УДК 519.632.4

Граничный метод взвешенных невязок с разрывными базисными функциями для высокоточного решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона

О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева

Лаборатория информационных технологий
Объединённый институт ядерных исследований
Россия, 141980, Московская область, Дубна

В настоящей работе развивается метод наименьших квадратов с Т-элементами для решения линейных краевых задач с уравнениями Лапласа и Пуассона. В этом подходе предлагается использовать ранее разработанные авторами разрывные базисные функции высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств. Преимуществом данного алгоритма по сравнению со стандартным методом Галёркина является то, что он позволяет в процессе адаптивного решения экономично сгущать сетку и при этом использовать разную степень аппроксимации решения на каждой ячейке разбиения расчётной области. В отличие от метода Галёркина с разрывными базисными функциями, здесь не требуется задание параметра штрафа, а матрица дискретизованной задачи также является симметричной и положительно определённой. Приводятся примеры расчётов с помощью схем, обеспечивающих компьютерную точность решения краевых задач для многочленов до седьмой степени включительно. В трёхмерном случае продемонстрирована $h-p$ сходимость приближённого решения к точному.

Ключевые слова: граничный метод взвешенных невязок, разрывные базисные функции, Т-элементы, высокая точность, уравнение Лапласа, уравнение Пуассона.

1. Введение

В некоторых практических задачах, например, при моделировании магнитов ускорителей [1] и магнитных спектрометров экспериментальной физики [2] требуется высокая точность расчётов. Причём часто особенностью таких задач является непростая геометрия расчётной области и сложное поведение решения с большими градиентами. Необходимость применения адаптивных подходов и параллельных вычислений в подобных случаях приводит к использованию специальных алгоритмов, таких, например, как метод Галёркина с разрывными базисными функциями или метод наименьших квадратов с Т-элементами. Среди множества публикаций по первому классу методов укажем работы [3–5], которые связаны с подходами, приводящими к решению систем с симметричными матрицами. Однако в [4, 5] требуется задание параметра штрафа, а в [3] используются тригонометрический базис и метод множителей Лагранжа.

В методе наименьших квадратов с Т-элементами [6–8] параметр штрафа отсутствует. В работе развивается именно этот подход путём включения алгоритмов построения базисных функций высокого порядка аппроксимации из специальных функциональных пространств, разработанных авторами в [9, 10]. Он также приводит к решению систем с симметричными и положительно определёнными матрицами, но, в отличие от метода SIPG [5], их порядок меньше на величину $N\cdot\alpha$, где N — число используемых конечных элементов, а $\alpha \geqslant 1$ — коэффициент, зависящий от степени аппроксимации высокого порядка, обеспечивающей одинаковую с указанным методом точность. При этом сохраняется возможность для эффективного адаптивного сгущения сетки и распараллеливания.

Статья поступила в редакцию 19 июня 2013 г.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 13-01-00595.
Авторы признательны Ю.П. Рыбакову и Л.А. Севастьянову за полезные обсуждения.

2. Решение смешанной краевой задачи с уравнением Лапласа с помощью разрывных гармонических базисных функций

2.1. Формулировка задачи

Рассмотрим смешанную краевую задачу в ограниченной области Ω

$$\Delta u = 0, \quad x \in \Omega, \quad u = u_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad \partial u/\partial n = u_N, \quad x \in \Gamma_N, \tag{1}$$

где u_D, u_N — заданные функции, $u_D \in L^2(\Gamma_D)$, $u_N \in L^2(\Gamma_N)$, $\partial\Omega{=}\Gamma_D{\cup}\Gamma_N$, $\Gamma_D{\cap}\Gamma_N = \varnothing$, $\Gamma_D \neq \varnothing$. Пусть P_h — регулярное разбиение [11] области Ω с максимальным диаметром ячеек h:

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{N(P_h)} \Omega_k, \quad \Omega_k{\cap}\Omega_l = \varnothing, \quad k \neq l.$$

Обозначим через Γ_{int} внутреннюю границу между ячейками:

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{\Omega_l,\Omega_k\subset P_h} \Gamma_{lk}, \quad \Gamma_{lk} = \partial\Omega_l{\cap}\partial\Omega_k, \quad l \neq k,$$

а через $[\ldots]$ — оператор скачка функции на границе между двумя ячейками:

$$[u]|_{\Gamma_{lk}} = \lim_{x\to\Gamma_{lk}} u(x)|_{\Omega_l} - \lim_{x\to\Gamma_{lk}} u(x)|_{\Omega_k}, \quad l \neq k.$$

Точное решение задачи (1) принадлежит пространству гармонических функций $Z(P_h)$ на разбиении P_h:

$$Z(P_h) = \{u \in C^{(1)}(\Omega) : u|_{\Omega_k} \in Z(\Omega_k), \quad \forall\Omega_k{\subset}P_h\}.$$

Приближённое решение будем искать в так называемом прерывистом пространстве гармонических функций $Z_h(P_h)$, которое определим следующим образом:

$$Z_h(P_h) = \{v^h \in L^2(\Omega) : v^h|_{\Omega_k}{\in}Z_{p_k}(\Omega_k), \quad \forall\Omega_k{\subset}P_h\},$$

где $Z_{p_k}(\Omega_k)$ — множество гармонических полиномиальных функций степени $\leq p_k$. Здесь подразумевается, что максимальная степень p_k гармонических многочленов в представлении искомой функции на разных конечных элементах может быть различна. Эта особенность имеет важное значение при адаптивном решении задачи.

Заметим, что на границах элементов приближённое решение, вообще говоря, не является гармоническим. В связи с этим введём пространство $V(P_h)$, состоящее из следов функции u на $\partial\Omega_k$:

$$V(P_h) = \{u \in L^2(\Omega) : u|_{\partial\Omega_k}{\in}W_2^1(\partial\Omega_k), \quad \forall\Omega_k{\subset}P_h\},$$

где W_2^1 — пространство Соболева.

Процесс нахождения приближённого решения сводится к двум этапам. Сначала решим задачу на границе $\partial\Omega{\cup}\Gamma_{int}$, в пространстве $V(P_h)$, путём минимизации скачка, а затем на каждом конечном элементе с помощью интерполяционных формул [9] получим искомое решение из $Z_{p_k}(\Omega_k)$, в точности удовлетворяющее дифференциальному оператору задачи.

Сформулируем обобщённую задачу. Требуется найти функцию $u \in V(P_h)$, такую что

$$B_h(u, v) = F_h(v), \quad \forall v \in V(P_h). \tag{2}$$

Здесь билинейная форма B_h и функционал F_h имеют вид:

$$B_h(u,v) = \int\limits_{\Gamma_D} uv\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_{int}} ([u][v] + [\nabla u]\cdot[\nabla v])\mathrm{d}\sigma,$$

$$F_h(v) = \int\limits_{\Gamma_D} u_D v\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_N} u_N \frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.$$

Для формулировки соответствующей дискретизованной задачи определим пространство

$$V_h(P_h) = \{u^h \in L^2(\Omega) : u^h|_{\partial\Omega_k} \in Z_{p_k}(\partial\Omega_k), \quad \forall\Omega_k \subset P_h\},$$

в котором требуется найти функцию $u^h \in V_h(P_h)$, такую что

$$B_h(u^h, v^h) = F_h(v^h), \quad \forall v^h \in V_h(P_h). \tag{3}$$

Очевидно, что $Z_{p_k}(\partial\Omega_k) \subset W_2^1(\partial\Omega_k)$, поэтому $V_h(P_h) \subset V(P_h)$.

Для исследования свойств билинейной формы B_h в $V(P_h)$ введём норму:

$$\|u\|_V^2 = \int\limits_{\Gamma_D} u^2\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_{int}} [u]^2\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_{int}} |[\nabla u]|^2\mathrm{d}\sigma.$$

2.2. Теорема о свойствах билинейной формы и наилучшей аппроксимации

Непрерывность, галёркинская ортогональность и коэрцитивность (V-эллиптичность) билинейной формы, а также свойство наилучшей аппроксимации в пространстве V_h устанавливаются следующей теоремой.

Теорема. *Билинейная форма B_h непрерывна, обладает свойством галёркинской ортогональности и коэрцитивна (V-эллиптична). Справедливо неравенство*

$$\|u^* - u^h\|_V \leqslant \inf_{v^h \in V_h} \|u^* - v^h\|_V,$$

где $u^* \in V(P_h)$ — точное решение задачи (2) на границе $\partial\Omega \cup \Gamma_{int}$, функция $u^h \in V_h(P_h)$ — приближённое решение задачи (3).

Доказательство. Рассмотрим свойства билинейной формы B_h. Покажем, что она непрерывна, т.е. существует такая постоянная $C = \mathrm{const} > 0$, что

$$|B_h(u,v)| \leqslant C\cdot\|u\|_V\|v\|_V, \quad \forall u,v \in V(P_h).$$

Действительно,

$$|B_h(u,v)| \leqslant \left|\int\limits_{\Gamma_D} uv\mathrm{d}\sigma\right| + \left|\int\limits_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma\right| + \left|\int\limits_{\Gamma_{int}} [u][v]\mathrm{d}\sigma\right| + \left|\int\limits_{\Gamma_{int}} [\nabla u]\cdot[\nabla v]\mathrm{d}\sigma\right|.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, получим:

$$|B_h(u,v)| \leqslant \left(\int\limits_{\Gamma_D} u^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\Gamma_D} v^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{\Gamma_N} (\frac{\partial u}{\partial n})^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int\limits_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2 \mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left(\int\limits_{\Gamma_{int}}[u]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{\Gamma_{int}}[v]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}+\sum_{l=1}^{3}\left(\int\limits_{\Gamma_{int}}\left[\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\int\limits_{\Gamma_{int}}[\frac{\partial v}{\partial x_l}]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int\limits_{\Gamma_D}u^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}[u]^2\mathrm{d}\sigma+\sum_{l=1}^{3}\int\limits_{\Gamma_{int}}\left[\frac{\partial u}{\partial x_l}\right]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\int\limits_{\Gamma_D}v^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}[v]^2\mathrm{d}\sigma+\sum_{l=1}^{3}\int\limits_{\Gamma_{int}}\left[\frac{\partial v}{\partial x_l}\right]^2\mathrm{d}\sigma\right)^{\frac{1}{2}}=\|u\|_V\|v\|_V.$$

Билинейная форма B_h обладает свойством галёркинской ортогональности:

$$B_h(u^*-u^h,v^h)=0,\quad\forall v^h\in V_h(P_h),$$

где u^*-u^h — погрешность приближения. В самом деле,

$$B_h(u^*-u^h,v^h)=\int\limits_{\Gamma_D}(u^*-u^h)v^h\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial(u^*-u^h)}{\partial n}\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}[u^*-u^h][v^h]\mathrm{d}\sigma+$$

$$+\int\limits_{\Gamma_{int}}[\nabla(u^*-u^h)]\cdot[\nabla v^h]\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Gamma_D}u^*v^h\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Gamma_D}u^hv^h\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial u^*}{\partial n}\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial u^h}{\partial n}\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}([u^*][v^h]+[\nabla u^*]\cdot[\nabla v^h])\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Gamma_{int}}([u^h][v^h]+[\nabla u^h]\cdot[\nabla v^h])\mathrm{d}\sigma.$$

Так как $[u^*]=0$, $[\nabla u^*]=0$, $u^*|_{\Gamma_D}=u_D$ и $u^*|_{\Gamma_N}=u_N$, то

$$B_h(u^*-u^h,v^h)=\int\limits_{\Gamma_D}u_Dv^h\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Gamma_D}u^hv^h\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}u_N\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\int\limits_{\Gamma_N}\frac{\partial u^h}{\partial n}\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-$$

$$-\int\limits_{\Gamma_{int}}([u^h][v^h]+[\nabla u^h]\cdot[\nabla v^h])\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{\Gamma_D}u_Dv^h\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}u_N\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-B_h(u^h,v^h)=$$

$$=F_h(v^h)-B_h(u^h,v^h)=0.$$

Далее проверим, что билинейная форма B_h коэрцитивна (V — эллиптична), а именно, существует такая постоянная $\gamma=\mathrm{const}>0$, что

$$B_h(u,u)\geqslant\gamma\|u\|_V^2,\quad\forall u\in V(P_h).$$

Имеем

$$B_h(u,u)=\int\limits_{\Gamma_d}u^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_N}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}[u]^2\mathrm{d}\sigma+\int\limits_{\Gamma_{int}}|[\nabla u]|^2\mathrm{d}\sigma=\|u\|_V^2$$

по определению нормы.

Учитывая свойства билинейной формы, докажем оценку погрешности приближения. Из коэрцитивности следует, что

$$\|u^* - u^h\|_V^2 = B_h(u^* - u^h, u^* - u^h) = B_h(u^* - u^h, u^* - v^h) + B_h(u^* - u^h, v^h - u^h).$$

Из галёркинской ортогональности билинейной формы получаем

$$B_h(u^* - u^h, v^h - u^h) = 0, \quad \|u^* - u^h\|_V^2 = B_h(u^* - u^h, u^* - v^h).$$

Ввиду непрерывности билинейной формы, имеем

$$B_h(u^* - u^h, u^* - v^h) \leqslant \|u^* - u^h\|_V \|u^* - v^h\|_V.$$

Следовательно, $\|u^* - u^h\|_V \leqslant \|u^* - v^h\|_V$. Так как v^h — любая функция из пространства $V_h(P_h)$, то

$$\|u^* - u^h\|_V \leqslant \inf_{v^h \in V_h} \|u^* - v^h\|_V.$$

Теорема доказана. □

Заметим, что из V-эллиптичности B_h в $V(P_h)$ следует единственность решения задачи (2), а также однозначная разрешимость задачи (3).

2.3. Алгоритм решения

На границе решается система уравнений с весовой функцией v^h

$$\int_{\Gamma_D} (u^h - u_D) v^h \mathrm{d}\sigma + \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial u^h}{\partial n} - u_N \right) \frac{\partial v^h}{\partial n} \mathrm{d}\sigma + \int_{\Gamma_{int}} \{[u^h][v^h] + [\nabla u^h] \cdot [\nabla v^h]\} \mathrm{d}\sigma = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$u^h|_{\partial\Omega_k}(x) = \sum_{i=1}^{m(p_k)} c_i^{(k)} f_i^{(k)}(\xi),$$

где $f_i^{(k)}(\xi)$ — гармонический многочлен, который вычисляется по рекуррентной формуле [12], $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — точка в локальной системе координат, $\xi_n = (x_n - y_n^{(k)})/r^{(k)}$, $y_n^{(k)}$ — координата центра элемента Ω_k, $n = 1, 2, 3$, $r^{(k)}$ — диаметр Ω_k; $m(p_k)$ — число многочленов степени $\leqslant p_k$; $c_i^{(k)}$ — неизвестный коэффициент. В качестве весовой функции $v^h|_{\partial\Omega_k}$ последовательно выбираем $f_j^{(k)}|_{\partial\Omega_k}$, $j = 1, \ldots, m(p_k)$.

Отметим, что для нахождения $u^h|_{\partial\Omega_k}$ можно также использовать разложение по функциям $N_i^{(k)}(\xi)$, $i = 1, \ldots, m(p_k)$. Эти функции имеют вид [9]:

$$N_i^{(k)}(\xi) = \sum_{j=1}^{m(p_k)} \alpha_j^{(k,i)} f_j^{(k)}(\xi),$$

где коэффициенты $\alpha_j^{(k,i)}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$ являются решением системы

$$N_i^{(k)}(\xi^{(n)}) = \delta_{in}, \quad i = 1, \ldots, m; \quad n = 1, \ldots, m.$$

Здесь $\xi^{(n)} \in \omega_h(\partial\Omega_k)$ — множество равномерно расположенных узлов на $\partial\Omega_k$, которые выбираются таким образом, чтобы система была разрешима. Весовыми функциями в этом случае будут $N_j^{(k)}|_{\partial\Omega_k}$, $j = 1, \ldots, m(p_k)$.

3. Алгоритм решения смешанной краевой задачи с уравнением Пуассона с помощью разрывных базисных функций

Рассмотрим смешанную краевую задачу с уравнением Пуассона

$$\Delta u = \rho, \quad x \in \Omega, \quad u = u_D, \quad x \in \Gamma_D, \quad \partial u/\partial n = u_N, \quad x \in \Gamma_N, \tag{5}$$

где ρ, u_D, u_N — заданные функции, $\rho \in L^2(\Omega)$, $u_D \in L^2(\Gamma_D)$, $u_N \in L^2(\Gamma_N)$, $\partial\Omega{=}\Gamma_D{\cup}\Gamma_N$, $\Gamma_D{\cap}\Gamma_N = \varnothing$, $\Gamma_D \neq \varnothing$. Решение дискретизованной задачи ищется в пространстве

$$\widetilde{V}_h(P_h) = \{u^h \in L^2(\Omega) : u^h|_{\partial\Omega_k}{\in}V_{p_k}(\partial\Omega_k), \quad \forall\Omega_k{\subset}P_h\},$$

где $V_{p_k}(\partial\Omega_k)$ — множество следов многочленов вида $h^{(k)}(\xi) = \xi_1^{n_1}{\cdot}\xi_2^{n_2}{\cdot}\xi_3^{n_3}$, $0 \leqslant n_1 + n_2 + n_3 \leqslant p_k$. Очевидно, что $V_{p_k}(\partial\Omega_k) \subset W_2^1(\partial\Omega_k)$, поэтому $\widetilde{V}_h(P_h) \subset V(P_h)$.

Предположим, что функция ρ на каждом элементе Ω_k с высокой точностью приближается многочленом $\sum\limits_{i=1}^{M_k} \alpha_i^{(k)} h_i^{(k)}(\xi)$ с некоторыми коэффициентами $\alpha_i^{(k)}$. Представим искомое решение в виде суммы

$$u^h|_{\Omega_k} = \tilde{u}^h|_{\Omega_k} + g|_{\Omega_k},$$

где $\tilde{u}^h$ — гармоническая функция, а g — частное решение уравнения (5), то есть $(\Delta g)|_{\Omega_k} = \rho$, в каждой $\Omega_k{\subset}P_h$. Здесь

$$\tilde{u}^h|_{\Omega_k} = \sum_{i=1}^{m(p_k)} c_i^{(k)} f_i^{(k)}(\xi), \quad g|_{\Omega_k} = \sum_{i=1}^{M_k} d_i^{(k)} s_i^{(k)}(\xi),$$

где $c_i^{(k)}$, $d_i^{(k)}$ — неизвестные коэффициенты. Многочлены $s_i^{(k)}$ удовлетворяют уравнениям

$$\Delta s_i^{(k)} = h_i^{(k)}, \quad i = 1, \ldots, M_k$$

и приведены в табл. 1 и табл. 2. Неизвестные $d_i^{(k)} (i = 1, \ldots, M_k)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{M_k} d_i^{(k)} \Delta s_i^{(k)}(\xi^{(p)}) = \rho(x^{(p)}), \quad x^{(p)} \in \omega_h(\partial\Omega_k); \\ \sum\limits_{i=1}^{M_k} d_i^{(k)} \Delta s_i^{(k)}(\xi^{(q)}) = \rho(x^{(q)}), \quad x^{(q)} \in \omega_h(\Omega_k). \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $\omega_h(\partial\Omega_k)$ — множество узлов на $\partial\Omega_k$, необходимое для численного интегрирования в формуле (4), а $\omega_h(\Omega_k)$ — множество, состоящее из равномерно расположенных в Ω_k узлов, которые выбираются таким образом, чтобы система (6) была однозначно разрешима. Общее число узлов в двух множествах равно M_k.

После подстановки найденной функции g в (4) имеем:

$$\int\limits_{\Gamma_D} \tilde{u}^h v^h \mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_N} \frac{\partial \tilde{u}^h}{\partial n}\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma + \int\limits_{\Gamma_{int}} \{[\tilde{u}^h][v^h] + [\nabla \tilde{u}^h]\cdot[\nabla v^h]\}\mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\Gamma_D} (u_D - g)v^h \mathrm{d}\sigma +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_N} \left(u_N - \frac{\partial g}{\partial n}\right)\frac{\partial v^h}{\partial n}\mathrm{d}\sigma - \int\limits_{\Gamma_{int}} \{[g][v^h] + [\nabla g]\cdot[\nabla v^h]\}\mathrm{d}\sigma.$$

Таблица 1

Многочлены s_i в двумерном случае

i	Δs_i	s_i	i	Δs_i	s_i
1	1	$(\xi_1^2+\xi_2^2)/4$	11	ξ_1^4	$(\xi_1^6+15\xi_1^4\xi_2^2-15\xi_1^2\xi_2^4+\xi_2^6)/60$
2	ξ_1	$(\xi_1^3+3\xi_1\xi_2^2)/12$	12	$\xi_1^3\xi_2$	$(3\xi_1^5\xi_2+10\xi_1^3\xi_2^3-3\xi_1\xi_2^5)/120$
3	ξ_2	$(\xi_2^3+3\xi_1^2\xi_2)/12$	13	$\xi_1^2\xi_2^2$	$(-\xi_1^6+15\xi_1^4\xi_2^2+15\xi_1^2\xi_2^4-\xi_2^6)/360$
4	ξ_1^2	$(\xi_1^4+6\xi_1^2\xi_2^2-\xi_2^4)/24$	14	$\xi_1\xi_2^3$	$(-3\xi_1^5\xi_2+10\xi_1^3\xi_2^3+3\xi_1\xi_2^5)/120$
5	$\xi_1\xi_2$	$(\xi_1^3\xi_2+\xi_1\xi_2^3)/12$	15	ξ_2^4	$(\xi_1^6-15\xi_1^4\xi_2^2+15\xi_1^2\xi_2^4+\xi_2^6)/60$
6	ξ_2^2	$(\xi_2^4+6\xi_1^2\xi_2^2-\xi_1^4)/24$	16	ξ_1^5	$(\xi_1^7+21\xi_1^5\xi_2^2-35\xi_1^3\xi_2^4+7\xi_1\xi_2^6)/84$
7	ξ_1^3	$(\xi_1^5+10\xi_1^3\xi_2^2-5\xi_1\xi_2^4)/40$	17	$\xi_1^4\xi_2$	$(7\xi_1^6\xi_2+35\xi_1^4\xi_2^3-21\xi_1^2\xi_2^5+\xi_2^7)/420$
8	$\xi_1^2\xi_2$	$(5\xi_1^4\xi_2+10\xi_1^2\xi_2^3-\xi_2^5)/120$	18	$\xi_1^3\xi_2^2$	$(-\xi_1^7+21\xi_1^5\xi_2^2+35\xi_1^3\xi_2^4-7\xi_1\xi_2^6)/840$
9	$\xi_1\xi_2^2$	$(5\xi_1\xi_2^4+10\xi_1^3\xi_2^2-\xi_1^5)/120$	19	$\xi_1^2\xi_2^3$	$(-7\xi_1^6\xi_2+35\xi_1^4\xi_2^3+21\xi_1^2\xi_2^5-\xi_2^7)/840$
10	ξ_2^3	$(\xi_2^5+10\xi_1^2\xi_2^3-5\xi_1^4\xi_2)/40$	20	$\xi_1\xi_2^4$	$(\xi_1^7-21\xi_1^5\xi_2^2+35\xi_1^3\xi_2^4+7\xi_1\xi_2^6)/420$
			21	ξ_2^5	$(7\xi_1^6\xi_2-35\xi_1^4\xi_2^3+21\xi_1^2\xi_2^5+\xi_2^7)/84$

Таблица 2

Многочлены s_i в трёхмерном случае

i	Δs_i	s_i	i	Δs_i	s_i
1	1	$(\xi_1^2+\xi_2^2+2\xi_3^2)/8$	11	ξ_1^3	$(\xi_1^5-\xi_1\xi_2^4-8\xi_1\xi_3^4+12\xi_1^3\xi_3^2+$ $+12\xi_1\xi_2^2\xi_3^2-2\xi_1^3\xi_2^2)/40$
2	ξ_1	$(\xi_1^3+\xi_1\xi_2^2+4\xi_3^2\xi_1)/16$	12	ξ_2^3	$(-8\xi_2\xi_1^4-\xi_2\xi_1^4+\xi_2^5+12\xi_1^2\xi_2\xi_3^2+$ $+12\xi_2^3\xi_3^2-12\xi_1^2\xi_2^3)/40$
3	ξ_2	$(\xi_1^2\xi_2+\xi_2^3+4\xi_3^2\xi_2)/16$	13	ξ_3^3	$(8\xi_3^5-15\xi_1^4\xi_3-15\xi_2^4\xi_3+40\xi_1^2\xi_3^3+$ $+40\xi_3^3\xi_2^2-30\xi_1^2\xi_2^2\xi_3)/320$
4	ξ_3	$(3\xi_1^2\xi_3+3\xi_2^2\xi_3+2\xi_3^3)/24$	14	$\xi_1^2\xi_2$	$(-8\xi_3^4\xi_2+\xi_1^4\xi_2-\xi_2^5+12\xi_1^2\xi_2\xi_3^2+$ $+12\xi_2^3\xi_3^2-2\xi_1^2\xi_2^3)/24$
5	ξ_1^2	$(3\xi_1^4-3\xi_2^4-8\xi_3^4-6\xi_1^2\xi_2^2+$ $+24\xi_1^2\xi_3^2+24\xi_2^2\xi_3^2)/72$	15	$\xi_1\xi_2^2$	$(-8\xi_1^3\xi_3^2+\xi_1^5-2\xi_1^3\xi_2^2+$ $+24\xi_1\xi_2^2\xi_3^2+3\xi_1\xi_2^4)/72$
6	ξ_2^2	$(-3\xi_1^4+3\xi_2^4-8\xi_3^4-6\xi_1^2\xi_2^2+$ $+24\xi_1^2\xi_3^2+24\xi_2^2\xi_3^2)/71$	16	$\xi_1\xi_3^2$	$(8\xi_1\xi_3^4-\xi_1^5-\xi_1\xi_2^4+12\xi_1^3\xi_3^2+$ $+12\xi_1\xi_2^2\xi_3^2-2\xi_1^3\xi_2^2)/192$
7	ξ_3^2	$(-3\xi_1^4-3\xi_2^4+8\xi_3^4-6\xi_1^2\xi_2^2+$ $+24\xi_1^2\xi_3^2+24\xi_2^2\xi_3^2)/192$	17	$\xi_1^2\xi_3$	$(-8\xi_3^5+15\xi_1^4\xi_3-15\xi_2^4\xi_3+$ $+40\xi_1^2\xi_3^3+40\xi_2^2\xi_3^3-30\xi_1^2\xi_2^2\xi_3)/360$
8	$\xi_1\xi_2$	$(\xi_1^3\xi_2+\xi_1\xi_2^3+6\xi_1\xi_2\xi_3^2)/24$	18	$\xi_2^2\xi_3$	$(-8\xi_3^5-15\xi_1^4\xi_3+15\xi_2^4\xi_3+$ $+40\xi_1^2\xi_3^3+40\xi_2^2\xi_3^3-30\xi_1^2\xi_2^2\xi_3)/360$
9	$\xi_1\xi_3$	$(3\xi_3\xi_1^3+3\xi_1\xi_2^2\xi_3+$ $+4\xi_3^3\xi_1)/48$	19	$\xi_2\xi_3^2$	$(8\xi_2\xi_3^4-\xi_1^4\xi_2-\xi_2^5+12\xi_1^2\xi_2\xi_3^2+$ $+12\xi_2^3\xi_3^2-2\xi_1^2\xi_2^3)/192$
10	$\xi_2\xi_3$	$(3\xi_2^3\xi_3+3\xi_1^2\xi_2\xi_3+$ $+4\xi_2\xi_3^3)/48$	20	$\xi_1\xi_2\xi_3$	$(2\xi_1\xi_2\xi_3^3+\xi_1^3\xi_2\xi_3-\xi_1\xi_2^3\xi_3)/12$

В качестве весовой функции $v^h|_{\partial\Omega_k}$ последовательно выбираем $f_j^{(k)}|_{\partial\Omega_k}$, $j = 1,\ldots,m(p_k)$. Поскольку полученная система уравнений отличается от системы (4) только правой частью, то очевидно, что и в этом случае все утверждения **теоремы** справедливы.

Отметим, что коэффициенты $d_i^{(k)}(i = 1, \ldots, M_k)$ можно находить не из системы (6), а из условия среднеквадратичного приближения:

$$\sum_{i=0}^{M_k} d_i^{(k)} \int\limits_{\Omega_k} \Delta s_i^{(k)} \Delta s_j^{(k)} \mathrm{d}\Omega = \int\limits_{\Omega_k} \rho \Delta s_j^{(k)} \mathrm{d}\Omega, \quad j = 1, \ldots, M_k.$$

4. Примеры расчётов

Пример 1. Для проверки предлагаемых подходов решим смешанную краевую задачу с уравнением Лапласа в области $\Omega = (0, 50)^2$ с условиями $u_N = \partial u^*/\partial n$ на части границы, где $x_2 = 0$, и $u_D = u^*$ на остальной части границы. В качестве u^* выберем сумму гармонических многочленов в виде $1 + \sum\limits_{n=1}^{26} (r/50)^n (\cos(n\varphi) - \sin(n\varphi))$, где (r, φ) — координаты в полярной системе. В соответствии с алгоритмом из раздела 2.3 область Ω разбивается на два прямоугольных элемента, в каждом из которых задаётся по 27 неизвестных коэффициентов, при этом порядок системы уравнений $n = 54$. Система решается прямым методом, а затем делается пересчёт во внутренние точки элементов. В результате на сетках, состоящих из $101{\times}101$ точек в каждом элементе, наибольшая относительная погрешность $\delta = 0.3553{\cdot}10^{-12}$.

Для сравнения решим эту задачу другим способом, например, с помощью метода SIPG [5] с коэффициентом штрафа равным 20. Разобьём Ω на 25 квадратных элементов и воспользуемся схемой, обеспечивающей решение с компьютерной точностью на двумерных многочленах до 7-й степени включительно. Система уравнений имеет порядок $n = 900$ и решается прямым методом. После этого приближённое решение вычисляется на сетке, состоящей из $11{\times}11$ точек в каждом элементе. В этом случае $\delta = 0.1159{\cdot}10^{-5}$.

Далее воспользуемся стандартным методом конечных элементов с 8-узловыми прямоугольными элементами, базисные функции которых обеспечивают точную интерполяцию на многочленах [11] вида $\alpha_{ij} x_1^i x_2^j + \alpha_{21} x_1^2 x_2 + \alpha_{12} x_1 x_2^2$, где $i + j \leqslant 2$, а α_{ij} — заданные коэффициенты. Область Ω разбивается уже на 6400 одинаковых квадратных элементов, $n = 19521$. Система уравнений решается методом неполного разложения Холесского с сопряжёнными градиентами [13]. В результате получаем $\delta = 0.1273{\cdot}10^{-5}$.

Пример 2. Пусть задано уравнение Пуассона в области $\Omega = (0, 1)^2$ с краевым условием $u_D = u^* = \sin(\pi x_1/2)\sin(\pi x_2/2)$ и $\rho = \Delta u^*$. Для решения задачи используем алгоритм из раздела 3. Разобьём Ω на 4 квадратных элемента, на каждом зададим $m = 15$, $M = 21$. Порядок полученной системы $n = 60$. После нахождения неизвестных коэффициентов приближённое решение вычислим в каждом элементе на сетке, состоящей из $11{\times}11$ точек. Максимальная погрешность в этих точках $\delta = 0.2737{\cdot}10^{-6}$. Заметим, что если в качестве u^* взять любой двумерный многочлен до 7-й степени включительно, то заданные значения параметров m и M обеспечивают решение с компьютерной точностью.

Решим эту же задачу с помощью метода SIPG с коэффициентом штрафа, равным 20, на том же разбиении и в тех же узлах сетки. В этом случае $n = 144$, а $\delta = 0.6837{\cdot}10^{-6}$ получено при использовании схемы, обеспечивающей компьютерную точность решения для двумерных многочленов до 7-й степени включительно.

При использовании стандартного метода конечных элементов с 8 узловыми прямоугольными элементами потребовалось разбиение Ω на 400 одинаковых квадратных элементов для того, чтобы максимальная погрешность на сетке, содержащей 1281 узел, составила $0.3718{\cdot}10^{-6}$.

Пример 3. При построении трёхмерной карты магнитного поля по данным измерений его компонент на границе рассматриваемой области [14], в частности, необходимо решать задачу Дирихле для векторного уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad x \in \Omega; \quad \mathbf{u} = \mathbf{u_D}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Решим эту задачу для $\Omega = (0,15)^2 \times (20,35)$ и $\mathbf{u_D} = \mathbf{B^S}$, где $\mathbf{B^S}$- магнитное поле двух соосных катушек

$$\mathbf{B^S}(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_S} \mathbf{J} \times \nabla \frac{1}{|x-y|} \mathrm{d}\Omega_y.$$

Здесь $|x-y|$ — расстояние между точками x и y, $\mathbf{J}(x) = (\pi \cdot 1274/37.7)\mathbf{i}_\varphi$, $x \in \Omega_S$, где $\Omega_S = {\Omega_S}^{(1)} \cup {\Omega_S}^{(2)}$, ${\Omega_S}^{(k)} = \{x = (r, \varphi, z) : 9.25 \leqslant r \leqslant 22.25; \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \quad z_k \leqslant z \leqslant z_k + \sigma\}$, $k = 1, 2; z_1 = 43.375; z_2 = 47.425; \sigma = 2.9$. С использованием формул двукратного аналитического интегрирования [15] $\mathbf{B^S}$ вычисляется в Ω с высокой точностью. Рассматриваемая задача сводится к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа относительно каждой компоненты вектора в отдельности. В табл. 3 представлены результаты $h - p$ сходимости приближённого значения основной компоненты поля B_z^S, полученной с помощью алгоритма из раздела 2. Как следует из таблицы, для достижения примерно одинаковой точности увеличение p предпочтительнее увеличения числа элементов, так как приводит к решению алгебраических систем меньшего порядка. Аналогичные результаты получены и для остальных компонент поля. Системы уравнений решались методом неполного разложения Холесского с сопряжёнными градиентами.

Таблица 3

$h - p$ **сходимость основной компоненты поля**

Число элементов	Максимальная степень гармонических многочленов					
	p=5		p=6		p=7	
	n	δ	n	δ	n	δ
2×2×2	288	0.1681E-02	392	0.3303E-03	512	0.9419E-04
3×3×3	972	0.1511E-03	1323	0.2519E-04	1728	0.7694E-05
4×4×4	2304	0.2630E-04	3136	0.4380E-05	4096	0.1028E-05
5×5×5	4500	0.7688E-05	6125	0.1181E-05	8000	0.2724E-06

5. Заключение

В работе развивается численный метод для высокоточного решения линейных краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона, основой которого является метод наименьших квадратов с Т-элементами, а для вычисления базисных функций используются ранее разработанные авторами алгоритмы рекуррентного вычисления гармонических многочленов высоких степеней для двумерного и трёхмерного случаев. При адаптивном подходе метод позволяет эффективно сгущать сетку, используя разную степень аппроксимации искомого решения на ячейках разбиения расчётной области. Кроме того, в отличие от SIPG, не требуется задавать параметр штрафа, в то же время матрица системы дискретизованных уравнений остаётся симметричной и положительно определённой, а порядок системы меньше, как минимум, на число используемых для расчёта ячеек, если степень многочленов равна двум и выше. В случае, когда решается краевая задача с уравнением Лапласа, приближённое решение точно удовлетворяет этому уравнению в каждой ячейке.

В работе доказана непрерывность, галёркинская ортогональность и $V-$ эллиптичность билинейной формы метода, а также свойство наилучшей аппроксимации в пространстве V_h.

Приводятся примеры расчётов с помощью схем, обеспечивающих компьютерную точность решения краевых задач для многочленов до седьмой степени включительно. В трёхмерном случае продемонстрирована $h-p$ сходимость приближённого решения к точному.

Литература

1. The Large Hadron Collider / Ed. by P. Lefèvre, T. Pettersson. — CERN/AC/95-05 (LHC), 1995. — Pp. 89–99.
2. Численное решение задачи формирования однородного магнитного поля за счёт изменения занимаемого ферромагнетиком объёма для некоторых магнитных систем экспериментальной физики / Е. П. Жидков, В. В. Рыльцов, О. И. Юлдашев, М. Б. Юлдашева // Вестник РУДН. Серия «Физика». — 2004. — № 12. — С. 17–25. [Numerical Solving the Problem of Homogeneous Magnetic Field Formation by Varying Ferromagnetic Volume for Some Magnetic Systems in Experimental Physics / E. P. Zhidkov, V. V. Ryltsov, O. I. Yuldashev, M. B. Yuldasheva // Bulletin of Peoples' Friedship University of Russia. Series "Physics". — 2004. — No 12. — P. 17–26.]
3. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1989. [Marchuk G. I. Methods of Numerical Mathematics. — Moscow: Nauka, 1989.]
4. Unified Analysis of Discontinuous Galerkin Methods for Elliptic Problems / D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. Marini // SIAM J. Numer. Anal. — 2002. — Vol. 39, No 5. — Pp. 1749–1779.
5. *Epshteyn Y., Rivière B.* Estimation of Penalty Parameters for Symmetric Interior Penalty Galerkin Methods // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2007. — No 206. — Pp. 843–872.
6. *Jirousek J., Wróblewski A.* T-elements: State of the Art and Future Trends // Archives of Computational Methods in Engineering. — 1996. — Vol. 3. — Pp. 323–434.
7. *Bochev P. B., Gunzburger M. D.* Least-Squares Finite Element Methods. — New York: Springer, 2009.
8. *Qin Q.-H.* Trefftz Finite Element Method and Its Applications // Appl. Mech. Rev. — 2005. — Vol. 58, No 5. — Pp. 316–337.
9. *Юлдашева О. И. Ю. и. М. Б.* Об одном классе конечных элементов с гармоническими базисными функциями // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 2(2). — С. 45–49. [Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B. About a Class of Finite Elements with Harmonic Basis Functions // Bulletin of Peoples' Friedship University of Russia. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2010. — No 2(2). — P. 45–49.]
10. *Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B.* High-Order Vector Nodal Finite Elements with Harmonic, Irrotational and Solenoidal Basis Functions // Bulletin of Peoples' Friendship University of Russin. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2013. — No 1. — Pp. 90–98.
11. *Сьярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980. [Ciarlet P. The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Moscow: Mir, 1980.]
12. *Yuldashev O. I., Yuldasheva M. B.* 3D Finite Elements with Harmonic Basis Functions for Approximations of High Order. Preprint JINR E11-2008-104. — Dubna: JINR, 2008. — `http://www1.jinr.ru/Preprints/2008/104(E11-2008-104).pdf`.

13. *Meijerink J. A., van der Vorst H. A.* An Iterative Solution for Linear Systems of which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix // Math. Comput. — 1977. — Vol. 31. — Pp. 148–162.
14. Program Package for the Accurate Three Dimensional Reconstruction of Magnetic Fields from the Boundary Measurements / A. V. Belov, T. F. Belyakova, O. G. Filatov et al. // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. — 2003. — Vol. A513. — Pp. 448–464.
15. *Gyimesi M. et al.* Biot-Savart Integration for Bars and Arcs // IEEE Trans. on Mag. — 1993. — Vol. 29, No 6. — Pp. 2389–2391.

UDC 519.632.4

Boundary Method of Weighted Residuals with Discontinuous Basis Functions for High-Accuracy Solving Linear Boundary Value Problems with Laplace and Poisson's Equation

O. I. Yuldashev, M. B. Yuldasheva

Laboratory of Information Technologies
Joint Institute of Nuclear Research
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow Region, Russia

In the present paper the method of least squares with T-elements for solving linear boundary value problems with Laplace and Poisson's equations is developed. In this approach it is offered to use discontinuous basis functions of a high-order approximation from special functional spaces, elaborated by the authors earlier. Advantage of the algorithm in comparison with Galerkin's standard method is that, in the process of adaptive solving, it makes possible to condense economically a mesh and, moreover, to use different order of approximation of the solution on each cell of partition of calculated region. In contrast to Galerkin's method with discontinuous basis functions, a penalty parameter here is not required, and the matrix of a discretized problem also is symmetric and positively definite. Examples of calculations by means of the schemes providing computer accuracy of the solution of boundary value problems for polynomials up to seventh order inclusive are given. In a three-dimensional case $h-p$-convergence of approximate solution to the exact one is shown.

Key words and phrases: boundary method of weighted residuals, discontinuous basis functions, T-elements, high accuracy, Laplace's equation, Poisson's equation.