

---

УДК 514.88; 519.62; 519.63; 535.016; 537.87

## Моделирование методом адиабатических волноводных мод амплитудно-фазового преобразования электромагнитного поля тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга

А. Л. Севастьянов, Д. С. Кулябов, Л. А. Севастьянов

*Кафедра систем телекоммуникаций  
Российский университет дружбы народов  
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия*

Р.К. Люнеберг предложил модель трёхмерного распространения электромагнитного излучения. В. Гийемин и С. Стернберг показали, что базовые уравнения Люнеберга, являющиеся уравнениями Лагранжа, соответствуют уравнениям Гамильтона на кокасательном расслоении над трёхмерным конфигурационным пространством. Описанная модель является «близким родственником» модели адиабатических волноводных мод, предложенной авторами. В ней аналогичным образом двумерные уравнения лучей в интегрально-оптическом волноводе соответствуют уравнениям Гамильтона на четырёхмерном фазовом пространстве.

В указанной модели при построении квазиклассического решения фазовая функция находится из уравнения Гамильтона–Якоби; по начальной фазовой функции строится начальное лагранжево многообразие, которое преобразуется при помощи гамильтонова потока. До тех пор, пока возникающее при этом процессе лагранжево многообразие однозначно проектируется на конфигурационное пространство, мы находим фазовую функцию, вычисляя действие вдоль траектории.

**Ключевые слова:** уравнения Максвелла, уравнения Лагранжа, уравнения Гамильтона, интегрально-оптические волноводы, метод адиабатических волноводных мод, амплитудно-фазовое преобразование, преобразование Фурье.

### 1. Введение

Р.К. Люнеберг в своей знаменитой работе [1] предложил модель трёхмерного распространения электромагнитного излучения. Предложенная модель является «близким родственником» модели адиабатических волноводных мод, предложенной в работах [2–12]. В. Гийемин и С. Стернберг в работе [13] показали, что базовые уравнения Люнеберга, являющиеся уравнениями Лагранжа (геодезическими) на трёхмерном многообразии с метрикой  $n(\vec{r})$ , соответствуют уравнениям Гамильтона на кокасательном расслоении над трёхмерным конфигурационным пространством. Аналогичным образом, двумерные уравнения лучей в интегрально-оптическом волноводе соответствуют уравнениям Гамильтона на четырёхмерном фазовом пространстве.

Адиабатические волноводные моды распространяются вдоль двумерных лучей, а значит вдоль гамильтоновых кривых в фазовом пространстве. И лагранжевы лучи, и гамильтоновы лучи (кривые) диффеоморфны оси распространения излучения  $Oz$ , что позволяет перейти от естественного параметра эволюции к параметру  $z$ . В новом представлении конфигурационное пространство координат становится одномерным, а фазовое пространство становится двумерным. Одномерный фронт начальных координат (начальных точек семейства лучей) является лагранжевым подмногообразием в гамильтоновом (симплектическом) многообразии начальных положений-скоростей семейства гамильтоновых кривых, которое эволюционирует в трёхмерном расширенном фазовом пространстве. При этом, проходя через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга, осуществляющую «идеальное» амплитудно-фазовое преобразование в модели

---

Статья поступила в редакцию 25 июля 2013 г.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ №12-01-31434, 11-01-00278, 13-01-00595. Авторы благодарят профессоров Веницкого С.И. и Егорова А.А. за полезные обсуждения.

геометрической оптики, лагранжевы лучи фокусируются в точке фокуса на оси  $Oz$ . Соответствующие гамильтоновы лучи, сформировавшие своими начальными значениями одномерный фронт, лагранжево подмногообразие, расположенное в конфигурационном пространстве, преобразуются в ходе распространения, оставаясь при этом одномерным лагранжевым подмногообразием (хотя и искривлённым) в любой момент времени (при любом значении параметра эволюции  $z$ ), при достижении фокального значения параметра эволюции формирует одномерное лагранжево подмногообразие, расположенное в «импульсном слое» фазового пространства.

Электромагнитное поле адиабатической волноводной моды задаётся решением (по вертикальной координате  $x$ ) системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений в каждой точке семейства лучей, заданных начальными координатами  $y(z_0) \in (-R, R)$  и скоростями  $(dy/dz)(z_0) = 0$  и проходящих через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга радиуса  $R$ . Решения этих уравнений, в совокупности с решениями двумерных уравнений лучей, полностью задают эволюцию электромагнитного поля адиабатической волноводной моды при распространении через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга. Конечное распределение (заданных вдоль вертикальной координаты) шести компонент электромагнитного поля, вдоль «импульсной» координаты при фокусном значении параметра эволюции по отношению к начальному распределению тех же величин вдоль «координатной» переменной при начальном значении параметра эволюции задаёт «обобщённое амплитудно-фазовое преобразование Фурье». Оно задаётся гамильтоновыми уравнениями «бихарактеристической системы уравнений» для системы уравнений Максвелла, редуцированных с помощью метода адиабатических волноводных мод к системе уравнений с частично разделёнными переменными [3, 5, 7, 12]. При этом эволюция начальных (координатных) положений лучей в конечные (импульсные) положения лучей (с промежуточной деформацией лагранжева подмногообразия текущих положений гамильтоновых лучей) на фокусном расстоянии тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга является поворотом на  $90^\circ$ .

## 2. Распространение поляризованного электромагнитного излучения в трёхмерной изотропной среде

В своей работе [1] Р. К. Люнеберг рассматривает задачу распространения электромагнитного излучения, удовлетворяющего уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (1)$$

При рассмотрении связи дифференциальной формы записи (1) уравнений Максвелла и соответствующей интегральной формы записи уравнений Максвелла автор изучает трёхмерные гиперповерхности  $\varphi(x, y, z, t) = 0$ , образованные семействами волновых фронтов  $\varphi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) - ct = 0$  для различных последовательных значений времени  $t \geq t_0$ .

Волновые фронты формируются при распространении электромагнитных сигналов, характеризуемых скачками напряжённостей электрического  $[E] = E_2 - E_1$  и магнитного  $[H] = H_2 - H_1$  полей. Если  $E$  и  $H$  испытывают разрывы на множестве волновых фронтов  $\psi(x, y, z) - ct = 0$ , то  $\psi(x, y, z)$  является решением уравнения в частных производных

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = \varepsilon\mu = n^2. \quad (2)$$

Причём  $\varepsilon(x, y, z)$  и  $\mu(x, y, z)$  непрерывны на поверхностях волновых фронтов. Уравнение (2) поверхностей волновых фронтов в текстах по геометрической

оптике обычно называется уравнением эйконала. Векторы  $[E]$  и  $[H]$  являются касательными к волновым фронтам и ортогональны между собой [1].

Основной результат этого рассмотрения заключается в утверждении, что проблема интегрирования уравнений в частных производных первого порядка может быть редуцирована к проблеме интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, называемой характеристической системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dl} \left( n \frac{dr}{dl} \right) = \nabla n, \text{ т.е. } \frac{d}{dl} \left( n(x, y, z) \frac{d(x, y, z)^T}{dl} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T n(x, y, z). \quad (3)$$

Здесь  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ ,  $r = (x, y, z)^T$ ,  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ .

Поскольку (2) является характеристическим уравнением системы уравнений Максвелла, указанная система обыкновенных дифференциальных уравнений (3) называется бихарактеристической системой уравнений Максвелла.

### 3. Объёмные и интегрально-оптические линзы Люнеберга

Р.К. Люнеберг предложил [1] рассматривать в качестве идеального оптического прибора линзу (названную впоследствии линзой Люнеберга), состоящую из метаматериала в шаровом объёме  $r^2 \leq R^2$  с переменным по радиусу  $r \in [0, R]$  показателем преломления  $n(r) = \sqrt{2 - (r/R)^2}$ . Вне указанного шара показатель преломления равен единице:  $n(r) = 1$  при  $r^2 > R^2$ . Все лучи, выпущенные из любой точки поверхности  $r^2 = R^2$  линзы Люнеберга, уходят с поверхности параллельным пучком. Напротив, все лучи, падающие параллельным пучком на линзу Люнеберга, фокусируются в точке поверхности на противоположном краю.

Обобщённой линзой Люнеберга с нормированным фокусным расстоянием  $s > 1$  называется шар радиуса  $R$  с распределением показателя преломления  $\tilde{n}(r)$ , обеспечивающим фокусировку всех лучей падающего параллельного пучка на оси (с противоположной стороны) на фокусном расстоянии  $F = sR$  от центра линзы. Распределение  $\tilde{n}(r)$ , обеспечивающее такое свойство, удовлетворяет [14] соотношениям

$$\tilde{n}(r) = \exp[\omega(\rho, s)], \quad \text{где } \rho = r\tilde{n}(r) \quad \text{и} \quad \omega(\rho, s) = \frac{1}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\arcsin(x/s)}{(x^2 - \rho^2)^{1/2}} dx. \quad (4)$$

В природе не наблюдается образований с указанным распределением. Сформировать  $\tilde{n}(r)$ , удовлетворяющее (4), искусственным образом удаётся в микроволновой области (см., например, [15]). В оптическом диапазоне такая задача не эффективна (см. [15]), однако её интегрально-оптические аналоги (тонкоплёночные линзы Люнеберга, геодезические линзы Люнеберга и др.) значительно более просты в изготовлении. Вместо распределения показателя преломления соотношениям (4) в них удовлетворяет распределение эффективного показателя преломления  $n_{\text{эфф}}(r)$ , изменение которого формируется изменением толщины волноводного слоя в тонкоплёночной линзе Люнеберга, длиной оптического пути в геодезической линзе Люнеберга и т.п., что достигается значительно меньшими усилиями.

Рассмотрим задачу о функционировании тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга [2–4] с радиусом  $R$  и фокусным расстоянием  $F = sR$ ,

$s \geq 1$  на основе тонкоплёночного регулярного (планарного) трёхслойного волновода с параметрами  $n_s, n_f, n_c, d$ . Дополнительный волноводный слой характеризуется параметрами  $n_l$ , а также  $h(y, z) \geq 0$  при  $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$  и  $h(y, z) = 0$  при  $(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 > R^2$ .

Регулярный волновод допускает две серии эффективных показателей преломления  $n_{\text{эфф}}$ :  $\beta_0^{TE}, \beta_1^{TE}, \beta_2^{TE}, \dots$  и  $\beta_0^{TM}, \beta_1^{TM}, \beta_2^{TM}, \dots$ , называемых также коэффициентами фазового замедления волноводных мод  $TE_0, TE_1, TE_2, \dots$  и  $TM_0, TM_1, TM_2, \dots$  соответственно. Каждому из них соответствует [9] распределение эффективного показателя преломления  $n_{\text{эфф}}(r) = \beta(r)/\beta$ , удовлетворяющее соотношениям (4).

#### 4. Распространение поляризованного электромагнитного излучения в плавно нерегулярном интегрально оптическом волноводе

Распространение поляризованного электромагнитного монохроматического излучения в плавно нерегулярном интегрально оптическом волноводе описывается (методом адиабатических волноводных мод) [2–12] решениями уравнений Максвелла вида

$$\left. \begin{array}{l} \vec{E}(x, y, z, t) \\ \vec{H}(x, y, z, t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\tilde{E}}(x; y, z) \\ \vec{\tilde{H}}(x; y, z) \end{array} \right\} \frac{\exp\{i\omega t - i\varphi(y, z)\}}{\sqrt{\beta(y, z)}}, \quad (5)$$

где  $\beta_y(y, z) = \frac{1}{k_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)$ ,  $\beta_z(y, z) = \frac{1}{k_0} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ ,  $\beta(y, z) = \sqrt{\beta_y^2(y, z) + \beta_z^2(y, z)}$ ,

$$\varphi(y, z) = k_0 \int_{y_0, z_0}^{y, z} (\beta_y(\tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} + \beta_z(\tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{z}).$$

Подстановка (5) в уравнения Максвелла (1) приводит к обыкновенным дифференциальным уравнениям для двух (ведущих) компонент электромагнитного поля

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_z}{dx^2} + \chi^2 E_z &= \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial y} \left[ p_y E_z + \frac{p_z}{ik_0 \varepsilon} \frac{dH_z}{dx} \right] + \\ &+ \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial x} \left[ \frac{dE_z}{dx} - \frac{1}{ik_0 \varepsilon} \left( p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) H_z \right] - \left[ \frac{\partial (\ln \varepsilon)}{\partial x} \frac{dE_z}{dx} + \frac{\partial (\ln \varepsilon)}{\partial y} p_y E_z \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 H_z}{dx^2} + \chi^2 H_z &= \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial y} \left[ p_y H_z - \frac{p_z}{ik_0 \mu} \frac{dE_z}{dx} \right] + \\ &+ \frac{\partial (\ln \chi_z^2)}{\partial x} \left[ \frac{dH_z}{dx} + \frac{1}{ik_0 \mu} \left( p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) E_z \right] + \left[ \frac{\partial (\ln \mu)}{\partial x} \frac{dH_z}{dx} + \frac{\partial (\ln \mu)}{\partial y} p_y H_z \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

Остальные четыре компоненты электромагнитного поля волноводных мод выражаются через  $E_z, H_z$  и  $\frac{dE_z}{dx}, \frac{dH_z}{dx}$  следующим образом

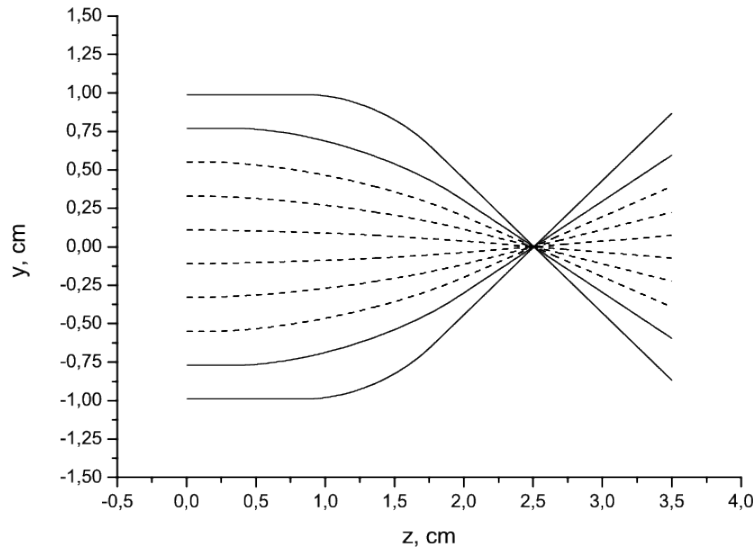
$$E_x = \frac{1}{\chi_z^2} \left[ p_z \frac{dE_z}{dx} - ik_0 \mu p_y H_z \right], \quad H_x = \frac{1}{\chi_z^2} \left[ p_z \frac{dH_z}{dx} + ik_0 \varepsilon p_y E_z \right], \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{\chi_z^2} \left[ \left( p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) E_z + ik_0 \mu \frac{dH_z}{dx} \right], \\ H_y &= \frac{1}{\chi_z^2} \left[ \left( p_z p_y + \frac{\partial p_y}{\partial z} \right) H_z - ik_0 \varepsilon \frac{dE_z}{dx} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь (для упрощения записи) использованы обозначения:

$$\begin{aligned} p_y &= -ik_0 \beta_y - \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{1}{2\beta}, \quad p_z = -ik_0 \beta_z - \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{1}{2\beta}, \quad \chi_z^2 = \left( \varepsilon \mu k_0^2 + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z} \right), \\ \chi^2 &= \chi_z^2 + p_y^2 + \frac{\partial p_y}{\partial y} \equiv \left( \varepsilon \mu k_0^2 + p_z^2 + \frac{\partial p_z}{\partial z} + p_y^2 + \frac{\partial p_y}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Модель адиабатических волноводных мод (5) предоставляет нам описание распространения электромагнитного излучения в плавно нерегулярном интегрально оптическом волноводе, формально эквивалентное описанию трёхмерного распространения, обоснованного в работах [1, 13, 16, 17]. Опишем подробнее «двумерный аналог» модели гамильтоновой оптики (рис. 1), предложенной в [1, 13, 17].



**Рис. 1. Семейство Лагранжевых лучей, прошедших через ТОВЛ Люнеберга радиуса  $R = 1.0$  см с фокусным расстоянием  $F = 1.5R$**

Двумерные волновые фронты описываются соотношениями  $\omega t - \varphi(y, z) = \text{const}$ . Иными словами, функция  $\psi(y, z) = \varphi(y, z)/k_0$ , описывающая поверхности  $\psi(y, z) - ct = \text{const}$ , удовлетворяет «двумерному характеристическому уравнению»

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \beta^2(y, z) \equiv \varepsilon \mu - \frac{\chi^2}{k_0^2}. \quad (10)$$

Семейство «двумерных лучей», ортогональных двумерным волновым фронтам, описывается бихарактеристическим уравнением

$$\frac{d}{ds} \left( \beta(y, z) \frac{d(y, z)^T}{ds} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)^T \beta(y, z) \quad (11)$$

где  $ds^2 = dy^2 + dz^2$  задаёт двумерную элементарную длину двумерного вектора  $(dy, dz)^T$ .

Обозначим через  $p_y, p_z$  координаты, дуальные к  $y, z$ , так что  $(y, z, p_y, p_z)$  — координаты в  $T^*\mathbb{R}^2$ . Тогда «двумерное уравнение эйконала» (10) можно [13] переписать в виде

$$H(d\psi) = 1/2, \quad \text{где} \quad H = \frac{1}{2\beta^2} (p_y^2 + p_z^2) \quad (12)$$

Двумерное бихарактеристическое векторное поле имеет вид

$$\xi_H = \frac{1}{\beta^2} \left( p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{(p_y^2 + p_z^2)}{\beta^3} \left( \frac{\partial \beta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial p_y} + \frac{\partial \beta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial p_z} \right) \quad (13)$$

«Двумерная функция Гамильтона  $H$ » (12) отвечает «двумерной функции Лагранжа  $L$ », имеющей вид [11]

$$L = \frac{1}{2}\beta^2(y, z) \left( \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right), \quad (14)$$

который представляет собой кинетическую энергию, соответствующую «двумерной римановой метрике»

$$\beta(y, z) ds. \quad (15)$$

## 5. Двумерная Гамильтонова оптика тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга

Рассмотрим ситуацию (рис. 2), когда свет уходит с некоторой линии в плоскости  $yOz$ , проходит через тонкоплёночную обобщённую волноводную линзу Люнеберга и попадает на другую линию (в фокусе линзы).

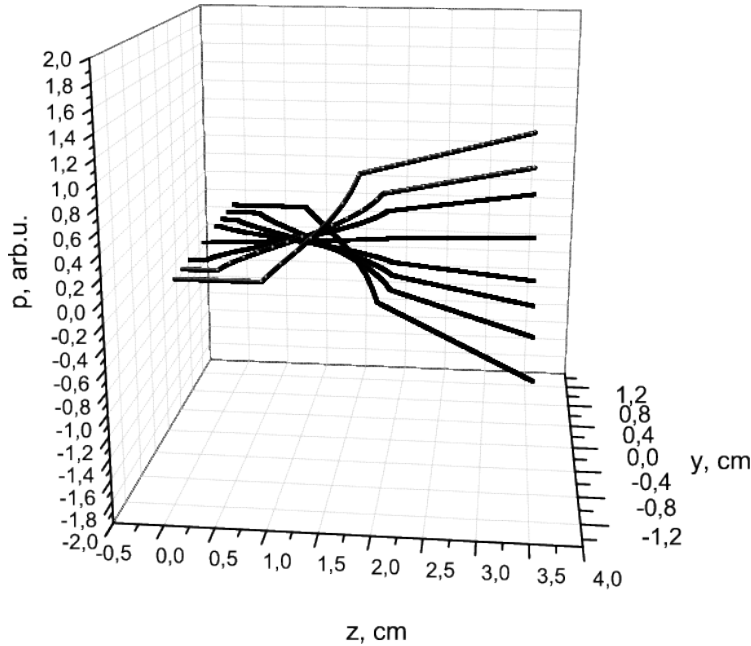


Рис. 2. Семейство Гамильтоновых лучей, прошедших через ТОВЛ Люнеберга радиуса  $R = 1.0$  см с фокусным расстоянием  $F = 1.5R$

Рассматриваем лучи, исходящие параллельно оси  $Oz$  с отрезка оси  $Oy$  размером  $[-R, R]$ , где  $R$  — радиус линзы, и не покидающие цилиндра  $[-R, R] \times \mathbb{R}$ . При этом все световые лучи диффеоморфно [13] проектируются на ось  $Oz$ , а значит их можно описывать функциями  $y(z)$ . Начальная и конечная линии задаются значениями  $z = z_0$  и  $z = z_1$  в точках их пересечения с осью  $Oz$ .

Пространство начальных положений и направлений двумерно, оно параметризуется переменными  $y_0, \dot{y}_0$ . Пространство конечных положений и направлений, параметризованное переменными  $y_1, \dot{y}_1$ , также двумерно. Мы получили преобразование начальных условий в конечные, задаваемое двумерными лучами — геодезическими в метрике  $\beta(y, z) ds$ . Это преобразование  $F_{z_0 z_1}$  зависит от  $z_0$  и  $z_1$ . После применения преобразования Лежандра, формирующего симплектическую структуру, преобразование  $\tilde{F}_{z_0 z_1}$  становится Гамильтоновым (каноническим) преобразованием, сохраняющим симплектическую структуру.

Всякая кривая  $y(z)$  имеет «одномерную оптическую длину»

$$L[y(z)] = \int_{z_0}^{z_1} \beta(y, z) \sqrt{1 + (dy/dz)^2} dz \equiv \int_{z_0}^{z_1} L dz,$$

так что  $L(y, \dot{y}, z) = \beta(y, z) \sqrt{1 + (dy/dz)^2}$ . Соответствующий скорости  $\dot{y}(z) \equiv dy/dz$  импульс  $p$  получаем с помощью преобразования Лежандра

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \frac{\dot{y} \beta(y, z)}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}}.$$

В новых «фазовых координатах»  $(p, y)$  «одномерная функция Гамильтона»  $H$  имеет вид

$$H = p\dot{y} - L = \frac{(\dot{y})^2 \beta}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} - \beta \sqrt{1 + (\dot{y})^2} = \frac{-\beta}{\sqrt{1 + (\dot{y})^2}} = -\sqrt{\beta^2 - p^2},$$

так как  $\beta^2 - p^2 = \beta^2 - \frac{(\dot{y})^2 \beta^2}{1 + (\dot{y})^2} = \frac{\beta^2}{1 + (\dot{y})^2}$ .

Лучи в фазовом пространстве удовлетворяют «одномерным уравнениям Гамильтона»:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \quad (16)$$

Вычислим выражения в правых частях уравнений (16):

$$\frac{\partial H}{\partial p} = -\frac{1}{2} \frac{-2p}{\sqrt{\beta^2 - p^2}} = \frac{p}{\sqrt{\beta^2 - p^2}},$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{1}{2} \frac{2\beta \partial \beta / \partial y}{\sqrt{\beta^2 - p^2}} = \frac{-\beta}{\sqrt{\beta^2 - p^2}} \frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

После этого уравнения Гамильтона для «одномерных лучей» принимают вид:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{p}{\sqrt{\beta^2(y, z) - p^2}}, \quad \frac{dp}{dz} = \frac{\beta(y, z)}{\sqrt{\beta^2(y, z) - p^2}} \frac{\partial \beta}{\partial y}(y, z). \quad (17)$$

Причём

$$p = \frac{dy}{dz} \frac{\beta(y, z)}{\sqrt{1 + (dy/dz)^2}}.$$

## 6. Одномерное амплитудно-фазовое преобразование электромагнитного поля тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга

Симплектическое диффеоморфное (каноническое) отображение  $\tilde{F}_{z_0 z_1} : T^*\mathbb{R}_{z_0} \rightarrow T^*\mathbb{R}_{z_1}$  «порождает» такое же отображение  $\tilde{F}_{z_0 z} : T^*\mathbb{R}_{z_0} \rightarrow T^*\mathbb{R}_z$  для  $\forall z \in (z_0, z_1)$ . Выбор начального лагранжева подмногообразия  $\Lambda_0 = [-R, R] \times \{0\} = \{y_0 \times (p_0 = 0)\}$  в симплектическом пространстве  $T^*\mathbb{R}_{z_0}$  задаёт в каждом симплектическом пространстве  $T^*\mathbb{R}_z$  его образ  $\Lambda_z$  при отображении  $\tilde{F}_{z_0 z} : \Lambda_0 = \tilde{F}_{z_0 z}(\Lambda_0)$ . Это семейство отображений задаёт эволюцию одномерного лагранжева подмногообразия в трёхмерном «расширенном фазовом пространстве»  $\bigcup_{z \in [z_0, z_1]} \tilde{F}_{z_0 z}(T^*\mathbb{R}_{z_0}) \cong$

$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ . В проекции на «изображающее фазовое пространство  $\mathbb{R}^2$ » это семейство отображений задаёт эволюцию одномерного лагранжева подмногообразия  $\Lambda_z$ . Причём  $\Lambda_{z_0}$  совпадает с отрезком  $[-R, R]$  на оси  $Oy$  в плоскости  $yOp$ , а  $\Lambda_{z_f}$  (в точке  $z_f$  фокальная линия пересекает ось  $Oz$ ) совпадает с отрезком  $[-P, P]$ , где  $P$  зависит от нормированного фокусного расстояния  $s$  ТОВЛ Люнеберга. Таким образом, отображение  $\tilde{F}_{z_0 z_1}$  задаёт «поворот на  $90^\circ = (\pi/2)$  рад в плоскости  $\mathbb{R}^2$ ».

В начальном положении волнового фронта (при  $z = z_0$ ) электромагнитное поле волноводной моды (5) имеет вид

$$f_{z_0}(x) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}(x; y^j(z_0), z_0) \\ \tilde{H}(x; y^j(z_0), z_0) \end{array} \right\} \frac{\exp\{i\omega t_0 - i\varphi(y^j(z_0), z_0)\}}{\sqrt{\beta(y^j(z_0), z_0)}} \quad (18)$$

при различных  $y^j(z_0) \in [-R, R]$ . Таким образом, в каждой точке  $y^j(z_0)$  лагранжева многообразия  $\Lambda_{z_0}$  задана шестикомпонентная функция  $f_{z_0}(x)$  (18) из  $L_2^6(\mathbb{R}_{z_0})$  (квадратично-интегрируемая по  $x$  в случае любой направляемой моды). Каноническое преобразование  $\tilde{F}_{z_0 z}$  индуцирует преобразование  $F_{z_0 z} : L_2^6(\mathbb{R}_{z_0}) \times \Lambda_{z_0} \rightarrow L_2^6(\mathbb{R}_z) \times \Lambda_z$ , которое отображает функцию  $f_{z_0}(x) \times y^j(z_0)$  в функцию  $f_z(x) \times y^j(z)$ , где

$$f_z(x) = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}(x; y^j(z), z) \\ \tilde{H}(x; y^j(z), z) \end{array} \right\} \frac{\exp\{i\omega t - i\varphi(y^j(z), z)\}}{\sqrt{\beta(y^j(z), z)}} \quad (19)$$

задаётся методом адиабатических волноводных мод (6)–(9).

**Замечание.** Любое линейное отображение  $\text{Pr}_z$  векторной функции (19) в скалярную величину (в том числе значение некоторой линейной числовой функции на  $\mathbb{R}^6$  при некотором значении  $x^*$  аргумента  $x$ ) задаёт функцию на  $\Lambda_z = \{y^j(z)\}$ .

Отображение  $F_{z_0 z_f}$  в методе адиабатических волноводных мод для тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга задаёт преобразование, обобщающее преобразование Фурье (рис. 3). Если ограничить его на область значений проектора  $\text{Pr}_{z_f}$  в пространстве  $L_2^6(\mathbb{R}_{z_f}) \times \Lambda_{z_f}$ , то получившееся «индуцированное» ограничение будет «преобразованием Фурье с ограниченной апертурой»,



совершаемым (производимым) тонкоплёночной обобщённой волноводной линзой Люнеберга.

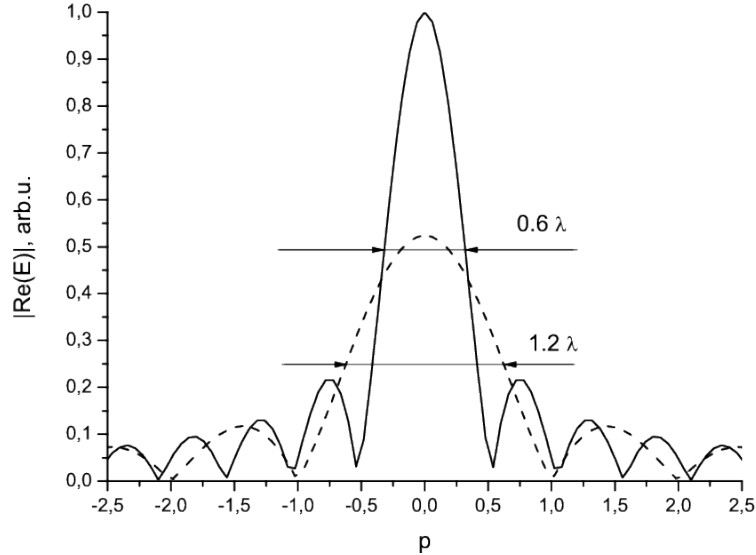


Рис. 3. Обобщённое амплитудно-фазовое преобразование Фурье ТОВЛ Люнеберга радиуса  $R = 1.0$  см с фокусным расстоянием  $F = 1.5R$

## 7. Заключение

В работе рассмотрена модель построения квазиклассического решения уравнений Максвелла. В данной модели при построении квазиклассического решения фазовая функция находится из уравнения Гамильтона–Якоби; по начальной фазовой функции строится начальное лагранжево многообразие, которое преобразуется при помощи гамильтонова потока. До тех пор, пока возникающее при этом процессе лагранжево многообразие однозначно проектируется на конфигурационное пространство, мы находим фазовую функцию, вычисляя действие вдоль траектории.

Изложенная конструкция в применении к бесконечно тонкой классической линзе (с неограниченной или с ограниченной апертурой) в модели скалярной волновой оптики приводит к общепринятому преобразованию Фурье. Таким образом, поворот на  $90^\circ = (\pi/2)$  рад в фазовом пространстве начальных (конечных) координат-импульсов индуцирует преобразование Фурье в классе числовых функций на лагранжевых многообразиях и «обобщённое амплитудно-фазовое преобразование Фурье» в классе векторных (или тензорных, или спинорных) функций на лагранжевых многообразиях.

## Литература

1. *Luneburg R. K.* The Mathematical Theory of Optics. — Berkeley: University of California Press, 1964.
2. *Егоров А. А., Севастьянов Л. А., Севастьянов А. Л.* Исследование электродинамических свойств планарной тонкоплёночной линзы Люнеберга // Журнал Радиоэлектроники. — 2008. — Т. 6. [Egorov A.A., Sevastyanov L.A., Sevastyanov A.L. Research of Electrodinamic Properties of a Planar Thin-Film Luneburg Lens // J. of Radio Electronics. — 2008. — No 6.]

3. Моделирование направляемых (собственных) мод и синтез тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга в нулевом векторном приближении / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Квантовая электроника. — 2010. — Т. 40, № 9. — С. 830–836. [Simulation of Guided Modes (Eigenmodes) and Synthesis of a Thin-Film Generalised Waveguide Luneburg Lens in the Zero-Order Vector Approximation / A.A. Egorov, K.P. Lovetskiy, A.L. Sevastianov, L.A. Sevastianov // Quantum Electronics. — 2010. — Vol. 40, No 9. — P. 830–836. ]
4. Расчёт и проектирование тонкоплёночной обобщённой волноводной линзы Люнеберга методом адиабатических мод / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян и др. // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». — 2012. — Вып. 3 (26). — С. 35–47. [Calculation and Design of Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens by Adiabatic Modes Method / A.A. Egorov, L.A. Sevastianov, E.A. Ayryan et al. // Bulletin of TvSU. Series Appl. Mathematics. — 2012. — Issue 3 (26). — P. 35–47. ]
5. *Севастьянов Л. А., Егоров А. А.* Теоретический анализ волноводного распространения электромагнитных волн в диэлектрических плавно-нерегулярных интегральных структурах // Оптика и спектроскопия. — 2008. — Т. 105, № 4. — С. 632–640. [Sevastianov L.A., Egorov A.A. The Theoretical Analysis of Waveguide Propagation of Electromagnetic Waves in Dielectric Smoothly-Irregular Integrated Structures // Optics and Spectroscopy. — 2008. — Vol. 105, No 4. — P. 576–584. ]
6. Propagation of Electromagnetic Waves in Thin-Film Structures with Smoothly Irregular Sections / А. А. Егоров, Л. А. Севастьянов, А. Л. Севастьянов, К. П. Ловецкий // ICO Topical Meeting on Optoinformatics/Information Photonics. September 15-18, 2008. St. Petersburg. Russia. — St. Petersburg: ИТМО, 2008. — P. 23.
7. *Егоров А. А., Севастьянов Л. А.* Структура мод плавно-нерегулярного интегрально-оптического четырёхслойного трёхмерного волновода // Квантовая электроника. — 2009. — Т. 39, № 6. — С. 566–574. [Egorov A.A., Sevastianov L.A. Structure of Modes of a Smoothly Irregular Integrated-Optical Four-Layer Three-Dimensional Waveguide // Quantum Electronics. — 2009. — Vol. 39, No 6. — P. 566–574. ]
8. Модель многослойного плавно-нерегулярного интегрально-оптического волновода в нулевом векторном приближении / А. А. Егоров, К. П. Ловецкий, А. Л. Севастьянов, Л. А. Севастьянов // Исследовано в России. — 2011. — № 010/110303. — С. 96–122. [Model of a Multilayer Smoothly-Irregular Integrated-Optical Waveguide in a Zero Vector Approximation / A.A. Egorov, K.P. Lovetskiy, A.L. Sevastianov, L.A. Sevastianov // Investigated in Russia. — 2011. — No 010/110303. — P. 96–122. ]
9. Адиабатические моды плавно-нерегулярного оптического волновода: нулевое приближение векторной теории / А. А. Егоров, А. Л. Севастьянов, Э. А. Айрян и др. // Математическое моделирование. — 2010. — Т. 22, № 8. — С. 42–54. [Adiabatic Modes of Smoothly Irregular Optical Waveguide: Zero Approximation of the Vector Theory / A.A. Egorov, A.L. Sevastianov, E.A. Ayryan et al. // Mathematical Modeling. — 2010. — Vol. 22, No 8. — P. 42–54. ]
10. Mathematical Modeling of Irregular Integrated Optical Waveguides / E. A. Ayryan, A. A. Egorov, L. A. Sevastianov et al. // Lecture Notes in Computer Science. — 2012. — Vol. 7125. — Pp. 136–147.
11. *Egorov A., Sevastianov L.* Propagation, Transformation and Scattering of the Light in Integrated-Optical Waveguides // SPIE Newsroom. — March 12, 2012. — Pp. 1–3. — Published Online: DOI: 10.1117/2.1201202.003860.
12. *Севастьянов Л. А., Егоров А. А., Севастьянов А. Л.* Метод адиабатических мод в задачах плавно-нерегулярных открытых волноводящих структур // Ядерная физика. — 2013. — Т. 76, № 2. — С. 252–268. [Sevastianov L.A.,

- Egorov A.A., Sevastyanov A.L. Method of Adiabatic Modes in Studying Problems of Smoothly Irregular Open Waveguide Structures // *Physics of Atomic Nuclei*. — 2013. — Vol. 76, No 2. — P. 224–239. ]
13. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. — М.: Мир, 1980. [Guillemin V., Sternberg S. *Geometric Asymptotics*. — Providence, RI: AMS, 1990. ]
  14. Morgan S. P. General Solution of the Luneburg Lens Problem // *J. Appl. Phys.* — 1958. — Vol. 29, No 9. — Pp. 1358–1368.
  15. Взятыйшев В. Ф. Диэлектрические волноводы. — М.: Советское радио, 1970. [Vzyatyshhev V.F. *Dielectrics Waveguides*. — Moscow: Soviet Radio, 1970 ]
  16. Loomis L. H., Sternberg S. *Advanced Calculus*. — London: Jones & Bartlett Publ., 1990.
  17. Wolf K. B. *Geometric Optics on Phase Space*. — Berlin: Springer-Verlag, 2004.

UDC 514.88; 519.62; 519.63; 535.016; 537.87

## Modeling in the Adiabatic Waveguide Modes Model of Amplitude-Phase Transformation of the Electromagnetic Field by a Thin-Film Generalized Waveguide Luneburg Lens

A. L. Sevastyanov, D. S. Kulyabov, L. A. Sevastyanov

*Telecommunication System Department  
Peoples' Friendship University of Russia  
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198*

R.K. Luneburg proposed a model of the three-dimensional propagation of electromagnetic radiation. V. Guillemin and S. Sternberg showed that the basic equations of Luneburg, which are the Lagrange equations, correspond to Hamilton's equations on the cotangent bundle over a three-dimensional configuration space. The model described is a "close relative" of the adiabatic guided modes model, proposed by the authors. In this model similarly, two-dimensional ray equations for integrated optical waveguide correspond to Hamilton's equations on four-dimensional phase space.

In this model, the construction of quasi-classical solutions is the phase function of the Hamilton–Jacobi, for the initial phase function the initial Lagrangian manifold is constructed, which is transformed by means of the Hamiltonian flow. As long as the Lagrangian manifold occurred in this process is uniquely projected on the configuration space, we find the phase function by calculating the action along the path.

**Key words and phrases:** Maxwell's equations, equations of Lagrange, equations of Hamilton, integrated-optical waveguides, method of adiabatic waveguide modes, amplitude-phase transformation, Fourier transform.