 82–89. [*Kazakov O. A.* Lagranzhevih strukturih v zadache ob otrazhenii ploskoyj volnih ot poverkhnosti razdela dvukh diehlektricheskikh sred // Fundamentaljnihe fiziko-matematicheskie problemih i modelirovanie tekhniko-tekhnologicheskikh sistem: Sbornik nauchnihkh trudov / под ред. L. A. Uvarovoyj. — M.: Izd-vo «Yanus-K», 2004. — S. 82–89.]

15. *Морс Ф. М., Фешбах Г.* Методы теоретической физики. — М.: ИИЛ, 1958. — Т. 1. [Morse P. M., Feshbach H., Methods of Theoretical Physics. — New York: McGraw–Hill, 1953]

UDC 537.8

The Concept of Reactive Power in Electrodynamics and Lagrange Structures of Wave Electromagnetic Fields

O. A. Kazakov

Chair of Applied Mathematics
Moscow State Technology University “STANKIN”
3a, Vadkovsky lane, Moscow, Russia, 127055

The representation of reactive power for nonharmonic electromagnetic fields and divergent equation of reactive energy conservation are obtained. It is proved that reactive power and reactive power density are the functional of action and negative Lagrange's function density (Lagrangian) respectively. It is shown that this Lagrangian can be used for detection the same space structure of electromagnetic field as the structure of standing waves.

Key words and phrases: reactive power, equation of reactive energy conservation, functional of action, Lagrangian, Lagrange structures, standing waves structure.