УДК 517.945

Отсутствие положительных решений полулинейных эллиптических неравенств для полигармонических операторов

Б. Б. Тсегау

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, 117198, Москва, Россия

В этой статье мы изучаем отсутствие положительных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств высших порядков, в частности, содержащих полигармонический оператор: $\Delta^k u(x) \geqslant |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)$, где $k \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Целью данной статьи является установление условий на значения $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ для отсутствия положительных решений этой задачи в ограниченных и неограниченных областях.

Основными инструментами являются априорные оценки и интегральные неравенства. Используя метод пробных функций, мы получим сначала априорные оценки для решений неравенства на основе интегральных неравенств и слабой постановки задачи с оптимальным выбором пробных функций, а затем сформулируем условие отсутствия решения задачи. Выбор таких функций определяется нелинейными членами задачи и зависит от понятия решения, с которым мы имеем дело.

Ключевые слова: полулинейные эллиптические неравенства, анизотропные особенности, полигармонический оператор, априорные оценки и отсутствие решений.

1. Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ – ограниченная область. Рассмотрим полулинейную эллиптическую задачу

$$\begin{cases} \Delta^k u(x) \geqslant |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x), & x \in \Omega \setminus \{0\}, \\ u(x) \geqslant 0, & x \in \Omega \setminus \{0\} \end{cases} \tag{1}$$

с $k \in \mathbb{N}$, $q > 1$ и $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Здесь для нас особый интерес представляет изучение того, при каких условиях на α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ задача (1) не имеет положительных решений в $\Omega \setminus \{0\}$. Для того чтобы сформулировать условие отсутствия положительных решений этой задачи, мы используем подход, разработанный Э. Л. Митидиери и С. И. Похожаевым [1] – метод пробных функций, позволяющий получать критерии глобальной и локальной разрешимости дифференциальных уравнений и неравенств в некоторых функциональных классах для широкого круга операторов, в том числе операторов высшего порядка, которые не подчиняются принципам сравнения и максимума.

Этот метод позволяет рассматривать слабые решения при получении априорных оценок решений путём алгебраического анализа интегральной формы неравенства, основанного на слабой постановке задачи со специальным (оптимальным) выбором пробных функций и масштабированием аргумента.

Задача об отсутствии положительных решений полулинейных эллиптических дифференциальных неравенств, связанных с полигармоническим оператором

Статья поступила в редакцию 13 июня 2013 г.

Автор выражает благодарность О. А. Салиевой за постановку задачи и Е. И. Галахову за руководство и полезное обсуждение результатов работы.

$$\begin{cases} \Delta^k u(x) \geqslant f(x)u^q(x), & x \in \Omega, \\ u(x) \geqslant 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

с изотропными особенностями $f(x) = |x|^{\alpha}$, изучалась Э. Л. Митидиери, С. И. Похожаевым в [1], когда $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\Omega = \Omega_{0,r_0} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < r_0\}$.

В работах [2,3] Е. И. Галахов изучал эту задачу с особенностями $f(x) \geqslant c\,|x|^{-\alpha}$, $c > 0$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условию внутреннего конуса, и такой, что $0 \in \partial\Omega$, а также $\Omega = B_1 \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < 1\}$. В [4] тот же автор утверждает, что им был получен результат об отсутствии решений задачи четвёртого порядка с оператором Δ^2 в шаре B_R.

В настоящей работе рассмотрим отсутствие положительных решений задачи с анизотропными особенностями:

$$f(x) = |x_1|^{\alpha_1}\,|x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n}$$

для $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n.$

Кроме того, мы докажем отсутствие решений задачи (2) для $\Omega = \mathbb{R}^n$ и

$$f(x) = \langle x_1\rangle^{\alpha_1}\,\langle x_2\rangle^{\alpha_2} \ldots \langle x_n\rangle^{\alpha_n}, \tag{3}$$

где $\langle x_i\rangle = 1 + |x_i|$.

Будем использовать обозначение

$$\Omega_\epsilon(x) := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : 0 < |x_i| \leqslant \epsilon,\ \forall i = 1, 2, \ldots, n,\ \ \epsilon > 0\}.$$

Чтобы получить априорные оценки решений неравенства (1), возьмём в его слабой формулировке пробные функции, зависящие от параметра и имеющие вид:

$$\varphi_R(x) = \varphi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \xi_1^\lambda\left(\frac{x_1}{R}\right)\xi_1^\lambda\left(\frac{x_2}{R}\right)\ldots\xi_1^\lambda\left(\frac{x_n}{R}\right),\ R > 0 \tag{4}$$

с достаточно большим $\lambda > 0$ (которое будет уточнено ниже) и $\xi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$.

В случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ будем использовать положительные пробные функции ξ_R с носителем в тонком слое, окружающем 0, определённые по формуле

$$\xi_R(x_i) = \xi_1\left(\frac{x_i}{R}\right) = \begin{cases} 0, & \text{если } |x_i| \leqslant R, \\ 1, & \text{если } 2R \leqslant |x_i| \leqslant 3R, \\ 0, & \text{если } |x_i| \geqslant 4R, \end{cases} \tag{5}$$

где $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$ и $R > 0$ так мало, что Ω_{4R} целиком лежит в $\Omega \setminus \{0\}$.

Легко видеть, что

$$\operatorname{supp}(\xi_R) \subset \Omega_{4R} \setminus \Omega_R.$$

В случае неограниченной области $\Omega := \mathbb{R}^n$ вместо ξ_R требуется использовать другое семейство пробных функций ζ_R, определённых по формуле

$$\zeta_R(x_i) = \zeta_1\left(\frac{x_i}{R}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x_i| \leqslant R, \\ 0, & \text{если } |x_i| \geqslant 2R. \end{cases} \tag{6}$$

Аналогично

$$\operatorname{supp}(\zeta_R) \subset B_{2R} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leqslant 2R\}.$$

После получения априорных оценок для решения задачи (1) при оптимальном выборе пробной функции этого типа, мы переходим к пределу при $R \to 0_+$ (в случае ограниченной области) или $R \to \infty$ (для неограниченных областей), что приводит к противоречию с предполагаемыми свойствами решения.

При доказательстве теоремы об отсутствии решений для задачи (1) будем использовать следующую оценку.

Лемма 1. *При* $\nu > 1$ *и пробной функции* φ_R*, которая определяется, как в* (4) *и* (5) *с* $\lambda > 2k\nu$*, выполнено неравенство:*

$$\left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^\nu \varphi_R^{1-\nu}(x) \leqslant a_0.R^{-2k\nu},\ x \in \Omega \setminus \{0\}. \tag{7}$$

где a_0 *— положительная постоянная, зависящая от* λ*,* ν *и* n*.*

Доказательство. Для того чтобы установить оценку (7), применяем правило Лейбница и индукцию следующим образом.

Заметим сначала, что из определения ξ_R имеем

$$\left|D_{x_i}^{\alpha_i} \xi_1\left(\frac{x_i}{R}\right)\right| \leqslant C_0 R^{-\alpha_i} \tag{8}$$

для любого $\alpha_i \in \mathbb{N}$ с некоторой константой $C_0 > 0$.

Кроме того, из (4) для производной $D^\alpha \varphi_R(x)$ имеем

$$|D^\alpha \varphi_R(x)| = \left|D^\alpha\left(\xi_1^\lambda\left(\frac{x_1}{R}\right)\xi_1^\lambda\left(\frac{x_2}{R}\right)\dots\xi_1^\lambda\left(\frac{x_n}{R}\right)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant C_{\lambda,\alpha}\prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda-\alpha_i}\left(\frac{x_i}{R}\right)\left|D_{x_i}^{\alpha_i}\xi_1\left(\frac{x_i}{R}\right)\right| \tag{9}$$

с некоторой константой $C_{\lambda,\alpha} > 0$.

Из ((8)) и ((9)) следует

$$\left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^\nu \varphi_R^{1-\nu}(x) = \left|\sum_{|\alpha|=2k} C_\alpha D^\alpha \varphi_R(x)\right|^\nu \varphi_R^{1-\nu}(x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|=2k} C_\alpha^\nu C_{\lambda,\alpha}^\nu \prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda\nu-\alpha_i\nu}\left(\frac{x_i}{R}\right)\left|D_{x_i}^{\alpha_i}\xi_1\left(\frac{x_i}{R}\right)\right|^\nu \left(\prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda(1-\nu)}\left(\frac{x_i}{R}\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\alpha|=2k} C_\alpha^\nu C_{\lambda,\alpha}^\nu C_0^\nu R^{-|\alpha|\nu}\prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda-\alpha_i\nu}\left(\frac{x_i}{R}\right) \leqslant$$
$$\leqslant C(\lambda,\nu,k) R^{-2k\nu}\prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda-\alpha_i\nu}\left(\frac{x_i}{R}\right),$$

где $C\left(\lambda,\nu,k\right) = \max\limits_{|\alpha|=2k}\left(C_0|C_\alpha|C_{\lambda,\alpha}\right)^\nu$ и C_α являются биномиальными коэффициентами разложения

$$\Delta^k(\cdot) = \sum_{|\alpha|=2k} C_\alpha D^\alpha(\cdot).$$

Но в силу (5), очевидно, $\xi_1\left(\dfrac{x_i}{R}\right) \leqslant 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, так что при $\lambda > 2k\nu$ имеем

$$\prod_{i=1}^n \xi_1^{\lambda-\alpha_i\nu}\left(\frac{x_i}{R}\right) \leqslant 1.$$

Отсюда следует утверждение леммы, и доказательство завершено. □

2. Основные результаты и их доказательства

В этом разделе мы докажем отсутствие положительных решений задачи (1) как в ограниченных, так и в неограниченных областях.

Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Для функции u, которая определена и дифференцируема почти всюду в $\Omega \setminus \{0\}$, будем предполагать, что существует

$$\lim_{R \to 0_+} \inf \tilde{u}(R)$$

где

$$\Omega_R := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega : 0 < |x_i| \leqslant R, \forall i = 1, 2, \ldots, n\},$$

$$\tilde{u}(R) := \frac{1}{\mu(\partial\Omega_R)} \oint\limits_{\partial\Omega_R} u(x)\mathrm{d}x,$$

$\mu(\partial\Omega_R)$ — мера множества $\partial\Omega_R$.

Далее определим класс допустимых решений задачи (1) в смысле распределений как

$$F(\Omega \setminus \{0\}) = \{u : \Omega \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+ : u \in L^q_{loc}(\Omega \setminus \{0\}), \lim_{R \to 0_+} \inf \tilde{u}(R) > 0\}.$$

Будем рассматривать решения задачи (1) $u \in F(\Omega \setminus \{0\})$ в смысле следующего определения.

Определение 1. функция $u \in F(\Omega \setminus \{0\})$ называется положительным (слабым) решением задачи (1), если для любой пробной функции $\varphi_R \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\}; \mathbb{R}_+)$ выполняется следующее интегральное неравенство:

$$\int\limits_{\Omega \setminus \{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\Omega \setminus \{0\}} u(x)\Delta^k \varphi_R(x)\mathrm{d}x, \tag{10}$$

Первым результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $q > 1$, $k \in \mathbb{N}$ и предположим, что имеет место неравенство:*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i < -2k.$$

Тогда задача (1) не имеет положительных решений в классе $F(\Omega \setminus \{0\})$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что задача (1) имеет положительное решение $u \in F(\Omega \setminus \{0\})$. Теперь рассмотрим срезающую функцию $\varphi_R \in C_0^\infty(\Omega \setminus \{0\}; \mathbb{R}_+)$, определённую в (4) и (5), с $\lambda > 2kq'$ такую, что

$$\left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^{q'} \varphi_R^{1-q'}(x) \in L^1_{loc}(\Omega \setminus \{0\}),$$

где $q' = \dfrac{q}{q-1}$.

Для того чтобы оценить интеграл в правой части неравенства (10), применим неравенство Гельдера:

$$\int\limits_{\Omega \setminus \{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\Omega \setminus \{0\}} u(x) \left|\Delta^k \varphi_R(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega\setminus\{0\}} \frac{\left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^{q'}}{\left(\varphi_R(x) |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{q'-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_{\Omega\setminus\{0\}} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega\setminus\{0\}} \left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^{q'} \varphi_R^{1-q'}(x) \left(|x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{1-q'} \mathrm{d}x. \quad (11)$$

В силу (4) и (5) размер носителя пробной функции φ_R зависит от параметра $R > 0$. Очевидно, $\mathrm{supp}\,(\varphi_R) \subset \Omega_{4R} \setminus \Omega_R$, так что неравенство (11) принимает вид

$$\int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} \left|\Delta^k \varphi_R(x)\right|^{q'} \varphi_R^{1-q'}(x) \left(|x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{1-q'} \mathrm{d}x. \quad (12)$$

Используя лемму 1 с $\nu = q'$, получаем

$$\int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant a_0.R^{-2kq'} \int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} \left(|x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n}\right)^{1-q'} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant a_0.b.R^{\gamma-2kq'} \int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_R} \mathrm{d}x = a_0.b.R^{\gamma-2kq'} \int\limits_R^{4R} \mathrm{d}r \oint\limits_{\partial\Omega_R} \mathrm{d}x \leqslant$$
$$\leqslant a_0.b_0 R^{\gamma-2kq'+n}, \quad (13)$$

где

$$\gamma := \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)(1-q'), b = \prod_{i=1}^n b_i, b_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha_i \geqslant 0, \\ 4^{\alpha_i(1-q')}, & \text{если } \alpha_i < 0. \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ и $b_0 := b_0(b, n) > 0$.

Теперь, сужая область интегрирования в левой части неравенства (13) на $\Omega_{3R} \setminus \Omega_{2R}$, где $\varphi_R(x) \equiv 1$, в силу (4) и (5) получаем

$$\int\limits_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}\ldots|x_n|^{\alpha_n}u^q(x)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_{4R}\setminus\Omega_{R}} |x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}\ldots|x_n|^{\alpha_n}u^q(x)\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant a_0.b_0.R^{\gamma-2kq'+n}. \quad (14)$$

Очевидно, на $\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}$ имеем неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} |x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}\ldots|x_n|^{\alpha_n}u^q(x)\mathrm{d}x \geqslant d.R^{\beta}\int\limits_{\Omega_{3R}\setminus\Omega_{2R}} u^q(x)\mathrm{d}x =$$

$$= d.R^{\beta}\int\limits_{2R}^{3R}\mathrm{d}r\oint\limits_{\partial\Omega_R} u^q(x)\mathrm{d}x = d.R^{\beta}\int\limits_{2R}^{3R}\mu\left(\partial\Omega_R\right)\tilde{u}^q(R)\mathrm{d}r \geqslant$$

$$\geqslant d_0.R^{\beta+n}\left(\inf\tilde{u}^q(R)\right), \quad (15)$$

с константами

$$\beta := \sum_{i=1}^{n}\alpha_i, \quad d = \prod_{i=1}^{n} d_i, d_i = \begin{cases} 2^{\alpha_i}, & \text{если } \alpha_i \geqslant 0,\\ 3^{\alpha_i}, & \text{если } \alpha_i < 0.\end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ и $d_0 := d_0(d, n) > 0$.

Комбинируя (14) и (15), получаем $\inf\tilde{u}^q(R) \leqslant \dfrac{a_0.b_0}{d_0}R^{\gamma-2kq'-\beta}$. Это означает, что

$$\inf\tilde{u}(R) \leqslant \left(\frac{a_0.b_0}{d_0}\right)^{\frac{1}{q}} R^{\frac{\gamma-2kq'-\beta}{q}} = \left(\frac{a_0.b_0}{d_0}\right)^{\frac{1}{q}} R^{\frac{-(\beta+2k)}{q-1}}. \quad (16)$$

Переходя к пределу в неравенстве (16) при $R \to 0_+$ и принимая во внимание, что по условию теоремы $q > 1, \beta < -2k$, получаем

$$\lim_{R\to 0_+}\inf\tilde{u}(R) = 0.$$

Это приводит к противоречию, что и завершает доказательство теоремы. □

Замечание 1. Условие $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i < -2k$ в теореме 1 существенно. Например, при $n = 2, k = 1$, $q > 1$ и $\alpha_1 + \alpha_2 > -2$ в области

$$\Omega := \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x_i| < 1, \forall i = 1, 2\right\}$$

существует нетривиальное положительное решение $u \in \mathcal{F}(\Omega\setminus\{0\})$ задачи (1) вида

$$u(x_1, x_2) = C\,|x_1|^{\sigma_1}|x_2|^{\sigma_2}$$

с некоторыми параметрами C, σ_1 и σ_2 такими, что

$$C := \min\left\{[\sigma_1(\sigma_1-1)]^{\frac{1}{q-1}}, [\sigma_2(\sigma_2-1)]^{\frac{1}{q-1}}\right\},$$

$$\frac{-\left(\alpha_1+2\right)}{q-1} \leqslant \sigma_1 < 0, \quad \frac{-\alpha_2}{q-1} \leqslant \sigma_2 < 0,$$

при условии, что σ_1 и σ_2 удовлетворяют неравенствам $-\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1 + \sigma_2 + 1 < 0$.

Действительно, $|x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}u^q(x_1,x_2) = C^q|x_1|^{\alpha_1+\sigma_1 q}|x_2|^{\alpha_2+\sigma_2 q}$ и $\Delta u(x_1,x_2) \geqslant C\sigma^*|x_1|^{\alpha_1+\sigma_1 q}|x_2|^{\alpha_2+\sigma_2 q}\left(|x_1|^{\mu_1}|x_2|^{\kappa_2} + |x_1|^{\kappa_1}|x_2|^{\mu_2}\right)$, где

$$\begin{aligned}
\sigma^* &:= \min\left\{\sigma_1(\sigma_1-1), \quad \sigma_2(\sigma_2-1)\right\},\\
\mu_i &:= -\left[\sigma_i(q-1)+2+\alpha_i\right], \quad i=1,2,\\
\kappa_i &:= -\left[\sigma_i(q-1)+\alpha_i\right], \quad i=1,2.
\end{aligned}$$

Если выбрать $C^{q-1} = \sigma^*$ и $0 < |x_i| < 1,\ \forall i = 1,2$, что, очевидно, возможно при условиях $\alpha_1+\alpha_2 > -2$, то

$$C\sigma^*|x_1|^{\alpha_1+\sigma_1 q}|x_2|^{\alpha_2+\sigma_2 q}\left(|x_1|^{\mu_1}|x_2|^{\kappa_2} + |x_1|^{\kappa_1}|x_2|^{\mu_2}\right) \geqslant \\ \geqslant C^q|x_1|^{\alpha_1+\sigma_1 q}|x_2|^{\alpha_2+\sigma_2 q} = |x_1|^{\alpha_1}|x_2|^{\alpha_2}u^q(x_1,x_2).$$

Кроме того,

$$\tilde{u}(R) = \begin{cases} \frac{2C}{(\sigma_1+1)(\sigma_2+1)}R^{\sigma_1+\sigma_2+1}, & \text{если } \sigma_1 \neq -1 \text{ и } \sigma_2 \neq -1,\\ \infty, & \text{если } \sigma_1 = -1 \text{ или } \sigma_2 = -1. \end{cases}$$

Отсюда, если выбрать σ_1 и σ_2 такие, что $-\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1+\sigma_2+1 < 0$, получим

$$\lim_{R\to 0_+}\inf \tilde{u}(R) > 0$$

Таким образом, построенная функция является решением задачи (1) при $n=2$ и $k=1$ в области $\Omega := \left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : 0 < |x_i| < 1, \forall i=1,2\right\}$.

Для $\Omega := \mathbb{R}^n$ такой подход позволяет доказать отсутствие неотрицательных (а не только строго положительных) нетривиальных решений [3] задачи (2)–(3) при определённых условиях на размерность и другие параметры.

Предположим, что функция $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ – допустимое решение задачи (2)–(3) в смысле следующего определения.

Определение 2. Неотрицательная функция $u \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n}u^q(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+),$$

называется слабым решением (2)–(3), если для любой пробной функции $\Psi_R \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}_+)$ выполняется интегральное неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n}u^q(x)\Psi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n}u(x)\Delta^k\Psi_R(x)\mathrm{d}x,$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $k\in\mathbb{N}, n > 2k, 1 < q < \frac{n+\beta}{n-2k}$, и предположим также, что имеет место неравенство*

$$\beta := \sum_{i=1}^n \alpha_i > -2k.$$

Тогда задача (2)–(3) не имеет неотрицательных нетривиальных решений в смысле определения 2.

Доказательство. Предположим, что неотрицательное нетривиальное решение u задачи (2)–(3) в смысле определения 2 существует. Возьмём пробные функции

$$\Psi_R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \zeta_1^\lambda\left(\frac{x_1}{R}\right)\zeta_1^\lambda\left(\frac{x_2}{R}\right)\ldots\zeta_1^\lambda\left(\frac{x_n}{R}\right) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n; [0,1])$$

с $\lambda > 2kq'$ и ζ_1, удовлетворяющими (6) и (8).

Тогда аналог неравенства (12) приводит к

$$\int\limits_{B_{2R}} \langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n} u^q(x)\Psi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B_{2R}} \left|\Delta^k\Psi_R(x)\right|^{q'}\Psi_R^{1-q'}(x)\left(\langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n}\right)^{1-q'}\mathrm{d}x. \quad (17)$$

Очевидно, что предыдущая лемма справедлива, если заменить ξ_R пробной функцией ζ_R, которая определена в (6) при $R > 1$. Таким образом, по лемме с $\nu = q'$ из неравенства (17) получаем

$$\int\limits_{B_{2R}} \langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n} u^q(x)\Psi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant C^*R^{n+\gamma-2kq'}, \quad (18)$$

где C^*– положительная постоянная, не зависящая от u и R,

$$\gamma := \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right)(1-q').$$

Если устремить $R \to \infty$, то при условиях теоремы 2 правая часть неравенства (18) стремится к нулю. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle x_1\rangle^{\alpha_1}\langle x_2\rangle^{\alpha_2}\ldots\langle x_n\rangle^{\alpha_n} u^q(x)\Psi_R(x)\mathrm{d}x = 0,$$

что возможно только при $u \equiv 0$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, мы приходим к противоречию с предположением о нетривиальной неотрицательности u. Утверждение доказано. □

Замечание 2. Для $\sum_{i=1}^n \alpha_i < -2k$ заключение теоремы 2 неверно. Например, нетрудно убедиться, что при $n = 3, k = 1$, $q > 1$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < -2$ существует нетривиальное положительное решение задачи (2)–(3) вида

$$u(x_1, x_2, x_3) = A\langle x_1\rangle^{\gamma_1}\langle x_2\rangle^{\gamma_2}\langle x_3\rangle^{\gamma_3},$$

где

$$\gamma_1 \leqslant \frac{-(\alpha_1+2)}{q-1},\ \gamma_2 \leqslant \frac{-\alpha_2}{q-1},\ \gamma_3 \leqslant \frac{-\alpha_3}{q-1},$$

$$A := \min\left\{[\gamma_1(\gamma_1-1)]^{\frac{1}{q-1}}, [\gamma_2(\gamma_2-1)]^{\frac{1}{q-1}}, [\gamma_3(\gamma_3-1)]^{\frac{1}{q-1}}\right\}.$$

В частности,

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_2+\alpha_3}{q-1}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_3+2}{q-1}, \quad \gamma_3 = \frac{\alpha_1+\alpha_2+2}{q-1}.$$

Литература

1. *Mitidieri E. L., Pohozaev S. I.* A Priori Estimates and the Absence of Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations and Inequalities // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — MAIK "Nauka/Interperiodica" (Russia), 2001. — Vol. 234, No 3. — 362 p.
2. *Galakhov E. I.* On Higher Order Elliptic and Parabolic Inequalities with Singularities on the Boundary // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 2010. — Vol. 269.
3. *Галахов Е. И.* О разрушении решений нелинейных сингулярных уравнений в частных производных // Труды математического института им. В.А. Стеклова РАН, Москва. — 2009. — 209 с. [Galahov E. I. On Blow-up Solutions of Nonlinear Singular Partial Differential Equations // Proceedings of Steklov Mathematical Institute of RAS, Moscow, 2009.]
4. *Лаптев Г. Г.* Об отсутствии решений одного класса сингулярных полулинейных дифференсиальных неравенств // Труды МИАН. — 2001. — Т. 232. — С. 223–235. [Laptev G. G. On the Absence of Solutions to a Class of Singular Semilinear Differential Inequalities // Tr. MIAN. — 2001. — Vol. 232. — P. 223–235.]

UDC 517.945

Nonexistence of Positive Solutions to Semilinear Elliptic Inequalities for Polyharmonic Operator

B. B. Tsegaw

Department of Mathematical Analysis and Theory of Functions
Peoples' Friendship University of Russia
Street Mikluho Maklay 6, 117198, Moscow, Russia

In this paper, we study the nonexistence of positive solution for some higher-order semilinear elliptic inequality particularly involving polyharmonic operator: $\Delta^k u(x) \geqslant |x_1|^{\alpha_1} |x_2|^{\alpha_2} \ldots |x_n|^{\alpha_n} u^q(x)$, where $k \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and $\alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, n$.
The purpose of this paper is to establish conditions on values of $\alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$ for the nonexistence of positive solution to this problem in a bounded and unbounded domain.
The main tools are a priori estimates and integral inequalities. Using the test function method, we derive first a priori estimates for solutions of the inequality based on integral inequalities and on the weak formulation of the problem with an optimal choice of test functions and then we formulate the nonexistence condition of the solution of the problem. The choice of such functions is determined by the nonlinear characters of the problem and depends on the concept of solutions that we are dealing with.

Key words and phrases: semilinear elliptic inequalities, anisotropic singularities, polyharmonic operators, apriori estimates and nonexistence of solutions.