УДК 519.24

Об асимптотике второго момента спектральной оценки однородного поля

А. Ю. Шомахов

Кафедра высшей математики
Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова
Стремянной пер. д. 36, 117997, Москва, Россия

Дано однородное (стационарное в широком смысле) случайное поле со средним нуль и вещественными компонентами. Рассматривается случай дискретного времени. Дана матрица периодограмм второго порядка, построенных по выборке. В работе изучается асимптотическое поведение второго момента спектральной оценки второго порядка однородного поля.

Ключевые слова: однородное поле, периодограмма, спектральная плотность, второй момент, ядро Фейера.

Пусть $\{X\left(t\right), \, t \in T\}$ — r-мерное однородное (стационарное в широком смысле) поле со средним нуль и вещественными компонентами, то есть

$$X(t) = \{X_a(t)\}_{a=\overline{1,r}} = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_r(t) \end{pmatrix}, \quad EX(t) = 0, \quad X_a(t) \in R^1, \quad a = \overline{1,r}$$

и для любых $1 \leqslant a, b \leqslant r$ и $t, t' \in T$, $EX_a(t)X_b(t') = K_{ab}(t,\ t') = \mathrm{COV}(X_a(t), X_b(t')) = k_{ab}(t-t') = \int\limits_{Q^p} e^{i\left\langle t-t',\, \lambda\right\rangle} f_{ab}\left(\lambda\right)\ \mathrm{d}\lambda$, где E — оператор математического ожидания; $f_{ab}\left(\lambda\right)$ — компонента матрицы спектральных плотностей (с.п.) $f\left(\lambda\right) = \left\{f_{ab}\left(\lambda\right)\right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}}$ поля $\{X(t),\, t \in T\}$; $K_{ab}\left(t, t'\right) = k_{ab}\left(t-t'\right)$ — компонента матрицы ковариационных функций $K(t,t') = k\left(t-t'\right) = \left\{K_{ab}\left(t,t'\right) = k_{ab}\left(t-t'\right)\right\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}}$ поля $\{X(t),\, t \in T\}$; $\langle t-t', \lambda\rangle$ — скалярное произведение элементов $(t-t') \in T$, $\lambda \in Q^p$, где $Q^p = \left\{\left(\lambda^{(1)},\, \lambda^{(2)},\, \ldots,\, \lambda^{(p)}\right) :\, -\pi \leqslant \lambda^{(j)} \leqslant \pi, j = \overline{1,p}\right\}$.

Рассмотрим случай дискретного времени. Множество T имеет следующий вид: $T = \left\{\left(t^{(1)},\, t^{(2)},\, \ldots,\, t^{(p)}\right) :\, t^{(j)} = \ldots, -1,\, 0,\, 1,\, \ldots, \quad j = \overline{1,p}\right\}$. Также в силу того, что мы рассматриваем случай дискретного времени, интегрирование в общем случае будет вестись по множеству

$$Q^{np} = \left\{ \left(\lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots, \lambda_1^{(p)}; \lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots, \lambda_2^{(p)}; \ldots; \lambda_n^{(1)}, \lambda_n^{(2)}, \ldots, \lambda_n^{(p)}\right) : -\pi \leqslant \lambda_k^{(j)} \leqslant \pi, k = \overline{1,n}\,; \, j = \overline{1,p} \right\}.$$

Через

$$m_{a_1 a_2 \ldots a_n}\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right) = EX_{a_1}\left(t_1\right) X_{a_2}\left(t_2\right) \ldots X_{a_n}\left(t_n\right) \qquad (1)$$

обозначим момент n-го порядка от поля $\{X(t),\, t \in T\}$, а через $C_{a_1 a_2 \ldots a_n}\left(t_1, t_2, \ldots, t_n\right)$ — семиинвариант (кумулянт) n-го порядка от поля $\{X(t),\, t \in T\}$.

В частности, справедливо следующее соотношение, связывающее момент четвертого порядка $m_{a_1 b_1 a_2 b_2}\left(s_1, s_2, s_3, s_4\right)$ с семиинвариантом (кумулянтом) четвертого порядка $C_{a_1 b_1 a_2 b_2}\left(s_1, s_2, s_3, s_4\right)$, учитывая, что $EX(t) = 0$, а именно

Статья поступила в редакцию 2 декабря 2012 г.

$$m_{a_1 b_1 a_2 b_2}(s_1, s_2, s_3, s_4) = C_{a_1 b_1 a_2 b_2}(s_1, s_2, s_3, s_4) + m_{a_1 a_2}(s_1, s_3)\, m_{b_1 b_2}(s_2, s_4) + \\ + m_{a_1 b_2}(s_1, s_4)\, m_{b_1 a_2}(s_2, s_3) + m_{a_1 b_1}(s_1, s_2)\, m_{a_2 b_2}(s_3, s_4), \quad (2)$$

где $s_1, s_2, s_3, s_4 \in T$.

Через $F(\lambda) = \{F_{ab}(\lambda)\}_{a=\overline{1,r}}^{b=\overline{1,r}}$ обозначим спектральную функцию (с.ф.) поля $\{X(t), t \in T\}$. Компоненты $F_{ab}(\lambda)$, $f_{ab}(\lambda)$ мы также будем называть соответственно спектральной функцией (с.ф.) и спектральной плотностью (с.п.). Известно, что если с.п. f_{aa} и f_{bb} существуют, то с.п. f_{ab} также существует, причем справедлива следующая оценка, а именно $|f_{ab}(\lambda)|^2 \leqslant f_{aa}(\lambda)\, f_{bb}(\lambda)$.

Условие, что для фиксированного набора $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $1 \leqslant a_k \leqslant r$, $k = \overline{1,n}$, существует спектральная плотность (с.п.) $f_{a_1 a_2 \ldots a_n}$, всюду далее будет означать следующее:

1) $E\,|X_{a_k}(t)|^n < \infty$ для всех $1 \leqslant a_k \leqslant r$, $\quad k = \overline{1,n}$, $t \in T$;
2) для любых t_k, $t \in T$

$$C_{a_1 a_2 \ldots a_n}(t_1 + t, t_2 + t, \ldots, t_n + t) = C_{a_1 a_2 \ldots a_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n);$$

3) существует комплекснозначная функция $f_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ такая, что для любых $t_k \in T$ имеет место равенство

$$C_{a_1 a_2 \ldots a_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = C_{a_1 a_2 \ldots a_n}(t_1 - t_n, t_2 - t_n, \ldots, t_{n-1} - t_n, 0) = \\ = \int\limits_{Q^p} \ldots \int\limits_{Q^p} f_{a_1 a_2 \ldots a_n}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{n-1} \langle t_k - t_n, \lambda_k \rangle \right\} \mathrm{d}\lambda_1 \ldots \mathrm{d}\lambda_{n-1}. \quad (3)$$

В частности, для фиксированного набора (a_1, b_1, a_2, b_2), $1 \leqslant a_1, b_1, a_2, b_2 \leqslant r$

$$C_{a_1 b_1 a_2 b_2}(s_1, s_2, s_3, s_4) = \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(y_1, y_2, y_3) \exp\{ i \langle s_1 - s_4, y_1 \rangle + \\ + i \langle s_2 - s_4, y_2 \rangle + i \langle s_3 - s_4, y_3 \rangle \} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_3, \quad (4)$$

где $s_k \in T$, $y_k \in Q^p$, $k = \overline{1,3}$; $s_4 \in T$. Отметим также, что

$$C_{ab}(s - t, 0) = C_{ab}(s, t) = m_{ab}(s - t, 0) = m_{ab}(s, t) = \\ = \int\limits_{Q^p} f_{ab}(y) \exp\{ i \langle s - t, y \rangle \} \mathrm{d}y \quad (5)$$

для фиксированного набора (a, b), $1 \leqslant a, b \leqslant r$.

В данной работе изучается асимптотическое поведение (устанавливается предел) при неограниченно возрастающем объеме выборки $\left(\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant p} N_j \to \infty\right)$ второго момента $E\left(\xi_{a_1 b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \overline{\xi_{a_2 b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right)$ спектральной оценки $\int\limits_{Q^p} \varphi(\lambda)\, I_{ab}^{(N)}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda$, где случайная величина $\xi_{a_1 b_1}^{(N)}(\varphi_1)$ представлена в виде

$$\xi_{a_1 b_1}^{(N)}(\varphi_1) = \sqrt{N_1 N_2 \ldots N_p} \left[\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\lambda_1)\, I_{a_1 b_1}^{(N)}(\lambda_1)\, \mathrm{d}\lambda_1 - E\left(\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\lambda_1)\, I_{a_1 b_1}^{(N)}(\lambda_1)\, \mathrm{d}\lambda_1 \right) \right];$$

случайная величина $\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)} = \xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})$ является комплексно-сопряженной к случайной величине

$$\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2) = \sqrt{N_1N_2\dots N_p}\left[\int\limits_{Q^p}\varphi_2(\lambda_2)\,I^{(N)}_{a_2b_2}(\lambda_2)\,\mathrm{d}\lambda_2 - E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_2(\lambda_2)\,I^{(N)}_{a_2b_2}(\lambda_2)\,\mathrm{d}\lambda_2\right)\right];$$

$\varphi_1(\lambda_1), \varphi_2(\lambda_2)$ — некоторые комплекснозначные функции;
$I_N(\lambda) = \left\{I^{(N)}_{ab}(\lambda)\right\}^{b=\overline{1,r}}_{a=\overline{1,r}}$ — матрица периодограмм второго порядка, построенных по выборке $\left\{X(t),\, 0 < t^{(j)} \leqslant N_j,\, j=\overline{1,p}\right\}$ объема $N = (N_1, N_2, \dots, N_p)$, т.е.

$$I^{(N)}_{ab}(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^p N_1N_2\dots N_p}\times$$
$$\times\sum_{s^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s^{(p)}=1}^{N_p} e^{-i\langle\lambda,s\rangle}X_a(s)\sum_{t^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{t^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{t^{(p)}=1}^{N_p} e^{i\langle\lambda,t\rangle}X_b(t); \quad (6)$$

$\langle\lambda,s\rangle$ и $\langle\lambda,t\rangle$ — скалярные произведения элементов λ и s, λ и t, $\lambda\in Q^p$; $s,t\in T$, т.е.

$$\langle\lambda,s\rangle = \lambda^{(1)}s^{(1)} + \lambda^{(2)}s^{(2)} + \dots + \lambda^{(p)}s^{(p)};$$
$$\langle\lambda,t\rangle = \lambda^{(1)}t^{(1)} + \lambda^{(2)}t^{(2)} + \dots + \lambda^{(p)}t^{(p)}, \quad \lambda = \left(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(p)}\right);$$
$$s = \left(s^{(1)}, s^{(2)}, \dots, s^{(p)}\right); \quad t = \left(t^{(1)}, t^{(2)}, \dots, t^{(p)}\right).$$

Замечание. Обозначение $\sum\limits_{s=1}^{N}$ будет означать, что

$$\sum_{s=1}^{N} = \sum_{s^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s^{(p)}=1}^{N_p}. \quad (7)$$

Буквой C обозначается константа, не всегда одна и та же, точный вид которой несущественен.

В нашем случае (рассматривается дискретное время) все рассматриваемые функции, в том числе и спектральные плотности (с.п.), считаются периодичными с периодом 2π по каждому аргументу.

Условие, что функция $f(\lambda)$ интегрируема, будет обозначать, что

$$\int\limits_{Q^p}|f(\lambda)|\,\mathrm{d}\lambda < \infty. \quad (8)$$

Вспомогательные результаты. Для доказательства приведенной ниже теоремы нам понадобятся некоторые предварительные результаты.

Функция $F_N(u_1, u_2, \dots, u_n)$, называемая рядом Фейера, определяется следующим образом:

$$F_N(u_1, u_2, \dots, u_n) = \prod_{j=1}^{p} F_{N_j}\left(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_n^{(j)}\right), \quad (9)$$

где

$$F_{N_j}\left(u_1^{(j)},u_2^{(j)},\ldots,u_n^{(j)}\right)=\frac{1}{(2\pi)^n N_j}\frac{\sin\frac{N_j u_1^{(j)}}{2}}{\sin\frac{u_1^{(j)}}{2}}\frac{\sin\frac{N_j u_2^{(j)}}{2}}{\sin\frac{u_2^{(j)}}{2}}\ldots\frac{\sin\frac{N_j u_n^{(j)}}{2}}{\sin\frac{u_n^{(j)}}{2}}\times$$
$$\times\frac{\sin\frac{N_j\left(u_1^{(j)}+u_2^{(j)}+\ldots+u_n^{(j)}\right)}{2}}{\sin\frac{\left(u_1^{(j)}+u_2^{(j)}+\ldots+u_n^{(j)}\right)}{2}},$$

$u_k=\left(u_k^{(1)},u_k^{(2)},\ldots,u_k^{(p)}\right)\in Q^p$, $k=\overline{1,n}$, n,p — произвольные натуральные числа; $N\in\left\{(N_1,N_2,\ldots,N_p):\ N_j=1,2,\ldots,\ j=\overline{1,p}\right\}$.

Справедливо следующее соотношение, используемое нами в дальнейшем при доказательстве приведенной ниже теоремы [1]:

$$F_N(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\frac{1}{(2\pi)^{np}N_1N_2\ldots N_p}\sum_{s_1=1}^{N_1}\sum_{s_2=1}^{N_2}\ldots\sum_{s_{n+1}=1}^{N_p}\exp\left\{i\langle s_1,u_1\rangle+\right.$$
$$\left.+i\langle s_2,u_2\rangle+\ldots+i\langle s_n,u_n\rangle-i\langle s_{n+1},u_1+u_2+\ldots+u_n\rangle\right\},\quad(10)$$

где $s_k=\left(s_k^{(1)},s_k^{(2)},\ldots,s_k^{(p)}\right)\in T$; $u_k=\left(u_k^{(1)},u_k^{(2)},\ldots,u_k^{(p)}\right)\in Q^p$, $k=\overline{1,n}$.

Лемма 1. *Ядро* (9) *обладает следующими свойствами:*

1)
$$\sup_N\int\int\limits_{Q^{np}}\ldots\int|F_N(u_1,u_2,\ldots,u_n)|\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n<\infty;\quad(11)$$

2)
$$\int\int\limits_{Q^{np}}\ldots\int|F_N(u_1,u_2,\ldots,u_n)|\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n=1\quad(12)$$

тождественно по N;

3) для каждого $\delta>0$

$$\lim_{\substack{\min N_j\to\infty\\1\leqslant j\leqslant p}}\int\int\limits_{Q^p/\ \{|u|\leqslant\delta\}}\ldots\int|F_N(u_1,u_2,\ldots,u_n)|\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\ldots\mathrm{d}u_n=0.\quad(13)$$

Доказательство леммы 1 приведено в работах [1–3].

Примечание. Обозначение $\{|u|\leqslant\delta\}$ говорит о том, что

$$\{|u|\leqslant\delta\}=\left\{\left(u_1^{(1)},u_1^{(2)},\ldots,u_1^{(p)};u_2^{(1)},u_2^{(2)},\ldots,u_2^{(p)};\ldots;u_n^{(1)},u_n^{(2)},\ldots,u_n^{(p)}\right):\right.$$
$$\left.\left|u_k^{(j)}\right|\leqslant\delta,\quad k=\overline{1,n},\quad j=\overline{1,p}\right\}.$$

Заметим, что ядро (9) является периодичной функцией с периодом 2π по каждому аргументу.

В приведенных ниже леммах 2, 3 все рассматриваемые функции также считаются периодичными с периодом 2π по каждому аргументу.

Лемма 2. *Пусть модули функций f и g интегрируемы с квадратом на множестве Q^p, а функция φ ограничена, $|\varphi(\alpha)| \leqslant C < \infty$. Тогда*

$$\lim_{\substack{\min N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \int\limits_{Q^p} \Bigg| \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \varphi(\alpha + \langle d_1, u \rangle) f(\alpha + \langle d_2, u \rangle) g(\alpha + \langle d_3, u \rangle) \times$$

$$\times F_N(u_1, u_2, u_3) \, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 - \varphi(\alpha) f(\alpha) g(\alpha) \Bigg| \mathrm{d}\alpha = 0, \quad (14)$$

где $\langle d_i, u \rangle = \langle d_{i1}, u_1 \rangle + \langle d_{i2}, u_2 \rangle + \langle d_{i3}, u_3 \rangle, d_{ik} \in R^p$, $i = \overline{1,3}$.

Лемма 3. *Пусть для функции $f(u_1, u_2, u_3)$ выполнены условия:*

1) $\int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} |f(u_1, u_2, u_3)| \, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 < \infty$;

2) $\sup\limits_{h \in Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} |f(\alpha, h - \alpha, \beta)| \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta < \infty$;

3) $\lim\limits_{|h| \to 0} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} |f(\alpha, h - \alpha, \beta) - f(\alpha, \alpha, \beta)| \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = 0$.

Тогда

$$\lim_{\substack{\min N_j \to \infty \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \Bigg| \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} f(\alpha + u_1, -\alpha + u_2, \beta + u_3) \times$$

$$\times F_N(u_1, u_2, u_3) \, \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \mathrm{d}u_3 - f(\alpha, -\alpha, \beta) \Bigg| \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = 0, \quad (15)$$

где $\alpha, \beta, u_k \in Q^p$, $k = \overline{1,3}$.

Леммы 2, 3 доказаны в работах [1, 2].

Перейдем теперь к формулировке и доказательству соответствующей теоремы.

Теорема. *Пусть поле $\{X(t), t \in T\}$ таково, что для фиксированного набора*

$$(a_1, b_1, a_2, b_2), 1 \leqslant a_1, b_1, a_2, b_2 \leqslant r,$$

выполнены условия:

1) *спектральные плотности $f_{a_1 a_2}$, $f_{b_1 b_2}$, $f_{a_1 b_2}$, $f_{b_1 a_2}$ существуют и их модули интегрируемы с квадратом;*
2) *спектральная плотность $f_{a_1 b_1 a_2 b_2}$ существует,*

$$\sup_{h \in Q^p} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} |f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\alpha, h - \alpha, -\beta)| \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta < \infty, \quad (16)$$

$$\lim_{|h| \to 0} \int\limits_{Q^p} \int\limits_{Q^p} |f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\alpha, h - \alpha, -\beta) - f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\alpha, -\alpha, -\beta)| \, \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta = 0. \quad (17)$$

Тогда для любых ограниченных функций $\varphi_1, \varphi_2, |\varphi_1(\lambda)| \leqslant C < \infty$, $|\varphi_2(\lambda)| \leqslant C < \infty$, имеем

$$\lim_{\substack{\min N_j\to\infty\\ 1<j<p}} E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)\right)=\lim_{\substack{\min N_j\to\infty\\ 1<j<p}} E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2')\right)=$$
$$=(2\pi)^p\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,\overline{\varphi_2(\beta)}f_{a_1b_1a_2b_2}(\alpha,-\alpha,-\beta)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta+(2\pi)^p\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,\overline{\varphi_2(\alpha)}\times$$
$$\times f_{a_1a_2}(\alpha)\,f_{b_1b_2}(-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha+(2\pi)^p\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,\overline{\varphi_2(-\alpha)}f_{a_1b_2}(\alpha)\,f_{b_1a_2}(-\alpha)\,\mathrm{d}\alpha,\quad(18)$$

где φ_2' — функция, комплексно-сопряженная к функции φ_2.

Доказательство.

$$E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\;\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)}\right)=E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\;\xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})\right)=$$
$$=E\left[\sqrt{N_1N_2\ldots N_p}\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha-E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\right)\times\right.$$
$$\left.\times\sqrt{N_1N_2\ldots N_p}\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta-E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\right)\right]=$$
$$=(N_1N_2\ldots N_p)\,E\left[\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta-\right.$$
$$-\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)-$$
$$-E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta+$$
$$\left.+E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\right]=(N_1N_2\ldots N_p)\times$$
$$\times\left[E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)-E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)\times\right.$$
$$\times E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)-E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)+$$
$$\left.+E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I^{(N)}_{a_1b_1}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I^{(N)}_{b_2a_2}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\right].$$

Тогда получим, что

$$E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\;\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)}\right)=E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\;\xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})\right)=$$

$$= (N_1N_2\dots N_p)\left[E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I_{a_1b_1}^{(N)}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I_{b_2a_2}^{(N)}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)-\right.$$

$$\left.-E\left(\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\,I_{a_1b_1}^{(N)}(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\right)E\left(\int\limits_{Q^p}\overline{\varphi_2(\beta)}I_{b_2a_2}^{(N)}(\beta)\,\mathrm{d}\beta\right)\right]. \quad (19)$$

Представим соотношение (19) в виде

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right)=E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right)=(N_1N_2\dots N_p)\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\times$$

$$\times\overline{\varphi_2(\beta)}\left[E\left(I_{a_1b_1}^{(N)}(\alpha)\,I_{b_2a_2}^{(N)}(\beta)\right)-EI_{a_1b_1}^{(N)}(\alpha)\,EI_{b_2a_2}^{(N)}(\beta)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (20)$$

Тогда, учитывая (6), получим, что

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right)=E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right)=(N_1N_2\dots N_p)\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\times$$

$$\times\overline{\varphi_2(\beta)}\left[E\left(\frac{1}{(2\pi)^p N_1N_2\dots N_p}\sum_{s_1^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_1^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s_1^{(p)}=1}^{N_p}e^{-i\langle\alpha,s_1\rangle}X_{a_1}(s_1)\sum_{s_2^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_2^{(2)}=1}^{N_2}\dots\right.\right.$$

$$\dots\sum_{s_2^{(p)}=1}^{N_p}e^{i\langle\alpha,s_2\rangle}X_{b_1}(s_2)\frac{1}{(2\pi)^p N_1N_2\dots N_p}\sum_{s_3^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_3^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s_3^{(p)}=1}^{N_p}e^{i\langle\beta,s_3\rangle}X_{a_2}(s_3)\times$$

$$\left.\times\sum_{s_4^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_4^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s_4^{(p)}=1}^{N_p}e^{-i\langle\beta,s_4\rangle}X_{b_2}(s_4)\right)-E\left(\frac{1}{(2\pi)^p N_1N_2\dots N_p}\sum_{s_1^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_1^{(2)}=1}^{N_2}\dots\right.$$

$$\left.\dots\sum_{s_1^{(p)}=1}^{N_p}e^{-i\langle\alpha,s_1\rangle}X_{a_1}(s_1)\sum_{s_2^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_2^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s_2^{(p)}=1}^{N_p}e^{i\langle\alpha,s_2\rangle}X_{b_1}(s_2)\right)\times$$

$$\times E\left(\frac{1}{(2\pi)^p N_1N_2\dots N_p}\sum_{s_3^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_3^{(2)}=1}^{N_2}\dots\sum_{s_3^{(p)}=1}^{N_p}e^{i\langle\beta,s_3\rangle}X_{a_2}(s_3)\sum_{s_4^{(1)}=1}^{N_1}\sum_{s_4^{(2)}=1}^{N_2}\dots\right.$$

$$\left.\left.\dots\sum_{s_4^{(p)}=1}^{N_p}e^{-i\langle\beta,s_4\rangle}X_{b_2}(s_4)\right)\right]\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (21)$$

Учитывая (7), представим соотношение (21) в виде

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right)=E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\,\xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right)=\frac{1}{(2\pi)^{2p}N_1N_2\dots N_p}\times$$

$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N} \left[E\left(X_{a_1}(s_1) X_{b_1}(s_2) X_{a_2}(s_3) X_{b_2}(s_4)\right) - \right.$$
$$\left. - E\left(X_{a_1}(s_1) X_{b_1}(s_2)\right) E\left(X_{a_2}(s_3) X_{b_2}(s_4)\right)\right] \exp\left\{-i\left\langle\alpha, s_1\right\rangle + i\left\langle\alpha, s_2\right\rangle + \right.$$
$$\left. + i\left\langle\beta, s_3\right\rangle - i\left\langle\beta, s_4\right\rangle\right\} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta. \quad (22)$$

Используя соотношение (1), получим, что

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2p} N_1 N_2 \ldots N_p} \times$$
$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N} \left[m_{a_1b_1a_2b_2}(s_1, s_2, s_3, s_4) - m_{a_1b_1}(s_1, s_2) \times \right.$$
$$\left. \times m_{a_2b_2}(s_3, s_4)\right] \exp\left\{-i\left\langle\alpha, s_1\right\rangle + i\left\langle\alpha, s_2\right\rangle + i\left\langle\beta, s_3\right\rangle - i\left\langle\beta, s_4\right\rangle\right\} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta. \quad (23)$$

Учитывая (2), получим, что

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2p} N_1 N_2 \ldots N_p} \times$$
$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N} \left[C_{a_1b_1a_2b_2}(s_1, s_2, s_3, s_4) + m_{a_1a_2}(s_1, s_3) \times \right.$$
$$\left. \times m_{b_1b_2}(s_2, s_4) + m_{a_1b_2}(s_1, s_4)\, m_{b_1a_2}(s_2, s_3)\right] \exp\left\{-i\left\langle\alpha, s_1\right\rangle + i\left\langle\alpha, s_2\right\rangle + \right.$$
$$\left. + i\left\langle\beta, s_3\right\rangle - i\left\langle\beta, s_4\right\rangle\right\} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta. \quad (24)$$

Используя соотношения (4), (5), получим, что

$$E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \overline{\xi_{a_2b_2}^{(N)}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi_{a_1b_1}^{(N)}(\varphi_1)\, \xi_{b_2a_2}^{(N)}(\overline{\varphi_2})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2p} N_1 N_2 \ldots N_p} \times$$
$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N} \left[\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1, y_2, y_3) \times \right.$$
$$\times \exp\left\{i\langle s_1 - s_4, y_1\rangle + i\langle s_2 - s_4, y_2\rangle + i\left\langle s_3 - s_4, y_3\right\rangle\right\} \mathrm{d}y_1 \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_3 +$$
$$+ \int\limits_{Q^p} f_{a_1a_2}(y_1) \exp\left\{i\left\langle s_1 - s_3, y_1\right\rangle\right\} \mathrm{d}y_1 \int\limits_{Q^p} f_{b_1b_2}(y_2) \exp\left\{i\left\langle s_2 - s_4, y_2\right\rangle\right\} \mathrm{d}y_2 +$$
$$\left. + \int\limits_{Q^p} f_{a_1b_2}(y_1) \exp\left\{i\left\langle s_1 - s_4, y_1\right\rangle\right\} \mathrm{d}y_1 \int\limits_{Q^p} f_{b_1a_2}(y_2) \exp\left\{i\left\langle s_2 - s_3, y_2\right\rangle\right\} \mathrm{d}y_2 \right] \times$$
$$\times \exp\left\{-i\langle\alpha, s_1\rangle + i\left\langle\alpha, s_2\right\rangle + i\left\langle\beta, s_3\right\rangle - i\left\langle\beta, s_4\right\rangle\right\} \mathrm{d}\alpha \mathrm{d}\beta. \quad (25)$$

Так как

$$\langle s_1 - s_4, y_1\rangle + \langle s_2 - s_4, y_2\rangle + \langle s_3 - s_4, y_3\rangle - \langle\alpha, s_1\rangle + \langle\alpha, s_2\rangle +$$
$$+ \langle\beta, s_3\rangle - \langle\beta, s_4\rangle = \langle s_1, y_1\rangle - \langle s_4, y_1\rangle + \langle s_2, y_2\rangle - \langle s_4, y_2\rangle +$$
$$+ \langle s_3, y_3\rangle - \langle s_4, y_3\rangle - \langle\alpha, s_1\rangle + \langle\alpha, s_2\rangle + \langle\beta, s_3\rangle - \langle\beta, s_4\rangle =$$

$$= \langle s_1 - s_3, y_1\rangle + \langle s_2 - s_4, y_2\rangle - \langle \alpha, s_1\rangle + \langle \alpha, s_2\rangle + \langle \beta, s_3\rangle -$$
$$- \langle \beta, s_4\rangle = \langle s_1, y_1\rangle - \langle s_3, y_1\rangle + \langle s_2, y_2\rangle - \langle s_4, y_2\rangle - \langle \alpha, s_1\rangle + \langle \alpha,$$
$$s_2\rangle + \langle \beta, s_3\rangle - \langle \beta, s_4\rangle = \langle s_1, y_1 - \alpha\rangle + \langle s_2, y_2 + \alpha\rangle + \langle s_3, \beta - y_1\rangle - \langle s_4, y_2 + \beta\rangle; \quad (26)$$

$$\langle s_1 - s_4, y_1\rangle + \langle s_2 - s_3, y_2\rangle - \langle \alpha, s_1\rangle + \langle \alpha, s_2\rangle + \langle \beta, s_3\rangle - \langle \beta, s_4\rangle =$$
$$= \langle s_1, y_1\rangle - \langle s_4, y_1\rangle + \langle s_2, y_2\rangle - \langle s_3, y_2\rangle - \langle \alpha, s_1\rangle + \langle \alpha, s_2\rangle +$$
$$+ \langle \beta, s_3\rangle - \langle \beta, s_4\rangle = \langle s_1, y_1 - \alpha\rangle + \langle s_2, y_2 + \alpha\rangle + \langle s_3, \beta - y_2\rangle - \langle s_4, y_1 + \beta\rangle; \quad (27)$$

то представим (25) в виде

$$E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2p}N_1N_2\ldots N_p}\times$$
$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N}\Bigg[\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1b_1a_2b_2}(y_1,y_2,y_3)\exp\{i\langle s_1, y_1 -$$
$$-\alpha\rangle + i\langle s_2, y_2+\alpha\rangle + i\langle s_3, y_3+\beta\rangle - i\langle s_4, y_1+y_2+y_3+\beta\rangle\}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\times$$
$$\times\,\mathrm{d}y_3 + \int\limits_{Q^p} f_{a_1a_2}(y_1)\int\limits_{Q^p} f_{b_1b_2}(y_2)\exp\{i\langle s_1, y_1 - \alpha\rangle + i\langle s_2, y_2+\alpha\rangle + i\langle s_3, \beta - y_1\rangle -$$
$$-i\langle s_4, y_2+\beta\rangle\}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2 + \int\limits_{Q^p} f_{a_1b_2}(y_1)\int\limits_{Q^p} f_{b_1a_2}(y_2)\exp\{i\langle s_1, y_1 - \alpha\rangle +$$
$$+i\langle s_2, y_2+\alpha\rangle + i\langle s_3, \beta - y_2\rangle - i\langle s_4, y_1+\beta\rangle\}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\Bigg]\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (28)$$

Введем обозначения вида

$$y_1 - \alpha = u_1;\, y_2 + \alpha = u_2;\, y_3 + \beta = u_3;\, \beta - y_1 = u_3;\, \beta - y_2 = u_3.$$

Тогда соотношение (28) примет следующий вид

$$E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})\right) = \frac{1}{(2\pi)^{2p}N_1N_2\ldots N_p}\times$$
$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)} \sum_{s_1=1}^{N}\sum_{s_2=1}^{N}\sum_{s_3=1}^{N}\sum_{s_4=1}^{N}\Bigg[\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1b_1a_2b_2}(u_1+\alpha, u_2-\alpha, u_3-\beta) +$$
$$+\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1a_2}(u_1+\alpha)\,f_{b_1b_2}(u_2-\alpha)\exp\{i\langle s_1, u_1\rangle + i\langle s_2, u_2\rangle + i\langle s_3, u_3\rangle -$$
$$-i\langle s_4, u_1+u_2+u_3\rangle\}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2 + \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1b_2}(u_1+\alpha)\,f_{b_1a_2}(u_2-\alpha)\times$$
$$\times\exp\{i\langle s_1, u_1\rangle + i\langle s_2, u_2\rangle + i\langle s_3, u_3\rangle - i\langle s_4, u_1+u_2+u_3\rangle\}\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\Bigg]\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta. \quad (29)$$

Используя представление (10), получим, что

$$E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\overline{\xi^{(N)}_{a_2b_2}(\varphi_2)}\right) = E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}(\varphi_1)\,\xi^{(N)}_{b_2a_2}(\overline{\varphi_2})\right) = (2\pi)^p\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\varphi_1(\alpha)\overline{\varphi_2(\beta)}\times$$

$$\times \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} f_{a_1b_1a_2b_2}\left(u_1+\alpha, u_2-\alpha, u_3-\beta\right) F_N\left(u_1,u_2,u_3\right) \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta +$$

$$+(2\pi)^p \int\limits_{Q^p} \varphi_1\left(\alpha\right) \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \overline{\varphi_2\left(\alpha+u_1+u_3\right)} f_{a_1a_2}\left(u_1+\alpha\right) f_{b_1b_2}\left(u_2-\alpha\right) F_N\left(u_1,u_2,u_3\right) \times$$

$$\times \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\mathrm{d}\alpha + (2\pi)^p \int\limits_{Q^p} \varphi_1\left(\alpha\right) \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \overline{\varphi_2\left(-\alpha+u_2+u_3\right)} f_{a_1b_2}\left(u_1+\alpha\right) \times$$

$$\times f_{b_1a_2}\left(u_2-\alpha\right) F_N\left(u_1,u_2,u_3\right) \mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\mathrm{d}u_3\mathrm{d}\alpha. \quad (30)$$

В силу лемм 2 и 3 (соотношения (14), (15)) при $\min N_j \to \infty 1 \leqslant j \leqslant p$ соотношение (30) примет вид

$$\lim_{\substack{\min N_j\to\infty \\ 1<j<p}} E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}\left(\varphi_1\right)\xi^{(N)}_{a_2b_2}\left(\varphi_2\right)\right) = \lim_{\substack{\min N_j\to\infty \\ 1<j<p}} E\left(\xi^{(N)}_{a_1b_1}\left(\varphi_1\right)\xi^{(N)}_{a_2b_2}\left(\varphi_2'\right)\right) =$$

$$= (2\pi)^p \int\limits_{Q^p}\int\limits_{Q^p} \varphi_1\left(\alpha\right)\overline{\varphi_2\left(\beta\right)} f_{a_1b_1a_2b_2}\left(\alpha,-\alpha,-\beta\right)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\beta + (2\pi)^p \int\limits_{Q^p} \varphi_1\left(\alpha\right)\overline{\varphi_2\left(\alpha\right)} f_{a_1a_2}\left(\alpha\right) \times$$

$$\times f_{b_1b_2}\left(-\alpha\right)\mathrm{d}\alpha + (2\pi)^p \int\limits_{Q^p} \varphi_1\left(\alpha\right)\overline{\varphi_2\left(-\alpha\right)} f_{a_1b_2}\left(\alpha\right) f_{b_1a_2}\left(-\alpha\right)\mathrm{d}\alpha.$$

Теорема доказана. □

Аналог теоремы для стационарных процессов, то есть в случае $p = 1$, при более ограничительных условиях, накладываемых на процесс $\{X(t), t \in T\}$ и на функцию φ, был доказан в работе Д.Р. Бриллинджера [4]. В случае $p = 1$ теорема доказана в работе Р. Бенткуса [2]. Аналог доказанной теоремы рассмотрен в работе Р. Бенткуса, В. Руткаускаса [1].

Литература

1. *Бенткус Р., Руткаускас В.* Об асимптотике первых двух моментов спектральных оценок второго порядка // Литовский математический сборник. — 1973. — Т. 13, вып. 1. — С. 29–45. [Bentkus R., Rutkauskas V. On Asymptotic Behaviour of the First and Second Moments of Spectral Estimates of Second Order // Lithuanian Mathematical Proceedings. — 1973. — Vol. 13, No. 1. — P. 29–45.]
2. *Бенткус Р.* Об ошибке оценки спектральной функции стационарного процесса // Литовский математический сборник. — 1972. — Т. 12, вып. 1. — С. 55–71. [Bentkus R. On the Error of the Estimate of the Spectral Function of a Stationary Process // Lithuanian Mathematical Proceedings. — 1972. — Vol. 12, No. 1. — P. 55–71.]
3. *Бенткус Р.* Об асимптотической нормальности оценки спектральной функции // Литовский математический сборник. — 1972. — Т. 12, вып. 3. — С. 5–18. [Bentkus R. On the Asymptotic Normality of the Estimate of the Spectral Function // Lithuanian Mathematical Proceedings. — 1972. — Vol. 12, No. 3. — P. 5–18.]
4. *Brillinger D. R.* Asymptotic Properties of Spectral Estimates of Second Order // Biometrika. — 1969. — Vol. 56, No 2. — Pp. 375–390.

UDC 519.24

On Asymptotic Behaviour of the Second Moment for the Spectral Estimate of a Homogeneous Field

A. Yu. Shomakhov

Plekhanov Russian University of Economics
Stremyanny per. 36, Moscow, 117997, Russian

A homogeneous (stationary in wide sense) random field with zero mean and real-valued components is given. The case of discrete parameter is considered. The matrix of second order periodograms, constructed by the sample is given. The asymptotic behaviour of the second moment of the second order spectral estimate of the homogeneous field is considered in the paper.

Key words and phrases: homogeneous field, periodogram, spectral density, second moment, Feuer kernel.