
Труды конференции, посвящённой 100-летию Якова Петровича Терлецкого. Часть 1

УДК 532.5

Волны Римана в газе Чаплыгина

М. Б. Вилка Чайча, Ю. П. Рыбаков, Г. Н. Шикин

Кафедра теоретической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Исследовано распространение волн Римана в идеальной жидкости с отрицательным давлением, так называемом газе Чаплыгина. Рассмотрены баротропные движения среды, когда давление $P = P(\rho)$ в предположении $u = u(\rho)$, где u — скорость, ρ — плотность среды. Система уравнений гидродинамики при этом сводится к волновому уравнению первого порядка, описывающему волны с переменной скоростью. Показано, что эти волны имеют деформируемый профиль, что приводит к неоднозначному определению ρ. Для устранения этого недостатка в исходное уравнение вводится член со второй производной, приводящий к появлению волн со стационарным профилем, являющимися волнами разрежения.

Ключевые слова: уравнение состояния, газ Чаплыгина, волны разрежения.

1. Введение

В настоящее время в космологии исследуются модели, использующие уравнение состояния идеальной жидкости с отрицательным давлением: $P = W\rho$, где P — давление, ρ — плотность, а параметр W принимает различные отрицательные значения. К таким средам относятся: космические струны, $W = -1/3$; квинтэссенция, $-1 < W < -1/3$ [1,2]; космический вакуум, $W = -1$ (тёмная энергия) [3]; фантомная материя $W = -4/3$ [4, 5]; газ Чаплыгина, $P = -A/\rho^\gamma$, $A = \mathrm{const} > 0$, $\gamma = \mathrm{const} \geqslant 0$ [6, 7]. Все перечисленные среды, кроме газа Чаплыгина, имеют отрицательный «квадрат скорости звука»: $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}\rho)_s = C^2 = W < 0$. Для газа Чаплыгина эта величина положительна: $C^2 = A\gamma\rho^{-\gamma-1} > 0$. Следовательно, газ Чаплыгина допускает существование обычных волновых движений, т. е. плоско-волновых возмущений однородного состояния среды. Газ Чаплыгина представляет интерес вследствие того, что его уравнение состояния в зависимости от параметра γ описывает разные среды, в частности, при $\gamma = 0$, когда давление $P = -A < 0$, оно определяет космический вакуум, а при $\gamma \to \infty$ получаем уравнение состояние пыли : $P = 0$.

2. Основные уравнения

В данной работе исследовано распространение плоских волн Римана в идеальной сжимаемой среде с уравнением состояния газа Чаплыгина. Рассмотрены баротропные движения среды, когда давление $P = P(\rho)$, в предположении, что скорость движения среды $u = u(\rho)$ [8].

Система уравнений гидродинамики для одномерного движения идеальной жидкости имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 22 мая 2012 г.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0. \tag{2}$$

Запишем уравнения (1) и (2) с учётом того, что $P=P(\rho)$ и $u=u(\rho)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\Big(u+\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}\Big)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\Big(u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\Big)\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big/\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}=0. \tag{4}$$

Уравнения (3) и (4) эквивалентны при выполнении соотношения

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\Big/\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}. \tag{5}$$

Из (5) выводим:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}=\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}}. \tag{6}$$

Из (6) следует, что скорость u может быть найдена из уравнения состояния независимо от интегрирования уравнений движения (1)–(2). Окончательно для скорости $u(\rho)$ имеем:

$$u=\pm\int\sqrt{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}. \tag{7}$$

По определению, для адиабатических движений

$$\Big(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\Big)_s=C^2(\rho), \tag{8}$$

где $C(\rho)$ — скорость звука. Из (3) получаем уравнение для определения $\rho(x,t)$:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \tag{9}$$

где функция

$$V(\rho)=u(\rho)+C(\rho),\quad C(\rho)=\mu\Big(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\Big)^{1/2},\quad \mu=\pm1, \tag{10}$$

определяет скорость распространения постоянных значений плотности ρ.

Рассмотрим уравнение (9) для газа Чаплыгина с уравнением состояния

$$P(\rho)=-A\rho^{-\gamma},\quad A=\mathrm{const}>0,\quad \gamma>0. \tag{11}$$

Из (7), (10) и (11) находим

$$C=\mu\sqrt{\Big(\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\rho}\Big)_s}=\frac{\mu\sqrt{A\gamma}}{\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}},\quad u=\frac{2\varepsilon\sqrt{A\gamma}}{(\gamma+1)}\Big/\rho^{\frac{\gamma+1}{2}},\quad \varepsilon=\pm1. \tag{12}$$

Подставляя $C(\rho)$ и $u(\rho)$ из (12) в (9), получаем уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+V(\rho)\frac{\partial \rho}{\partial x}=0,\qquad V(\rho)=\frac{\sqrt{A\gamma}}{\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}}\Big(\mu+\frac{2\varepsilon}{\gamma+1}\Big). \tag{13}$$

3. Типы волн

Из (13) следует, что в зависимости от ε, μ и γ значение $V(\rho)$ может быть положительным или отрицательным. Считая движение среды направленным вдоль оси X, получаем условие $\mu + \frac{2\varepsilon}{\gamma+1} > 0$.

Разрешая это неравенство с учётом того, что $\gamma > 0$, получаем следующие случаи:

$$\begin{aligned}
&1)\ \mu = 1, \quad && \varepsilon = 1, \quad && \gamma > 0;\\
&2)\ \mu = 1, \quad && \varepsilon = -1, \quad && \gamma > 1;\\
&3)\ \mu = -1, \quad && \varepsilon = 1, \quad && 0 < \gamma < 1.
\end{aligned}$$

Для решения уравнения (13) применим метод характеристик. Из (13) выводим:

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}S} = 1, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} = V(\rho), \quad \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}S} = 0, \tag{14}$$

где S — параметр вдоль характеристики. Из первого уравнения (14) следует: $\mathrm{d}t = \mathrm{d}S$. Остальные уравнения принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V(\rho), \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (16) и (15) имеют решение

$$\rho = \rho_0 = \mathrm{const}, \quad x = V(\rho_0)t + x_0, \tag{17}$$

где ρ_0 и x_0 — начальные значения при $t = 0$.

Зададим начальное условие: $t = 0$, $\rho_0 = f(x)$. Тогда решение уравнений (17) можно записать в параметрическом виде:

$$\rho = f(\xi), \quad x = F(\xi)t + \xi, \tag{18}$$

где $F(\xi) = V[f(\xi)]$, а ξ зависит от x и t, причём при $t = 0$, $x = x_0 = \xi$.

При задании конкретной функции $f(x)$ из второго уравнения (18) можно найти ξ как функцию от x и t, а затем, подставив её в первое уравнение (18), можно найти функцию $\rho(x,t)$, соответствующую начальным условиям.

Если начальное условие задано в виде уединённой волны, то поскольку разные точки на профиле волны имеют разные скорости, профиль волны искажается. Скорость волны (13) — убывающая по абсолютной величине функция от ρ. Следовательно, точки на профиле волны движутся тем медленнее, чем больше ρ. При этом происходит увеличение крутизны профиля волны при $x < x_{\max}$, и волна опрокидывается назад по отношению к направлению распространения [9].

Профиль волны может настолько сильно деформироваться, что появляется неоднозначность в определении плотности $\rho(x,t)$: начиная с некоторого момента времени t при $x \leqslant x_{\max}$, когда достигается $\rho_x(x_{\max},t) = \infty$, появляются три различных значения $\rho(x,t)$, что для плотности среды не имеет физического смысла. Это достигается в момент времени t_B, который можно найти из (18) [10]:

$$\rho_x = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{1}{1+F'(\xi)t}, \quad t_B = -\frac{1}{F'(\xi)}, \quad F'(\xi) < 0. \tag{19}$$

В результате происходит разрыв плотности, т. е. нефизическое поведение среды.

Один из подходов к устранению неоднозначности в определении $\rho(x,t)$ состоит в дополнении уравнения (13) членом, содержащим вторую производную по x [10]:

$$\rho_t + V(\rho)\rho_x = \nu\rho_{xx}, \quad \nu = \text{const} > 0. \tag{20}$$

В отличие от исходного уравнения, уравнение (20) имеет решение со стационарным профилем. Член со второй производной устраняет деформацию профиля волны. Введение этого члена аналогично учёту вязкости среды.

Запишем уравнение (20) в явном виде:

$$\rho_t + \frac{K}{\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}}\rho_x = \nu\rho_{xx}, \quad K = \sqrt{A\gamma}\Big(\mu + \frac{2\varepsilon}{\gamma+1}\Big), \quad K > 0. \tag{21}$$

Рассмотрим решение уравнения (21) как функцию от аргумента $\xi = x - Ut$:

$$\rho(x,t) = \omega(\xi), \quad U = \text{const} > 0,$$

считая, что волна распространяется в положительном направлении. Для $\omega(\xi)$ из (21) получаем следующее уравнение:

$$-U\omega_\xi + \frac{K}{\omega^{\frac{\gamma+1}{2}}}\omega_\xi = \nu\omega_{\xi\xi}. \tag{22}$$

При $\gamma \neq 1$ из (22) получаем первый интеграл:

$$-U\omega + \frac{2K}{1-\gamma}\omega^{\frac{1-\gamma}{2}} + H = \nu\omega_\xi, \quad H = \text{const}. \tag{23}$$

Уравнение (23) имеет решение

$$\int \frac{\mathrm{d}\omega}{\frac{2K}{1-\gamma}\omega^{\frac{1-\gamma}{2}} - U\omega + H} = \frac{\xi}{\nu} + C, \quad C = \text{const}. \tag{24}$$

Зададим граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} \text{при } \xi \to +\infty, \quad \omega \to \omega_1 = \text{const} > 0,\\ \text{при } \xi \to -\infty, \quad \omega \to \omega_2 = \text{const} > 0,\\ \omega_1 \neq \omega_2. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Поскольку $\omega_\xi \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$, из (23) получаем

$$-U\omega_1 + \frac{2K}{1-\gamma}\omega_1^{\frac{1-\gamma}{2}} + H = 0, \tag{26}$$

$$-U\omega_2 + \frac{2K}{1-\gamma}\omega_2^{\frac{1-\gamma}{2}} + H = 0. \tag{27}$$

Из (26) и (27) определяем U и H:

$$U = \frac{2K}{1-\gamma}\frac{(\omega_2^{\frac{1-\gamma}{2}} - \omega_1^{\frac{1-\gamma}{2}})}{\omega_2 - \omega_1}, \tag{28}$$

$$H = \frac{2K}{1-\gamma}\frac{\omega_1\omega_2(\omega_2^{-\frac{(\gamma+1)}{2}} - \omega_1^{-\frac{(\gamma+1)}{2}})}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{29}$$

Для того чтобы определить тип волны (сжатия или разрежения), надо найти знак разности $\omega_1 - \omega_2$ и координаты точек ω_1 и ω_2 на графике $\omega(\xi)$ при $-\infty \leqslant \xi \leqslant \infty$ (этим точкам соответствуют значения $\xi = \pm\infty$).

Это можно сделать, имея точное решение уравнения (22). Рассмотрим уравнение (22) при $\gamma = 3$. В этом случае (24) приводится к виду

$$\begin{gathered}\int \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{-U\omega^2 + H\omega - K} = \frac{\xi}{\nu} + C, \quad C = \mathrm{const}, \\ U = \frac{K}{\omega_1\omega_2}, \quad H = \frac{K(\omega_1+\omega_2)}{\omega_1\omega_2}, \quad K = \sqrt{3A}\Big(\mu + \frac{\varepsilon}{2}\Big),\end{gathered} \tag{30}$$

и из (30) получаем

$$-\int \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{\omega^2 - (\omega_1+\omega_2)\omega + \omega_1\omega_2} = -\int \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)} = Z + \ln Z_0, \tag{31}$$

где $Z = \frac{K\xi}{\omega_1\omega_2\nu}$, $Z_0 = \mathrm{const}$.

Предположим, что $\omega_1 > \omega_2$, $\omega_1 \geqslant \omega \geqslant \omega_2$. При этом (31) запишется в виде

$$\int \frac{\omega \mathrm{d}\omega}{(\omega_1-\omega)(\omega-\omega_2)} = Z + \ln Z_0. \tag{32}$$

Интегрирование в (32) приводит к равенству

$$\frac{(\omega-\omega_2)^{\frac{\omega_2}{\omega_1-\omega_2}}}{(\omega_1-\omega)^{\frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2}}} = Z_0 \exp(Z). \tag{33}$$

Из (33) следует, что $Z \to +\infty$ при $\omega \to \omega_1$, и $Z \to -\infty$ при $\omega \to \omega_2$.

Поскольку $Z = \frac{K\xi}{\omega_1\omega_2\nu}$, то $Z \to +\infty$ соответствует $\xi \to +\infty$, то есть ω_1 реализуется при $\xi = +\infty$, а ω_2 реализуется при $\xi = -\infty$. Волна распространяется в сторону возрастания ω, т. е. мы имеем волну разрежения.

Если сделать предположение, что $\omega_2 > \omega_1$, $\omega_2 \geqslant \omega \geqslant \omega_1$, то из (31) получим

$$\frac{(\omega-\omega_1)^{\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}}}{(\omega_2-\omega)^{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}} = Z_0 \exp(Z). \tag{34}$$

Из (34) следует, что $Z \to +\infty$ при $\omega \to \omega_2$ и $Z \to -\infty$при $\omega \to \omega_1$. Волна распространяется в сторону возрастания ω, то есть мы имеем по-прежнему волну разрежения.

Анализ характера волн (сжатия или разрежения) удобно проводить, если представить уравнение (23) с учётом (28) и (29) в виде

$$\nu\omega_\xi = \frac{2K}{1-\gamma}\frac{(\omega_1-\omega)(\omega-\omega_2)}{\omega_1-\omega_2}[f(\omega_1) - f(\omega_2)], \tag{35}$$

где введена функция

$$f(X) = \frac{X^{\frac{1-\gamma}{2}} - \omega^{\frac{1-\gamma}{2}}}{\omega - X}\,. \tag{36}$$

Рассмотрим сначала случай $0 \leqslant \gamma < 1$, положив $\gamma = 1 - \frac{2}{n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. В этом случае

$$f(X) = \frac{X^{\frac{1}{n}} - \omega^{\frac{1}{n}}}{\omega - X} = -\left(\sum_{s=1}^{n}\left[X^{\frac{n-s}{n}}\omega^{\frac{s-1}{n}}\right]\right)^{-1}. \qquad (37)$$

Как видно из (35) и (37), $f'(X) > 0$ и $\omega_\xi > 0$. Получаем волну разрежения. Далее, полагаем $\gamma = 2n + 1$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. В этом случае

$$f(X) = \frac{X^{-n} - \omega^{-n}}{\omega - X} = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{1}{X}\right)^{n+1-s}\left(\frac{1}{\omega}\right)^{s}. \qquad (38)$$

Как видно из (35) и (38), $f'(X) < 0$ и $\omega_\xi > 0$. Вновь получаем волну разрежения. Из проведённого анализа следует, что в газе Чаплыгина могут распространяться только волны разрежения.

4. Заключение

В данной работе исследовано распространение волн Римана в газе Чаплыгина, имеющего отрицательное давление. Показано, что происходит деформация волны, приводящая к опрокидыванию волны в направлении, противоположном движению. При этом наблюдается нефизическая ситуация, когда плотность становится неоднозначной функцией. Для устранения этого эффекта вводится член со второй производной, что даёт возможность рассмотреть волны со стационарным профилем. При этом выясняется, что в газе Чаплыгина могут распространяться только волны разрежения.

Литература

1. *Cladwell R. R., Dave R., Steinhardt P. J.* Cosmological Imprint of an Energy Component with General Equation of State // Phys. Rev. Lett. — 1998. — Vol. 80. — Pp. 1582–1585.
2. *Zlatev I., Wang L. M., Steinhardt P. J.* Quintessence, Cosmic Coincidence, and the Cosmological Constant // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Vol. 82. — Pp. 896–899.
3. *Чернин А. Д.* Космический Вакуум // УФН. — 2001. — Т. 171, № 11. — С. 1153–1176. [*Chernin A. D.* Kosmicheskiyj Vakuum // UFN. — 2001. — T. 171, No 11. — S. 1153–1176.]
4. *Dabrowski M. P.* Phantom Dark Energy and its Cosmological Consequences. —
5. *Kamenshchik A. Y., Moschella U., Pasquier V.* An Alternative to Quintessence // Phys. Rev. Lett. B. — 2001. — Vol. 511. — Pp. 265–268.
6. *Billic N., Tupper G. B., Viollier R. D.* Chaplygin Gas Cosmology-Unification of Dark Matter and Dark Energy // Phys. Rev. Lett. B. — 2002. — Vol. 535. — P. 17.
7. *Bento M. C., Bertolami O., Sen A. A.* Generalized Chaplygin Gas, Accelerated Expansion and Dark Energy — Matter Unification // Phys. Rev. D. — 2002.
8. *Седов Л. И.* Механика сплошных сред. Т. 2. — М.: Наука, 1955. [*Sedov L. I.* Mekhanika sploshnihkh sred. T. 2. — M.: Nauka, 1955.]
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1988. — Т. 5. [*Landau L. D., Lifshic E. M.* Gidrodinamika. — M.: Nauka, 1988. — T. 5.]
10. *Уизем Д.* Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. [*Uizem D.* Lineyjnihe i nelineyjnihe volnih. — M.: Mir, 1977.]

UDC 532.5

Riemann's Waves in Chaplygin Gas

M. B. Vilca Chaicha, Yu. P. Rybakov, G. N. Shikin

Department of Theoretical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

We have investigated propagation of Riemann waves in an ideal fluid with negative pressure, the so-called Chaplygin gas. We consider barotropic motion of the medium when the pressure is $P = P(\rho)$ in the assumption $u = u(\rho)$, where u — the velocity, ρ — density of the medium. The system of hydrodynamic equations then reduces to a wave equation of the first order, which describes a wave with variable speed. It is shown that these waves have deformed profile, which leads to an ambiguous definition of ρ. In order to remove this lack in the original equation we have introduced a member with the second derivative, which leads to the appearance of waves with a stationary profile which is a rarefaction wave.

Key words and phrases: state equation, Chaplygin gas, rarefaction waves.