УДК 517.588

Исследование аналитической функции конформной теории поля

Н. И. Вишневская

Физико-математический факультет
Московский государственный социально-гуманитарный институт
ул. Зелёная, д.30, г. Коломна, Россия, 140410

Рассматривается интеграл, связанный с изучением четырёхточечного коррелятора, содержащего конформный оператор четвёртого порядка. Получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение, решением которого является изучаемый интеграл.

Ключевые слова: корреляционная функция, коррелятор, гипергеометрическая функция.

1. Введение

Термин «гипергеометрический» был впервые использован Уолисом в 1655 году в его работе «Arithmetrica Infinitorm». Хорошо известен гипергеометрический ряд одной переменной ${}_2F_1(a,b;c;z)$, который был введён и изучен Гауссом в его тезисах, представленных в Геттингене в 1812 году. Аппель и Кампе де Ферье (1880) ввели и изучили гипергеометрические функции двух переменных типа $F_1 - F_4$. Приведём пример одной из этих функций.

$$F_1(a_1, a_2, a_3; c; z_1, z_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1+m_2}(a_2)_{m_1}(a_3)_{m_2}}{m_1!m_2!(c)_{m_1+m_2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Горн более детально исследовал все гипергеометрические функции двух переменных в 1889, 1931 и 1938 годах, изучая соответствующие гипергеометрические уравнения второго порядка в частных производных двух переменных. Им были найдены 10 гипергеометрических функций двух переменных $G_1 - G_3, H_1 - H_7$. Например, H_5 имеет вид

$$H_5(a_1, a_2; c; z_1, z_2) = \sum_{m_1,m_2=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{2m_1+m_2}(a_2)_{m_2-m_1}}{m_1!m_2!(c)_{m_2}} z_1^{m_1} z_2^{m_2}.$$

Гипергеометрические ряды трёх переменных были изучены Горном, ряды от n переменных — Лауричеллой. Им получено семейство функций $F_A^n, F_B^n, F_C^n, F_D^n$. Выпишем явный вид одной их этих функций

$$F_B^k(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k; c; z_1, \dots, z_k) = \\ = \sum_{m_1,\dots,m_k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{m_1} \dots (a_k)_{m_k}(b_1)_{m_1} \dots (b_k)_{m_k}}{m_1! \dots m_k!(c)_{m_1+\dots+m_k}} z_1^{m_1} \dots z_k^{m_k}.$$

Экстон (1972,1973) определил и изучил двадцать шесть гипергеометрических функций четырёх переменных типа $K_1 - K_{21}, D_1 - D_5$, которые являются обобщением функций Горна.

Гельфанд и Граев [1], проанализировав различные, ранее определённые, гипергеометрические функции, развили новый подход к их теории. В частности, при

Статья поступила в редакцию 15 июня 2012 г.

определении гипергеометрических функций дифференциальные уравнения заменяются системами линейных соотношений между функцией, её первыми частными производными и сдвигами функции по параметрам.

Ещё один подход был развит в работах G. Heckman и E. Opdam [2]. Он основан на установлении связи систем корней полупростых алгебр Ли с гипергеометрическими функциями.

Основным объектом конформной теории поля являются корреляционные функции. Эти функции связаны также с гипергеометрическими интегралами [3, 4]. В частности четырёхточечный коррелятор, содержащий конформный оператор второго порядка, задаётся интегралом

$$I(a,b,c;z)=\int\limits_C t^a(t-1)^b(t-z)^c\mathrm{d}t,$$

для которого контур интегрирования C должен быть выбран подходящим образом так, чтобы он охватывал точки $0,1,\infty$.

В работе [3] В.С. Доценко и В.А. Фатеев рассматривают и подробно изучают интеграл

$$I(a,b,c;a,b,c;g;z)=\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2} t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c(t_1-t_2)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2.$$

Предполагается, что мы можем интегрировать по частям, и концы контуров C_1 и C_2 при этом не дают вклада. Иными словами, предполагается, что интегралы всегда сходятся. Эта работа в последнее время привела к возникновению большого количества работ, в которых решаются физические задачи, основанные на свойствах этого интеграла [5, 6]. В [3] приведено подробное описание корреляционных функций, найдено дифференциальное уравнение третьего порядка, решением которого является приведённый выше интеграл. В [4] изучается четырёхточечный коррелятор, его интегральное представление.

В настоящей работе изучается более высокомерный аналог интеграла Доценко–Фатеева, который также востребован в физике, а именно интеграл следующего типа

$$\begin{aligned}I(a,b,c,g;a,b,c,g;a,b,c,g;z)\equiv I(a,b,c;g;z)=\\ =\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2}\int\limits_{C_3} t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times\\ \times(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3,\end{aligned}$$

который является интегральным представлением конформной функции, связанной с коррелятором четвёртого порядка. Получено линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка, решением которого является рассматриваемый интеграл. Также получено разложение линейно независимых решений уравнения в окрестности особых точек, которое представлено в виде схемы Римана.

2. Дифференциальное уравнение для четырёхточечного коррелятора

В настоящем разделе будет получено обыкновенное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет многозначно-аналитическая функция переменной z вида

$$\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2}\int\limits_{C_3} t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times (t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3. \quad (1)$$

Для вывода этого уравнения используется метод неопределённых коэффициентов. Предполагается, что оно имеет вид

$$I^{(IV)}+\left(\frac{K_1}{z-1}+\frac{K_2}{z}\right)I'''+\left(\frac{L_1}{(z-1)^2}+\frac{L_2}{z^2}+\frac{L_3}{z(z-1)}\right)I''+$$
$$+\left(\frac{M_1}{z(z-1)^2}+\frac{M_2}{z^2(z-1)}+\frac{M_3}{z^3}+\frac{M_4}{(z-1)^3}\right)I'+$$
$$+\left(\frac{P_1}{z^3(z-1)}+\frac{P_2}{z^2(z-1)^2}+\frac{P_3}{z(z-1)^3}\right)I=0. \quad (2)$$

Это гипотетическое уравнение имеет особые точки $z=0,1$ и возможно $z=\infty$ (в зависимости от его коэффициентов). Исследование начинается с получения уравнения в окрестности особой точки $z=0$. Разложим интеграл (1) в ряд по степеням z вида

$$I(a,b,c;g;z)=z^\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

После дифференцирования этого ряда необходимое количество раз подставим его в (2), после чего соберём члены при одинаковых степенях z. В частности, выпишем коэффициенты при z^λ. В результате получим следующее рекуррентное соотношение, связывающее a_0 и a_1:

$$-\left[(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)K_2+(\lambda+1)\lambda L_2+(\lambda+1)M_3\right]\cdot a_1+$$
$$+\left[3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(K_1+3K_2)+\right.$$
$$\left.+\lambda(\lambda-1)(3L_2+L_3)+\lambda(M_2+3M_3)+P_1\right]\cdot a_0=0. \quad (3)$$

Выбираем в качестве линейно независимых решений гипотетического дифференциального уравнения (2) следующие четыре интеграла см. [7, 8]

$$I_1^0=\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times (t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \quad (4)$$

$$I_2^0=\int\limits_1^\infty\int\limits_1^\infty\int\limits_0^z t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(1-t_3)^b(z-t_3)^c\times$$
$$\times (t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z^{a+c+1}\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n, \quad (5)$$

$$I_3^0 = \int\limits_1^\infty \int\limits_0^z \int\limits_0^z t_1^a (t_1-1)^b (t_1-z)^c t_2^a (1-t_2)^b (z-t_2)^c t_3^a (1-t_3)^b (z-t_3)^c \times$$
$$\times (t_1-t_2)^g (t_1-t_3)^g (t_2-t_3)^g \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 = z^{2a+2c+g+2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad (6)$$

$$I_4^0 = \int\limits_0^z \int\limits_0^z \int\limits_0^z t_1^a (1-t_1)^b (z-t_1)^c t_2^a (1-t_2)^b (z-t_2)^c t_3^a (1-t_3)^b (z-t_3)^c \times$$
$$\times (t_1-t_2)^g (t_1-t_3)^g (t_2-t_3)^g \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 = z^{3a+3c+3g+3} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (7)$$

Для нахождения коэффициентов K_i, L_i, M_i, P_i уравнения (2) необходимо составить 12 линейных уравнений. Напишем первые четыре уравнения. Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением (3), где λ, a_1, a_0 находятся из (4), (5), (6), (7) с помощью формул Сельберга и Аомото [9], а также соответствующей замены переменных. Формула Сельберга

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_i-t_j)^{2\gamma} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n =$$
$$= \prod_{j=0}^{n-1} \frac{\Gamma(\alpha+j\gamma)\Gamma(\beta+j\gamma)\Gamma(1+(j+1)\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+(n+j-1)\gamma)\Gamma(1+\gamma)},$$

где Γ — гамма функция. Формула Аомото

$$S_n(\alpha,\beta,\gamma) = \int\limits_0^1 \dots \int\limits_0^1 \left(\prod_{i=1}^k t_i\right) \prod_{i=1}^n t_i^{\alpha-1}(1-t_i)^{\beta-1} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (t_i-t_j)^{2\gamma} \mathrm{d}t_1 \dots \mathrm{d}t_n =$$
$$= S_n(\alpha,\beta,\gamma) \prod_{j=1}^k \frac{\alpha+(n-j)\gamma}{\alpha+\beta+(2n-j-1)\gamma}.$$

Сначала рассмотрим интеграл (4). Введём замену переменных $t_1 = \dfrac{1}{u_1}$, $t_2 = \dfrac{1}{u_2}$, $t_3 = \dfrac{1}{u_3}$, якобиан замены равен $J = -\dfrac{\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3}{u_1^2u_2^2u_3^2}$. Тогда интеграл принимает вид

$$I_1^0 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 u_1^{-a-b-c-2g-2}(1-u_1)^b(1-u_1z)^c u_2^{-a-b-c-2g-2}(1-u_2)^b(1-u_2z)^c \times$$
$$\times u_3^{-a-b-c-2g-2}(1-u_3)^b(1-u_3z)^c (u_2-u_1)^g (u_3-u_1)^g (u_3-u_2)^g \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3.$$

Разлагая в ряд произведение $(1-u_1z)^c(1-u_2z)^c(1-u_3z)^c$, получаем

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 u_1^{-a-b-c-2g-2}(1-u_1)^b u_2^{-a-b-c-2g-2}(1-u_2)^b\times$$
$$\times\, u_3^{-a-b-c-2g-2}(1-u_3)^b(u_2-u_1)^g(u_3-u_1)^g(u_3-u_2)^g\times$$
$$\times \sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(-c)_m(-c)_n(-c)_k}{m!n!k!}u_1^m u_2^n u_3^k z^{m+n+k}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3, \quad (8)$$

где $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1), (a)_0 = 1$.

Найдём коэффициент a_0, т.е. член с $m,n,k = 0$. Получаем

$$a_0 = \frac{\Gamma(-a-b-c-2g-1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(-a-c-g)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(-a-b-c-3g/2-1)\Gamma(b+g/2+1)\Gamma(g+1)}{\Gamma(-a-c-g/2)\Gamma(1+g/2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(-a-b-c-g-1)\Gamma(b+g+1)\Gamma(1+3g/2)}{\Gamma(-a-c)\Gamma(g/2+1)}.$$

Теперь найдём коэффициент a_1. Тогда в (8) рассматриваем члены с индексами $m=1, n=0, k=0$ или $m=0, n=1, k=0$ или $m=0, n=0, k=1$. Имеем

$$a_1 = -\frac{3c(a+b+c+g+1)}{a+c}a_0.$$

Как видно из разложения (8) $\lambda = 0$, также можно положить $a_0 = 1$. В результате нашли a_0, a_1, λ, которые необходимо подставить в (3) и записать первое из 12 уравнение для определения коэффициентов в (2). Оно принимает вид

$$\frac{3c(a+b+c+g+1)}{a+c}M_3 + P_1 = 0.$$

Затем необходимо по той же схеме изучить интеграл (5) и в результате получить λ, a_0, a_1, подставив которые в (3), получить второе уравнение из 12. Аналогично поступаем с (6), (7). В результате получим 4 уравнения из 12, которые имеют вид

$$[(a+c+2)(a+c+1)(a+c)(a+c-1) + (a+c+2)(a+c+1)(a+c)K_2+$$
$$+(a+c+2)(a+c+1)L_2 + (a+c+2)M_3]\times$$
$$\times\left(\frac{c(2a+2b+2c+3g+2)}{a+c+g} + \frac{b(a+1)}{a+c+2} + \frac{g(a+1)(2a+2b+2c+3g+2)}{(a+c+2)(a+c+g)}\right)+$$
$$+3(a+c+1)(a+c)(a+c-1)(a+c-2) + (a+c+1)(a+c)(a+c-1)(K_1+3K_2)+$$
$$+(a+c+1)(a+c)(3L_2+L_3) + (a+c+1)(M_2+3M_3) + P_1 = 0,$$

$$[(2a+2c+g+3)(2a+2c+g+2)(2a+2c+g+1)(2a+2c+g)+$$
$$+(2a+2c+g+3)(2a+2c+g+2)(2a+2c+g+1)K_2+$$
$$+(2a+2c+g+3)(2a+2c+g+2)L_2 + (2a+2c+g+3)M_3]\times$$
$$\times\left(\frac{c(a+b+c+2g+1)}{a+c+2g} + \frac{b(2a+g+2)}{a+c+g+2} + \frac{g(a+b+c+2g+1)(2a+g+2)}{(a+c+2g)(a+c+g+2)}\right)+$$

$$+\,3(2a+2c+g+2)(2a+2c+g+1)(2a+2c+g)(2a+2c+g-1)+$$
$$+\,(2a+2c+g+2)(2a+2c+g+1)(2a+2c+g)(K_1+3K_2)+$$
$$+(2a+2c+g+2)(2a+2c+g+1)(3L_2+L_3)+(2a+2c+g+2)(M_2+3M_3)+P1=0,$$

$$[(3a+3c+3g+4)(3a+3c+3g+3)(3a+3c+3g+2)(3a+3c+3g+1)+$$
$$+\,(3a+3c+3g+4)(3a+3c+3g+3)(3a+3c+3g+2)K_2+$$
$$+\,(3a+3c+3g+4)(3a+3c+3g+3)L_2+(3a+3c+3g+4)M_3]\cdot\frac{3b(a+g+1)}{a+c+2g+2}+$$
$$+\,3(3a+3c+3g+3)(3a+3c+3g+2)(3a+3c+3g+1)(3a+3c+3g)+$$
$$+\,(3a+3c+3g+3)(3a+3c+3g+2)(3a+3c+3g+1)(K_1+3K_2)+$$
$$+(3a+3c+3g+3)(3a+3c+3g+2)(3L_2+L_3)+(3a+3c+3g+3)(M_2+3M_3)+P1=0.$$

Следующий шаг — аналогичное исследование интегралов в окрестности особой точки $z=1$ и $z=\infty$. Как и при исследовании гипергеометрических уравнений в окрестности особой точки $z=1$, сделаем замену переменных в (2) следующим образом: $z_1=1-z$. Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\begin{aligned}&\left(z_1^6-3z_1^5+3z_1^4-z_1^3\right)I^{(IV)}+\\&+\left((K_1+K_2)z_1^5-(3K_1+2K_2)z_1^4+(3K_1+K_2)z_1^3-K_1z_1^2)\right)I'''+\\&+\left((L_1+L_2+L_3)z_1^4-(3L_1+L_2+2L_3)z_1^3+(3L_1+L_3)z_1^2-L_1z_1\right)I''+\\&+\left((M_1+M_2+M_3+M_4)z_1^3-(2M_1+M_2+3M_4)z_1^2+(3M_4+M_1)z_1-M_4\right)I'+\\&+\left((P_1+P_2+P_3)z_1^2-(2P_1+P_2)z_1^2+P_3\right)I=0.\end{aligned}\tag{9}$$

Рекуррентное соотношение, аналогичное (3), в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}&-[(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)K_1+(\lambda+1)\lambda L_1+(\lambda+1)M_4]\cdot a_1+\\&+[3\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(K_2+3K_1)+\\&+\lambda(\lambda-1)(3L_1+L_3)+\lambda(M_1+3M_4)+P_3]\cdot a_0=0.\end{aligned}\tag{10}$$

Роль интегралов (4), (5), (6), (7) выполняют следующие линейно независимые интегралы

$$I_1^1=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty(-t_1)^a(1-t_1)^b(z_1-t_1)^c(-t_2)^a(z-t_2)^b(z_1-t_2)^c\times$$
$$\times(-t_3)^a(1-t_3)^b(z_1-t_3)^c(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=\sum_{n=0}^\infty a_nz_1^n,$$

$$I_2^1=\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_1^z(-t_1)^a(1-t_1)^b(z-t_1)^c(-t_2)^a(1-t_2)^b(z-t_2)^c\times$$
$$\times\, t_3^a(1-t_3)^b(t_3-z)^c(t_1-t_2)^g(t_3-t_1)^g(t_3-t_2)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{b+c+1}\sum_{n=0}^\infty a_nz_1^n,$$

$$I_3^1=\int\limits_0^\infty\int\limits_1^z\int\limits_1^z(-t_1)^a(1-t_1)^b(z-t_1)^c t_2^a(1-t_2)^b(t_2-z)^c\times$$

$$\times\, t_3^a(1-t_3)^b(t_3-z)^c(t_2-t_1)^g(t_3-t_1)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{2b+2c+g+2}\sum_{n=0}^\infty a_n z_1^n,$$

$$I_4^1=\int\limits_1^z\int\limits_1^z\int\limits_1^z t_1^a(1-t_1)^b(t_1-z)^c t_2^a(1-t_2)^b(t_2-z)^c t_3^a\times$$

$$\times\,(1-t_3)^b(t_3-z)^c(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{3b+3c+3g+3}\sum_{n=0}^\infty a_n z_1^n.$$

Раскладывая каждый интеграл в ряд, находим коэффициенты разложения a_0, a_1 и показатель степени λ, где положим $a_0=1$. Далее подставляем эти выражения в (9) и получаем ещё 4 уравнения из 12. Осталось найти последние 4 уравнения. Для этого необходимо рассмотреть особую точку $z=\infty$.

Введём в уравнении (2) замену переменной $z_1=\dfrac{1}{z}$, после чего уравнение принимает вид

$$\begin{gathered}\left(z_1^2-3z_1^3+3z_1^4-z_1^5\right)I^{(IV)}+\Big[(K_2-12)z_1^4+(36-K_1-3K_2)z_1^3+\\+(2K_1+3K_2-36)z_1^2+(12-K_1-K_2)z_1\Big]I'''+\\+\Big[(6K_2-L_2-36)z_1^3++(3L_2+L_3-6K_1-18K_2+108)z_1^2+\\+(12K_1+18K_2-L_1-3L_2-2L_3-108)z_1+\\+(L_1+L_2+L_3-6K_1-6K_2+36)\Big]I''+\\+\Big[(6K_2-2L_2+M_3-24)z_1^2+(6L_2+2L_3-6K_1-18K_2-M_2-3M_3+72)z_1+\\+(12K_1+18K_2-2L_1-6L_2-4L_3+M_1+2M_2+3M_3-72)+\\+(2L_1+2L_2+2L_3-6K_1-6K_2-M_1-M_2-M_3-M_4+24)\frac{1}{z_1}\Big]I'+\\+\Big[(P_1+P_2+P_3)\frac{1}{z_1^2}-(2P_1+P_2)\frac{1}{z_1}+P_1\Big]I=0.\end{gathered}\qquad(11)$$

Рекуррентные соотношения между a_0 и a_1:

$$\begin{gathered}\Big[(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)+(\lambda+1)(\lambda)(\lambda-1)(12-K_1-K_2)+\\(\lambda+1)\lambda(L_1+L_2+L_3-6K_1-6K_2+36)+\\+(\lambda+1)(2L_1+2L_2+2L_3-6K_1+6K_2-M_1-M_2-M_3-M_4+24)+\\+P_1+P_2+P_3)\Big]\cdot a_1+\\+\Big[-3(\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)+\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(2K_1+3K_2-36)+\\+\lambda(\lambda-1)(12K_1+18K_2-L_1-3L_2-2L_3-108)+\end{gathered}$$

$$+\lambda(12K_1+18K_2-2L_1-6L_2-4L_3+M_1+2M_2+3M_3-72)-(2P_1+P_2)\Big]\cdot a_0=0. \tag{12}$$

Линейно независимые интегралы записываем в виде

$$I_1^{\infty}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 t_1^a(1-t_1)^b(t_1-z)^c t_2^a(1-t_2)^b(t_2-z)^c t_3^a(1-t_3)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=(-z_1)^{-3c}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_1^n,$$

$$I_2^{\infty}=\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_z^{\infty} t_1^a(1-t_1)^b(z-t_1)^c t_2^a(1-t_2)^b(z-t_2)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times(t_1-t_2)^g(t_3-t_1)^g(t_3-t_2)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{-a-b-3c-2g-1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_1^n,$$

$$I_3^{\infty}=\int\limits_0^1\int\limits_z^{\infty}\int\limits_z^{\infty} t_1^a(1-t_1)^b(z-t_1)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times(t_2-t_1)^g(t_3-t_1)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{-2a-2b-3c-2g-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_1^n,$$

$$I_4^{\infty}=\int\limits_z^{\infty}\int\limits_z^{\infty}\int\limits_z^{\infty} t_1^a(t_1-1)^b(t_1-z)^c t_2^a(t_2-1)^b(t_2-z)^c t_3^a(t_3-1)^b(t_3-z)^c\times$$
$$\times(t_1-t_2)^g(t_1-t_3)^g(t_2-t_3)^g\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_3=z_1^{-3a-3b-3c-3g-3}\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_1^n.$$

Проделывая аналогичные выкладки, получим ещё четыре уравнения. Далее, решая систему из 12 найденных уравнений относительно коэффициентов в (2), получаем следующий результат

$$K_1=-4g-6b-6c,$$
$$K_2=-4g-6a-6c,$$
$$L_1=4(b+c)(2b+2c+3g+1)+g(3g+1)+(b+c)(3b+3c+g),$$
$$L_2=4(a+c)(2a+2c+3g+1)+g(3g+1)+(a+c)(3a+3c+g),$$

$$L_3=6(b+c)(2a+2c+3g)+6(a+c)(2b+2c+3g)+5g(3g+1)-$$
$$-2(a+c)(b+c)+10c(a+b+c+g+1),$$

$$M_1=2(b-a)(b+c)(3b+3c+3g+1)-3(b+c)(2b+2c+g+1)(a+c+g)+$$

$$+ (3c-1)(b+c-1)(3b+3c+3g+1)(2a+2b+2c+3g+2)-$$
$$- 3(b+c)(c+g)(a+b+c+2g+1) + (3b+3c+3g+1)(a+g+1)(3g+2)(c-1)-$$
$$- 3c(a+b+c+g+1)(2b+2c+g+1)(3b+3c+3g+2),$$

$$\begin{aligned} M_2 = {} & 2(a-b)(a+c)(3a+3c+3g+1) - 3(a+c)(2a+2c+g+1)(b+c+g)+ \\ & + (3c-1)(a+c-1)(3a+3c+3g+1)(2a+2b+2c+3g+2)- \\ & - 3(a+c)(c+g)(a+b+c+2g+1) + (3a+3c+3g+1)(b+g+1)(3g+2)(c-1)- \\ & - 3c(a+b+c+g+1)(2a+2c+g+1)(3a+3c+3g+2), \end{aligned}$$

$$M_3 = -(a+c)(2a+2c+g+1)(3a+3c+3g+2),$$
$$M_4 = -(b+c)(2b+2c+g+1)(3b+3c+3g+2),$$
$$P_1 = 3c(a+b+c+g+1)(2a+2c+g+1)(3a+3c+3g+2),$$

$$\begin{aligned} P_2 = {} & 3c(a+b+c+g+1)\big[(2a+2c+g+1)(3b+3c+3g+1)+ \\ & + (2b+2c+g+1)(3a+3c+3g+1) + 3(c+g)(a+b+c+2g+1)\big], \end{aligned}$$

$$P_3 = 3c(a+b+c+g+1)(2b+2c+g+1)(3b+3c+3g+2).$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Функция (1) является решением линейного дифференциального уравнения четвёртого порядка вида*

$$\begin{aligned} I^{(IV)} + \left(\frac{K_1}{z-1} + \frac{K_2}{z}\right) I''' + \left(\frac{L_1}{(z-1)^2} + \frac{L_2}{z^2} + \frac{L_3}{z(z-1)}\right) I'' + \\ + \left(\frac{M_1}{z(z-1)^2} + \frac{M_2}{z^2(z-1)} + \frac{M_3}{z^3} + \frac{M_4}{(z-1)^3}\right) I' + \\ + \left(\frac{P_1}{z^3(z-1)} + \frac{P_2}{z^2(z-1)^2} + \frac{P_3}{z(z-1)^3}\right) I = 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты уравнения K_i, L_i, M_i, P_i выражаются через параметры функции (1).

При доказательстве теоремы было также получено разложение линейно независимых решений в окрестности особых точек, которые можно представить в виде схемы Римана следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & -3c \\ a+c+1 & b+c+1 & -a-b-3c-2g-1 \\ 2a+2c+g+2 & 2b+2c+g+2 & -2a-2b-3c-2g-2 \\ 3a+3c+3g+3 & 3b+3c+3g+3 & -3a-3b-3c-3g-3 \end{pmatrix}.$$

3. Заключение

Обобщения гипергеометрических функций, которые возникли в конформной теории поля и которые задаются интегралами рассматриваемого выше типа, отличаются от известных обобщений рядов. Для функций конформной теории поля известны интегральные представления, а ряды неизвестны. Дифференциальные уравнения также в явном виде неизвестны. Полученное уравнение может быть использовано для получения локальных разложений интеграла (1) в окрестности особых точек уравнения (2).

Литература

1. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* GG-функции и их связь с общими гипергеометрическими функциями // Успехи мат. наук. — 1997. — Т. 52, вып. 4 (316). — С. 3–48. [*Geljfand I. M., Graev M. I.* GG-funkcii i ikh svyazj s obthimi gipergeometricheskimi funkciyami // Uspekhi mat. nauk. — 1997. — T. 52, вып. 4 (316). — S. 3–48.]
2. *Heckman G., Opdam E.* Root Systems and Hypergeometric Functions I // Compositio, Math. — 1987. — Vol. 64. — Pp. 329–352.
3. *Dotsenko V. S., Fateev V. A.* Conformal Algebra and Multipoint Correlation Functions in 2D Statistical Models // Nucl.Phys. — 1984. — Vol. B240[FS 12]. — Pp. 312–348.
4. *Dotsenko V. S., Fateev V. A.* Four-Point Correlation Functions and the Operator Algebra in 2D Conformal Invariant Theories with Central Change // Nucl.Phys. — 1985. — Vol. B251[FS 13]. — Pp. 691–734.
5. Cornell Universite Library. — `http://lanl.arxiv.org/abs/1001.0563v2l`.
6. Cornell Universite Library. — `http://lanl.arxiv.org/abs/cond-mat/9602084v1`.
7. *Mimachi K.* Connection Matrices Associated with the Generalized Hypergeometric Function // Funkcialqj Ekvacioj. — 2008. — Vol. 51. — Pp. 107–133.
8. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1974. — Т. 1, 295 с. [*Beyjtman G., Ehrdeyji A.* Vihsshie transcendentnihe funkcii. — M.: Nauka, 1974. — T. 1, 295 s.]
9. *Luque J. G., Thibon J. Y.* Hyperdeterminantal Calculations of Selberg's and Aomoto's Integrals // Molecular Physics. — 2006. — Vol. 102. — Pp. 1351–1359.

UDC 517.588

Research of Analytical Function of the Conformal Field Theory

N. I. Vishnevskaya

Physics and Mathematics Department
Moscow State Socially Humanitarian Institute
30, Zelenaya str., Kolomna, Russia, 140410

The integral of hypergeometric type is considered. This integral is met in the conformal field theory. The ordinary linear differential equation is received which decision is the studied integral.

Key words and phrases: correlation functions, correlator, hypergeometric function.