Математическое моделирование

УДК 517.97

Смешанное ограничение в прикладной задаче оптимального управления

А. К. Скиба

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
ул. Вавилова, 40, Москва, Россия, 119333

В статье формулируется модель функционирования группы газовых месторождений и решается задача оптимального управления со смешанным ограничением. В качестве оптимизационного критерия задачи выбран максимум накопленной добычи для группы газовых месторождений.

Ключевые слова: принцип максимума, предложение К. Эрроу, смешанное ограничение, модель газовых месторождений, максимум накопленной добычи, максимум длины «полки».

1. Введение

В 1968 году вышла статья лауреата Нобелевской премии К. Эрроу [1], сыгравшая значительную роль в дальнейшем продвижении использования оптимального управления в теории экономического роста. В работе подчёркивалась особая важность применения оптимального управления в экономической теории. На основе принципа максимума Понтрягина были без достаточно строгого доказательства сформулированы предложения, являющиеся основой для решения широкого класса задач оптимального управления.

К. Эрроу продемонстрировал использование своих предложений на примере решения некоторых задач теории экономического роста. Полученным результатам была дана экономическая интерпретация.

Для решения задач оптимального управления со смешанными ограничениями К. Эрроу сформулировал предложения, являющиеся модификацией принципа максимума Понтрягина. В предложения дополнительно включены элементы нелинейного программирования — лагранжиан, множители Лагранжа и условия дополняющей нежёсткости. Также в упомянутой статье уделялось большое внимание конечному и бесконечному интервалу времени, теоремам существования, необходимым и достаточным условиям оптимальности.

После выхода в печать статьи К. Эрроу и её широкого обсуждения в научных кругах обозначились, по крайней мере, два направления в дальнейших исследованиях. С одной стороны, несмотря на не вполне строгие доказательства предложений К. Эрроу, использовать их для дальнейших научных работ не только в теории экономического роста, но и в других прикладных дисциплинах. Например, основываясь на предложениях К. Эрроу с успехом было проведено исследование односекторной модели на бесконечном интервале времени с выпукло-вогнутой производственной функцией [2]. Были получены достаточно интересные результаты.

С другой стороны, акцентировать большее внимание на создание строгой математической базы предложений К. Эрроу. В 1983 году вышла работа Е. Болдера [3], где была доказана теорема существования на бесконечном интервале времени. Значительный прорыв в формировании теоретических основ был совершён в 2007 году С.М. Асеевым и А.В. Кряжимским в их совместной публикации монографии «Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста» [4]. Данная монография посвящалась теории принципа максимума Понтрягина для определённого класса задач оптимального управления с бесконечным интервалом времени. Были получены многие уникальные результаты,

Статья поступила в редакцию 17 мая 2012 г.

среди которых особо хотелось выделить исследование поведения сопряжённых переменных и гамильтониана на бесконечности.

Прежде чем перейти к описанию модели, сформулируем предложение К. Эрроу, которое в дальнейшем будем использовать в качестве основного аппарата оптимального управления при исследовании задачи максимизации накопленной добычи.

2. Формулировка предложения К. Эрроу

В предложении К. Эрроу используются понятия: вспомогательные переменные и выбор инструментов. Такие словосочетания соответствуют стандартным понятиям, принятыми в теории оптимального управления, а именно: сопряжённым переменным и управлениям.

Для лучшего восприятия предложения К. Эрроу будем пользоваться стандартными понятиями, принятыми в теории оптимального управления.

Предложение 1. Пусть $\tilde{v}(t)$ — управления ($0 \leqslant t \leqslant T$), максимизирующие функционал

$$\int\limits_0^T U[x(t), v(t), t]\mathrm{d}t$$

при условии

$$(a) \qquad \dot{x} = G[x(t), v(t), t],$$

ограничениях на управления

$$(b) \qquad F[x(t), v(t), t] \geqslant 0,$$

которые, возможно, включают переменные состояния, начальные условия на переменные состояния и граничные условия

$$x(T) \geqslant 0.$$

Если условие регулярности выполнено, то существуют сопряжённые переменные $p(t)$ такие, что для каждого момента t

(c) $\tilde{v}(t)$ максимизирует $H[x(t), v, p(t), t]$ относительно ограничений (b), где $H(x, v, p, t) = U(x, v, t) + pG(x, v, t)$;

(d) $\dot{p} = -\partial L/\partial x_i$ при $x = x(t)$, $v(t) = \tilde{v}(t)$, $p = p(t)$, где

$$(e) \qquad L(x, v, p, q, t) = H(x, v, p, t) + qF(x, v, t)$$

и множители Лагранжа q такие, что

(f) $\partial L/\partial v_k = 0$ при $x = x(t)$, $v(t) = \tilde{v}(t)$, $p = p(t)$, $q \geqslant 0$, $qF[x(t), \tilde{v}(t), t] = 0$,

и

$$(g) \qquad p(T) \geqslant 0, \quad p(T)x(T) = 0.$$

В предложении вектор $x(t)$ имеет размерность n, а вектор $v(t)$ — размерность m.

Перейдём к описанию модели.

3. Описание модели и постановка задачи

В 2009 году в журнале Вестник РУДН была опубликована статья [5], в которой описывалась рассматриваемая в настоящей работе модель. Несмотря на это, заново опишем её, преследуя при этом две цели. Во-первых, все же существуют некоторые отличия в описаниях моделей. Во-вторых, желательно сохранить целостность описания проведённых исследований.

Рассмотрим модель функционирования группы газовых месторождений с взаимовлияющими скважинами [6–9]. Группа состоит из n месторождений. Введём следующие обозначения: N_i — фонд добывающих скважин на i-м месторождении, $\bar{N}_i$ — ограничение сверху на фонд добывающих скважин на i-м месторождении, q_i — средний дебит добывающих скважин на i-м месторождении, V_i — извлекаемый запас на i-м месторождении.

Между описанными переменными устанавливается дифференциальная взаимосвязь, которую запишем в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{V}_i = -N_i q_i, \quad \dot{q}_i = -\frac{q_i^0}{V_i^0} q_i(t) N_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

при начальных условиях $V_i^0 > 0$, $q_i^o > 0$. На фонд добывающих скважин накладывается следующее ограничение $0 \leqslant N_i \leqslant \bar{N}_i$. Здесь $\bar{N}_i > 0$. Предполагаем также различными между собой величины $\dfrac{q_i^0}{V_i^0}\bar{N}_i$.

Имеется общее ограничение на общую «полку» месторождений

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(t) N_i(t) \leqslant \bar{Q},$$

Накопленную добычу газа вычисляем по формуле:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T q_i(t) N_i(t) \mathrm{d}t$$

Задача максимизации накопленной добычи является актуальной как с практической, так и с теоретической точки зрения, о чем неоднократно подчёркивалось во многих работах, в том числе в работе [10]. Перейдём к математическому описанию задачи оптимального управления со смешанными ограничениями.

Задача 1. О максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений

Требуется максимизировать функционал

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^T q_i(t) N_i(t) \mathrm{d}t \tag{1}$$

при дифференциальных связях

$$\dot{q}_i = -\frac{q_i^0}{V_i^0} q_i(t) N_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

начальных условиях

$$q_i^0 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

и ограничениях на управления

$$0 \leqslant N_i \leqslant \bar{N}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(t)N_i(t) \leqslant \bar{Q}. \tag{5}$$

Управления $N_i (i = 1, 2, \dots, n)$ принадлежат множеству измеримых функций. Правый конец фазовой траектории свободен. Между собой различны величины $\dfrac{q_i^0}{V_i^0}\bar{N}_i$.

Существование оптимального управления следует, например,из теоремы, приведённой в [11, § 4.2].

Перейдём к исследованию задачи 1.

4. Исследование задачи

Сначала введём обозначения $\alpha_i^0 = \dfrac{q_i^0}{V_i^0}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Далее упорядочим фазовые переменные в порядке возрастания величин $\alpha_i^0\bar{N}_i$. Заметим, что такой порядок единственный, поскольку согласно условиям в постановке задачи различны величины $\alpha_i^0\bar{N}_i$.

Согласно предложению 1 выпишем гамильтониан и лагранжиан:

$$H(q, N, \psi) = \sum_{i=1}^{n}[q_iN_i - \psi_i\alpha_i^0q_iN_i], \tag{6}$$

$$L(q, N, \psi, \gamma, \delta, \beta) = \sum_{i=1}^{n}[q_iN_i - \psi_i\alpha_i^0q_iN_i + \gamma_i(\bar{N}_i - N_i)] + \delta_iN_i] + \beta\left[\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n}(q_iN_i)\right].$$

Далее опишем множество G допустимых управлений, на котором осуществляется максимизация гамильтониана (6):

$$G = \left\{N \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant N \leqslant \bar{N}, \sum_{i=1}^{n} q_iN_i \leqslant \bar{Q}\right\}. \tag{7}$$

Основная цель исследования заключается в поиске на основании предложения 1 вектор-функций $\psi(t)$ и управлений $\tilde{N}(t)$, которые удовлетворяют ниже приведённой сопряжённой системе дифференциальных уравнений (10), условиям трансверсальности

$$\psi(T)q(T) = 0, \tag{8}$$

и при каждом $t \in [0, T]$ управления $\tilde{N}(t)$ максимизируют гамильтониан

$$H(\tilde{q}(t), \tilde{N}(t), \psi(t)) = \max_{N\in G} H(\tilde{q}(t), N, \psi(t)) = \max_{N\in G}\sum_{i=1}^{n}[\tilde{q}_i(t)N_i - \alpha_i^0\psi_i(t)\tilde{q}_i(t)N_i]. \tag{9}$$

Система сопряжённых уравнений представится в виде:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\partial L/\partial q_i = -\tilde{N}_i(t) + \alpha_i^0\psi_i(t)\tilde{N}_i(t) + \beta(t)\tilde{N}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

или в более удобной форме

$$\dot{\psi}_i(t) = [\alpha_i^0\psi_i(t) + \beta(t) - 1]\tilde{N}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{10}$$

Положим в системе сопряжённых уравнениях (10)

$$a_i(t) = \alpha_i^0 \tilde{N}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

$$b_i(t) = [\beta(t) - 1]\tilde{N}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

тогда система сопряжённых уравнений (10) перепишется в следующем виде:

$$\dot{\psi}_i(t) = a_i(t)\psi_i(t) + b_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Согласно предложению 1 множители Лагранжа $\beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ должны удовлетворять равенствам:

$$\partial L/\partial N_i = \tilde{q}_i(t) - \alpha_i^0\psi_i(t)\tilde{q}_i(t) - \beta(t)\tilde{q}_i(t) - \gamma_i(t) + \delta_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

или

$$\tilde{q}_i(t)[1 - \alpha_i^0\psi_i(t) - \beta(t)] = \gamma_i(t) - \delta_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{14}$$

$$\beta(t)\left[\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\tilde{N}_i(t)\right] = 0, \quad \beta(t) \geqslant 0; \tag{15}$$

$$\gamma_i(t)[\bar{N}_i - \tilde{N}_i(t)] = 0, \quad \gamma_i(t) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{16}$$

$$\delta_i(t)\tilde{N}_i(t) = 0, \quad \delta_i(t) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

В нелинейном программировании выписанные выше соотношения (15), (16), (17) определяются как условия дополняющей нежёсткости.

Как видно из дифференциальных уравнений (2), фазовые переменные $q(T)$ положительны при любых конечных значениях T. Поэтому условия трансверсальности (8) представятся в следующем виде:

$$\psi_i(T) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Разрешив сопряжённые уравнения (13) с учётом условий трансверсальности (18), в результате получаем

$$\psi_i(t) = -\exp\left[-\int_t^T a_i(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]\left\{\int_t^T b_i(t)\exp\left[\int_t^T a_i(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right]\mathrm{d}t\right\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{19}$$

где $a_i(t)$ и $b_i(t)$ определяются формулами (11) и (12), соответственно.

Пусть $\tilde{q}(t)$ — оптимальная траектория. Далее определим два множества:

$$H = \left\{t \mid \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\tilde{N}_i(t) < \bar{Q}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\right\}; \tag{20}$$

$$M = \left\{t \mid \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\tilde{N}_i(t) = \bar{Q}, \quad 0 \leqslant t \leqslant T\right\}. \tag{21}$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. Пусть на оптимальной траектории при некотором значении $t = t^* \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\tilde{N}_i(t) > 0, \tag{22}$$

т.е. множество (20) непусто, тогда значение вектора оптимальных управлений определяется равенством $\tilde{N}(t^*) = \bar{N}$.

Доказательство. Пусть для k-й компоненты вектора управлений $\tilde{N}(t)$ выполняется строгое неравенство: $\tilde{N}_k(t^*) < \bar{N}_k$. Из (15) и (22) при $t = t^*$ вытекает, что $\beta(t^*) = 0$. С учётом (14), (16) и (17) получаем $\delta_k(t^*) \geqslant 0, \gamma_k(t^*) = 0$ и $1 \leqslant \alpha_k^0 \psi_k(t^*)$.

Перепишем k-е сопряжённое уравнение (10)

$$\alpha_k^0 \dot{\psi_k}(t) = \alpha_k^0 \tilde{N}_k(t)([\alpha_k^0 \psi_k(t) - 1] + \alpha_k^0 \tilde{N}_k(t) \beta(t). \tag{23}$$

Положим $x(t) = \alpha_k^0 \psi_k(t) - 1$; $c(t) = \alpha_k^0 \tilde{N}_k(t)$; $d(t) = \alpha_k^0 \tilde{N}_k(t)\beta(t)$. В новых переменных сопряжённое уравнение (23) перепишется в следующем виде: $\dot{x} = c(t)x + d(t)$. Разрешим это сопряжённое уравнение с начальным условием $x(t^*) \geqslant 0$. В результате получим

$$x(t) = \left\{ x(t^*) + \int\limits_{t^*}^{t} d(t) \exp\left[-\int\limits_{t^*}^{t} c(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \right] \mathrm{d}t \right\} \exp\left[\int\limits_{t^*}^{t} c(\vartheta) \mathrm{d}\vartheta \right]. \tag{24}$$

Из (24) с учётом неотрицательности коэффициентов $c(t)$ и $d(t)$ получаем $x(t) = \alpha_k^0 \psi_k(t) - 1 \geqslant x(t^*) \geqslant 0$. Отсюда следует, что условие трансверсальности (18) для k компоненты вектор-функции $\psi(t)$ не выполнено. □

Следствие 1. На множестве (20) значение вектора оптимальных управлений однозначно определяется равенством $\tilde{N}(t) = \bar{N}$.

Утверждение 2. Пусть $t^* \in [0, T]$ и $t^* \in H$, тогда $[t^*, T] \subset H$.

Доказательство. Предположим, что при некотором значении $t' \in (t^*, T]$ выполняется равенство

$$\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t) \tilde{N}_i(t) = 0, \tag{25}$$

т.е. $t' \in M$, тогда существует хотя бы одна k-я компонента вектора управлений $\tilde{N}(t)$ такая, что $\tilde{N}_k(t^*) < \bar{N}_k$. Из утверждения 1 вытекает $\tilde{N}_k(t^*) = \bar{N}_k$. Пришли к противоречию. □

Утверждение 3. Пусть при некотором значении $t = t^* \in [0, T]$ выполняется неравенство

$$\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t) \bar{N}_i(t) \geqslant 0, \tag{26}$$

тогда $\tilde{N}(t) = \bar{N}$ при всех $t \in [t^*, T]$ и $t^* \in \bar{H}$, где $\bar{H}$ замыкание множества H.

Доказательство. В связи с убыванием фазовых переменных $q(t)$ и с учётом неравенства (28) связующее ограничение (5) неактивно на любом допустимом управлении при $t > t^*$. В этом случае задача 1 разбивается на n независимых оптимизационных задач, решение которых тривиально и определяется значениями вектора оптимальных управлений $\tilde{N}(t) = \bar{N}$. Принадлежность t^* замыканию множества (20) очевидна. □

Утверждение 4. Пусть $t^* \in [0, T]$ и $t^* \in M$, тогда $[0, t^*] \subset M$.

Доказательство утверждения 4 вытекает из утверждения 2 при использовании, например, метода «от противного».

Утверждение 5. Существует такое значение T, при котором множество (20), построенное на оптимальной траектории, непусто.

Доказательство. В качестве T достаточно взять $T' = (\sum\limits_{i=1}^{n} V_i^0)/\bar{Q}$. Легко показать,что существует такое $t \in (0, T')$, при котором неравенство (22) будет выполняться. Значит множество (20) непусто. □

Утверждение 6. Пусть хотя бы для одной k-й компоненты оптимального вектора управлений $\tilde{N}(t)$ в момент $t^* \in (0, T)$ выполняется строгое неравенство $\tilde{N}_k(t^*) < \bar{N}_k$, тогда существует такое $t' \in (t^*, T]$, что $[0, t'] \subset M$.

Доказательство. Доказательство того, что $[0, t^*] \subset M$, легко получить из утверждений 1 и 2, используя, например, метод «от противного». Следуя этим же методом «от противного», докажем, что $[t^*, t'] \subset M$. Пусть не существует такого t', тогда с учётом этих же утверждений 1 и 2 вытекает, что $[t^*, t'] \subset H$ и $\tilde{N}(t) = \bar{N}$. Значит множество (20) непусто и $\inf H = t^*$. В силу убывания и непрерывности фазовых переменных $q(t)$ получаем $\tilde{N}(t^*) = \bar{N}$. Пришли к противоречию. □

Утверждение 7. Пусть множества (20) и (21) не пусты, тогда существует такое $T_{\max} \in M$, при котором $\tilde{N}(T_{\max}) = \bar{N}$.

Доказательство. В качестве $T_{\max}$ берём $\inf H$, причём $T_{\max} = \max M$. В силу убывания и непрерывности фазовых переменных $q(t)$ получаем $\tilde{N}(T_{\max}) = \bar{N}$. □

Следствие 2. Пусть множества (20) и (21) не пусты, тогда оптимальная траектория проходит через плоскость, описываемой уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \bar{N}_i = \bar{Q}, \tag{27}$$

где вектор q принадлежит положительному ортанту пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Существует только одно из трёх возможных вариантов поведений оптимальной траектории:*

1) *если в начальный момент выполнено неравенство* $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 \bar{N}_i \leqslant \bar{Q}$, *то множество (20) непусто, вектор управлений* $\tilde{N}(t) = \bar{N}$ *при всех* $t \in [0, T]$ *и сумма* $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t) \bar{N}_i < \bar{Q}$ *при* $t \in (0, T]$ *и со временем данная сумма убывает;*
2) *если в начальный момент выполнено неравенство* $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 \bar{N}_i > \bar{Q}$ *и существует допустимая траектория, на которой выполняется равенство*

$$\bar{Q} - \sum_{i=1}^{n} q_i(t) N_i(t) = 0, \tag{28}$$

при всех $t \in [0, T]$, *то данная траектория является оптимальной, и максимальное значение функционала (1) равно* $\bar{Q}T$. *Заметим, что к числу допустимых траекторий можно отнести траектории, удовлетворяющие тем же самым условиям текущего пункта теоремы, но при большем значении* T. *Эти траектории также будут оптимальными.*

3) если в начальный момент выполнено неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} q_i^0 \bar{N}_i > \bar{Q}$ *и множество (20) непусто, то существует такое* $T_{\max}$*, что равенство (25) выполняется при всех* $t \in [0, T_{\max}]$*, сумма* $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i < \bar{Q}$ *при всех* $t \in (T_{\max}, T]$ *и со временем данная сумма убывает.*

Доказательство теоремы 1 следует из вышеприведённых утверждений.

Теорема 2. *Пусть множество (20) непусто и пусть фазовые переменные* q_i *упорядочены в порядке возрастания величин* $\alpha_i^0 \bar{N}_i$*, тогда в каждый момент* t*:*
(a) оптимальная траектория вычисляется по формулам

$$\tilde{q}_i(t) = q_i^0 \exp\left[-\alpha_i^0 \int\limits_0^t \tilde{N}_i(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\right], \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{29}$$

(b) если выполнено условие $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i \leqslant \bar{Q}$*, то* $\tilde{N}(t) = \bar{N}$*;*

(c) в противном случае существует такое целое число $k \in \{1, \ldots, n\}$*, при котором выполняется двойное неравенство* $\sum\limits_{i=1}^{k-1} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i \leqslant \bar{Q} < \sum\limits_{i=1}^{k} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i$ *и*

$$\tilde{N}_i(t) = \bar{N}_i \text{ при } i = 1, 2, \ldots, k-1, \tag{30}$$

$$\tilde{N}_i(t) = 0 \text{ при } i = k+1, \ldots, n, \tag{31}$$

$$\tilde{N}_k(t) = \left[\bar{Q} - \sum_{i=1}^{k-1} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i\right] / \tilde{q}_k(t). \tag{32}$$

(d) Для любого $t' \in [t, T]$ *выполняется неравенство* $\tilde{N}(t) \leqslant \tilde{N}(t')$*.*

Доказательство. Введём обозначение $\varphi_i(t) = \alpha_i^0 \psi_i(t)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. В новых обозначениях сопряжённые уравнения (10) перепишутся в следующем виде:

$$\dot{\varphi}_i(t) = [\varphi_i(t) + \beta(t) - 1]\alpha_i^0 \tilde{N}_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{33}$$

Пусть $t \in H$. Из утверждения 1 оптимальные управления $\tilde{N}(t) = \bar{N}$, а из условия (15) множитель Лагранжа $\beta(t) = 0$ на множестве (20). Подставим эти значения в формулы (11) и (12). Из решений (19) системы сопряжённых уравнений (13) с учётом формул (11) и (12) получаем

$$\varphi_i(t) = \alpha_i^0 \psi_i(t) = 1 - \exp[-\alpha_i^0 \bar{N}_i (T - t)], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{34}$$

Далее с учётом упорядочивания фазовых переменных в порядке возрастания значений $\alpha_i^0 \bar{N}_i$ сравниваем величины функций $\varphi_i(t)$ при фиксированном t. В результате приходим к следующему выводу: с возрастанием номера компоненты строго возрастают при фиксированном t значения функций $\varphi_i(t)$.

Положим $\varphi_1(0) < \varphi_2(0) < \ldots < \varphi_n(0)$. При этом $t = 0 \in M$. В следующей части доказательства теоремы 2 покажем, что такое же соотношение порядка функций $\varphi_i(t)$ сохраняется на всем множестве M, т.е. для любого $t \in M$ выполнены неравенства $\varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \ldots < \varphi_n(t)$.

В соответствии с условием $t \in M$ введём множество G', на котором осуществляется максимизация гамильтониана (9),

$$G' = \left\{ N \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant N \leqslant \bar{N}, \sum_{i=1}^{n} q_i N_i = \bar{Q} \right\}. \tag{35}$$

Преобразуем гамильтониан (9)

$$H(\cdot) = \max_{N \in G'} \sum_{i=1}^{n} [\tilde{q}_i(t) N_i - \varphi_i(t) \tilde{q}_i(t) N_i] = \bar{Q} + \max_{N \in G'} \sum_{i=1}^{n} [-\varphi_i(t) \tilde{q}_i(t) N_i]. \tag{36}$$

Максимизация гамильтониана (36) сводится к минимизации функции

$$\min_{N \in G'} \sum_{i=1}^{n} [\varphi_i(t) \tilde{q}_i(t) N_i]. \tag{37}$$

Сделаем замену переменных: $u = \tilde{q} N$; $\bar{u} = \tilde{q} \bar{N}$. В результате максимизация гамильтониана (36) свелась к следующей задаче линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i u_i \to \min \tag{38}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{n} u_i = \bar{Q}, \tag{39}$$

$$0 \leqslant u \leqslant \bar{u}. \tag{40}$$

При этом коэффициенты φ_i упорядочены в порядке строгого возрастания.

С учётом (39) преобразуем линейную функцию (38). В результате получаем следующую задачу линейного программирования на максимум:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (\varphi_n - \varphi_i) u_i \to \max \tag{41}$$

Заметим, что все коэффициенты в описании линейной функции (41) положительны и убывают с увеличением номера компоненты вектора u.

Следующая процедура позволяет найти такой оптимальный вектор $\tilde{u}$, который доставляет максимум линейной функции (41) и соответственно минимум линейной функции (38). Сначала на первом шаге выбираем $\bar{u}_1$. Если $\bar{u}_1 \geqslant \bar{Q}$, то $\tilde{u}_1 = \bar{Q}$ и $\tilde{u}_i = 0,\ i = 2, \ldots, n$. В этом случае мы определили все оптимальные значения вектора $\tilde{u}$. Если $\bar{u}_1 < \bar{Q}$, то $\tilde{u}_1 = \bar{u}_1$ и делаем замену $\bar{Q} = \bar{Q} - \bar{u}_1$. Далее переходим ко второй компоненте u_2 и повторяем процедуру первого шага.

Если мы остановились на k-м шаге, то

$$\tilde{u}_i = \bar{u}, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad \tilde{u}_k \in (0, \bar{u}_k], \quad \tilde{u}_i = 0, \quad i = k+1, \ldots, n.$$

Если мы прошли все шаги от 1 до $n-1$, то $\tilde{u}_i = \bar{u}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \tilde{u}_n = \bar{Q}$.

Из вышеприведённого доказательства можно утверждать, что для любой k-й компоненты вектора управлений справедливо следующее:

1) если $\tilde{u}_k = \bar{u}_k$, то $\tilde{N}_k(t) = \bar{N}_k$;
2) если $\tilde{u}_k = 0$, то $\tilde{N}_k(t) = 0$;

3) если $\tilde{u}_k \in (0, \bar{u})$, то $\tilde{N}_k(t) \in (0, \bar{N})$.

На рис. 1 схематично изображены поведения управлений $\tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), \tilde{N}_3(t)$, функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ и множителя Лагранжа $\beta(t)$ на отрезке $[0, T]$ для задачи 1 с размерностью $n = 3$.

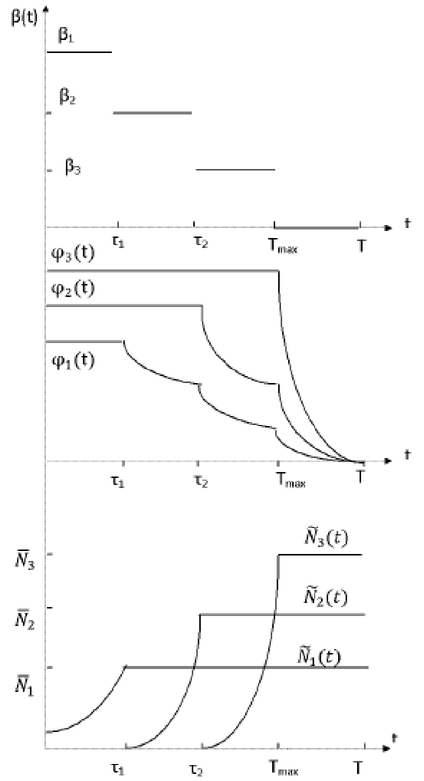

Рис. 1. Поведения управлений $\tilde{N}_1(t), \tilde{N}_2(t), \tilde{N}_3(t)$, функций $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ и множителя Лагранжа $\beta(t)$ на отрезке $[0, T]$ для задачи 1 с размерностью $n = 3$

Рассмотрим в динамике поведение оптимальной траектории на всем множестве M, т.е. от 0 до $T_{\max}$. Пусть в начальный момент $q_1^0 \bar{N}_1 > \bar{Q}$, тогда $\tilde{N}_1(0) \in (0, \bar{N}_1)$, $\tilde{N}_i(0) = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$. В связи с убыванием фазовой переменной $\tilde{q}_1(t)$ существует такой момент τ_1, что:

1) на полуинтервале $t \in [0, \tau_1)$ выполнены соотношения $\tilde{N}_1(t) \in (0, \bar{N}_1)$ и $\tilde{N}_i(t) = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$;
2) $\tilde{N}_1(\tau_1) = \bar{N}_1$ и $\tilde{N}_i(\tau_1) = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$.

Из системы сопряжённых уравнений (33) с учётом (14), (16), (17) при $t \in [0, \tau_1)$ получаем: $\gamma_1(t) = \delta_1(t) = 0$; $\beta(t) = 1 - \varphi_1(t) = \beta_1 = \text{const}$; $\varphi_i(t) = \text{const}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. При этом соотношения порядка, установленного среди компонент вектор-функции $\varphi(t)$ по их значениям в момент $t = 0$, не изменяются на отрезке $[0, \tau_1]$.

Далее существует такой момент τ_2, что:

1) на интервале (τ_1, τ_2) выполнены соотношения $\tilde{N}_1(t) = \bar{N}_1$, $\tilde{N}_2(t) \in (0, \bar{N}_2)$ и $\tilde{N}_i(t) = 0$ для $i = 3, \ldots, n$;
2) $\tilde{N}_1(\tau_2) = \bar{N}_1$, $\tilde{N}_2(\tau_2) = \bar{N}_2$ и $\tilde{N}_i(\tau_2) = 0$ для $i = 3, \ldots, n$.

Из системы сопряжённых уравнений (33) с учётом (14), (16), (17) при $t \in (\tau_1, \tau_2)$ получаем: $\gamma_2(t) = \delta_2(t) = 0$; $\beta(t) = 1 - \varphi_2(t) = \beta_2 = \text{const}$; $\varphi_i(t) = \text{const}$ для

$i = 2, 3, \ldots, n$; функция $\varphi_1(t)$ убывает на интервале (τ_1, τ_2). Последнее вытекает из неравенства $\beta_1 = 1 - \varphi_1(\tau_1) > \beta_2 = 1 - \varphi_2(\tau_1)$. При этом соотношения порядка, установленные среди компонент вектор-функции $\varphi(t)$ по их значениям в момент $t = 0$, сохраняются на отрезке $[0, \tau_2]$.

В момент $T_{\max}$ согласно утверждению 7 $\tilde{N}(T_{\max}) = \bar{N}$. Анализируя динамику изменений множителя Лагранжа $\beta(t)$ и динамику вектор-функции $\varphi(t)$, приходим к следующим заключениям: множитель Лагранжа $\beta(t)$ является кусочно-постоянной убывающей функцией; установленные соотношения порядка в момент $t = 0$ среди значений компонент вектор-функции $\varphi(t)$ с учётом строгих неравенств остаются без изменений на отрезке $[0, T_{\max}]$.

Важно, что установленные соотношения строгого порядка среди значений компонент вектор-функции $\varphi(t)$ в момент $t = 0$ совпадают в момент $t = T_{\max}$ с соотношениями строгого порядка среди значений компонент (34) этой же вектор-функции , но полученной с учётом условий трансверсальности при $t > T_{\max}$. Поэтому можно осуществить синтез вектор-функций $\varphi(t)$ в момент $T_{\max}$. Если бы имелись отличия в соотношениях строгого порядка, то синтез вектор-функций $\varphi(t)$ осуществить в момент $T_{\max}$ было бы нельзя.

Теорема 2 доказана. □

Следствие 3. Пусть множество (20) непусто, тогда оптимальные траектории, полученные при решении задачи 1 и нижеприведённой задачи 2, совпадают на отрезке $[0, T_{\max}]$ и максимальное значение функционала задачи 2 равно $T_{\max}$.

Задача 2. О максимизации длины общей «полки» для группы газовых месторождений

Требуется максимизировать функционал $T \longrightarrow \max$ при дифференциальных связях (2), начальных условиях (3) и ограничениях на управления (4),

$$\sum_{i=1}^{n} q_i(t) N_i(t) = \bar{Q}, \tag{42}$$

Управления $N_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ принадлежат множеству измеримых функций.

Доказательство следствия теоремы 2 состоит в следующем. Имеются две задачи 1 с одинаковыми исходными данными. Единственное отличие состоит в значении T. В первой задаче $T = T_1$, во второй задаче $T = T_2$ и $T_1 < T_2$. Для каждой задачи выполнено условие не пустоты множества H. Сравним оптимальные траектории. Они совпадают на периоде от 0 до T_1, также совпадают значения $T_{\max}$. При этом $T_{\max} < T_1$.

Далее устремим T к $T_{\max}$ $(T > T_{\max})$. В результате задача максимизации накопленной добычи для группы газовых месторождений сводится к очень важной прикладной задаче перспективного планирования для группы газовых месторождений, а именно: к задаче максимума длины общей «полки» для группы месторождений, и эта величина равна $T_{\max}$.

5. Обсуждение результатов исследования

Обсудим полученные результаты исследования с точки зрения модели группы газовых месторождений. Все n газовых месторождений отсортированы в порядке возрастания величин $\frac{q_i^0}{V_i^0}\bar{N}_i$. Оптимальная политика разработок газовых месторождений с точки зрения максимума накопленной добычи состоит в следующем. Сначала в момент $t = 0$ вводится в разработку первое месторождение с наименьшим значением величины $\frac{q_1^0}{V_1^0}\bar{N}_1$. Если мощностей у первого месторождения недостаточно, чтобы осуществлять добычу газа в течение некоторого времени на уровне величины общей «полки» месторождений, т.е. $q_1^0\bar{N}_1 \leqslant \bar{Q}$, то в разработку вводится второе месторождение. Если мощностей у первого месторождения достаточно, чтобы осуществлять добычу газа на уровне величины общей «полки» месторождений, т.е. $q_1^0\bar{N}_1 > \bar{Q}$, то разработка первого месторождения осуществляется с добычей на уровне $\bar{Q}$. При этом с самого начала часть скважин отключена. Однако с извлечением запаса газа на первом месторождении средний дебит уменьшается, а значит падает добыча газа. Для компенсации его падения в разработку включаются новые незадействованные скважины. Наступает момент $t = \tau_1$, когда в добыче задействованы все имеющиеся у первого месторождения скважины, т.е. $\tilde{q}_1(\tau_1)\bar{N}_1 = \bar{Q}$. Дальнейшая компенсация падения добычи осуществляется за счёт ввода в разработку следующего по порядку месторождения. В момент $t = \tau_1$ в разработку вступает второе месторождение, которое за счёт ввода новых скважин компенсирует падение добычи на первом месторождении. Средний дебит на втором месторождении по мере извлечения своего запаса газа также падает. Наступает момент $t = \tau_2$, когда в добыче задействованы все имеющиеся как у первого, так и второго месторождения скважины,т.е. $\sum\limits_{i=1}^{2} \tilde{q}_i(\tau_2)\bar{N}_i = \bar{Q}$. Данная процедура продолжается до тех пор, пока в разработку в момент $t = T_{\max}$ ни будут включены все скважины на всех месторождениях, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(T_{\max})\bar{N}_i = \bar{Q}$. Далее совокупная добыча на всех месторождениях падает и $\sum\limits_{i=1}^{n} \tilde{q}_i(t)\bar{N}_i < \bar{Q}$ при $t \in (T_{\max}, T]$.

Объяснение полученных результатов состоит в следующем. Предположим, что имеются два одинаковых месторождения, отличающиеся только количеством действующих скважин. Легко показать, что чем меньше скважин на месторождении, тем больше добытого газа за один и тот же период приходится на одну скважину. Отсюда следует, что сначала необходимо разрабатывать месторождения с меньшим количеством скважин, а затем — с большим количеством скважин.

Автором статьи на примере 2, 3, 4 и 5 газовых месторождений был проведён численный эксперимент. Методом перебора решалась задача на максимум длины «полки» месторождения. Для каждого случая рассматривалось 1000 вариантов. При этом исходные данные для каждого варианта выбирались случайным образом. Полученные в результате численного эксперимента данные подвергались анализу и исследованию. Численный эксперимент подтвердил правильность сделанных в статье выводов.

Литература

1. *Эрроу К.* Применение теории управления к экономическому росту // Математическая экономика. — М.: Мир, 1974. — С. 7–45. [*Ehrrou K.* Primenenie teorii upravleniya k ehkonomicheskomu rostu // Matematicheskaya ehkonomika. — M.: Mir, 1974. — S. 7–45.]
2. *Skiba A. K.* Optimal Growth with a Convex-Concave Production Function // Econometrica. — 1978. — Vol. 46. — Pp. 527–539.
3. *Balder E. J.* On Existence Result for Optimal Economic Growth Problems // A Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1983. — Vol. 95. — Pp. 195–213.
4. *Асеев С. М., Кряжимский А. В.* Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста // Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. — М.: Наука, 2007. — Т. 257. — С. 1–272. [*Aseev S. M., Kryazhimskiyj A. V.* Princip maksimuma Pontryagina i zadachi optimaljnogo ehkonomicheskogo rosta // Trudih Matematicheskogo Instituta im. V.A. Steklova. — M.: Nauka, 2007. — T. 257. — S. 1–272.]

5. *Скиба А. К.* Принцип максимума в задаче максимизации дохода для модели газового месторождения // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — Т. 1. — С. 14–22. [*Skiba A. K.* Princip maksimuma v zadache maksimizacii dokhoda dlya modeli gazovogo mestorozhdeniya // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2009. — T. 1. — S. 14–22.]
6. *Федосеев А. В., Хачатуров В. Р.* Постановка и исследование задач оптимального управления для анализа перспективных планов в нефтегазодобывающей промышленности // Имитационное моделирование и математические методы анализа перспективных планов развития нефтедобывающей промышленности. — М.: ВЦ АН СССР, 1984. — С. 66–112. [*Fedoseev A. V., Khachaturov V. R.* Postanovka i issledovanie zadach optimaljnogo upravleniya dlya analiza perspektivnihkh planov v neftegazodobihvayutheyj promihshlennosti // Imitacionnoe modelirovanie i matematicheskie metodih analiza perspektivnihkh planov razvitiya neftedobihvayutheyj promihshlennosti. — M.: VC AN SSSR, 1984. — S. 66–112.]
7. *Маргулов Р. Д., Хачатуров В. Р., Федосеев А. В.* Системный анализ в перспективном планировании добычи газа. — М.: Недра, 1991. — 288 с. [*Margulov R. D., Khachaturov V. R., Fedoseev A. V.* Sistemnihyj analiz v perspektivnom planirovanii dobihchi gaza. — M.: Nedra, 1991. — 288 s.]
8. *Крюков В. А., Скиба А. К., Федосеев А. В.* Задачи оптимального управления разработкой газоконденсатного месторождения. — М.: ВЦ АН СССР, 1990. — 40 с. [*Kryukov V. A., Skiba A. K., Fedoseev A. V.* Zadachi optimaljnogo upravleniya razrabotkoyj gazokondensatnogo mestorozhdeniya. — M.: VC AN SSSR, 1990. — 40 s.]
9. Моделирование освоения газовых месторождений на заключительной стадии эксплуатации / А. К. Скиба, В. Р. Хачатуров, А. В. Злотов, А. Н. Соломатин. — М.: ВЦ РАН, 2006. — 54 с. [Modelirovanie osvoeniya gazovihkh mestorozhdeniyj na zaklyuchiteljnoyj stadii ehkspluatacii / A. K. Skiba, V. R. Khachaturov, A. V. Zlotov, A. N. Solomatin. — M.: VC RAN, 2006. — 54 s.]
10. *Соломатин А. Н.* Некоторые оптимизационные задачи для группы газовых месторождений. — М.: ВЦ РАН, 2009. — 44 с. [*Solomatin A. N.* Nekotorihe optimizacionnihe zadachi dlya gruppih gazovihkh mestorozhdeniyj. — M.: VC RAN, 2009. — 44 s.]
11. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972. — 576 с. [*Li Eh. B., Markus L.* Osnovih teorii optimaljnogo upravleniya. — M.: Nauka, 1972. — 576 s.]

UDC 517.97

An Optimal Control Applied Problem with a Mixed Constraint

A. K. Skiba

Dorodnicyn Computing Centre of the Russian Academy of Sciences
40 Vavilov str., Moscow, Russia, 119333

We consider a gas deposits group functioning model. The optimum control problem with a mixed constraint is stated and solved over a finite horizon. A maximum of accumulated production for a group of gas deposits is taken as the optimization criterion.

Key words and phrases: maximum principle, K. Arrow proposition, mixed constraint, model of gas deposits, maximum accumulated production, maximum length of the “ceiling”.