

---

# Математическое моделирование

УДК 519.624.3

## Анализ свойств решений краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков

И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар,  
И. Сархадов, З. А. Шарипов

*Лаборатория информационных технологий  
Объединённый институт ядерных исследований  
ул. Жолио-Кюри д.6, Дубна, Московская область, 141980, Россия*

Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для квазипотенциального уравнения. В частном случае задача сводится к исследованию краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения конечного порядка с произвольным параметром  $\varepsilon$  при старших производных. В работе предложен алгоритм исследования краевых задач для дифференциальных уравнений высоких порядков. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. Установлено, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  некоторые решения совпадают с решением нерелятивистского уравнения Шрёдингера. Кроме этого, обнаружены, так называемые погранслойные решения; переход одного типа решения (например, решение с одним узлом) в другой (решение без узлов). Проведены исследования свойств собственных значений и собственных функций при различных значениях  $\varepsilon$ .

**Ключевые слова:** квазипотенциальные уравнения, краевая задача, символьные вычисления, сингулярно-возмущённое уравнение.

## 1. Введение

Одной из актуальных задач теории элементарных частиц является построение модели для единообразного описания спектра и формфакторов взаимодействия лёгких и тяжёлых мезонов, так называемых кваркониев, рассматриваемых как связанные состояния кварка и антикварка. Тяжёлые кварконии в некотором приближении успешно описываются нерелятивистской квантовой механикой — решение уравнения Шрёдингера на собственные значения [1]. При описании лёгких мезонов возникает необходимость учёта релятивистских эффектов. Релятивистское обобщение потенциальной модели кваркония приводит к решению спектральной задачи для уравнения Бете–Солпитера и различных вариантов квазипотенциальных уравнений [2–5]. В данной работе, так же как и в предыдущих работах [6–13], мы рассматриваем квазипотенциальное уравнение [3, 4]. В частном случае для  $s$  — волны ( $l = 0$ ), оно имеет вид

$$[E_\varepsilon - H_\varepsilon - V(r)] \psi(r) = 0, \quad (1)$$

где  $E_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} [\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} - 1] = \frac{2q^2}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 q^2} + 1}$ ,  $H_\varepsilon = \frac{2}{\varepsilon^2} \left[ \operatorname{ch} \left( i\varepsilon \frac{d}{dr} \right) - 1 \right]$ ,  $V(r)$  — кулоновский потенциал взаимодействия,  $\varepsilon$  — безразмерный параметр. При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $E_\varepsilon \rightarrow q^2$ ,  $H_\varepsilon \rightarrow -\frac{d^2}{dr^2}$ , т. е. уравнение (1) переходит в нерелятивистское уравнение Шрёдингера

$$\left[ \frac{d^2}{dr^2} - V(r) + q^2 \right] \psi(r) = 0. \quad (2)$$

---

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2009 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ, № 08-01-00800-а и 10-01-00467-а.

В уравнении (1), разлагая оператор  $\text{ch}\left(i\varepsilon\frac{d}{dr}\right)$  в ряд, можно получить следующее дифференциальное уравнение бесконечного порядка [14]:

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \dots\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0. \quad (3)$$

Если в уравнении (3) отбросить члены высших порядков, то в результате мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение конечного порядка

$$\left[E_\varepsilon + \left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4} + \frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6} - \dots \dots + \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m!)}\frac{d^{2m}}{dr^{2m}}\right) - V(r)\right]\psi(r) = 0, \quad (4)$$

где  $2m$  — порядок уравнений ( $m = 1, 2, 3, \dots, M$ ).

Одной из важных особенностей уравнений (3)–(4) является наличие параметра  $\varepsilon$  при старших производных, и при  $\varepsilon \rightarrow 0$  это есть сингулярно-возмущённые дифференциальные уравнения. При исследовании этих уравнений возникла необходимость исследования краевых задач. Особую актуальность приобретает метод поиска таких решений  $\{\psi_n, \lambda_n\}$  (собственные функции и собственные значения), которые сохраняют свои свойства как для дифференциальных уравнений конечного порядка, так и для дифференциальных уравнений бесконечного порядка при условии, если решение поставленной задачи существует. Одной из особенностей краевых задач для дифференциальных уравнений высокого порядка ( $m = 1, 2, 3, \dots, M$ ) заключается в том, что необходимо накладывать  $2m$  краевых условий на решения задачи. Так как эти условия, как правило, налагаются в двух точках (для уравнений (3)–(4))  $r = 0$  и  $r \rightarrow r_0$  (или  $r \rightarrow \infty$ ), то количество возможных краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$  с увеличением порядка уравнения  $2m$  сильно растёт. Поэтому были исследованы краевые задачи, решения которых при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходят в решение уравнения 2-го порядка (уравнения Шрёдингера), т.е.

$$\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m} \rightarrow \{\psi_n, \lambda_n\}_2$$

для любого фиксированного  $n$ .

Тогда разность собственных значений  $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$  можно интерпретировать как поправки (релятивистские поправки) к решению уравнения Шрёдингера. Кроме того, важно исследовать поведение решений краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$  при фиксированном значении  $\varepsilon$ , но при возрастании порядка уравнений  $2m$ .

Количество возможных краевых задач  $\{\psi_n, \lambda_n\}_{2m}$  с увеличением порядка уравнения  $2m$  сильно растёт. Поэтому мы исследуем те краевые задачи, решения которых при  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходят в решение уравнения Шрёдингера и имеют чёткие физические смыслы. Однако имеются другие решения (так называемые пограничные решения), которые требуют дальнейшего физического осмысления (физические интерпретации этих решений).

Задача Коши для таких систем дифференциальных уравнений была рассмотрена в работах [15, 16]. Краевые задачи для сингулярно-возмущённых уравнений являются предметом изучения широкого круга работ [17, 18].

## 2. Постановка задачи

В предыдущей работе [13] была подробно исследована краевая задача для дифференциального уравнения четвёртого порядка ( $m = 2$ ). В настоящей работе

проводится исследование решений краевой задачи для дифференциального уравнения (4) при  $m = 3, 4, 5, 6$

$$\left[ \frac{2(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} \frac{d^{2m}}{dr^{2m}} + \dots + \frac{2\varepsilon^4}{6!} \frac{d^6}{dr^6} - \frac{2\varepsilon^2}{4!} \frac{d^4}{dr^4} + \frac{d^2}{dr^2} - \alpha^2 + \frac{2Z}{r} \right] \Psi(r) = 0, \quad (5)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{aligned} \Psi(0) = 0, \Psi(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \Psi'(0) = 1, \Psi'(r \rightarrow \infty) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \Psi^{2(m-1)}(r \rightarrow \infty) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha^2 = -E_\varepsilon$  — собственное значение ( $\alpha^2 > 0$ ).

### 3. Алгоритм решения задачи

Решение с  $n$  узлами ищем в виде

$$\Psi(r) = r(1 - c_1 r)(1 - c_2 r)(1 - c_3 r) \dots (1 - c_n r) \exp(-kr) \quad (7)$$

где  $k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  — неизвестные постоянные. Подставляя это выражение в уравнение (5) и приравнявая слагаемые при одинаковых степенях  $r$ , получаем уравнение для нахождения параметра  $k$

$$\frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m-1)!} k^{2m-1} + \dots + \frac{\varepsilon^4}{5!} k^5 - \frac{\varepsilon^2}{3!} k^3 + k - \frac{Z}{n+1} = 0, \quad (8)$$

и уравнение для нахождения собственных значений  $\alpha^2$

$$\frac{(-1)^{m-1}\varepsilon^{2(m-1)}}{(2m)!} k^{2m-1} + \dots + \frac{\varepsilon^4}{6!} k^6 - \frac{\varepsilon^2}{4!} k^4 + k^2 - \alpha^2 = 0, \quad (9)$$

и систему уравнений для нахождения  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Например, для нахождения одноузлового решения (т.е.  $c_1 \neq 0, c_2 = 0, c_3 = 0, \dots, c_n = 0$ ) имеем

$$c_1 = \frac{Z}{2 \left[ (-1)^{m-1} \frac{\varepsilon^{2m-2} k^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{\varepsilon^4 k^4}{4!} - \frac{\varepsilon^2 k^2}{2!} + 1 \right]}. \quad (10)$$

При  $n = 0$  — это безузловое решение,  $n = 1$  — решение с одним узлом,  $n = 2$  — решение с двумя узлами и т.д. Таким образом, алгоритм нахождения собственных функций и собственных значений краевой задачи (5)–(6) сводится к следующему:

1. Для заданных значений  $\varepsilon$  и  $n$  ищем действительные и положительные (для удовлетворения граничному условию при  $r \rightarrow \infty$  необходимо, чтобы  $k > 0$ ) решения уравнения (8).
2. Подставляя найденные решения  $k$  в уравнение (9), находим собственные значения  $\alpha^2$ .
3. Решая систему уравнений для  $c_i, i = 1, 2, 3, \dots, n$ , находим ненормированное решение (7), которое удовлетворит граничным условиям  $\Psi'(0) = 1$ .
4. Далее будем изучать свойства нормированных решений. Для этого умножаем функцию  $\Psi$  на константу  $A$ , которая находится из условия  $A \sqrt{\int_0^\infty \Psi^2 dr} = 1$ . При этом граничное условие  $\Psi'(0) = 1$  переходит в  $\Psi'(0) = A$ .

Действительные и положительные решения уравнения (1) существуют только при определённых ограничениях, накладываемых на параметр задачи  $\varepsilon$ . Так как не для любого  $\varepsilon$  уравнение (8) имеет действительные и положительные решения, сначала найдём ограничение на параметр  $\varepsilon$ . Для этого умножаем уравнение (8) на  $\varepsilon$  и перепишем в виде

$$f(m, y) = \frac{Z\varepsilon}{n+1}, \quad (11)$$

где  $y = \varepsilon k$  и

$$f(m, y) = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)!} y^{2m-1} + \dots + \frac{1}{5!} y^5 - \frac{1}{3!} y^3 + y. \quad (12)$$

Исследуем решение (11) графически. На рис. 1 представлены графики функции  $f(m, y)$  для значений  $m = 3, 4, 5, 6$ . Для заданных значений аргументов  $m, y$  из (11), находим значение  $\varepsilon$ , например,

$$\varepsilon_1 = \frac{n+1}{Z} f_{\min}(m, y_{\min}), \quad \varepsilon_2 = \frac{n+1}{Z} f_{\max}(m, y_{\max}). \quad (13)$$

Из (13) следует, что  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  зависят от  $n, m, Z$ . Для кратности обозначения эти параметры явно в обозначениях  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  не указаны.

Из рис. 1 для случая  $m = 3$ , следует, что при  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$  уравнение (8) имеет одно действительное и положительное решение; при  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$  три таких решения и, наконец, при  $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$  опять одно такое решение. Для случая  $m = 5$ , при  $0 < y < y_1$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ), уравнение (8) имеет два действительных и положительных решения, а при  $y_2 < y < \infty$  ( $0 < \varepsilon < \infty$ ) имеет только одно такое решение. Для случая  $m = 4$  и  $m = 6$  для  $0 < y < y_1$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ) уравнение (8) имеет два действительных и положительных решения.

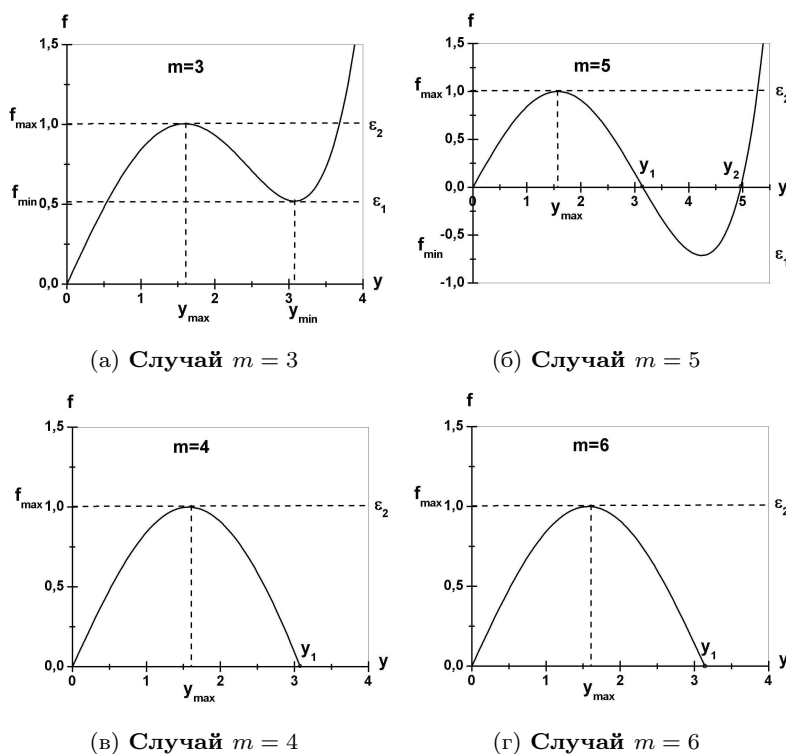


Рис. 1. Графики функции  $f(m, y)$

Особо следует отметить, что для  $m = 3, 4, 5, 6$ , когда аргумент  $y$  функции  $f(m, y)$  принимает значение по разным сторонам экстремальных точек этой функции (т.е.  $f_{\max}(m, y_{\max})$  и  $f_{\min}(m, y_{\min})$ ), свойства решений задачи (5)–(6) меняются, а именно для  $m = 3$ , это следующие интервалы:  $0 < y < y_{\max}$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ )  $y_{\max} < y < y_{\min}$  ( $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ) и  $y_{\min} < y < \infty$  ( $\varepsilon_1 < \varepsilon < \infty$ ); для  $m = 5$ , это следующие интервалы:  $0 < y < y_{\max}$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ),  $y_{\max} < y < y_1$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ) и  $y_2 < y < \infty$  ( $0 < \varepsilon < \infty$ ); а для  $m = 4$  и  $m = 6$  только два интервала  $0 < y < y_{\max}$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ),  $y_{\max} < y < y_1$  ( $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ ). Отметим, что для  $m > 6$  графики функции сильно не усложняются, поэтому можно проводить анализа типов решений вышеуказанным способом.

Далее, используя полученные ограничения на параметр  $\varepsilon$  для различных значений  $m$  ( $m = 3, 4, 5, 6$ ), подробно рассмотрим следующие частные случаи ( $n = 0$  — безузловое решение,  $n = 1$  — решение с одним узлом) и продемонстрируем свойства полученных решений. Но сначала отметим очень важное свойство решений краевой задачи (5)–(6). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow 0$ ) для всех  $m$  ( $m = 3, 4, 5, 6$ ) решения этой задачи практически совпадают с решением уравнения Шрёдингера. Действительно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow 0$ ), например,  $m = 3$  имеем: для случая решений без узлов,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $k = 1,000000002$ ,  $\alpha^2 = 1,000000003$ ,  $A = 2,000000006$ , для случая решений с одним узлом,  $k = 0,500000002$ ,  $\alpha^2 = 0,250000001$ ,  $c_1 = 0,500000008$ ,  $A = 0,7071067794$ . На рис. 2 приведены эти нормированные решения (слева) и решения Шрёдингера (справа) для сравнения. Для других  $m = 4, 5, 6$  эти решения также практически не отличаются от решения уравнения Шрёдингера. Поэтому здесь мы их не приводим.

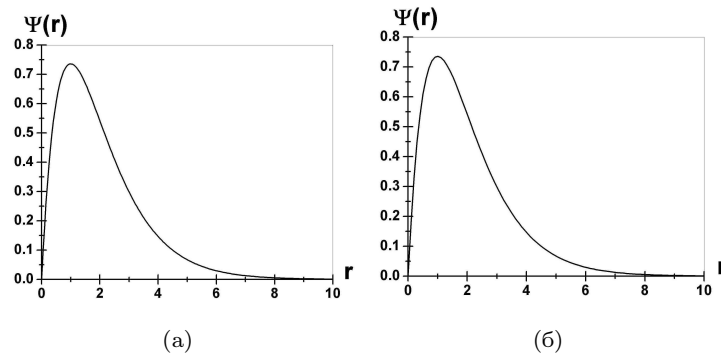
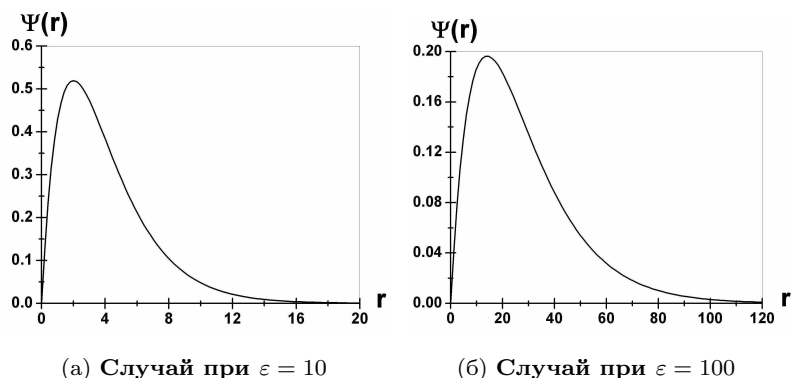


Рис. 2. (а) — решение уравнения (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и (б) — решение уравнения Шрёдингера

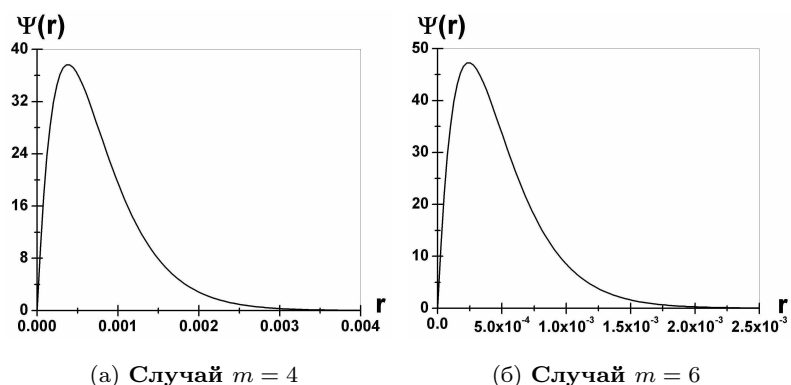
### 3.1. Безузловые решения

Решение ищем в виде  $\psi(r) = r \exp(-kr)$ . Пусть  $m = 3$ . При малых  $\varepsilon$  решение краевой задачи мы представили на рис. 2. При непрерывном увеличении  $\varepsilon$  (также и при увеличении  $y$ ) параметры задачи ( $k, \alpha^2, A$ ) меняются не сильно, как следствие нормированные решения тоже не сильно отличаются от решений, приведённых на рис. 2. Однако при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  ( $y \rightarrow \infty$ ) ситуация меняется. Например, при  $\varepsilon = 10$  ( $y = 4,985560235$ ),  $k = 0,4985560235$ ,  $\alpha^2 = 0,1602764876$ ,  $A = 0,7040458571$ , при  $\varepsilon = 100$  ( $y = 7,126697625$ ),  $k = 0,07126697625$ ,  $\alpha^2 = 0,01997607525$ ,  $A = 0,03805068634$ . На рис. 3 приведены эти нормированные решения, где  $r_{1\max} = 2,005792635$ ,  $\psi_{1\max} = 0,5195083086$  и  $r_{2\max} = 14,03174447$ ,  $\psi_{2\max} = 0,1964172744$ . Из рис. 3 видно, что при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  ( $r_{\max} \rightarrow \infty$ )  $\Psi_{\max} \rightarrow 0$ .

Пусть  $m = 5$ . Главное отличие от  $m = 3$ , в этом случае заключается в следующем. При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow y_1 - 0$  и  $y \rightarrow y_2 + 0$  краевая задача имеют решения с очень необычными свойствами, а именно решения отличны от нуля в начале

Рис. 3. Нормированные решения при  $\varepsilon = 10$  и  $\varepsilon = 100$ 

координат (далее эти решения мы будем называть погранслойными решениями). Действительно, при  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $y = 2,6228883287 < y_1$ ,  $k_2 = 2622,883287$ ,  $\alpha_2^2 = 2,780351305 \cdot 10^6$ ,  $A_2 = 2,6865717541 \cdot 10^5$ , и при  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $y = 4,136388177 > y_2$ ,  $k_3 = 4136,388177$ ;  $\alpha_3^2 = 1,61266271 \cdot 10^6$ ,  $A_3 = 5,320616144 \cdot 10^5$ . На рис. 4 приведены эти нормированные решения.

Рис. 4. Погранслойные решения уравнения (5) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ 

Анализ свойства решений краевой задачи (5)–(6) при  $m = 4$ ,  $m = 6$  проводим аналогично, используя рис. 1. В обоих случаях, когда  $\varepsilon$  меняется в интервале  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ , краевая задача имеет два решения, а при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow y_1 - 0$  появляются погранслойные решения, такие же как приведённые на рис. 4.

Теперь переходим к анализу свойств решений краевой задачи (5)–(6) с одним узлом.

### 3.2. Решение с одним узлом

Решение ищем в виде  $\psi(r) = r(1 - c_1 r) \exp(-kr)$ . Пусть  $m = 3$ . Как отмечалось выше при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $y \rightarrow 0$ ), решение практически не отличается от решения уравнения Шрёдингера (см. рис. 2). Если параметр меняется в интервале  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$  ( $0 < y < y_{\max}$  и  $y_{\min} < y < \infty$ ), то задача имеет одноузловое решение (т.е.  $c_1 > 0$ ). При  $y_{\max} < y < y_{\min}$  решение превращается в безузловое (т.е.  $c_1 < 0$ ). Чтобы это продемонстрировать, рассмотрим два варианта выбора  $\varepsilon$ .

1. При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2 - 0$  ( $y \rightarrow y_{\max} - 0$  и  $y \rightarrow y_{\max} + 0$ ), например, при  $\varepsilon = 2,009481696$ ,  $k = 0,7924597750$ ,  $\alpha^2 = 0,5065024284$ ,  $c_1 = 31950,31088$ ,  $A = 0,00002020424997$ ;

$k = 0,792476159$ ,  $\alpha^2 = 0,5065193692$ ,  $c_1 = -31950,92338$ ,  $A = 0,00002020444131$ . На рис. 5 приведены эти нормированные решения.

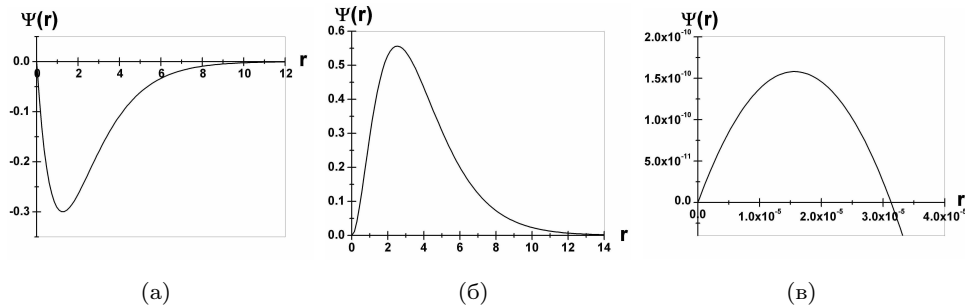


Рис. 5. Графики решения уравнения (5) с одним узлом (а), в большом масштабе (в) и без узлов (б).

Главная особенность решения (слева) заключается в том, что при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2 - 0$ ,  $y \rightarrow y_{\max} - 0$  параметр  $c_1 \rightarrow \infty$ . Как следствие точка пересечения решения оси  $r_1 = \frac{1}{c_1}$  стремится к нулю (см. рис. 5.б), а в безузловом решении (справа) при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_2 - 0$ ,  $y \rightarrow y_{\max} + 0$  параметр  $c_1 \rightarrow -\infty$ .

2. При  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 + 0$  ( $y \rightarrow y_{\min} - 0$  и  $y \rightarrow y_{\min} + 0$ ), например, при  $\varepsilon = 1,040184269$ ,  $k = 2,957514135$ ,  $\alpha^2 = 4,024721473$ ,  $c_1 = -15364,28725$ ,  $A = 0,001130400197$ ;  $k = 2,957549364$ ,  $\alpha^2 = 4,024756701$ ,  $c_1 = 15364,015119$ ,  $A = 0,001130668856$ . На рис. 6 приведены эти нормированные решения.

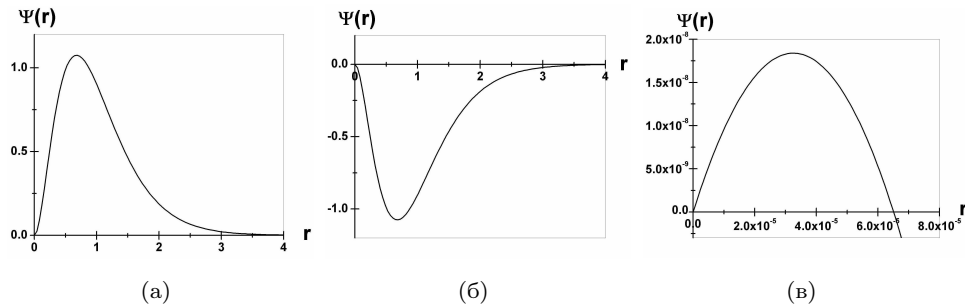


Рис. 6. Решение уравнения (5) при  $m = 3$ : (а) — безузловое решение; (б) — решение с одним узлом, (в) — узел в крупном масштабе.

Особенность решения (справа) заключается в том, что при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_1 + 0$ ,  $y \rightarrow y_{\min} + 0$   $r_1 = \frac{1}{c_1}$ , стремится к нулю (см. рис. 6а).

Теперь приведём решения при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$ . Например, при  $\varepsilon = 10$   $k = 0,4537980941$ ,  $\alpha^2 = 0,0951207082$ ,  $c_1 = 0,05971231826$ ,  $A = 0,7541847999$ ;  $r_{1 \max} = 1,918516605$ ,  $\Psi_{1 \max} = 0,5364111838$  при  $\varepsilon = 100$   $k = 0,06355898824$ ,  $\alpha^2 = 0,008753122606$ ,  $c_1 = 0,01024603673$ ,  $A = 0,04156960011$ ;  $r_{2 \max} = 13,25980129$ ,  $\Psi_{2 \max} = 0,2050606146$ . Нормированные решения приведены ниже на рис. 7.

При  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ,  $c_1$  стремится к нулю, как следствие точка пересечения решения оси  $r_1 = \frac{1}{c_1}$  стремится к бесконечности (см. рис. 7. в,г).

Пусть  $m = 5$ . Главное отличие при анализе свойства решений от  $m = 3$  заключается появлением погранслойных решений при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $y \rightarrow y_1 - 0$  (безузловое), (одноузловое)  $y \rightarrow y_2 + 0$ . На рис. 8 приведены эти нормированные решения: слева — безузловое, справа — одноузловое решения (точка пересечения решения с осью  $r_1 \simeq 5$ , поэтому на рисунке не видно).

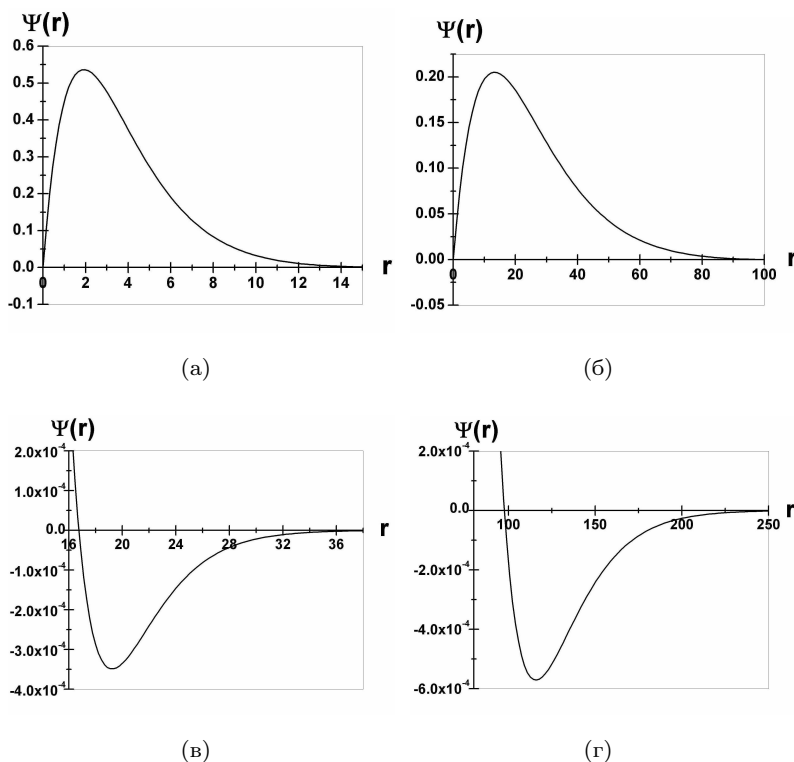


Рис. 7. Нормированные решения при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$  : (а)-при  $\varepsilon = 10$ , (б)-при  $\varepsilon = 100$ , (в)-узел при  $\varepsilon = 10$ , (г)-узел при  $\varepsilon = 100$

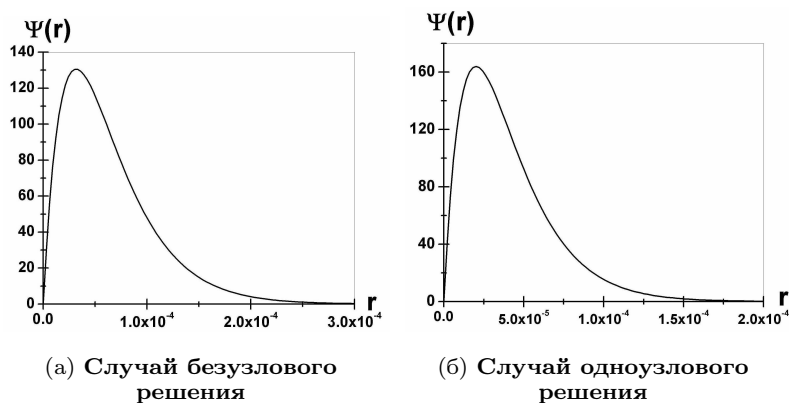


Рис. 8. Нормированные решения при  $m = 5$

При  $\varepsilon_2 < \varepsilon < \infty$  и  $y_2 < y \rightarrow \infty$  решение ведёт себя так же, как и для  $m = 3$ .

Переходим к анализу свойств решений при  $m = 4$ ,  $m = 6$ . При  $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$  в интервале  $0 < y < y_{\max}$  существует одноузловое решение, а в интервале  $y_{\max} < y < y_1$  — безузловое. Главная особенность в этом случае состоит в том, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $y = y_1 - 0$  задача имеет погранслойные решения. На рис. 9 приведены эти нормированные решения, слева — для  $m = 4$ , справа — для  $m = 6$ .



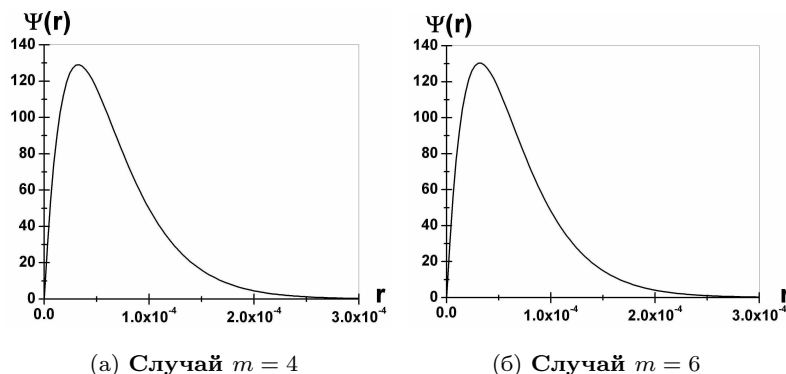


Рис. 9. Нормированные решения

#### 4. Заключение

В работе предложен алгоритм изучения свойств решений краевых задач для уравнений высокого порядка, содержащих произвольный параметр при старших производных. Алгоритм реализован с использованием системы символьных вычислений MAPLE. Установлено, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  некоторые решения совпадают с решением нерелятивистского уравнения Шрёдингера. Кроме этого, обнаружены так называемые погранслойные решения; переход одного типа решения (например, решение с одним узлом) в другой (решение без узлов). Эти решения требуют глубокого анализа и дальнейшего физического осмысления (физической интерпретации), так как релятивистские поправки собственных значений  $\Delta = |\lambda_{n,2m} - \lambda_{n,2}|$  становятся большими.

#### Литература

1. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. Потенциальные модели кваркония. // УФН. — 1984. — Т. 143. — С. 3–32. [Bihkov A. A., Dremim I. M., Leonidov A. V. Potencial'nihe modeli kvarkoniya. // UFN. — 1984. — Т. 143. — С. 3–32.]
2. Logunov A. A., Tavkhelidze A. N. Quasi-Optical Approach in Quantum Field Theory // Nuovo Cimento. — 1963. — Vol. 29. — P. 380.
3. Kadyshevsky V. G., Mir-Kasimov R. M., Skachkov N. B. Quasi-Potential Approach and the Expansion in Relativistic Spherical Functions // Nuovo. Cimento. A. — 1968. — Vol. 55. — P. 233.
4. Кадышевский В. Г., Мир-Касымов Р. М., Скачков Н. Б. Трёхмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел. // ЭЧАЯ. — 1972. — Т. 2, № 3. — С. 637–690. [Kadihshevskiy V. G., Mir-Kasihmov R. M., Skachkov N. B. Trekhmernaya formulirovka relyativistskoyj problemih dvukh tel. // EhChAYa. — 1972. — Т. 2, No 3. — С. 637–690.]
5. Thompson R. H. Three-Dimensional Bethe-Salpeter Equation Applied to the Nucleon-Nucleon Interaction // Phys. Rev. D. — 1970. — Vol. 1. — Pp. 110–117.
6. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Метод факторизации и частные решения релятивистского уравнения Шрёдингера четвертого порядка. — Дубна, 1999. [Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V. Metod faktorizacii i chastnihe resheniya relyativistskogo uravneniya Shredingera chetvertogo poryadka. — Dubna, 1999.]
7. Амирханов И. В., Жидков Е. П., Коннова С. В. Исследование решения краевой задачи для сингулярно-возмущенного уравнения шрёдингера. — Дубна, 2000. [Amirkhanov I. V., Zhidkov E. P., Konnova S. V. Issledovanie resheniya

- kravoyj zadachi dlya singulyarno-vozmuthennogo uravneniya shredingera. — Dubna, 2000.]
8. Асимптотическая аппроксимация решений и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера. / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Дифф. Урав. — 2000. — Т. 37, № 1. — С. 83–90. [Asimptoticheskaya aproksimaciya resheniy i sobstvennikh znacheniy kravoyj zadachi dlya singulyarno vozmuthennogo relyativistskogo analoga uravneniya Shredingera. / I. V. Amirkhanov, S. A. Vasiljev, E. P. Zhidkov, I. E. Zhidkova // Diff. Urav. — 2000. — Т. 37, No 1. — S. 83–90.]
  9. Асимптотика собственных функций и собственных значений краевой задачи для сингулярно возмущенного релятивистского аналога уравнения Шредингера при произвольном потенциале. / И. В. Амирханов, С. А. Васильев, Е. П. Жидков, И. Е. Жидкова // Математическое моделирование. — 2003. — Т. 15, № 9. — С. 3–16. [Asimptotika sobstvennikh funkciy i sobstvennikh znacheniy kravoyj zadachi dlya singulyarno vozmuthennogo relyativistskogo analoga uravneniya Shredingera pri proizvoljnom potencie. / I. V. Amirkhanov, S. A. Vasiljev, E. P. Zhidkov, I. E. Zhidkova // Matematicheskoe modelirovanie. — 2003. — Т. 15, No 9. — S. 3–16.]
  10. Амирханов И. В. и др. Исследование краевых задач для уравнения высокого порядка с малым параметром при старших производных. — Дубна, 2004. — 22 с. [Amirkhanov I. V. и др. Issledovanie kraevihkh zadach dlya uravneniya vihsokogo poryadka s malihm parametrom pri starshikh proizvodnikh. — Dubna, 2004. — 22 s.]
  11. Исследование краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Е. П. Жидков, Д. З. Музафаров и др. // Математическое моделирование. — 2007. — Т. 19, № 11. — С. 65–79. [Issledovanie kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo poryadka / I. V. Amirkhanov, E. P. Zhidkov, D. Z. Muzafarov и др. // Matematicheskoe modelirovanie. — 2007. — Т. 19, No 11. — S. 65–79.]
  12. Решение краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. — Дубна, 2007. — 16 с. [Reshenie kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo poryadka / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. — Dubna, 2007. — 16 s.]
  13. Исследование решений краевых задач для сингулярно-возмущенного дифференциального уравнения высокого порядка в поле кулоновского потенциала / И. В. Амирханов, Д. З. Музафаров, Н. Р. Саркар и др. — Дубна, 2008. — 18 с. [Issledovanie resheniy kraevihkh zadach dlya singulyarno-vozmuthennogo differencialjnogo uravneniya vihsokogo poryadka v pole kulonovskogo potenciala / I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarkar и др. — Dubna, 2008. — 18 s.]
  14. Жидков Е. П., Кадьшевский В. Г., Катъшев Ю. В. К вопросу о предельном переходе  $c \rightarrow \infty$  в релятивистском уравнении Шредингера // ТМФ. — 1970. — Т. 3, № 2. — С. 191. [Zhidkov E. P., Kadyshevskiy V. G., Katishhev Yu. V. K voprosu o predeljnem perekhode  $c \rightarrow \infty$  v relyativistskom uravnenii Shredingera // TMF. — 1970. — Т. 3, No 2. — S. 191.]
  15. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Матем. Сбор. — 1948. — Т. 22 (64), № 2. — С. 193–204. [Tikhonov A. N. O zavisimosti resheniy differencialnihkh uravneniy ot malogo parametra. // Matem. Sbor. — 1948. — Т. 22 (64), No 2. — S. 193–204.]
  16. Тихонов А. Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры // Матем. Сбор. — 1950. — Т. 27(69), № 1. — С. 147–156. [Tikhonov A. N. O sistemakh differencialnihkh uravneniy, sodержathikh parametrih // Matem. Sbor. — 1950. — Т. 27(69), No 1. — S. 147–156.]

17. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН. — 1957. — Т. 12, вып. 5 (77). — С. 3–122. [*Vishik M. I., Lyusternik L. A. Regularnoe vıhrozhdenie i pogranichnıy sloj dlya linejnykh differencialnykh uravnenij s malim parametrom // UMN. — 1957. — T. 12, vyp. 5 (77). — S. 3–122.*]
18. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990. — 208 с. [*Vasiljeva A. B., Butuzov V. F. Asimptoticheskie metodih v teorii singulyarnıkh vozmuthenij. — M.: Vısshaya shkola, 1990. — 208 s.*]

UDC 519.624.3

## The Analysis of Properties of Solutions of Boundary Problems for the Differential Equations of High Orders

I. V. Amirkhanov, D. Z. Muzafarov, N. R. Sarker, I. Sarhadov,  
Z. A. Sharipov

*Laboratory of Information Technologies  
Joint Institute for Nuclear Research  
Joliot-Curie 6, 141980 Dubna, Moscow region, Russia*

The relativistic generalization of potential model of a quarkonium leads to the solution of a spectroscopic problem for quasipotential equations. In that specific case the problem is reduced to the investigation of a boundary problem for the ordinary differential equation of the terminating order with arbitrary parameter  $\varepsilon$  at the higher derivatives. In the work the algorithm of investigation of boundary problems for the differential equations of high orders is offered. The algorithm is realized with the use of system of symbolical evaluations MAPLE. It is erected, that at  $\varepsilon \rightarrow 0$  some solutions coincide with the solution of the nonrelativistic Schrodinger equation. Besides, are found out, so-called frontier layer solutions; transition of one type of the solution (for example, the solution with one junction) in to another (the solution without junctions). Investigations of properties of eigenvalues and eigenfunctions are carried out at various values of  $\varepsilon$ .

**Key words and phrases:** quasipotential equation, boundary problem, symbolic computing, singular-perturbated equations.