УДК 517.5

Построение уравнений Эйлера для одной задачи минимизации

И. Л. Куценко, Н. Б. Викторова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В статье выводится уравнение Эйлера для сглаживающего функционала, записанного в нормах пространств Никольского–Бесова, для нахождения приближенного решения интегрального уравнения первого рода

Ключевые слова: сглаживающий функционал, ядро, пространства Никольского–Бесова, некорректно-поставленная задача.

1. Постановка задачи минимизации

Рассмотрим уравнение вида

$$A_k[z] = \int_{-l}^{l} K(x,s)z(s)\mathrm{d}s, \quad x \in [-l,l] \tag{1}$$

с конечным промежутком интегрирования $[-l,l]$, в котором ядро непрерывно по совокупности переменных в замкнутом квадрате $(-l \leqslant x, s \leqslant l)$. Уклонение правой части $u(x)$ будем оценивать в метрике пространств $B_2^{s_1}[-l,l]$ [1], а уклонение решения $z(s)$ — в метрике C, т.е. по формуле:

$$\rho_C(z_1,z_2) = \max_{s\in[l,l]} |z_1(s) - z_2(s)|\,.$$

Будем предполагать, что уравнение (1) с точной правой частью $u = u_T(x)$ имеет единственное решение $z_T(s)$. Пусть вместо функции $u_T(x)$ мы имеем функцию $u_\delta(x)$ из $B_2^{s_1}[-l,l]$ такую, что

$$\rho_{B_2^{s_1}[-l,l]} |u_\delta(x) - u_T(x)| \leqslant \delta, \quad s_1 > 0.$$

Таким образом, вместо уравнения (1) с точной правой частью имеем уравнение

$$A_k[z] = \int_{-l}^{l} K(x,s)z(s)\mathrm{d}s = u_\delta(x). \tag{2}$$

В этих условиях речь может идти лишь о нахождении приближённого решения (z_T решения уравнения (2)).

Для нахождения приближённого решения воспользуемся методом регуляризации [2], т.е. сведём задачу к построению и минимизации сглаживающего функционала, записанного в эквивалентных нормах пространств Никольского–Бесова [1]. Тогда сглаживающий функционал имеет вид:

$$M^\alpha[z,u_\delta] = \rho^2_{B_2^{s_1}[-l,l]}(A_k[z],u_\delta) + \alpha\|z\|^2_{B_2^{s_2}[-l,l]}, \tag{3}$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации [2], $s_1 > 0$, $s_2 > 0$.

Статья поступила в редакцию 21 мая 2010 г.

Для сглаживающего функционала (3) справедливо следующее утверждение

Лемма 1. *Каковы бы ни были параметры* $\alpha > 0$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$ *и функции* $u(x) \in B_2^{s_1}[-l, l]$, *существует функция* $z_\alpha^\delta(s)$, *принадлежащая пространству* $B_2^{s_2}[-l, l]$, *на котором функционал* (3) *достигает своей точной нижней грани, т.е.*

$$M_0^\alpha = \inf_{z \in B_2^{s_2}[-l,l]} M^\alpha[z, u_\delta] = M^\alpha[z_\delta, u_\delta].$$

Доказательство. Справедливость леммы 1 следует из [3, с. 68], так как оператор A_k линеен из одного метрического пространства $B_2^{s_2}[-l, l]$ в пространство $B_2^{s_1}[-l, l]$, и $\Omega[z]$ — стабилизирующий функционал порождает гильбертово пространство с мажорантной метрикой [3, с. 61].

Также можно указать достаточные условия, при которых элемент $z_\alpha^\delta(s)$ — единственный. Оператор A_k — линеен, $B_2^{s_2}[-l, l]$ — гильбертово пространство и $\Omega[z]$ $\left(\|z\|^2_{B_2^{s_2}[-l,l]}\right)$ — квадратичный функционал. Таким образом существует и единственен элемент $z_\alpha^\delta(s)$, минимизирующий функционал (3). □

2. Уравнение Эйлера для задачи минимизации

Для нахождения приближённого (регуляризованного) решения уравнения (2) достаточно найти функцию $z_\alpha^\delta \in B_2^{s_2}[-l, l]$, минимизирующую сглаживающий функционал $M^\alpha[z, u_\delta]$, и соответствующее значение α. Задачу минимизации $M^\alpha[z, u_\delta]$ можно решать прямыми методами, например, методами наискорейшего спуска. Однако численно удобнее находить функцию $z_\alpha^\delta(s)$, решая уравнение Эйлера для соответствующего функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$.

Для дальнейших рассуждений введём следующие обозначения:

$$A_k^*[u] = \int_{-l}^{l} K(x, s) u(x) \mathrm{d}x \tag{4}$$

— оператор, сопряжённый оператору

$$A_k[z] = \int_{-l}^{l} K(x, s) z(s) \mathrm{d}s;$$

$$\overline{K}(s, t) = \int_{-l}^{l} K(x, s) K(x, t) \mathrm{d}x, \quad A_k^* A_k[z] = \int_{-l}^{l} \overline{K}(s, t) z(t) \mathrm{d}t.$$

Дадим определение дробной производной.

Определение 1. Будем называть дробной производной функции f величину

$$D^s(f)(x) = \int_{\Delta x} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^s} \frac{\mathrm{d}h}{h}, \quad 0 < s < 1, \tag{5}$$

где

$$\Delta x = \left\{ h \in [-l, l];\, x + h \in (-l, l) = \begin{cases} x \in [-l, l], & -l < h < k - x \\ x \in [0, l), & -l - x < h < l \end{cases} \right\}$$

Тогда

$$D^{2s}(f)(x) = \vartheta(x) \int\limits_{-l}^{l-x} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^{2s}} \frac{\mathrm{d}h}{h} + \vartheta(-x) \int\limits_{-l-x}^{l} \frac{f(x+h) - f(x)}{|h|^{2s}} \frac{\mathrm{d}h}{h},$$

когда $s < \dfrac{1}{2}$.

Справедлива следующая теорема [4]:

Теорема 1. *Пусть* $0 < s_1, s_2 < \dfrac{1}{2}$ *и существуют* $D^{2s_1}k$, $D^{2s_2}z$, $z_\alpha^\delta \in B_2^{s_2}[-l, l]$ *— регуляризованное решение уравнения* (2). *Тогда* z_α^δ *удовлетворяет уравнению Эйлера*

$$\left(A_k^* A_k - A_{D^{2s_1}k}^* A_k\right)[z] - \alpha \left[z - D^{2s_2} z\right] = \left(A^* k - A_{D^{2s_1}k}^*\right)[u]. \tag{6}$$

Доказательство. Запишем сглаживающий функционал (3), используя определение норм пространств Никольского–Бесова [1]. Тогда

$$\begin{aligned} M^\alpha[z, u_\delta] = &\int\limits_{-l}^{l} \left(K(x,s) z(s) \mathrm{d}s - u(x)\right)^2 \mathrm{d}x + \\ &+ \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1} \left(\int\limits_{-l}^{l-h} \left(\int\limits_{-l}^{l} \Delta^h K(x,s) z(s) \mathrm{d}s - \Delta^h u(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}h + \\ &+ \alpha \int\limits_{-l}^{l} z^2(x) \mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_2-1} \int\limits_{0}^{l-h} \left(\Delta^h z(x)\right)^2 \mathrm{d}x \mathrm{d}h. \end{aligned} \tag{7}$$

Необходимым условием минимума функционала $M^\alpha[z, u_\delta]$ является равенство нулю его первой вариации $\Delta M^\alpha[z, u_\delta]$.

Сначала проварьируем невязку функционала (7), тогда имеем:

$$\begin{aligned} &\left\| \int\limits_{-l}^{l} K(x,s)(z(s) + \delta(z)) \mathrm{d}s - u(x) \right\|^2_{B_2^{s_1}[-l,l]} - \left\| \int\limits_{-l}^{l} K(x,s) z(s) \mathrm{d}s - u(x) \right\|^2_{B_2^{s_1}[-l,l]} = \\ &= \left\| \int\limits_{-l}^{l} K(x,s)(z(s) + \delta z) \mathrm{d}s - u(x) \right\|^2_{L_2[-l,l]} - \left\| \int\limits_{-l}^{l} K(x,s) z(s) \mathrm{d}s - u(x) \right\|^2_{L_2[-l,l]} + \\ &+ \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1} \left[\int\limits_{-l}^{l-h} \left(\int\limits_{-l}^{l} \Delta^h K(x,s)(z(s) + \delta z) \mathrm{d}s - \Delta^h u(x) \right)^2 \mathrm{d}x - \right. \\ &\left. - \int\limits_{-l}^{l-h} \left(\int\limits_{-l}^{l} \Delta^h K(x,s) z(s) \mathrm{d}s - \Delta^h u(x) \right)^2 \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}h. \end{aligned}$$

Первые два слагаемых в (7) записаны в норме пространства $L_2[-l, l]$, где выводится уравнение Эйлера для сглаживающего функционала, невязка которого записана в норме $L_2[-l,l]$. Тогда линейная часть при δz выражения

$$\left(\int\limits_{-l}^{l} K(x,s)\left(z(s)+\delta z\right)\mathrm{d}s - u(x)\right)^2 - \left(\int\limits_{-l}^{l} K(x,s)z(s)\mathrm{d}s - u(x)\right)^2 = \\ = 2\int\limits_{-l}^{l} K(x,s)K(x,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int\limits_{-l}^{l} K(x,s)u(x)\mathrm{d}x$$

равна

$$2\left(A_k^* A_k[z] - A_k^*[u]\right). \tag{8}$$

Рассмотрим вариацию полунормы

$$\int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1}\left[\int\limits_{-l}^{l-h}\left(\int\limits_{-l}^{l}\Delta^h K(x,s)\delta z\mathrm{d}s\cdot 2\int\limits_{-l}^{l}\Delta^h K(x,t)z(t)\mathrm{d}t - 2\Delta^h u\right)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}h = \\ = \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1}\int\limits_{-l}^{l}\mathrm{d}z\mathrm{d}s - \int\limits_{-l}^{l-h} 2\Delta^h K(x,s)\int\limits_{-l}^{l}\Delta^h K(x,t)z(t)\mathrm{d}z = \\ = \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1}\left(\int\limits_{-l}^{l}\delta z\mathrm{d}s\int\limits_{-l}^{l} 2\Delta^h K(x,s)z(t)\mathrm{d}t - 2\Delta^h K(x,s)\Delta^h u(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}h \tag{9}$$

Далее, выделив линейную часть в (9) относительно δz, имеем

$$\int\limits_{-l}^{l}\delta z\mathrm{d}s\cdot 2\left(\int\limits_{0}^{l} h^{-2s_1-1}\times\right. \\ \left.\times\left(\int\limits_{-l}^{l-h}\Delta^h K(x,s)\Delta^h K(x,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x - \int\limits_{-l}^{l-h}\Delta^h K(x,s)\Delta^h u(x)\mathrm{d}x\right)\right)\mathrm{d}h.$$

Проварьируем стабилизатор функционала (7). Получим

$$\Delta\Omega[z] = \|z(x)+\delta z\|^2_{B_2^{s_2}[-l,l]} - \|z(x)\|^2_{B_2^{s_2}[-l,l]} = \\ = \int\limits_{-l}^{l}(z(x)+\delta z)^2\mathrm{d}x + \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_2-1}\left(\int\limits_{-l}^{l-h} z(x+h)+z(x)+\delta z(x+h)-\delta z(x)\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}h - \\ - (z(x+h)-z(x))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}h - \int\limits_{-l}^{l} z^2(x)\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{l} h^{-2s_2-1}\int\limits_{-l}^{l-h}(z(x+h)-z(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}h.$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{-l}^{l}(z(x)+\delta z)^2\mathrm{d}x - \int\limits_{-l}^{l}(z(x))^2\mathrm{d}x = \int\limits_{-l}^{l}((z(x)+\delta z)^2 - z^2(x))\mathrm{d}x = \int\limits_{-l}^{l}(2z(x)\delta z + (\delta z)^2)\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Затем проварьируем полунорму функционала $\Omega[z]$. Тогда

$$\int_0^l h^{-2s_2-1}\left(\int_{-l}^{l-h} z(x+h)-z(x)+\delta z(x+h)-\delta z(x)\right)^2-(z(x+h)-z(x))^2\,\mathrm{d}x=$$
$$=2\int_0^l h^{-2s_1-1}\int_{-l}^{l-h} z(x+h)-z(x)(\delta z(x+h)-\delta z(x))\mathrm{d}x\mathrm{d}h. \quad (11)$$

Разобьём (11) на два слагаемых и сделаем замену переменного, полагая $x+t=h$, получим

$$2\int_0^l h^{-2s_1-1}\int_{-l+h}^{l}(z(t)-z(t-h))\delta z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}h-2\int_0^{l-h}(z(t+h)-z(t))\delta z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}t. \quad (12)$$

Далее, поочерёдно применяя метод интегрирования, получаем:

$$2\int_0^l\int_{-l+h}^{l}(z(t)-z(t-h))\delta z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}h=$$
$$=2\int_0^l\int_0^l h^{-2s_2-1}\left(z(t)-z(t-h)\right)\mathrm{d}h\delta z(t)\mathrm{d}t+2\int_{-l}^{0}\int_0^{l+t} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h\delta z(t)\mathrm{d}t+$$
$$+2\int_{-l}^{0}\int_0^{l+t} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h\delta zt\mathrm{d}t-\int_{-l}^{0}\int_0^{l} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\delta z(t)\mathrm{d}t-$$
$$-\int_0^l\int_0^{l-t} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\delta z(t)\mathrm{d}t.$$

Сгруппируем сомножители в предыдущих выражениях, используя в качестве параметрических множителей функции $\vartheta(x)$ и $\vartheta(-x)$. Отметим, если t не принадлежит отрезку $[-l,l]$, то будем полагать $z(t)=0$. Тогда

$$2\int_{-l}^{l}\delta z(t)\mathrm{d}t\left[\vartheta(t)\left(\int_0^l h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int_0^{l-t} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right)+\right.$$
$$\left.+\,\vartheta(-t)\left(\int_0^{l+t} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int_0^{l} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right)\right]. \quad (13)$$

После чего линейная часть в (13) относительно $\delta z(t)$ равна

$$2\left[\vartheta(t)\left(\int_0^l h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int_0^{l-t} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right)+\right.$$

$$+\,\vartheta(-t)\left(\int\limits_0^{l+t} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int\limits_0^{l} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right)\Bigg].\qquad(14)$$

Тогда, суммируя линейные части и вариации, получим

$$\int\limits_{-l}^{l}\int\limits_{-l}^{l} K(x,s)K(x,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x-\int\limits_0^{l} h^{-2s_1-1}\left(\int\limits_{-l}^{l-h}\int\limits_{-l}^{l}\Delta^h K(x,s)\Delta^h K(x,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}h+$$

$$+\alpha\left[z(t)+\vartheta(t)\left\{\int\limits_0^{l} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int\limits_0^{l-t} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right\}+\right.$$

$$\left.+\,\vartheta(-t)\left\{\int\limits_0^{l+t} h^{-2s_2-1}(z(t)-z(t-h))\mathrm{d}h-\int\limits_0^{l} h^{-2s_2-1}(z(t+h)-z(t))\mathrm{d}h\right\}\right]=$$

$$=\int\limits_{-l}^{l} K(x,s)u(x)\mathrm{d}x+\int\limits_0^{l} h^{-2s_2-1}\int\limits_{-l}^{l-h}\Delta^h K(x,s)\Delta^h u(x)\mathrm{d}x.\qquad(15)$$

Преобразуем уравнение (15):

$$\int\limits_0^{l} h^{-2s_1-1}\int\limits_{-l}^{l-h}\int\limits_{-l}^{l}(K(x+h,s)-K(x,s))(K(x+h,t)-K(x,t))z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}h=$$

$$=\int\limits_0^{l} h^{-2s_1-1}\int\limits_{-l}^{l-h}\int\limits_{-l}^{l}(K(x+h,s)-K(x,s))(K(x+h,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x)\mathrm{d}h-$$

$$-\int\limits_0^{l} h^{-2s_1-1}\int\limits_{-l}^{l-h}(K(x+h,s)-K(x,s))K(x,t)z(t)\mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}h.$$

Таким образом, при $0<s_1,s_2<\dfrac{1}{2}$ и, когда существуют $D^{2s_1}K$ и $D^{2s_2}z$, получаем уравнение Эйлера для задачи минимизации согласно [2]. □

Литература

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с. [*Besov O. V., Iljin V. P., Nikoljskiyj S. M.* Integraljnihe predstavleniya funkciyj i teoremih vlozheniya. — M.: Nauka, 1975. — 480 s.]
2. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 288 с. [*Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya.* Metodih resheniya nekorrektnihkh zadach. — M.: Nauka, 1979. — 288 s.]
3. *Куценко И. Л.* Погрешность регуляризованного решения уравнения типа свёртки с неточно заданным ядром в пространствах Никольского–Бесова // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ. — 1991. — С. 58–67. [*Kucenko I. L.* Pogreshnostj regulyarizovannogo resheniya uravneniya tipa svyortki s netochno zadannihm yadrom v prostranstvakh Nikoljskogo–Besova // Differencialjnihe uravneniya i funkcionaljnihyj analiz. — 1991. — S. 58–67.]

4. *Буренков В. И., Дорофеев И. Ф., Куценко И. Л.* Регулирование решений уравнений типа свёртки из пространства Никольского–Бесова на отрезке // Северо-кавказская конференция «Линейные операторы в функциональных пространствах». — Грозный: 1989. — С. 24–25. [*Burenkov V. I., Dorofeev I. F., Kucenko I. L.* Regulirovanie resheniyj uravneniyj tipa svyortki iz prostranstva Nikoljskogo–Besova na otrezke // Severo-kavkazskaya konferenciya «Lineyjnihe operatorih v funkcionaljnihkh prostranstvakh». — Groznihyj: 1989. — S. 24–25.]

UDC 517.5

Construction of Euler Equations for a Minimization Problem

I. L. Kutsenko, N. B. Victorova

Department of Optimization and Nonlinear Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

Integral equation of the first kind with incorrect kernel and incorrect right part is reduced to Euler equation for minimization of smothing functional which is formulated in terms of Nikolski–Besov.

Key words and phrases: smoothing functional, kernel, Nikolsky–Besov spaces, ill-posed problem.