УДК 519.6

# Численное восстановление функции распределения по энергии электронов в плазме по спектру излучения

**В. В. Андреев***, **Б. И. Ибрагим**†,
**Е. Б. Ланеев**†, **М. Н. Муратов**†

* *Кафедра экспериментальной физики*
† *Кафедра нелинейного анализа и оптимизации*
*Российский университет дружбы народов*
*ул.Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия*

Приведены результаты численного решения интегрального уравнения первого рода, возникающего при операции восстановления функции распределения по энергии электронов (ФРЭЭ) по спектру тормозного излучения. Использован функционал Тихонова со стабилизаторами первого и второго порядка.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение, регуляризация, высокотемпературная плазма.

## 1. Введение

В работе [1] для решения задачи восстановления функции распределения по энергии электронов предложено интегральное уравнение Фредгольма первого рода связывающее искомую функцию распределения электронов плазмы по энергиям $f$ и спектр тормозного излучения $N$

$$\int\limits_a^b H(E,\varepsilon)f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon = N(E), \quad E \in [c,d]. \tag{1}$$

Приближенное решение уравнения некорректно поставленной задачи [2] в случае, когда правая часть уравнения известна приближённо, т.е. когда вместо функции $N$ известна функция $N^\delta$ такая, что $\|N - N^\delta\| = \delta$, в приведённой работе предлагается искать в виде экстремали функционала Тихонова

$$M^\alpha[u] = \|Hu - N^\delta\|^2 + \alpha\|u'\|^2, \quad \alpha > 0 \tag{2}$$

со стабилизатором первого порядка $\alpha\|u'\|^2$.

В работе [3] для повышения точности решения предложено в качестве приближенного решения принимать экстремаль функционала Тихонова со стабилизатором более высокого, в частности второго порядка:

$$M^\alpha[u] = \|Hu - N^\delta\|^2 + \alpha\|u''\|^2, \quad \alpha > 0. \tag{3}$$

Сформулируем условия вычислительного эксперимента при реализации подходов к формированию приближенного решения на основе функционалов (2) и (3).

## 2. Постановка задачи

В соответствие с работой [3] экстремали функционалов (2) и (3) будем рассматривать как решения задач

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ грант №12-01-00506a).

$$
\begin{aligned}
&H^*Hu - \alpha u'' = H^*N^\delta, \\
&u'(a) = 0, \quad u'(b) = 0.
\end{aligned} \tag{4}
$$

для функционала со стабилизатором первого порядка и

$$
\begin{aligned}
&H^*Hu + \alpha u^{(4)} = H^*N^\delta, \\
&u''(a) = 0, \quad u''(b) = 0, \quad u'''(a) = 0, \quad u'''(b) = 0.
\end{aligned} \tag{5}
$$

для функционала со стабилизатором второго порядка.

Дискретизация задач (4) [2] и (5) [3] приводит соответственно к линейной системе

$$H^*Hy - \frac{\alpha}{h^2}Ty = H^*N^\delta \tag{6}$$

с матрицей $T$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . \\
0 & 1 & -2 & 1 & 0 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & -2 & 1 & 0 \\
. & . & . & . & . & 0 & 1 & -2 & 1 \\
. & . & . & . & . & 0 & 0 & -1 & 1
\end{pmatrix}
$$

и линейной системе

$$H^*Hy + \frac{\alpha}{h^4}Ty = H^*N^\delta. \tag{7}$$

с матрицей $T$

$$
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\
-2 & 5 & -4 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\
1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\
0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\
. & . & . & . & . & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\
. & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 5 & -2 \\
. & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1
\end{pmatrix}
$$

В линейных системах $h$-шаг дискретизации, матрица $H$ — результат дискретизации интегрального оператора в (1). Значение параметра регуляризации можно находить из условия невязки [2] $\|Hu_\alpha - N^\delta\|^2 = \delta^2$. или из других соображений (см. следующий раздел).

Сравнение по точности двух способов получения приближенного решения (6) и (7) будем проводить на примере максвелловского распределения электронов по энергиям

$$f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\pi kT}kT}\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \tag{8}$$

Излучение $N$, т.е. правая часть интегрального уравнения, получим прямым вычислением от точного распределения электронов по энергиям.

$$N(E) = Hf = \int_a^b H(E, \varepsilon) f(\varepsilon) \mathrm{d}\varepsilon \qquad (9)$$

где ядро возьмём из [1].

Точность приближенного решения интегрального уравнения будем устанавливать сравнением с «точным» решением (8).

## 3. Результаты численного эксперимента

Перейдём к описанию вычислительного эксперимента. На рис. 1 представлена правая часть интегрального уравнения (1), полученная расчётным путём (9) по точной функции распределения электронов (8).

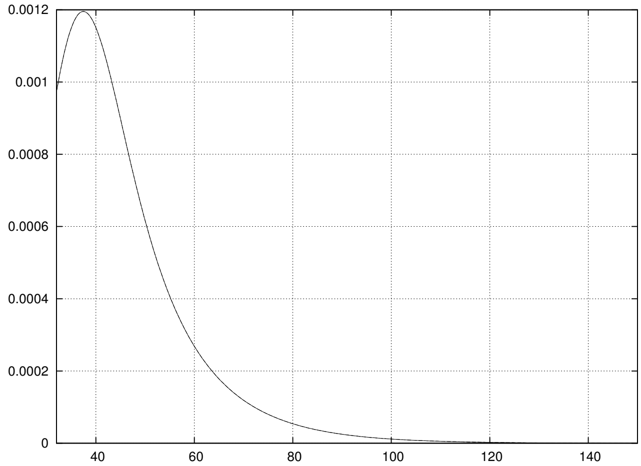


**Рис. 1. Правая часть интегрального уравнения**

На рис. 2 представлен график невязки, рассчитанной в зависимости от величины параметра регуляризации при стабилизаторе первого порядка.

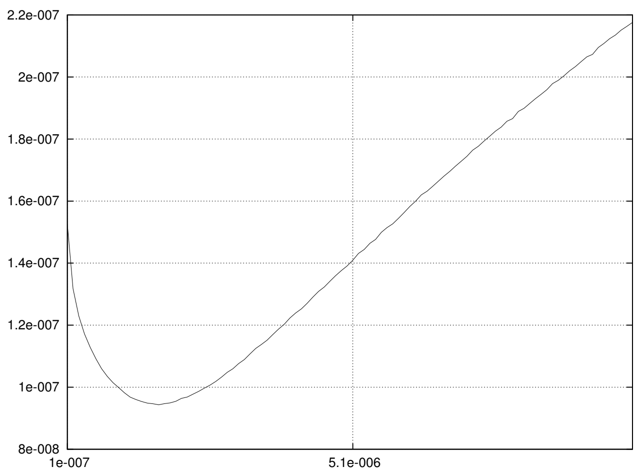


**Рис. 2. График невязки**

График имеет характерный минимум. Слева от него при малых значениях параметра происходит разрушение решения и рост невязки при уменьшении параметра. Справа от минимума при больших значениях происходит сильное сглаживание решения и невязка растёт с ростом параметра. Значение параметра, соответствующее минимуму невязки, принимается за искомое оптимальное.

На рис. 3 приведены графики точного решения интегрального уравнения - точная функция распределения электронов по энергиям (в виде тонкой линии) и приближенного решения (жирная линия), полученного при оптимальном значении параметра регуляризации, соответствующем регуляризации первого порядка. На графике хорошо виден дефект приближенного решения в виде характерного изгиба с выходом на нулевое значение производной в крайней левой точке интервала, а также колебания приближенного решения около значений точной функции.

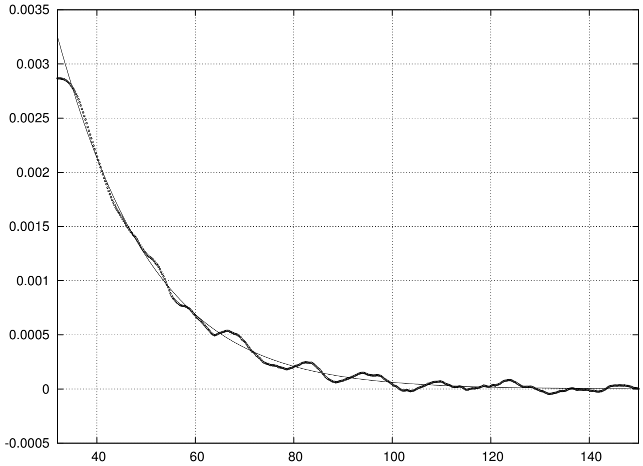


**Рис. 3. Точное и приближённое решения интегрального уравнения при стабилизаторе первого порядка**

На рис. 4 также как и на рис. 2 приведены графики точного решения интегрального уравнения — точная функция распределения электронов по энергиям (в виде тонкой линии) и приближенного решения (жирная линия), полученного при оптимальном значении параметра регуляризации, соответствующем регуляризации второго порядка.

На графике видно отсутствие дефекта приближенного решения в виде нулевого значения производной. Видно практически полное совпадение точного и приближенного решения

## 4. Заключение

Как показывают результаты численного эксперимента по восстановлению функции распределения электронов в ситуации, близкой к реальной, приближенное решение (7) даёт удовлетворительный результат. Решение интегрального уравнения в конкретной ситуации показывает эффективность увеличения порядка стабилизатора в функционале Тихонова для получения более точного решения и может использоваться для изучения функции распределения электронов по энергиям в плазме.

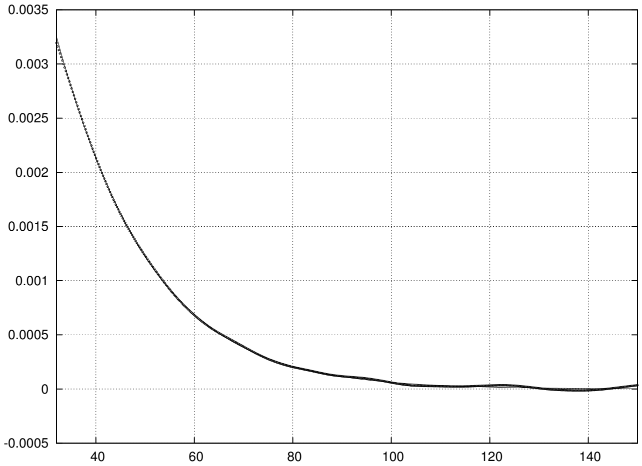


**Рис. 4. Точное и приближённое решения интегрального уравнения при стабилизаторе второго порядка**

## Литература

1. Определение функции распределения электронов плазмы по спектру тормозного излучения / А. Н. Тихонов, В. В. Аликаев, В. Я. Арсенин, А. А. Думова // ЖЭТФ. — 1968. — Т. 55, вып. 5(11). — С. 1903–1908. [Opredelenie funkcii raspredeleniya ehlektronov plazmih po spektru tormoznogo izlucheniya / A. N. Tikhonov, V. V. Alikaev, V. Ya. Arsenin, A. A. Dumova // ZhEhTF. — 1968. — T. 55, вып. 5(11). — S. 1903–1908. ]
2. *Тихонов А. Н.a nd Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. [*Tikhonov A. N.a nd Arsenin V. Ya.* Metodih resheniya nekorrektnihkh zadach. — M.: Nauka, 1979. ]
3. Об устойчивом численном решении одного интегрального уравнения применимого в диагностике высокотемпературной плазмы / В. В. Андреев, Б. И. Ибрагим, Е. Б. Ланеев, М. Н. Муратов // Вестник РУДН. Сер. «Математика. Информатика. Физика. — 2012. — № 2. — С. 86–88. [Ob ustoyjchivom chislennom reshenii odnogo integraljnogo uravneniya primenimogo v diagnostike vihsokotemperaturnoyj plazmih / V. V. Andreev, B. I. Ibragim, E. B. Laneev, M. N. Muratov // Vestnik RUDN. Ser. «Matematika. Informatika. Fizika. — 2012. — No 2. — S. 86–88. ]

UDC 519.6

# Numerical Recovery of the Distribution Function on the Electrons Energy in Plasma on Radiation Spectrum

**V. V. Andreev, B. I. Ibragim, E. B. Laneev, M. N. Mouratov**

[*] *Department of Experimental Physics*

[†] *Department of Nonlinear Analysis and Optimization*
*Peoples' Friendship University of Russia*
*Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia*

The results of the numerical solution of the integral equation of the first kind occurred under the operation of distribution function recovery on electrons energy through the spectrum of radiation are presented. The Tikhonov functional with the stabilizers of the first and the second order is used.

**Key words and phrases:** integral equation, regularization, high- temperature plasma.