УДК 517.925.51

Аналитические методы исследования устойчивости линейных и квазилинейных систем с полиномиально периодической матрицей

Нгуен Вьет Хоа

Кафедра высшей математики
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Предложен метод анализа линейных и квазилинейных модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с полиномиально периодической матрицей при наличии определяющей матрицы $A_0\,(t)$ различной стабильной жордановой структуры. С помощью современного алгоритма метода расщепления (предложенного в девяностых годах двадцатого века) изучены новые вышеуказанные классы систем ОДУ. Для этик классов сформулирован ряд нетривиальных теорем о приводимости к эквивалентным системам с почти диагональной матрицей, что позволяет найти достаточные условия устойчивости решения таких систем. Разработанный метод дал возможность исследовать ряд конкретных прикладных модельных задач, что обобщает или уточняет известные ранее результаты.

Ключевые слова: модельные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиально периодической матрицей, метод расщепления, устойчивость, теоремы о приводимости.

1. Введение

Для нового класса модельных неавтономных систем ОДУ с полиномиально периодической матрицей с помощью неавтономного аналога метода расщепления получены конструктивные достаточные условия устойчивости решения указанных систем ОДУ, что обобщает или уточняет известные ранее результаты [1–6].

2. Анализ неавтономных систем ОДУ с периодической матрицей при наличии определяющей матрицы $A_0\,(t)$ простой структуры

Теорема 1. *Неавтономная квазилинейная система ОДУ с полиномиально периодической матрицей вида:*

$$\dot{x} = t^m A\,(t)\,x + f\,(x,t)\,, \quad x\,(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x, f \in R^n, \quad m \geqslant 1, \quad t_0 > 1, \quad f\,(0,t) \equiv 0,$$

где полиномиально периодический матричный ряд $A\,(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k\,(t)\,t^{-k}$ *из* T-*периодических и достаточно гладких квадратных матриц* $A_k\,(t)$ *сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при* $t \geqslant t_0 > 1$*, в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\,(t)\}_1^n$ *матрицы* $A_0\,(t)$ *удовлетворяет неравенствам:*

$$\sigma_{jk}\,(t) \equiv \lambda_{0j}\,(t) - \lambda_{0k}\,(t) \neq 0, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad t \geqslant t_0 > 1, \tag{2}$$

может быть с помощью полиномиально периодической невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$ *замены:*

$$x = S_0\,(t)\,H_{(N)}\,(t)\,z, \tag{3}$$

Статья поступила в редакцию 15 июня 2013 г.

$$S_0^{-1}(t)\,A_0(t)\,S_0(t) = \lambda_0(t) = \mathrm{diag}\left\{\lambda_{01}(t), ..., \lambda_{0n}(t)\right\},$$

$$H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} \bar{\bar{H}}_k(t)\,t^{-k},$$

приведена к неавтономной системе с почти диагональной полиномиально периодической матрицей:

$$\dot{z} = t^m Q(t)\,z + g(z,t), \quad z(t_0) = z_0, \tag{4}$$

$$Q(t) = \lambda_{(N)}(t) + t^{-N-1} G_{(N+1)}(t), \quad \lambda_{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k(t)\,t^{-k}, \quad \left\|G_{(N+1)}(t)\right\| \leqslant C,$$

где диагональные $\lambda_k(t)$ *и «бездиагональные»* $\bar{\bar{H}}_k(t), k = \overline{1,N}$, *T-периодические матрицы однозначно определяются итерационным методом.*

Доказательство. В условиях теоремы 1 существует [7] невырожденная T-периодическая замена $x = S_0(t)\,y$, приводящая систему (1) к виду:

$$\dot{y} = t^m B(t)\,y + h(y,t), \quad y(t_0) = y_0, \quad B(t) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,t^{-k},$$

что позволяет после ещё одного невырожденного при достаточно больших $t > t_0 > 1$ конечного полиномиально периодического преобразования $y = H_{(N)}(t)\,z$ перейти к системе (4), если матрицы $B(t)$, $H_{(N)}(t)$ и $Q(t)$ удовлетворяют дифференциальному матричному уравнению:

$$\dot{H}_{(N)} = t^m \left(B(t)\,H_{(N)}(t) - H_{(N)}(t)\,Q(t)\right). \tag{5}$$

Приравнивая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим неавтономные алгебраические матричные уравнения, имеющие одинаковую структуру, анализ которых даёт возможность для последовательного и однозначного определения всех необходимых T-периодических диагональных $\lambda_k(t)$ и «бездиагональных» $\overline{\overline{H}}_k(t)$ матриц $\left(k = \overline{1,N}\right)$:

$$t^{m-k}: \quad \lambda_0(t)\,\bar{\bar{H}}_k(t) - \bar{\bar{H}}_k(t)\,\lambda_0(t) = \lambda_k(t) - P_k(t), \quad k = \overline{1,N}, \tag{6}$$

$$P_1(t) \equiv B_1(t), \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(B_j(t)\,\bar{\bar{H}}_{k-j}(t) - \bar{\bar{H}}_{k-j}(t)\,\lambda_j(t)\right), \quad k = \overline{2,N},$$

$$t^{-k}: \quad \lambda_0(t)\,\bar{\bar{H}}_{m+k}(t) - \bar{\bar{H}}_{m+k}(t)\,\lambda_0(t) = \lambda_{m+k}(t) - P_{m+k}(t), \tag{7}$$

$$P_{m+k}(t) = B_{m+k}(t) + \sum_{j=1}^{m+k-1}\left(B_j(t)\,\bar{\bar{H}}_{m+k-j}(t) - \bar{\bar{H}}_{m+k-j}(t)\,\lambda_j(t)\right) -$$
$$- \dot{\bar{\bar{H}}}_k(t) + (k-1)\,\bar{\bar{H}}_{k-1}(t), \quad k = \overline{1, N-m}.$$

Структура линейных алгебраических матричных уравнений (6) и (7) позволяет однозначно и конструктивно определить все необходимые T-периодические матрицы $\lambda_k(t)$ и $H_k(t)$:

$$\lambda_k(t) = \bar{P}_k(t), \quad \bar{\bar{H}}_k(t) = \left\{h_{ijk}(t)\right\}, \quad P_k(t) = \left\{p_{ijk}(t)\right\},$$

$$h_{ijk}(t) = -p_{ijk}(t)/\sigma_{ij}(t), \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,N},$$

что и завершает доказательство теоремы 1. □

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1* ($m \geqslant 1$) *спектр* $\{\lambda_j(t)\}_1^n$ *вспомогательной матрицы* $t^m \sum\limits_{k=0}^{m-1} \lambda_k(t)\, t^{-k}$ *удовлетворяет неравенствам* $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leqslant -\sigma_0 t^q + \varphi(t)$, $j = \overline{1,n}$, $q = \overline{0,m}$, $m \geqslant 1$, $\sigma_0 > 0$, $b(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant C$, *и для достаточно гладкой функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка:*

$$|f(x,t)| \leqslant C_0 |x|^{1+\alpha}, \quad \alpha, C_0 > 0, \quad |x| \leqslant R, \quad t \geqslant t_0,$$

то тривиальное решение неавтономной квазилинейной системы (1) *асимптотически устойчиво, а в случае, когда* $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leqslant \varphi(t)$, $j = \overline{1,n}$, $b(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(s)\,\mathrm{d}s \leqslant C$, $t \geqslant t_0$, *тривиальное решение соответствующей однородной* ($f \equiv 0$) *системы вида* (1) *устойчиво.*

Доказательство. С учётом эквивалентности систем (1) и (4) оценим квадрат евклидовой нормы решения системы (4):

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|z|^2}{\mathrm{d}t} = \operatorname{Re}\left(z^* t^m \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k(t)\, t^{-k} z\right) + t^{-2}\operatorname{Re}\left(z^* G_{(N+1)}(t)\, z\right) + \operatorname{Re}\left(z^* g(z,t)\right) \leqslant$$
$$\leqslant \left(-\sigma_0 t^q + \varphi(t) + C_1 t^{-2} + C_2 |z|^{\alpha}\right)|z|^2 \leqslant \left(-\sigma_1 t^q + \varphi(t)\right)|z|^2, \quad (0 < \sigma_1 < \sigma_0).$$

Полученное неравенство $|z(t)| \leqslant C_2 |z_0| \exp\left(\frac{\sigma_1}{q+1}\left(t_0^{q+1} - t^{q+1}\right)\right) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, доказывает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (4) и эквивалентной системы (1).

Во втором случае (когда $\operatorname{Re}\lambda_j(t) \leqslant \varphi(t)$) устойчивость тривиального решения однородной ($f \equiv 0$) системы вида (1) следует из другой оценки:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|z|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant \left(\varphi(t) + t^{-2} C_1\right)|z|^2,$$

что позволяет записать $|z(t)| \leqslant |z_0| \exp\left(b(t) + C_1\left(t_0^{-1} - t^{-1}\right)\right) \leqslant C_2 |z_0|$. Теорема 2 доказана. □

По аналогичной схеме может быть исследован случай при $m = 0$.

Теорема 3. *Неавтономная квазилинейная система (при* $m = 0$*) с полиномиально периодической матрицей вида* (1)*:*

$$\dot{x} = A(t)\, x + f(x,t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x, f \in R^n, \quad t_0 > 1, \quad f(0,t) \equiv 0, \tag{8}$$

где полиномиально периодический матричный ряд $A(t) = A_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k(t)\, t^{-k}$ *из T-периодических и достаточно гладких квадратных матриц* $A_k(t)$ $(k \geqslant 1)$ *сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при* $t \geqslant t_0 > 1$, *в случае, если спектр* $\{\lambda_{0j}\}_1^n$ *постоянной матрицы* A_0 *простой структуры удовлетворяет неравенствам:*

$$\sigma_{jk} \equiv \lambda_{0j} - \lambda_{0k} \neq i\frac{2\pi q}{t}, \quad j \neq k, \quad j,k = \overline{1,n}, \quad q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ..., \tag{9}$$

может быть с помощью полиномиально периодической невырожденной при достаточно больших $t > t_0 > 1$, замены:

$$x = S_0 H_{(N)}(t)\, z,\ S_0^{-1} A_0 S_0 = \lambda_0 = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}, ..., \lambda_{0n}\},\ H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} H_k(t)\, t^{-k},$$

приведена к неавтономной системе с почти диагональной полиномиальной матрицей вида:

$$\dot{z} = Q(t)\, z + g(z, t), \quad z(t_0) = z_0, \tag{10}$$

$$Q(t) = \lambda_{(N)}(t) + t^{-N-1} G_{(N+1)}(t), \quad \lambda_{(N)}(t) = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k t^{-k}, \quad \left\|G_{(N+1)}(t)\right\| \leqslant C,$$

где диагональные постоянные матрицы λ_k и «бездиагональные» T-периодические матрицы $H_k(t)$ $\left(k = \overline{1, N}\right)$ однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма.

3. О приводимости систем ОДУ с полиномиально периодической матрицы $A_0(t)$ полупростой структуры

Теорема 4. *Неавтономная квазилинейная система ($m \geqslant 1$):*

$$\dot{x} = t^m A(t)\, x + f(x, t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{11}$$

$$x, f \in R^n, \quad m \geqslant 1, \quad t_0 > 1, \quad f(0, t) \equiv 0,$$

где матричный ряд $A(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} A_k(t)\, t^{-k}$ из T-периодических и достаточно гладких квадратных матрицы $A_k(t)$ сходится по некоторой норме абсолютно и равномерно при $t \geqslant t_0 > 1$, при наличии у матрицы $A_0(t)$ полупростой структуры стабильного кратного спектра $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^p$ $(1 \leqslant p < n)$, когда существует невырожденная T-периодическая матрица $S_0(t)$ такая, что:

$$S_0^{-1}(t)\, A_0(t)\, S_0(t) = \lambda_0(t) = \operatorname{diag}\{\lambda_{01}(t), ..., \lambda_{0p}(t)\},$$

$$\lambda_{0j}(t) = \lambda_{0j}(t)\, E, \quad j = \overline{1, p}, \quad 1 \leqslant p < n,$$

в случае, если её спектр $\{\lambda_{0j}(t)\}_1^p$ $(1 \leqslant p < n)$ удовлетворяет неравенствам:

$$\sigma_{jk}(t) \equiv \lambda_{0j}(t) - \lambda_{0k}(t) \neq 0, \quad j \neq k, \quad j, k = \overline{1, p}, \quad 1 \leqslant p < n, \quad t \geqslant t_0, \tag{12}$$

может быть с помощью невырожденной при $t > t_0 > 1$ полиномиально периодической замены:

$$x = S_0(t)\, H_{(N)}(t)\, z, \quad H_{(N)}(t) = E + \sum_{k=1}^{N} \widehat{\widehat{H}}_k(t)\, t^{-k},$$

приведена к более простой эквивалентной системе с почти «блочно диагональной» матрицей вида:

$$\dot{z} = t^m Q(t)\, z + g(z, t), \quad z(t_0) = z_0, \tag{13}$$

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{N} \widehat{F}_k(t)\, t^{-k} + t^{-N-1} G_{(N+1)}(t), \quad \widehat{F}_0(t) = \lambda_0(t), \quad \left\|G_{(N+1)}(t)\right\| \leqslant C,$$

где T-периодические матрицы $\widehat{\widehat{H}}_k(t)$ *и «блочно диагональные» матрицы* $\widehat{F}_k(t)$, $k = \overline{1,N}$, *однозначно определяются с помощью итерационного алгоритма, а оценка* $\left\|G_{(N+1)}(t)\right\| \leqslant C$ *проверяется прямым вычислением.*

Доказательство. Замена $x = S_0(t)\,y$ приводит к системе:

$$\dot{y} = t^m B(t)\,y + h(y,t)\,, \quad y(t_0) = y_0, \quad B(t) = \lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(t)\,t^{-k},$$

которая после полиномиально периодического невырожденного при достаточного больших $t > t_0 > 1$ преобразования $y = H_{(N)}(t)\,z$ даёт нужный результат (13), если матрицы $B(t)$, $H_{(N)}(t)$ и $Q(t)$ удовлетворяют дифференциальному матричному уравнению:

$$\dot{H}_{(N)} = t^m \left(B(t)\,H_{(N)}(t) - H_{(N)}(t)\,Q(t)\right), \tag{14}$$

Приравнивая в (13) коэффициенты при одинаковых степенях t, получим набор однотипных по существу алгебраических неавтономных матричных уравнений:

$$\lambda_0(t)\,\widehat{\widehat{H}}_k(t) - \widehat{\widehat{H}}_k(t)\,\lambda_0(t) = \widehat{F}_k(t) - P_k(t)\,, \quad k = \overline{1,m},$$

$$P_1(t) = B_1(t)\,, \quad P_k(t) = B_k(t) + \sum_{j=1}^{k-1}\left(B_j(t)\,\widehat{\widehat{H}}_{k-j}(t) - \widehat{\widehat{H}}_{k-j}(t)\,\widehat{F}_j(t)\right),\ k = \overline{2,m},$$

$$\lambda_0(t)\,\widehat{\widehat{H}}_{m+k}(t) - \widehat{\widehat{H}}_{m+k}(t)\,\lambda_0(t) = \widehat{F}_{m+k}(t) - P_{m+k}(t)\,, \quad k = \overline{1,N-m}, \tag{15}$$

$$P_{m+k}(t) = B_{m+k}(t) + \sum_{j=1}^{m+k-1}\left(B_j(t)\,\widehat{\widehat{H}}_{m+k-j}(t) - \widehat{\widehat{H}}_{m+k-j}(t)\,\widehat{F}_j(t)\right) - \\ - \dot{\widehat{\widehat{H}}}_k(t) + (k-1)\,\widehat{\widehat{H}}_{k-1}(t)\,,$$

откуда однозначно определяются все необходимые T-периодические матрицы $\widehat{F}_k(t)$ и $\widehat{\widehat{H}}_k(t)$, $k = \overline{1,N}$:

$$\widehat{F}_k(t) = \widehat{P}_k(t)\,, \quad P_k(t) = \{p_{ijk}(t)\}\,, \quad \widehat{\widehat{H}}_k(t) = \{h_{ijk}(t)\}\,,$$

$$h_{ijk}(t) = -p_{ijk}(t)/\sigma_{ij}(t)\,, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,p}, \quad k = \overline{1,N}.$$

Что и завершает доказательство теоремы 4. □

4. Заключение

Доказаны теоремы о приводимости большого класса модельных систем ОДУ с полиномиально периодической матрицей к более простым системам ОДУ, что даёт возможность для более точного анализа таких систем, включая вопросы устойчивости.

Предложенный алгоритм исследования таких систем ОДУ (в основе которого лежит метод расщепления [3, 4]) при наличии матрицы $A_0(t)$ различной стабильной жордановой структуры является уточнением или обобщением известных ранее результатов [1–6].

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, Изд-во МГУ, 1998. — 480 с. [Demidovich B. P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. — Moscow: Nauka, 1998. — 480 p.]
2. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с. [Rozo M. Nonlinear Oscillations and Stability Theory. – Moscow: Nauka, 1971.]
3. *Коняев Ю. А.* Асимптотика решений дифференциальных уравнений с полиномиально периодическими коэффициентами // Вестник МЭИ. — 1996. — № 6. — С. 79–88. [Konyaev Yu. A. Asymptotic Behavior of Solutions of Differential Equations with Polynomial Coefficients Periodic // Bulletin of MEI. — 1996. — No 6. — P. 79–88.]
4. *Коняев Ю. А.* О некоторых методах исследования устойчивости // Математический сборник. — 2001. — Т. 192, № 3. — С. 65–82. [Konyaev Yu. A. Some Methods for Studying Stability // Mathematics Collection.— 2001. — Vol. 192, No 3. — P. 65–82.]
5. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений ОДУ. — М.: Мир, 1998. — 464 с. [Vazov V. Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations (ODE). — Math. world, 1998. — 464 p.]
6. *Нгуен В. Х.* Об асимптотической приводимости некоторых классов модельных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиполиномиальной матрицей // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2012. — № 2. — С. 12–17. [Nguyen Viet Khoa. About Asymptotic Transformation Some Classes of Systems of the Model Ordinary Differential Equations (ODE) with a Quasipolynomial Matrix // Bulletin of PFUR. Series "Mathematics. Information Sciences. Physics". — 2012. — No 2. — P. 12–17.]
7. *Воеводин В. В.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974. — 336 с. [Voevodin V. V. Linear Algebra. — Moscow: Nauka, 1974. — 336 p.]

UDC 517.925.51

Analytical Methods for Studying the Stability of Linear and Quasi-Linear Systems with Polynomial Completeness of the Periodic Matrix

Nguyen Viet Khoa

Department of Mathematics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We propose a method for the analysis of linear and quasi-linear model systems of ordinary differential equations (ODE) with polynomially periodic matrix in the presence of $A_0(t)$ defining different stable Jordan structure. With the help of a modern method of splitting algorithm (proposed in the nineties of the twentieth century), the new above mentioned classes of systems of ordinary differential equations are studied and a number of non-trivial theorems on reducibility to an equivalent system with an almost diagonal matrix are made, allowing sufficient conditions for the stability of solutions of such systems. The developed method is given the opportunity to explore a number of application-specific modeling problems that generalizes and refines the known results.

Key words and phrases: model systems of ordinary differential equations with periodic matrix polynomial, splitting method, stability, theorems on reducibility.