УДК 510.676, 519.7

Исследование решения уравнения геодезических в модели излучающего точечного источника гравитации в пустом пространстве

Н. Н. Попов*, А. М. Башлыков*, И. И. Мороз†

* *Учреждение Российской академии наук*
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН
ул. Вавилова, д. 40, Москва, 119333, Россия
† *Государственный университет «Московский физико-технический институт»*
Институтский пер., д. 9, г. Долгопрудный, Московская область, 141700, Россия

В данной работе изучаются свойства решений уравнений геодезических для модели точечного источника гравитации, излучающего тепловую энергию. Уравнения геодезических строятся с использованием метрики, являющейся решением уравнений, которые представляют собой нулевой след тензора Риччи. Эти уравнения являются некоторым обобщением уравнений Эйнштейна в вакууме. Они позволяют получать решения в виде нестационарных сферически-симметричных метрик, чьи компоненты являются функцией двух переменных. Обыкновенная система дифференциальных уравнений геодезических второго порядка относительно натурального параметра состоит из четырёх уравнений. Она может быть частично проинтегрирована и сведена к системе из двух дифференциальных уравнений второго порядка. Метод подстановки системы сводится к двум дифференциальным уравнениям в частных производных от двух неизвестных переменных. Окончательно получается одно квазилинейное уравнение. В нормальном случае для такого типа уравнений образуются разрывы при ограниченных решениях. Однако численный расчёт показывает, что решения могут также становиться неограниченными ввиду особенностей в правых частях.

Ключевые слова: сферически симметричное пространство, нестационарная метрика, геодезические, уравнение Хопфа, нелинейные характеристические кривые.

1. Введение

Физическая постановка задачи выглядит так. В пустом пространстве находится звезда, излучающая тепловую энергию равномерно во всех направлениях. Вследствие излучения масса звезды уменьшается со временем. Задача заключается в нахождении закона зависимости массы от времени, а также исследовании поведения геодезических в таком нестационарном пространстве-времени в рамках релятивистской теории гравитации. Исследования такого типа моделей были представлены в работах [1–4].

С математической точки зрения для решения поставленной выше задачи необходимо найти метрику сферически-симметричного пространства, в центре симметрии которого расположен точечный источник гравитации с массой, зависящей от времени. Для решения этой задачи невозможно использовать уравнения Эйнштейна $R_{ij} = 0$, в силу теоремы Биргоффа [5], которая утверждает, что сферически-симметричная метрика, порождаемая точечным источником гравитации в пустом пространстве-времени и являющаяся решением уравнения Эйнштейна $R_{ij} = 0$, единственна и не зависит от времени, то есть является статической и имеет вид метрики Шварцшильда. Это означает, что согласно уравнению Эйнштейна гравитационный источник не может терять массу в пустом пространстве-времени. В рамках рассматриваемой модели предполагается, что метрика такого пространства должна удовлетворять уравнению $\mathrm{Tr} R_{ij} = 0$, которое является некоторым обобщением уравнения Эйнштейна для пустого пространства-времени.

В [6] рассматривается математическая модель излучающего точечного источника гравитации в пустом пространстве. Приводится метрика пространства-времени, соответствующая этой модели. Выписывается система уравнений геодезических. Установлено, что решение этой системы обыкновенных дифференциальных

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2013 г.

уравнений второго порядка сводится к системе уравнений в частных производных первого порядка и изучаются свойства её решений. Окончательно получается одно квазилинейное уравнение, куда входят частные производные первого порядка линейным образом. Оно принадлежит гиперболическому типу.

Рассматриваемое уравнение является сильно нелинейным (см. [7]). По свойствам решения оно напоминает известное уравнение Хопфа. Для таких уравнений типично образование разрывов решений при конечном времени, если начальные условия являются монотонными. Целью данной статьи было нахождение таких разрывов для данного уравнения. Однако здесь имеется ещё правая часть, которая нелинейно зависит от неизвестной функции. Имеется также вырождение в правой части на некотором многообразии в плоскости (x, t). Это может привести к своим особенностям.

2. Уравнения геодезических

Уравнения геодезических в псевдоримановом пространстве имеют вид

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j = 0, k = 1, \ldots, 4, \tag{1}$$

где Γ^k_{ij} — символы Кристоффеля. Для нахождения уравнений геодезических используем Лагранжев формализм. Для построения лагранжиана L используем метрику сферически симметричного пространства, имеющую вид

$$\mathrm{d}S^2 = f_4(x_1, x_4)\mathrm{d}x_4^2 - f_1(x_1, x_4)\mathrm{d}x_1^2 - f_2(x_1, x_4)\left(\frac{\mathrm{d}x_2^2}{1 - x_2^2} + \left(1 - x_2^2\right)\mathrm{d}x_3^2\right),$$

относительно обобщённой сферически симметричной системы координат

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \quad \left(x_1 = \frac{r^3}{3}, \quad x_2 = -\cos\Theta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = t\right),$$

где

$$f_1 = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{4}{3}}\left(1 - \frac{\alpha - \beta x_4}{(3x_1)^{\frac{1}{3}}}\right)}, \quad f_2 = (3x_1)^{\frac{2}{3}},$$

$$f_4 = 1 - \frac{\alpha - \beta x_4}{(3x_1)^{\frac{1}{3}}}, \quad \alpha, \beta > 0, \ \alpha, \beta = \mathrm{const},$$

функции f_1, f_2, f_4 являются решениями уравнения $T_r R_{ij} = 0$, где R_{ij} — тензор Риччи.

В качестве Лагранжиана используем выражение

$$L = f_4\dot{x}_4^2 - f_1\dot{x}_1^2 - f_2\left(\frac{\dot{x}_2^2}{1 - x_2^2} + \left(1 - x_2^2\right)\dot{x}_3^2\right), \tag{2}$$

где $\dot{x}_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}s}$. Из определения Лагранжиана следует, что $L = 1$.

Выпишем уравнения Эйлера–Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, 4$$

относительно лагранжиана (2).

Уравнения Эйлера–Лагранжа принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + \frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dot{x}_1^2 + \frac{1}{f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\dot{x}_1\dot{x}_4 + \frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\dot{x}_4^2 - \frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\dot{x}_2^2}{1-x_2^2} - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2f_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}(1-x_2^2)\dot{x}_3^2 = 0,\\
&\ddot{x}_2 + \frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{x_2}{1-x_2^2}\dot{x}_2^2 + (1-x_2^2)x_2\dot{x}_3^2 = 0,\\
&\ddot{x}_3 + \frac{1}{f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\dot{x}_1\dot{x}_3 - \frac{2x_2}{1-x_2^2}\dot{x}_2\dot{x}_3 = 0,\\
&\ddot{x}_4 + \frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\dot{x}_1\dot{x}_4 + \frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\dot{x}_4^2 + \frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\dot{x}_1^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Это и есть искомые уравнения геодезических вида (1). Второе и третье уравнения системы (3) можно проинтегрировать непосредственно, в результате чего получаем:

$$
\dot{x}_2 = (C_2^2(1-x_2^2) - C_3^2)^{\frac{1}{2}} f_2^{-1}, \quad \dot{x}_3 = \frac{C_3}{(1-x_2^2)f_2^{-1}}, \tag{4}
$$

где C_2, C_3 — произвольные постоянные.

Воспользовавшись тем, что лагранжиан L, определяемый соотношением (2), равен единице, находим, используя соотношения (4), связь между $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_4$,

$$
\dot{x}_4 = \left(f_1\dot{x}_1^2 + \frac{C_2^2}{f_2} + 1\right)^{\frac{1}{2}} f_4^{-\frac{1}{2}}.
$$

Из вида соотношений (4) представляется целесообразным искать $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_4$, входящие в систему уравнений (3), следующим образом:

$$
\dot{x}_1 = \frac{C_1(x_1, x_2)}{f_1}, \quad \dot{x}_4 = \frac{C_4(x_1, x_4)}{f_4},
$$

тогда

$$
\ddot{x}_1 = \frac{\dot{C}_1}{f_1} - \frac{C_1}{f_1^2}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_4}\dot{x}_4\right), \quad \ddot{x}_4 = \frac{\dot{C}_4}{f_4} - \frac{C_4}{f_4^2}\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial f_4}{\partial x_4}\dot{x}_4\right),
$$

и, подставляя полученные соотношения в первое и четверное уравнения системы (3), получаем

$$
\begin{aligned}
\dot{C}_1 + \frac{C_4^2}{2f_4^2}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} - \frac{C_1^2}{2f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \frac{C_2^2}{2f_2^2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 0,\\
\dot{C}_4 - \frac{C_4^2}{2f_4^2}\frac{\partial f_4}{\partial x_4} + \frac{C_1^2}{2f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x_4} = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где

$$
\dot{C}_i = \frac{\partial C_i}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial C_i}{\partial x_4}\dot{x}_4, \quad i = 1, 4, \quad C_2 = \mathrm{const},
$$

$$
C_4^2 = \left(\frac{C_1^2}{f_1} + \frac{C_2^2}{f_2} + 1\right) f_4.
$$

Система (5) может быть представлена в виде

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1}\frac{C_1}{f_1}+\frac{\partial C_1}{\partial x_4}\left(\frac{C_1^2}{f_1}+\frac{C_2^2}{f_2}+1\right)^{\frac{1}{2}}f_4^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{C_1^2}{f_1}+\frac{C_2^2}{f_2}+1\right)\frac{1}{f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_1}- \\ -\frac{C_1^2}{2f_1^2}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}-\frac{C_2^2}{2f_2^2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}=0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial C_4}{\partial x_1}\frac{C_1}{f_1}+\frac{\partial C_4}{\partial x_4}\frac{C_4}{f_4}-\frac{C_4^2}{f_4^2}\frac{\partial f_4}{\partial x_4}+\left(\frac{C_2^2}{f_2^2}+1\right)\frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_4}=0.$$

3. Исследование дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial C_4}{\partial x_1}\left(\frac{C_4^2}{f_4}-\frac{C_2^2}{f_2}-1\right)^{\frac{1}{2}}f_1^{-\frac{1}{2}}+\frac{\partial C_4}{\partial x_4}\frac{C_4}{f_4}-\frac{C_4^2}{f_4^2}\frac{\partial f_4}{\partial x_4}+\left(\frac{C_2^2}{f_2}+1\right)\frac{1}{2f_4}\frac{\partial f_4}{\partial x_4}=0, \quad (7)$$

Для удобства сделаем замену $t=x_4$, $x=x_1$, $U=C_4$.

Поделим уравнение на $\frac{U}{f_4}$ и выпишем характеристическую систему:

$$X'=\frac{f_4(f_2(-C_2^2f_4-f_2f_4+f_2U^2))^{\frac{1}{2}}}{U}, \quad U'=\frac{\beta(C_2^2+f_2)}{2f_2^{\frac{3}{2}}U}-\frac{\beta U}{f_2^{\frac{1}{2}}f_4}. \quad (8)$$

Уравнение (7) можно формально представить в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\xi(U,t,x)\frac{\partial U}{\partial x}=f(U,t,x). \quad (9)$$

последнее является более общим случаем так называемого уравнения Хопфа (см., например, [7]). Решение этого уравнения при различных линейных начальных условиях подробно описано в [7]. При линейных начальных условиях возможно образование разрывов (аналог ударной волны) или всюду регулярное решение (по типу волны разрежения). Отметим также, что правая часть в (10) становится нерегулярной при $f_4=0$, то есть при

$$x=\frac{1}{3}(\alpha+\beta t)^3-\frac{1}{3}\alpha^3. \quad (10)$$

Будем говорить, что (10) задаёт кривую вырождения. Численные решения (8) по методу характеристик (см., например, [7]) приводит к следующим результатам. При $\alpha=100$, $\beta=-0.0001$, $C_2=100$ для широкого набора начальных условий не обнаруживается бесконечных производных по типу ударной волны. Решение становится неограниченным из-за того, что правая часть является бесконечной при приближении к кривой вырождения. Другими словами, характеристические кривые выходят на линию, где $f_4=0$. При противоположном знаке β картина поведения решения меняется. В частности, берём $\alpha=3$, $\beta=0.01$, $C_2=100$, $U(x,0)=100+x$ на отрезках $[1,10]$ и $[11,20]$. Кривую вырождения характеристики не пересекают. Решения ведут себя по типу волны разрежения. Для первого начального условия характеристические кривые пересекают ось $x=0$, где $f_2=0$. Здесь решение стремится к бесконечности (рис. 1), где жирная линия – это кривая вырождения.

Для противоположного по монотонности начального значения $U(0, x) = 100 - x$, заданного на отрезке $[44, 86]$, получено пересечение характеристик при конечном времени («градиентная катастрофа» по типу ударной волны), рис. 2. Если начальные условия берутся на отрезке $[1, 10]$ и $[11, 20]$, то характеристики не пересекают кривую вырождения, картина качественно такая же, как и при условии $U(0, x) = 100 + x$.

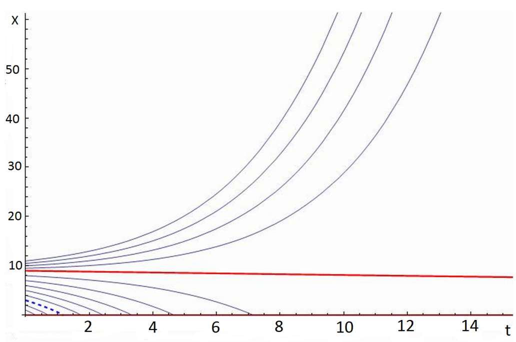

Рис. 1. Характеристические кривые

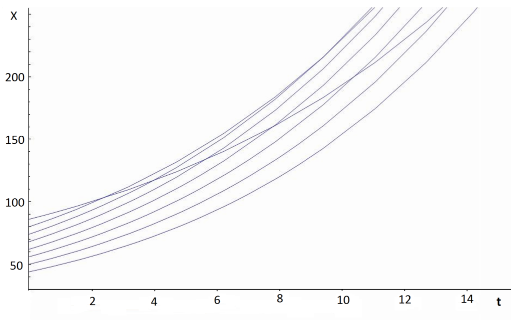

Рис. 2. «Градиентная катастрофа» по типу ударной волны

4. Заключение

Основываясь на численном решении, можно утверждать, что разрывы искомого типа в решении уравнений (9) наблюдаются, равно как и возможность неограниченности. Сингулярное поведение решений может говорить либо о необходимости поиска аналитических регулярных решений, что является сложной проблемой, либо о неадекватности математической модели, связанной со следом тензора Риччи, либо о возможности каких-то аномальных физических явлений.

Литература

1. *Cahill M., Taub A.* Spherically Symmetric Similarity Solutions of the Einstein Field Equations for a Perfect Fluid // Comm. Math. Phys. — 1971. — Vol. 21, No 1. — Pp. 1–40.
2. *Eardley D.* Self-Similar Spacetimes: Geometry and Dynamics // Comm. Math. Phys. — 1974. — Vol. 37, No 4. — Pp. 287–309.
3. Exact Solution of Einstein's Field Equations / D. Kramer, H. Stephani, M. MacCallum et al. — Cambridge: Cambridge University Press, 1980.
4. *Sintes A., Benotit P., Coley A.* Infinite Kinematic Self-Similarity and Perfect Fluid Spacetimes // Gen. Rel. Grav. — 2001. — Vol. 33, No 10. — Pp. 1863–1895.
5. *Birckhoff G.* Reliability and Modern Physics. — Cambridge, MA: Harvard University Press, 1923.
6. *Башлыков А., Попов Н., Цурков В.* Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, встречающихся в задаче излучающего точечного источника гравитации // ЖВМиМФ. — 2012. — Т. 52, № 7. — С. 1294–1303. [Bashlykov A., Popov N., Tsurkov, V. Solution of Nonlinear Partial Differential Equations Encountered in the Problem of the Radiating Point Source of Gravity // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2012. — Vol. 52, No 7. — P. 1294–1303.]
7. *Рождественский Б., Яненко Н.* Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978. — С. 76–78. [Rozhdestvensky B., Yanenko N. Systems of Quasilinear Equations. — Moscow: Nauka, 1978. — P. 76–78.]

UDC 510.676, 519.7

Study Solutions of the Geodesic Equations for a Model of a Point Source of Gravity in the Empty Space

N. N. Popov*, A. M. Bashlykov*, I. I. Moroz†

* *Institution of Russian Academy of Sciences*
Dorodnicyn Computing Centre of RAS
Vavilov st. 40, 119333 Moscow, Russia
* *State University "Moscow Institute of Physics and Technology"*
9 Institutskiy lane, Dolgoprudny city, Moscow Region, 141700, Russia

In this paper the properties of solutions of the geodesic equations for a model of a point source of gravity, radiating heat are studied. Geodesic equations are constructed using a metric which is the solution of equations that represent the zero trace of the Ricci tensor. These equations are a generalization of Einstein's equations in vacuum. They allow to obtain solutions in the form of non-stationary spherically symmetric metrics, whose components are a function of two variables. The ordinary system of differential equations of second order for surveying natural parameter consists of four equations. It can be partially integrated and reduced to a system of two second order differential equations. By substitution method the system is reduced to a pair of differential equations in partial derivatives of the two unknown variables. Finally, we obtain one quasi-linear equation. In the normal case, equations of this type form gaps with limited solutions. However, the numerical calculations show that the solutions can also become unrestricted due to the pecularities in the right parts.

Key words and phrases: spherically symmetric space, non-stationary metric, geodesic, Hopf equation, non-linear characteristic curves.