УДК 530.145, 51-7

Моменты наблюдаемых величин в модели квантовых измерений Курышкина–Вудкевича

А. В. Зорин

Лаборатория вычислительной физики и математического моделирования
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В рамках конструктивной модели Курышкина Вудкевича теории квантовых измерений рассмотрена проблема вычисления измеренных моментов наблюдаемых величин. Данная проблема связана с проблемой вычисления дисперсии измеренных значений наблюдаемой, подробно рассмотренной в работах В. Курышкина. Значения моментов и дисперсии однозначно определяются квантовой функцией распределения Курышкина-Вудкевича.

Ключевые слова: квантовые измерения, операциональное квантовое распределение вероятностей, неотрицательная квантовая функция распределения, дисперсия измеренных значений наблюдаемых, моменты измеренных значений наблюдаемых.

1. Операциональный подход к квантовым измерениям

Проблема квантовых измерений привлекала к себе внимание исследователей с самого начала квантовых исследований. Первую модель квантовых измерений предложил Дж. Нейман, развитием его идей стала статистическая модель квантовых измерений. Особое место занимают публикации, посвящённые статистической интерпретации результатов квантовых измерений, начиная с работ Я. Терлецкого, Д. Блохинцева и др. В реализацию строящейся модели внесли свой вклад К. Мехта, П. Дирак, Дж. Шьюэл, Дж. Мойэл, Л. Коэн и В. Курышкин. В своей оценке работ Курышкина Л. Коэн писал о родстве квантовой механики с неотрицательной КФР и своей частотно-временной спектроскопической функции в теории обработки сигналов. Там же он указал на родственную им обоим работу К. Вудкевича.

В работе К. Вудкевича [1] рассмотрен пример измерения координаты и импульса движущейся заряженной частицы с помощью фильтрующего электромагнитного лазерного импульса. Полученное двухпараметрическое выражение автор предложил называть операциональным координатно-импульсным распределением вероятностей

$$P\left(q,p\right) = \frac{1}{2\pi\hbar}\left|\int \psi^{*}\left(x+q\right)\varphi\left(x\right)\exp\left\{-ipx/\hbar\right\}\mathrm{d}x\right|^{2}. \tag{1}$$

Результат (1) буквально совпадает с выражением для неотрицательной квантовой функции распределения В. Курышкина [2–4].

Отталкиваясь от приведённого примера, автор [1] постулирует, что функция распределения измеренных значений наблюдаемых квантового объекта, находившегося до измерения в состоянии ψ_1 с функцией распределения Вигнера W_{ψ_1}, с помощью квантового детектора (измерительного устройства), находившегося до процедуры измерения в состоянии ψ_2 с функцией распределения Вигнера W_{ψ_2}, равна $P_\psi\left(q,p\right) = \left(W_{\psi_1} * W_{\psi_2}\right)\left(q,p\right)$. В работе [5] показано, что это соотношение при замене $\psi_1 \mapsto \rho_1$ и $\psi_2 \mapsto \rho_2$ переходит в соотношение $P_\rho\left(q,p\right) = \left(W_{\rho_1} * W_{\rho_2}\right)\left(q,p\right)$, которое также совпадает с выражением для неотрицательной квантовой функции распределения Курышкина [2–4].

Один из результатов конструкции К. Вудкевича — положительная определённость функции распределения вероятности измеренных значений наблюдаемой. Результат о положительной определённости свёртки двух функций Вигнера был доказан в работе [6]. И оба эти результата подтверждают тезис Блохинцева–Терлецкого–Курышкина [2–4,7–9] о положительно определённой квантовой функции распределения вероятностей наблюдения измеренных величин. Именно этот тезис В. Курышкин положил в основу построения своего правила квантования, однозначно соответствующего согласно результатам работ [10, 11] неотрицательной квантовой функции распределения, а затем построил и саму квантовую функцию распределения $F_\psi\left(q,p,t\right) = \left(2\pi\hbar\right)^{-N}\sum\left|\int\varphi_k^*\left(q-\xi,t\right)\psi\left(\xi,t\right)e^{-\frac{i}{\hbar}(\xi p)}\mathrm{d}\xi\right|^2$, и правило квантования

$$O\left(A\right)\psi\left(q,t\right) = \\ = \left(2\pi\hbar\right)^{-N}\int\Phi\left(\xi-q,\eta-p,t\right)A\left(\xi,\eta,t\right)e^{\frac{i}{\hbar}\left(\left(q-q'\right)p\right)}\psi\left(q',t\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}p\mathrm{d}q, \quad (2)$$

зависящее от вспомогательных функций $\{\varphi_k\}$ следующим образом:

$$\Phi\left(q,p,t\right) = \left(2\pi\hbar\right)^{N/2}e^{-\frac{i}{\hbar}(qp)}\sum_k\varphi_k\left(q,t\right)\tilde{\varphi}_k\left(p,t\right),$$

$$\tilde{\varphi}_k\left(p,t\right) = \left(2\pi\hbar\right)^{N/2}\int e^{-\frac{i}{\hbar}(qp)}\varphi_k\left(q,t\right)\mathrm{d}q.$$

2. Неопределённость значений физических величин

Как и во всякой вероятностной теории, в квантовой механике с неотрицательной квантовой функцией распределения важную роль играет степень неопределённости значения $\langle A\rangle$, количественной мерой которого служит дисперсия $\left\langle\left(\Delta A\right)^2\right\rangle = \left\langle\left(A-\langle A\rangle\right)^2\right\rangle = \left\langle A^2\right\rangle - \langle A\rangle^2$. Неотрицательность $\left\langle\left(\Delta A\right)^2\right\rangle$ здесь гарантирована существованием неотрицательной квантовой функции распределения. Задача поиска таких распределений F, при которых значение $\langle A\rangle$ определено максимально точно, сводится [12] к решению уравнения:

$$\left[O\left(A^2\right) - 2\alpha_A O\left(A\right) + \alpha_A^2\right]\psi = d_A^2\psi, \quad (3)$$

которому удовлетворяют функции ψ состояний с максимально определённым значением величины A. Величины α_A и d_A^2 в (3) совпадают со средним значением $\langle A\rangle$ и дисперсией $\left\langle\left(\Delta A\right)^2\right\rangle$ соответственно.

Оператор квадрата величины не совпадает с квадратом оператора этой же величины, что может быть записано в виде

$$O\left(A^2\right) = O^2\left(A\right) + D\left(A\right), \quad (4)$$

где добавочный оператор $D\left(A\right)$ зависит как от самой величины A, так и от функций φ_k, и в общем случае отличен от нуля. В соотношении (4) заключается одно из наиболее существенных отличий квантовой механики с неотрицательной КФР от общепринятой.

Подставляя в уравнение (3) оператор (4), нетрудно убедиться, что в частном случае, когда $D\left(A\right) = 0$, решениями уравнения (3) являются все решения уравнения: $O\left(A\right)\psi = A'\psi$, т.е. собственные функции оператора $O\left(A\right)$. При этом $\langle A\rangle = A'$ и $\left\langle\left(\Delta A\right)^2\right\rangle = 0$, т.е. значение $\langle A\rangle$ определено точно, что и происходит в общепринятой квантовой механике.

В квантовой механике с неотрицательной квантовой функции распределения, где в силу правила построения операторов (2) в общем случае $D(A) \neq 0$, уравнения (2) и (4) определяют принципиально различные вероятностные соотношения. Определив собственные значения уравнения (3), можно утверждать, что для любого состояния

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \geqslant (\delta A)^2 \stackrel{\text{def}}{=} \min\left\{ d_A^2 \right\}, \tag{5}$$

т.е. точность определения даже одной отдельно взятой величины в квантовой механике с неотрицательной квантовой функции распределения ограничена. Это, естественно, приводит к обобщению соотношения неопределённостей для двух физических величин, которое в упрощённом виде сводится к неравенству:

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle \left\langle (\Delta B)^2 \right\rangle \geqslant \frac{1}{4} \left(\langle [O(A), O(B)] \rangle\right)^2 + (\delta A)^2 (\delta B)^2 . \tag{6}$$

Обобщение соотношения неопределённостей для двух физических величин (6) и появление ограничения (5) на точность определения значения одной физической величины говорит о том, что в квантовой механике с неотрицательной квантовой функции распределения понятие неопределённости становится более принципиальным и обширным, чем в общепринятой квантовой механике.

3. Моменты наблюдаемых величин в квантовой механике с неотрицательной квантовой функции распределения

В работе [13] ставится вопрос о соответствии измеренных величин $\langle A^n \rangle_P$ — средних по функции распределения $P(q,p)$ и Вигнеровских средних $\langle A^n \rangle_W$ наблюдаемой A. Для его решения предложены два принципа:

1) $\langle A^n \rangle_P = \langle A^n \rangle_W$ и
2) $\langle A^n \rangle_P \xrightarrow[\hbar \to 0]{} \left(\bar{A}^n\right)$.

Первый основан на примере, приведённом в конце работы. А второй повторяет принцип статистического соответствия, сформулированный в работах Я. Терлецкого [7] и Д. Блохинцева [8, 9].

Следует отметить, что принцип 1) вступает в противоречие с тем фактом, что $\langle A^n \rangle_P$ является квантово-механическим средним, для которого выполняется равенство

$$\left\langle O_{\rho_2}(A^n) \right\rangle_{\rho_1} = \int A^n(q,p)\, P(q,p)\, \mathrm{d}q \mathrm{d}p. \tag{7}$$

Это соотношение отражает тот факт, что средние квантово-механические величины не зависят от представления: слева — среднее в координатном представлении, справа — то же самое среднее в координатно-импульсном представлении. Причём слева стоит выражение, в точности совпадающее с результатами стандартной теории квантовых измерений [11, 14, 15].

Подробное исследование соотношения (7) проведено в работах В. Курышкина [2–4] и его учеников [16–18]. Из него вытекают явные выражения для средних $\langle A^n \rangle_P$, которые даже при $n = 1$ не всегда совпадают с $\langle A^n \rangle_W$. Совпадение же этих величин в примере работы [13] является следствием конкретных свойств примера.

Итак, вместо принципа 1) работы [13] следует постулировать правило квантования В. Курышкина

$$\begin{aligned} O_\rho(A)\, \psi(q,t) = {} \\ = (2\pi\hbar)^{-N} \int \Phi(\xi - q, \eta - p, t)\, A(\xi, \eta, t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\left((q-q')p\right)} \psi(q', t)\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}p \mathrm{d}q, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\Phi\left(q,p,t\right)=\left(2\pi\hbar\right)^{N/2}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(qp\right)}\sum_{k}\varphi_{k}\left(q,t\right)\tilde{\varphi}_{k}\left(p,t\right),$$

$$\tilde{\varphi}_{k}\left(p,t\right)=\left(2\pi\hbar\right)^{N/2}\int e^{-\frac{i}{\hbar}\left(qp\right)}\varphi_{k}\left(q,t\right)\mathrm{d}q,\quad \rho=\sum_{k}\left|\varphi_{k}\right\rangle\left\langle\varphi_{k}\right|,$$

явный вид которого опубликован в [2–4]. Из правила (8) следует принцип 2).

Впервые явное изложение стандартной теории квантовых измерений в координатно-импульсном представлении рассмотрел G. D'Ariano с соавторами [19, 20] при обосновании операционального подхода к определению квантовой фазы.

4. Квантовая механика с неотрицательной квантовой функцией распределения — модель теории квантовых измерений в представлении фазового пространства

Квантовая механика создавалась как теория, способная объяснить серию экспериментальных данных, не нашедших объяснения в рамках классической физики. Одним из путеводных принципов при её создании был принцип соответствия, выдвинутый Н. Бором. Трудами Гейзенберга, Шрёдингера, Дирака, фон Неймана и др. было построена общепринятая квантовая механика (ОКМ). По предложению М. Борна [21] волновая функция состояния $\psi\left(q\right)$ была связана с плотностью вероятности обнаружения объекта $w\left(q\right)=\left|\psi\left(q\right)\right|^{2}$. Завершился этап создания квантовой механики формированием Копенгагенской концепцией интерпретации математического формализма общепринятой квантовой механики.

К настоящему времени предложено несколько направлений развития общепринятой квантовой механики, каждое из которых должно было разрешить одну или несколько проблем. Одно из направлений сформировалось вокруг квантовой функции распределения Вигнера [22] и фазового представления квантовой механики Мойала–Грюнвальда [23, 24]. К данному направлению примыкают работы Курышкина В.В. по обоснованию и развитию квантовой механики с неотрицательной квантовой функцией распределения.

Правило построения псевдодифференциальных операторов наблюдаемых $O\left(A\right)$ в этой квантовой механике однозначно связано с квантовой функцией распределения $F_{\psi}\left(q,p\right)$. Плотность вероятности обнаружения объекта в координатном или импульсном представлении задаётся свёрткой квадрата модуля волновой функции с маргинальными функциями распределения: координатной или импульсной, соответственно.

Очевидное усложнение и вычислительной процедуры построения операторов наблюдаемых, и явного вида самих операторов, компенсируется отсутствием внутренних противоречий математического формализма квантовой механики Курышкина–Вудкевича. Проблема построения операторов решается с помощью пакета прикладных программ аналитических вычислений. Проблемы работы с нецентральными потенциалами требуют привлечения методов и алгоритмов, используемых в задачах трёх тел и в задачах описания квантовых систем во внешних магнитных полях.

Завершение цикла построения и исследования правила квантования Курышкина В.В. позволит завершить программу Широкова Ю.М. [25] о единообразном представлении классической и квантовой механик включением в эту программу принципа статистического соответствия Терлецкого–Блохинцева и классической статистической механики.

Литература

1. *Wodkiewicz K.* Operational Approach to Phase-Space Measurements in Quantum Mechanics // Phys. Rev. Lett. — 1984. — Vol. 52. — P. 1064.

2. *Курышкин В. В.* К построению квантовых операторов // Изв. Вузов, сер. «Физика». — 1971. — Вып. 11. — С. 102–106. [*Kurihshkin V. V.* K postroeniyu kvantovihkh operatorov // Izv. Vuzov, ser. «Fizika». — 1971. — Вып. 11. — S. 102–106.]
3. *Kuryshkin V. V.* La Mecanique Quantique Avec une Fonction Nonnegative de Distribution Dans 1'espace des Phases // Ann. Inst. H. Poincare. — 1972. — Vol. XXII, No 1. — P. 81.
4. *Kuryshkin V. V.* Some Problems of Quantum Mechanics Possessing a Non-Negative Phase-Space Distribution Function // Int. J. Theoret. Phys. — 1973. — Vol. 7. — P. 451.
5. Canonical and Measured Phase Distributions / U. Leonhardt, J. A. Vaccaro, B. Bohmer, H. Paul // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51. — P. 84.
6. *O'Connel R. F., Wigner E. P.* Some Propetries of a Non-negative Quantum-Mechnical Distribution Function // Phys. Lett. — 1981. — Vol. 85A, No 3. — Pp. 121–126.
7. *Terletsky Y. P., Eksp Z.* О предельном переходе квантовой механики в классическую // Teor. Fiz. — 1937. — Vol. 7. — P. 1290.
8. *Blokhintzev D. I.* The Gibbs Quantum Ensemble and its Connection with the Classical Ensemble // Journ. of Phys. — 1940. — Vol. II, No 1. — Pp. 71–74.
9. *Blokhintzev D., Nemirovsky P.* Connection of the Quantum Ensemble with the Gibbs Classical Ensemble. II // Journ. of Phys. — 1940. — Vol. III, No 3. — Pp. 191–194.
10. *Cohen L.* Generalized Phase-Space Distribution Functions // Journ. Math. Phys. — 1966. — Vol. 7, No 5. — Pp. 781–786.
11. *Shewell J. R.* On the Formation of Quantum-Mechanical Operators // Amer. J. Phys. — 1959. — Vol. 27. — Pp. 16–21.
12. *Kurishkin V. V.* Uncertainty Principle and the Problem of Joint Coordinate-Momentum Probability Density in Quantum Mechanics // The Uncertainty Principle and Foundation of Quantum Mechanics. — London, New York: John Wiley and Sons, 1977. — Pp. 61–83.
13. *Englert B.-G., Wodkiewicz K.* Intrinsic and Operational Observables in Quantum Mechanics // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 51. — P. 2661.
14. *Holevo A. S.* Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory. — 1980.
15. *Helstrom C. W.* Quantum Detection and Estimation Theory. — 1976.
16. *Зорин А. В., Курышкин В. В., Севастьянов Л. А.* Описание спектра водородоподобного атома // Вестник РУДН. Сер. Физика. — 1998. — № 6(1). — С. 62–66. [*Zorin A. V., Kurihshkin V. V., Sevastjyanov L. A.* Opisanie spektra vodorodopodobnogo atoma // Vestnik RUDN. Ser. Fizika. — 1998. — No 6(1). — S. 62–66.]
17. *Zorin A. V., Sevastianov L. A.* Hydrogen-Like Atom with Nonnegative Quantum Distribution Function // Nuclear Physics. — 2007. — Vol. 70, No 4. — Pp. 792–799.
18. *Zorin A. V., Sevastianov L. A., Tretyakov N. P.* Computer Modeling of Hydrogen-Like Atoms in Quantum Mechanics with Nonnegative Distribution Function // Programming and Computer Software. — 2007. — Vol. 33, No 2. — Pp. 94–104.
19. *D'Ariano G. M.* Concepts and Advances in Quantum Optics and Spectroscopy of Solids. — Amsterdam: Kluwer Academic Publishers, 1997. — Pp. 139–174.
20. *D'Ariano G. M., Leonhardt U., Paul H.* Homodyne Detection of the Density Matrix of the Radiation Field // Phys. Rev. A. — 1995. — Vol. 52. — Pp. 1801–4.
21. *Born M.* Quantenmechanik der Stossvorgange // Zs. Phys. — 1926. — Vol. 38. — Pp. 803–827.
22. *Wigner E.* On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. — 1932. — Vol. 40. — Pp. 749–759.
23. *Moyal J. E.* Quantum Mechanics as a Statistical Theory // Proc. Cambr. Philos. Soc. — 1949. — Vol. 45. — Pp. 99–124.
24. *Groenwold H. J.* On the Principles of Elementary Quantum Mechanics // Physica. — 1946. — Vol. XII, No 7. — Pp. 405–460.

25. *Широков Ю. М.* Квантовая и классическая механика в представлении фазового пространства // Физика ЭЧАЯ. — 1979. — Т. 10, № 1. — С. 5–50. [*Shirokov Yu. M.* Kvantovaya i klassicheskaya mekhanika v predstavlenii fazovogo prostranstva // Fizika EhChAYa. — 1979. — T. 10, No 1. — S. 5–50.]

UDC 530.145, 51-7

Moments of Observables in Quantum Measurements Model by Kuryshkin–Wodkiewicz

A. V. Zorin

Computational Physics and Mathematical Modeling Research Laboratory
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In the frame of constructive Kuryshkin-Wodkiewicz model of quantum measurements theory problem of calculating measured moments of observables is considered. This problem is closely related to the problem of calculating dispersions of measured values of observables, examined in details in papers of V. Kuryshkin. Values of moments and dispersions of measured observables are uniquely determined by quantum distribution function of Kuryshkin-Wodkiewicz.

Key words and phrases: quantum measurements, operational quantum distribution of probabilities, nonnegative quantum distribution function, dispersion of measured values of observables, moments of measured values of observables.