УДК 519.21

Анализ двухканальной системы массового обслуживания ограниченной ёмкости с буфером переупорядочивания и с распределениями фазового типа

С. И. Матюшенко

Кафедра теории вероятностей и математической статистики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания ограниченной ёмкости с распределениями фазового типа. На выходе из системы имеется буфер, в котором происходит переупорядочивание заявок в соответствии с порядком их поступления. Разработан алгоритм для расчёта стационарных вероятностей состояний данной системы.

Ключевые слова: система массового обслуживания, распределение фазового типа, стационарное распределение, рекуррентно-матричный алгоритм.

1. Описание системы

Рассматривается двухканальная система массового обслуживания (СМО) с общим накопителем ограниченной ёмкости, на которую поступает рекуррентный поток заявок с функцией распределения (ФС) фазового типа $A(x)$:

$$A(x) = 1 - \vec{\alpha}^T e^{\Lambda x}\vec{1}, \quad x \geqslant 0, \quad \vec{\alpha}^T\vec{1} = 1$$

с неприводимым PH-представлением $(\vec{\alpha}, \Lambda)$ порядка l [1, с. 102].

Будем считать, что каждая заявка имеет случайную длину, причём длины заявок являются независимыми в совокупности случайными величинами с общей ФР $G(x)$ и средним значением γ^{-1}. Далее предположим, что времена обслуживания заявок на приборе j независимы между собой, а также не зависят от длин заявок и имеют общую ФР фазового типа $B_j(x)$:

$$B_j(x) = 1 - \vec{\beta}_j^T e^{M_j x}\vec{1}, \quad x \geqslant 0, \quad \vec{\beta}_j^T\vec{1} = 1$$

с неприводимым PH-представлением $(\vec{\beta}_j, M_j)$ порядка m_j, $j = 1, 2$.

Будем рассматривать два параметра, характеризующих ёмкость накопителя: число r мест ожидания, $r < \infty$, и число v, $v > 0$, ограничивающее суммарный объём заявок в очереди. Далее будем считать, что заявка, поступающая на систему, когда все r мест для ожидания заняты или же когда суммарный объём ожидающих в очереди заявок и данной заявки превышает v, теряется и в дальнейшем не оказывает влияния на функционирование СМО.

Далее без ограничения общности примем, что интенсивность обслуживания на приборе 1 выше, чем на приборе 2. Заявка, поступающая на свободную СМО, направляется на первый прибор. При наличии очереди действует дисциплина FCFS.

Предположим, что всем заявкам при поступлении в систему присваивается номер. Будем требовать сохранения порядка между заявками на выходе из СМО, установленного при входе в неё. Заявки, завершившие обслуживание и нарушившие установленный порядок, будут накапливаться на выходе системы в буфере переупорядочивания (БП).

В соответствие с обозначениями Кендалла рассматриваемую систему будем кодировать как $PH|PH|2|(r, v)|\mathrm{res}$, где res — сокращение от resequence — переупорядочивание.

2. Построение математической модели

Рассмотрим вероятности f_k, с которыми очередная заявка будет принята в систему, при условии, что в момент t_0 её поступления в системе уже имеется k заявок, $k = \overline{0, r+2}$. Далее, учитывая, что длины поступающих на систему заявок являются независимыми в совокупности случайными величинами с общей ФР $G(x)$ и применяя формулу полной вероятности, получаем:

$$f_k = \begin{cases} 1, \quad k = 0, 1, \\ \dfrac{G_{k-1}(v)}{G_{k-2}(v)}, \quad k = \overline{2, r+1}, \\ 0 \quad k = r+2, \end{cases} \tag{1}$$

где $G_0(v) = 1, \quad G_1(v) = G(v), \quad G_k(v) = \int\limits_0^v G(v-x) \mathrm{d} G_{k-1}(x), \quad k = \overline{2, r}.$

Рассмотрим теперь промежутки времени между поступлениями заявок в СМО $PH|PH|2|(r,v)|res$, заканчивающиеся их присоединением к очереди, и назовём эти промежутки эффективными. Известно [2], что для любого фиксированного $k = \overline{0, r+2}$ распределение соответствующего эффективного интервала между поступлениями заявок допускает неприводимое PH-распределение $(\alpha, \vec{\Lambda}_k^*)$, где

$$\Lambda_k^* = \Lambda + \vec{\lambda} \vec{\alpha}^T (1 - f_k), \quad \vec{\lambda} = -\Lambda \vec{1}. \tag{2}$$

Следовательно, для описания процесса обслуживания очереди в рассматриваемой СМО достаточно рассмотреть систему без ограничения на суммарный объём заявок, но в которой имеется зависимость процесса поступления от числа заявок в системе. Будем кодировать такую систему как $PH(k)|PH|2|r|res$, а неприводимое PH-представление ФР интервалов между поступлениями заявок в эту систему при наличии в ней k заявок обозначим через $(\vec{\alpha}, \Lambda_k)$, $k = \overline{0, r+2}$. Далее проанализируем СМО $PH(k)|PH|2|r|res$.

Построим марковский процесс, описывающий функционирование системы. Для этого введём понятие упорядоченности. Будем считать, что система находится в упорядоченном состоянии (упорядочена), если на приборах 1 и 2 обслуживаются заявки с номерами N_1 и N_2, и $N_1 < N_2$, в противном случае, т.е. при $N_1 > N_2$ система не упорядочена. Система также упорядочена (не упорядочена) при наличии в ней одной заявки на приборе 1 (приборе 2).

Теперь рассматриваемую СМО с учётом введённого выше понятия упорядоченности, а также с учётом вероятностной интерпретации PH-распределения [1, с. 103] можно описать однородным МП над множеством состояний $\mathcal{X} = \bigcup_{k=0}^{r+2} \mathcal{X}_k$, где

$$\mathcal{X}_0 = \{(s, 0), \quad s = \overline{1, l}\}, \quad \mathcal{X}_k = \mathcal{X}_{k1} \cup \mathcal{X}_{k2}, \quad k = \overline{1, r+2},$$
$$\mathcal{X}_{1i} = \{(s, j_i, i), \quad s = \overline{1, l}, \quad j_i = \overline{1, m_i}\}, \quad i = 1, 2,$$
$$\mathcal{X}_{ki} = \{(k, s, j_1, j_2, i), \quad s = \overline{1, l}, \quad j_i = \overline{1, m_i}\}, \quad i = 1, 2, \quad k = \overline{2, r+2}.$$

Здесь для некоторого момента времени $t : X(t) = (s, 0)$, если в момент t система пуста, а процесс генерации заявки проходит фазу $s : X(t) = (s, j_i, i)$, если в системе имеется одна заявка, обслуживаемая на первом приборе при $i = 1$ либо на втором приборе при $i = 2$, и при этом процесс обслуживания находится на фазе $j_i : X(t) = (k, s, j_1, j_2, i)$, если в системе имеется k заявок, процессы обслуживания заявок на приборах находятся на фазах j_1 и j_2 соответственно, причём система упорядочена, если $i = 1$, либо не упорядочена, если $i = 2$, а индекс s имеет прежний смысл.

Далее определим ряд макросостояний системы, которые нам понадобятся в дальнейшем: $(0) = \cup_{s=1}^{l}(s,0)$; $(j_i,i) = \cup_{s=1}^{l}(s,j_i,i)$; $(k,j_1,j_2,i) = \cup_{s=1}^{l}(k,s,j_1,j_2,i)$; $(s,i) = \cup_{j_i=1}^{m_i}(s,j_i,i)$; $(k,s,j_\nu,i) = \cup_{j_{3-\nu}=1}^{m_{3-\nu}}(k,s,j_1,j_2,i)$, $\nu = 1,2$, $k = \overline{2,r+2}$, $s = \overline{1,l}$, $j_i = \overline{1,m_i}$, $i = 1,2$.

Смысл введённых макросостояний вполне очевиден, поэтому дополнительные пояснения опустим.

В предположении, что интенсивности потока и обслуживания заявок положительны и конечны, процесс $X(t)$ эргодичен. Поэтому вероятности

$$p_x = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) = x\}, \quad x \in \mathcal{X},$$

существуют, строго положительны и совпадают со стационарными.

Введём векторы

$$\vec{\lambda}_k = -\Lambda_k\vec{1}, \quad k = \overline{0,r+2}; \quad \vec{\mu}_j = -M_j\vec{1}, \quad j = 1,2; \quad \vec{p}_0^{\,T} = (p_{10},\ldots,p_{l0});$$
$$\vec{p}_{1i}^{\,T} = (p_{11i},\ldots,p_{1m_ii},p_{21i},\ldots,p_{2m_ii},\ldots,p_{l1i},\ldots,p_{lm_ii}), \quad i = 1,2;$$
$$\vec{p}_{ki}^{\,T} = (p_{k111i},\ldots,p_{k11m_2i},\ldots,p_{k1m_1m_2i},\ldots,p_{klm_1m_2i}), \quad i = 1,2, \quad k = \overline{2,r+2}.$$

Кроме того, положим $\vec{p}_{k,\cdot} = \vec{p}_{k1} + \vec{p}_{k2}$, $k = \overline{2,r+2}$, и введём матрицу

$$M = M_1 \otimes I + I \otimes M_2.$$

Здесь и в дальнейшем $U \otimes V$ — кронекерово произведение матриц U и V, а $U \oplus V = U \otimes I + I \otimes V$ — кронекерова сумма матриц U и V.

Стационарное распределение вероятностей $\{p_x, \quad x \in \mathcal{X}\}$ удовлетворяет следующей СУР:

$$\vec{0}^{\,T} = \vec{p}_0^{\,T}\Lambda_0 + \vec{p}_{11}^{\,T}(I \otimes \vec{\mu}_1) + \vec{p}_{12}^{\,T}(I \otimes \vec{\mu}_2); \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\vec{0}^{\,T} &= u(2-i)\vec{p}_0^{\,T}(\vec{\lambda}_0\vec{\alpha}^{\,T} \otimes \vec{\beta}_1^{\,T}) + \vec{p}_{1i}^{\,T}(\Lambda_1 \oplus M_i) + \\ &+ p_{2,\cdot}\left[u(2-i)(I \otimes I \otimes \vec{\mu}_2) + u(i-1)(I \otimes \vec{\mu}_1 \otimes I)\right], \quad i = 1,2; \end{aligned}\tag{4}$$

$$\begin{aligned}\vec{0}^{\,T} &= u(3-i)\vec{p}_{1i}^{\,T}\left[u(2-i)\left(\vec{\lambda}_1\vec{\alpha}^{\,T} \otimes I \otimes \vec{\beta}_2^{\,T}\right) + u(i-1)\left(\vec{\lambda}_1\vec{\alpha}^{\,T} \otimes \vec{\beta}_1^{\,T} \otimes I\right)\right] + \\ &+ u(k-2)\vec{p}_{k-1,i}^{\,T}\left(\vec{\lambda}_{k-1} \otimes I \otimes I\right) + \vec{p}_{k,i}^{\,T}\left(\Lambda_k \oplus M\right) + \vec{p}_{k+1,\cdot}^{\,T} \times \\ &\times \left[u(2-i)\left(I \otimes I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^{\,T}\right) + u(i-1)\left(I \otimes \vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^{\,T} \otimes I\right)\right], \; k = \overline{2,r+1}, \; i = 1,2; \end{aligned}\tag{5}$$

$$\vec{0}^{\,T} = \vec{p}_{r+1,i}^{\,T}\left(\vec{\lambda}_{r+1}\vec{\alpha}^{\,T} \otimes I \otimes I\right) + \vec{p}_{r+2,i}^{\,T}\left(\left(\Lambda_{r+2} + \vec{\lambda}_{r+2}\vec{(\alpha)}^{\,T}\right) \oplus M\right), \quad i = 1,2, \tag{6}$$

с условием нормировки

$$\vec{p}_0^{\,T}\vec{1} + \sum_{k=1}^{r+2}\sum_{i=1}^{2}\vec{p}_{ki}^{\,T}\vec{1} = 1. \tag{7}$$

Здесь и далее $u(x) = 1$ при $x > 0$ и $u(x) = 0$ при $x \leqslant 0$.

3. Расчёт стационарных вероятностей состояний системы

Приступим к нахождению решения СУР (3)–(7). Предварительно запишем её таким образом, чтобы матрица коэффициентов имела блочный трёхдиагональный вид. Для этого положим $\vec{p}_k^{\,T} = \left(\vec{p}_{k1}^{\,T}, \vec{p}_{k2}^{\,T}\right)$, $k = \overline{1,r+2}$, $\vec{p}^{\,T} = \left(\vec{p}_0^{\,T}, \vec{p}_1^{\,T}, \ldots, \vec{p}_{r+2}^{\,T}\right)$, и введём матрицы:

$$A_0 = \Lambda_0, \quad A_1 = \begin{bmatrix} \Lambda_1 \oplus M_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \oplus M_2 \end{bmatrix}, \quad A_k = \begin{bmatrix} \Lambda_k \oplus M & 0 \\ 0 & \Lambda_k \oplus M \end{bmatrix}, \, k = \overline{2, r+1},$$

$$A_{r+2} = \begin{bmatrix} \left(\Lambda_{r+2} + \vec{\lambda}_{r+2}\vec{\alpha}^T\right) \oplus M & 0 \\ 0 & \left(\Lambda_{r+2} + \vec{\lambda}_{r+2}\vec{\alpha}^T\right) \oplus M \end{bmatrix},$$

где 0 — нулевая матрица порядка $l \times lm_2$;

$$B_0 = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_0\vec{\alpha}^T \otimes \vec{\beta}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_1\vec{\alpha}^T \otimes I \otimes \vec{\beta}_2 & 0 \\ 0 & \vec{\lambda}_1\vec{\alpha}^T \otimes \vec{\beta}_1 \otimes I \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} \vec{\lambda}_k\vec{\alpha}^T \otimes I \otimes I & 0 \\ 0 & \vec{\lambda}_k\vec{\alpha}^T \otimes I \otimes I \end{bmatrix}, \quad k = \overline{2, r+1},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} I \otimes \vec{\mu}_1 \\ I \otimes \vec{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad C_k = \begin{bmatrix} I \otimes I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^T & I \otimes \vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^T \otimes I \\ I \otimes I \otimes \vec{\mu}_2\vec{\beta}_2^T & I \otimes \vec{\mu}_1\vec{\beta}_1^T \otimes I \end{bmatrix}, \quad k = \overline{2, r+2}.$$

И, наконец, положим

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ C_1 & A_1 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{r+1} & B_{r+1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & C_{r+2} & A_{r+2} \end{bmatrix}$$

С учётом введённых обозначений СУР (3)–(7) можно записать в виде

$$\vec{p}^{\,T} A = \vec{0}^{\,T}, \tag{8}$$

с условием нормировки

$$\vec{p}^{\,T}\vec{1} = 1. \tag{9}$$

Решение системы (8) получим с помощью методов блочного UL и LU-разложений матрицы коэффициентов A. Описание и теоретическое обоснование этих методов применительно к инфинитезимальным матрицам блочно-якобиевой структуры содержатся в работе [3]. Непосредственно из выводов [3, гл. 3] вытекает результат, который здесь сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Решение СУР* (8) *представимо в виде:*

$$\vec{p}_k^{\,T} = \vec{p}_{k-1}^{\,T}\varphi_{k-1}, \quad k = \overline{1, r+2}, \tag{10}$$

$$\vec{p}_k^{\,T} = \vec{p}_{k+1}^{\,T}\psi_{k+1}, \quad k = \overline{0, r+1}, \tag{11}$$

где $\psi_k = -C_k W_{k-1}^{-1}$, $\varphi_k = -B_k V_{k+1}^{-1}$, *невырожденные матрицы* W_k, V_k, $k = \overline{0, r+2}$, *задаются соотношениями*

$$W_k = A_k + \psi_k B_{k-1} u(k),\ k = \overline{0, r+2},\ V_k = A_k + \varphi_k C_{k+1} u(r+2-k),\ k = \overline{r+2, 0},$$

векторы $\vec{p}_0$ *и* $\vec{p}_{r+2}$ *являются единственным с точностью до постоянного множителя решением СУР*

$$\vec{p}_0^{\,T} V_0 = \vec{0}^{\,T}, \tag{12}$$

$$\vec{p}^{\,T}_{r+2} W_{r+2} = \vec{0}^{\,T}, \qquad (13)$$

а постоянный множитель находится из условия нормировки (9).

Заметим, что невырожденность матриц W_k и V_k, $k = \overline{0, r+2}$ доказана в [3]. Выбор расчётных формул (10) или (11) зависит от загрузки СМО. Численные расчёты показывают, что при малой загрузке целесообразнее выражать вектор $\vec{p}_k$ через $\vec{p}_0$, т.е. пользоваться формулой (10). При большой загрузке более устойчивыми получаются расчёты, производимые в соответствии с (11). В целом предпочтительнее использовать формулу (10), так как она приводит на заключительном этапе к решению СУР (12) порядка l, в то время как использование формулы (11) приводит к решению СУР (13) порядка $2lm_1m_2$.

На основании распределения стационарных состояний системы автором был получен ряд показателей её производительности. В частности были выведены формулы для преобразования Лапласа–Стилтьеса ФР задержки переупорядочивания, а также получены выражения для факториальных моментов числа заявок в БП. Кроме этого, была установлена связь между средним числом заявок и средним временем пребывания в БП, аналогичная известной формуле Литтла.

Литература

1. *Бочаров П. П., Печинкин А. В.* Теория массового обслуживания. — М.: Изд-во РУДН, 1995. — С. 529. [*Bocharov P. P., Pechinkin A. V.* Teoriya massovogo obsluzhivaniya. — M.: Izd-vo RUDN, 1995. — C. 529.]
2. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях. Теория и методы расчёта. — М.: Наука, 1989. [*Basharin G. P., Bocharov P. P., Kogan Ya. A.* Analiz ocheredeyj v vihchisliteljnihkh setyakh. Teoriya i metodih raschyota. — M.: Nauka, 1989.]
3. *Наумов В. А.* Численные методы анализа марковских систем. — М.: Университет дружбы народов, 1985. [*Naumov V. A.* Chislennihe metodih analiza markovskikh sistem. — M.: Universitet druzhbih narodov, 1985.]

UDC 519.21

Analysis of Two-Channel System of Service of Limited Capacity with Buffer of Reordering and with Distributions of Phase Type

S. I. Matyushenko

Department of Probability Theory and Mathematical Statistics
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

The two-channel system of service of the limited capacity with distributions of phase type is considered. On leaving the system there is a buffer in which there is a reordering of demands according to order of their receipt. The matrix reccurent algorithm of calculation of the queuing system stationary probabilities is presented.

Key words and phrases: system of service, phase type distribution, stationary probabilities, matrix reccurent algorithm.