УДК 517.51

Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования. I

Альхалил Айман

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Маклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В работе изучается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения дискретных неравенств типа Харди с переменными пределами суммирования в пространствах последовательностей.

Ключевые слова: дискретные неравенства типа Харди.

1. Введение

Пусть $0 < p, q \leqslant +\infty$. В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения дискретных неравенств типа Харди вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^{p}(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n)\geqslant 0, \qquad (1)$$

где $v(n), w(n)$ — положительные числа и $b(n)$ возрастающая последовательность натуральных чисел.

Константу $C \geqslant 0$ в неравенстве (1) считаем выбранной наименьшей из возможных.

Случай $b(n) = n$ в неравенстве (1) имеет длинную историю, восходящую к классической монографии [1] и к настоящему времени полностью изучен. Историю вопроса и необходимую информацию можно найти в монографии [2], а также в работах Г. Беннетта [3–5], М.Ш. Бравермана и В.Д. Степанова [6], М.Л. Гольдмана [7], С.А. Окпоти [8] и других авторов.

Целью работы является обобщение результатов [5–7] на случай дискретных операторов с двумя переменными пределами. Аналогичная задача для непрерывных операторов изучена в серии работ [9–11]. В настоящей статье рассмотрен случай одного переменного предела, а более общий случай будет изучен в следующей статье.

Случаи $p = 1, \infty$ и $1 < q < \infty$ или $q = 1, \infty$ и $1 < p < \infty$ характеризуются общей теоремой функционального анализа [12, гл. 11, теорема 4], поэтому здесь они опущены.

Используем ряд стандартных обозначений. Соотношения $A \ll B$ и $B \gg A$ означают $A \leqslant cB$ или $B \geqslant cA$ с константой c, зависящей только от p и q, $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел, χ_E суть характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset \mathbb{N}$. Сопряжённый показатель p' определяется из уравнений $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, при $p \neq 1$, $p \neq \infty$, $p' = 1$ при $p = \infty$ и $p' = \infty$ при $p = 1$, а также полагаем $r = \dfrac{qp}{p-q}$ при $0 < q < p < \infty$. Знаки := и =: используются для определения новых величин, а также символ $\square$ для отметки конца доказательства.

Статья поступила в редакцию 16 июня 2010 г.

2. Случай $0 < p \leqslant q < \infty$

В дальнейшем нам потребуются следующие формулы, вытекающие, например, из [13, леммы 1 и 2]. Пусть $\gamma > 0$ и $1 \leqslant n < N \leqslant \infty$. Тогда для любой последовательности $h(k) \geqslant 0$

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h(k)\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N} \left(\sum_{i=n}^{k} h(i)\right)^{\gamma-1} h(k), \tag{2}$$

$$\left(\sum_{k=n}^{N} h(k)\right)^{\gamma} \approx \sum_{k=n}^{N} \left(\sum_{i=k}^{N} h(i)\right)^{\gamma-1} h(k). \tag{3}$$

При $0 < p \leqslant q < \infty$ разобьём наше рассуждение на два случая: $1 < p \leqslant q < \infty$ и $0 < p \leqslant q < \infty$, $0 < p \leqslant 1$.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p \leqslant q < +\infty$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$A := \sup_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx A$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (1). Полагая $N \in \mathbb{N}$, определим тестовую последовательность

$$f_N(k) = \begin{cases} w(k)^{1-p'}, & k \leqslant b(N), \\ 0, & k > b(N). \end{cases}$$

Подставляя эту последовательность в (1) для любого $N \in \mathbb{N}$, находим

$$C \left(\sum_{n=1}^{b(N)} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{n \geqslant N} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(N)} w^{1-p'}(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$
$$= \left(\sum_{n \geqslant N} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{b(N)} w^{1-p'}(k)\right).$$

Отсюда следует $C \geqslant A$.

Достаточность. Пусть $A < +\infty$. Оценим левую часть неравенства (1). Применяя (2), находим

$$J := \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right)^{q}\right) \approx \sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{q-1} f(k)\right) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{q-1} f(k) \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{q-1} f(k) w^{\frac{1}{p}}(k) w^{-\frac{1}{p}}(k) \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n).$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями p и p', получим

$$J \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^p w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{(q-1)p'} w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Далее,

$$J_0 := \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{(q-1)p'} w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'} \approx$$

$$\approx \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{s} f(i)\right)^{(q-1)p'-1} f(s) w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'} \approx$$

$$\approx \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{s} f(i)\right)^{(q-1)p'-1} f(s) \sum_{k=s}^{\infty} w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'}.$$

$$I_0 := \sum_{k=s}^{\infty} w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[s,\infty)}(k) w^{1-p'}(k) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(k) v(n)\right)^{p'}.$$

Применяя обобщённое неравенство Минковского, получим

$$I_0 \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[s,\infty)}(k) \chi_{[1,b(n)]}(k) w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n))}(s) \chi_{[1,b(n)]}(k) w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n))}(s) v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{p'}}\right)^{p'} \leqslant$$

$$\leqslant \left(A \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(s) v(n) \left(\sum_{i=n}^{\infty} v(i)\right)^{-\frac{1}{q}}\right)^{p'} \leqslant \left(A \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(s) v(n)\right)^{\frac{p'}{q'}}.$$

Снова применяя обобщённое неравенство Минковского, найдём

$$J_0 \leqslant A^{p'} \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{s=1}^{\infty} \chi_{[1,b(n)]}(s) \left(\sum_{i=1}^{s} f(i)\right)^{(q-1)p'-1} f(s)\right)^{\frac{q'}{p'}}\right)^{\frac{p'}{q'}} =$$

$$= A^{p'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\left(\sum_{i=1}^{b(n)} f(i)\right)^{(q-1)p'}\right)^{\frac{q'}{p'}}\right)^{\frac{p'}{q'}} = A^{p'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{i=1}^{b(n)} f(i)\right)^{q}\right)^{\frac{p'}{q'}}.$$

Таким образом

$$J \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^p w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \left(A^{p'}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{i=1}^{b(n)} f(i)\right)^{q}\right)^{\frac{p'}{q'}}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда следует, что $J^{\frac{1}{q}} \leqslant A\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} f^p(n) w(n)\right)^{\frac{1}{p}}$. □

Нам потребуется следующее

Определение. Пусть $b(n)$ строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Для $n : b(n) \geqslant s \geqslant 1$ положим $b^{-1}(s) := \inf\{n : b(n) \geqslant s\}$.

Из этого определения следует, что $b^{-1}(b(n)) = n$ и $b(b^{-1}(s)) \geqslant s$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < p \leqslant q < \infty$ *и* $0 < p \leqslant 1$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\widetilde{A} := \sup_n \left(\sum_{k \geqslant n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k \in [1, b(n)]} w^{-\frac{1}{p}}(k) < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \widetilde{A}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (1). Пусть $N \in \mathbb{N}$ и $k_n \in [1, b(n)]$ такое число, что $0 \neq w(k_n) = \inf_{k \in [1, b(n)]} w(k)$. Положим $f(k) = 0$ при $k \neq k_n$ и $f(k) = 1$, когда $k = k_n$. Тогда из (1)

$$w^{\frac{1}{p}}(k_n) \geqslant \left(\sum_{l=1}^{\infty} v(l)\left(\sum_{k=1}^{b(l)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \left(\sum_{l=n}^{\infty} v(l)\left(\sum_{k=1}^{b(l)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$C \geqslant \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}} w^{-\frac{1}{p}}(k_n) = \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{1}{q}} \sup_{k \in [1, b(n)]} w^{-\frac{1}{p}}(k).$$

Отсюда следует, что $C \geqslant \widetilde{A}$.

Достаточность. Пусть $\widetilde{A} < +\infty$. По неравенству Йенсена при $0 < p \leqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{b(n)} f(n) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{b(n)} f^p(n)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Оценим левую часть неравенства (1) и, применяя неравенство Минковского, получаем

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f^{p}(k)\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f^{p}(k)\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} f^{p}(k)\left(\sum_{n:b(n)\geqslant k} v(n)\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Требуется показать, что $\left(\sum_{n:b(n)\geqslant k} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{A} w^{\frac{1}{p}}(k)$.

Имеем

$$\left(\sum_{n:b(n)\geqslant k} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{n=b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{A}\left[\sup_{[1\leqslant n\leqslant b(b^{-1}(k))]} w^{-\frac{1}{p}}(n)\right]^{-1} =$$

$$= \widetilde{A} \inf_{1\leqslant n\leqslant b(b^{-1}(k))} w^{-\frac{1}{p}}(n).$$

Так как $b(b^{-1}(k)) \geqslant k$, то $\left(\sum_{n:b(n)\geqslant k} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{A} \inf_{1\leqslant n\leqslant k} w^{-\frac{1}{p}}(k) \leqslant \widetilde{A} w^{-\frac{1}{p}}(k)$. Отсюда следует, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \widetilde{A}\left(\sum_{k=1}^{\infty} f(k)^{p} w(k)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. **Случай** $0 < q < p < \infty$.

При $0 < q < p < \infty$ разобьём наше рассуждение на три случая: $1 < q < p < \infty$, $0 < q < p \leqslant 1$ и $0 < q < p$, $1 < p < \infty$, которым посвящены теоремы 3, 4 и 5, соответственно.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q < p < +\infty$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$B := \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{n\geqslant b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{r} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx B$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (1). Возьмём тестовую последовательность

$$f_0(k) = \left[\left(\sum_{n\geqslant b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{\frac{r}{p}} w^{1-p'}(k),$$

тогда

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_0^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{j\geqslant b^{-1}(n)} v(j)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{i=1}^{n} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{r} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{p}} = B^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда следует

$$CB^{\frac{r}{p}} = C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_0^p(n)w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f_0(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)}\left(\sum_{i=1}^{k} f_0(i)\right)^{q-1} f_0(k)\right)\right)^{\frac{1}{q}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f_0(i)\right)^{q-1} f_0(k)\sum_{n\geqslant b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}}. \quad (4)$$

Имеем

$$\sum_{i=1}^{k} f_0(i) = \sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{j\geqslant b^{-1}(i)} v(j)\right)^{\frac{1}{q}}\left(\sum_{l=1}^{i} w(l)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{\frac{r}{p}} w^{1-p'}(i) \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{j\geqslant b^{-1}(k)} v(j)\right)^{\frac{r}{pq}}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\sum_{l=1}^{i} w(l)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{\frac{r}{p}} w^{1-p'}(i) \approx$$

$$\approx \left(\sum_{j\geqslant b^{-1}(k)} v(j)\right)^{\frac{r}{pq}}\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{pq'}+1}.$$

Отсюда

$$\sum_{i=1}^{k} f_0(i) \geqslant \left(\sum_{j\geqslant b^{-1}(k)} v(j)\right)^{\frac{r}{pq}}\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{pq'}+1}. \quad (5)$$

Подставляя оценку (5) и значения последовательности $f_0(n)$ в (4), получим

$$CB^{\frac{r}{p}} \gg B^{\frac{r}{q}}.$$

Отсюда следует, что $C \gg B$.

Достаточность. Пусть $B < +\infty$.

$$J^q := \sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right)^{q} \approx \sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=1}^{b(n)}\left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{q-1} f(k)\right) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{q-1} f(k) \sum_{n\geqslant b^{-1}(k)} v(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left\{f(k)w^{\frac{1}{p}}(k)\right\}\left\{\left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)\frac{w^{1-p'}(k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} w^{1-p'}(i)\right)}\right\}^{q-1} \times$$

$$\times\left\{\sum_{n\geqslant b^{-1}(k)} v(n)\left(\sum_{i=1}^{k} w^{1-p'}(i)\right)^{q-1} w^{\frac{(1-p')q}{r}}(k)\right\}.$$

Применяя неравенство Гельдера с показателями p, $p/(q-1)$, r/q, получим

$$J^q \leqslant B^q J_1^{\frac{q-1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(k)w(k)\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{где} \quad J_1 := \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{p}\frac{w^{1-p'}(k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} w^{1-p'}(i)\right)^{p}}.$$

Требуется показать, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} f(i)\right)^{p}\frac{w^{1-p'}(k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} w^{1-p'}(i)\right)^{p}}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C(p)\left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(k)w(k)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

Имеем

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{w(k)^{1-p'}}{\left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{p}} = \sum_{k=n}^{\infty} w(k)^{1-p'}\int\limits_{\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}}^{\infty} ps^{-p-1}\mathrm{d}s =$$

$$= p\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} w(i)^{1-p'}}^{\infty} s^{-p-1}\mathrm{d}s \sum_{n:k\geqslant n;\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}<s} w(k)^{1-p'} \leqslant$$

$$\leqslant p\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} w(i)^{1-p'}}^{\infty} s^{-p}\mathrm{d}s = \frac{p}{p-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w(i)^{1-p'}\right)^{-p+1}.$$

Неравенство (6) выполнено в силу теорема 1, поскольку

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{w^{1-p'}(k)}{\left(\sum_{i=1}^{k} w^{1-p'}(i)\right)^{p}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{p'}} \ll$$

$$\ll \left(\left(\sum_{i=1}^{n} w^{1-p'}(i) \right)^{1-p} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} w^{1-p'}(k) \right)^{\frac{1}{p'}} \ll 1.$$

Отсюда $\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right)^{q} \right)^{\frac{1}{q}} \ll B \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^{p}(k) w(k) \right)^{\frac{1}{p}}$. □

Следствие 1. Альтернативным критерием выполнения неравенства (1) при $1 < q < p < \infty$ является также условие $\widetilde{B} < \infty$, где

$$\widetilde{B} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \geqslant n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k \leqslant b(n)} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} v(n) \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $B \approx \widetilde{B}$. Имеем

$$\widetilde{B}^{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \geqslant n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k \leqslant b(n)} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} v(n) \approx$$

$$\approx \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \geqslant n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} v(n) \sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{j=1}^{k} w(j)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}-1} w(k)^{1-p'} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} w(j)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{q'}} w(k)^{1-p'} \sum_{n \geqslant b^{-1}(k)} \left(\sum_{l \geqslant n} v(l) \right)^{\frac{r}{p}} v(n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \geqslant b^{-1}(k)} v(n) \right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(k) = B^{r}.$$

В дальнейшем существенную роль будет играть следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $0 < q < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} v(k) = 1$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right]^{q} \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^{\nu}} \sum_{k \in I_{\nu}} f(k) \right]^{q},$$

где $I_{\nu} := [m_{\nu}, m_{\nu+1} - 1]$, $m_{\nu} := \min \left\{ b(n) : \left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k) \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{2^{\nu}} \right\}$.

Доказательство. Имеем

$$J_{\nu} := \sum_{n: b(n) \in I_{\nu}} v(n) \left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right]^{q} \leqslant \sum_{n: b(n) \in I_{\nu}} v(n) \left[\sum_{k=1}^{m_{\nu+1}-1} f(k) \right]^{q} =$$

$$= \sum_{n: b(n) \in I_{\nu}} v(n) \left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{k \in I_{\mu}} f(k) \right]^{q} \leqslant \frac{1}{2^{q\nu}} \left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{k \in I_{\mu}} f(k) \right]^{q}.$$

Если $q > 1$, то по неравенству Гельдера

$$J_\nu \leqslant \frac{1}{2^{q\nu}} \left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^\mu}{2^\nu} \cdot \frac{2^\nu}{2^\mu} \sum_{k \in I_\mu} f(k) \right]^q \leqslant \frac{1}{2^{q\nu}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^\mu}{2^\nu} \right)^{\frac{q}{q'}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^\mu}{2^\nu} \left(\frac{2^\nu}{2^\mu} \sum_{k \in I_\mu} f(k) \right)^q \right) \ll$$

$$\ll \frac{1}{2^{q\nu}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^{\nu(q-1)}}{2^{\mu(q-1)}} \left(\sum_{k \in I_\mu} f(k) \right)^q \right).$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right]^q = \sum_{\nu=0}^{\infty} J_\nu \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q\nu}} \left(\sum_{\mu=0}^{\nu} \frac{2^{\nu(q-1)}}{2^{\mu(q-1)}} \left(\sum_{k \in I_\mu} f(k) \right)^q \right) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{k \in I_\mu} f(k) \right)^q \left(\sum_{\nu \geqslant \mu} \frac{1}{2^\nu} \right) \frac{2^\mu}{2^{q\mu}} \ll \sum_{\mu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^\mu} \sum_{k \in I_\mu} f(k) \right]^q.$$

При $0 < q \leqslant 1$ $\left[\sum_{\mu=0}^{\nu} \sum_{k \in I_\mu} f(k) \right]^q \leqslant \sum_{\mu=0}^{\nu} \left[\sum_{k \in I_\mu} f(k) \right]^q$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right]^q \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{q\nu}} \sum_{\mu=0}^{\nu} \left[\sum_{k \in I_\mu} f(k) \right]^q \approx \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\mu} \sum_{k \in I_\mu} f(k) \right)^q.$$

Обратно, из определения m_ν следует, что $\frac{1}{2^{(\nu+1)q}} < \sum_{n: b(n) \geqslant m_\nu} v(n) \leqslant \frac{1}{2^{\nu q}}$. Тогда

$$\frac{1}{2^{\nu q}} \approx \frac{1}{2^{(\nu+2)q}} - \frac{1}{2^{(\nu+3)q}} < \sum_{n: b(n) \geqslant m_{\nu+1}} v(n) - \sum_{n: b(n) \geqslant m_{\nu+2}} v(n) = \sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2}]} v(n) \tag{7}$$

Отсюда

$$\left(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k \in I_\nu} f(k) \right)^q \ll \sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2}]} v(n) \left(\sum_{k \in I_\nu} f(k) \right)^q \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2}]} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right)^q.$$

Далее,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\nu} \sum_{k \in I_\nu} f(k) \right)^q \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2}]} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right)^q \ll \sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f(k) \right)^q.$$

Лемма доказана. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $0 < q < p \leqslant 1$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$D := \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k \geqslant n} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \sup_{1 \leqslant k \leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k)\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx D$.

Доказательство. Сначала покажем оценку сверху. По неравенству Йенсена при $0 < p \leqslant 1$

$$\sum_{k \in I_\nu} w(k) f(k) \leqslant \sup_{k \in I_\nu} w(k) \left(\sum_{k \in I_\nu} f^p(k)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда, применяя лемму и неравенство Гельдера, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right]^q \approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^\nu} \sum_{k \in I_\nu} f(k)\right]^q =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2^\nu} \sum_{k \in I_\nu} w^{-\frac{1}{p}}(k) w^{\frac{1}{p}}(k) f(k)\right]^q \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\nu} \sup_{k \in I_\nu} w^{-\frac{1}{p}}(k)\right)^q \left(\sum_{k \in I_\nu} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r\nu}} \sup_{k \in I_\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k)\right)^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k \in I_\nu} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}} =: J^{\frac{q}{r}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Из (7) следует, что

$$J \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} v(n)\right)^{\frac{r}{q}} \sup_{k \in I_\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n=b^{-1}(m_{\nu+1})}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(n)\right)^{\frac{r}{q}} \sup_{k \in I_\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k) \approx$$

$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n=b^{-1}(m_{\nu+1})}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} \left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right) \sup_{k \in I_\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} \left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right) \sup_{k \in [m_\nu, m_{\nu+1})} w^{-\frac{r}{p}}(k).$$

При $b(n) \geqslant m_{\nu+1} > k$ следует $\sup_{k \in [m_\nu, m_{\nu+1})} w^{-\frac{r}{p}}(k) \leqslant \sup_{1 \leqslant k \leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k)$. Отсюда

$$J \ll \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n: b(n) \in [m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} v(n) \left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \sup_{1 \leqslant k \leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n:b(n)\in[m_{\nu+1},m_{\nu+2})} v(n) \left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \sup_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \sup_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k) = D^r.$$

Для оценки снизу по лемме 1 запишем

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{\nu}}\sum_{k\in I_\nu} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{n=1}^{\infty} f(n)^p w(n)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть $f(k)=0$ при $k\neq k_\nu$ и $f(k)=w^{-\frac{1}{p}}(k_\nu)X_{k_\nu}$, где $w^{-\frac{r}{p}}(k_\nu):=\sup_{k\in I_\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k)$. Тогда

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{w^{-\frac{q}{p}}(k_\nu)}{2^{q\nu}}X_{k_\nu}^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} X_{k_\nu}^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Отсюда

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\nu}}w^{-\frac{r}{p}}(k_\nu)\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant C. \tag{8}$$

Пусть $s_n := \left(\sum_{k\geqslant n} v(k)\right)^{\frac{1}{q}}$, тогда

$$D^r \approx \sum_{n=1}^{\infty}(s_n^r - s_{n+1}^r)\sup_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n:b(n)\in I_\nu}(s_n^r - s_{n+1}^r)\sup_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k).$$

Имеем

$$\sum_{n:b(n)\in I_\nu}(s_n^r - s_{n+1}^r)\sup_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{-\frac{r}{p}}(k) \geqslant \frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{1\leqslant k\leqslant m_{\nu+1}-1} w^{-\frac{r}{p}}(k) =$$

$$= \frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{\mu\leqslant\nu}\sup_{k\in I_\mu} w^{-\frac{r}{p}}(k) = \frac{1}{2^{r\nu}}\sup_{\mu\leqslant\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k_\mu) \leqslant \frac{1}{2^{r\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k_\mu).$$

Отсюда и (8)

$$D^r \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\nu}}\sum_{\mu=0}^{\nu} w^{-\frac{r}{p}}(k_\mu) = \sum_{\mu=0}^{\infty} w^{-\frac{r}{p}}(k_\mu)\sum_{\nu\geqslant\mu}\frac{1}{2^{r\nu}} \approx \sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\mu}}w^{-\frac{r}{p}}(k_\mu) \ll C^r.$$

Следовательно, $C \gg D$. □

Теорема 5. *Пусть* $0<q<p$, $1<p<+\infty$ *и* $\frac{1}{r}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. *Тогда неравенство* (1) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$L := \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sum_{k\geqslant n} v(k)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k\leqslant b(n)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{p'}}\right]^r v(n)\right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx L$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть выполнено неравенство (1). Возьмём тестовую последовательность

$$f_0(k) = \left[\left(\sum_{n \geqslant b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{\frac{r}{p}} w^{1-p'}(k),$$

тогда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_0^p(k) w(k)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\sum_{n \geqslant b^{-1}(k)} v(n)\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j=1}^{k} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{1}{q'}}\right]^{r} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{1}{p}} \approx$$

$$\approx \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(k) \sum_{n \geqslant b^{-1}(k)} v(n) \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{r}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{j=1}^{k} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(k)\right) \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k \leqslant b(n)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right)^{\frac{1}{p}} = L^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда следует

$$CL^{\frac{r}{p}} \gg \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} f_0(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{l \geqslant b^{-1}(k)} v(l)\right)^{\frac{r}{pq}} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{pq'}} w^{1-p'}(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\left(\sum_{l \geqslant b^{-1}(b(n))} v(l)\right)^{\frac{r}{pq}} \sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{pq'}} w^{1-p'}(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \geqslant$$

$$\text{так как } b^{-1}(b(n)) = n, \text{ то}$$

$$\geqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{l \geqslant n} v(l)\right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k=1}^{b(n)} \left(\sum_{i=1}^{k} w(i)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{pq'}} w^{1-p'}(k)\right)^{q}\right)^{\frac{1}{q}} \approx L^{\frac{r}{q}}.$$

Отсюда следует, что $C \geqslant L$.

Достаточность. Пусть $L < +\infty$. Применяя лемму 1 и неравенство Гельдера получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left[\sum_{k=1}^{b(n)} f(k)\right]^q \approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^\nu}\sum_{k\in I_\nu} f(k)\right]^q = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^\nu}\sum_{k\in I_\nu} w^{-\frac{1}{p}}(k) w^{\frac{1}{p}}(k) f(k)\right]^q \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^\nu}\left(\sum_{k\in I_\nu} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{q}{p'}}\left(\sum_{k\in I_\nu} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}}\right].$$

Снова, применяя неравенство Гельдера с показателями $\dfrac{r}{q}$ и $\dfrac{p}{q}$, получим

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{r\nu}}\sum_{k\in I_\nu} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{q}{r}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{k\in I_\nu} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}} =: J^{\frac{q}{r}}\left(\sum_{k=0}^{\infty} f^p(k) w(k)\right)^{\frac{q}{p}}.$$

Из (7) следует, что

$$J \leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{n: b(n)\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} v(n)\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k\in I_\nu} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{n=b^{-1}(m_{\nu+1})}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(n)\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{k\in I_\nu} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} \approx$$
$$\approx \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{n=b^{-1}(m_{\nu+1})}^{b^{-1}(m_{\nu+2})}\left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right)\left(\sum_{k\in I_\nu} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{n: b(n)\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+2})}\left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} v(n)\right)\left(\sum_{k\in[m_\nu, m_{\nu+1})} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}}.$$

При $b(n) \geqslant m_{\nu+1} > k$ следует

$$\left(\sum_{k\in[m_\nu, m_{\nu+1})} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} \leqslant \left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}}.$$

Отсюда

$$J \ll \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\sum_{n: b(n)\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} v(n)\left(\sum_{k=n}^{b^{-1}(m_{\nu+2})} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{n: b(n)\in[m_{\nu+1}, m_{\nu+2})} v(n)\left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v(n)\left(\sum_{k=n}^{\infty} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant b(n)} w^{1-p'}(k)\right)^{\frac{r}{p'}} = L^r.$$

Литература

1. *Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ИЛ, 1948. [*Khardi G. G., Littlvud D. E., Polia G.* Neravenstva. — M.: IL, 1948.]
2. *Grosse-Erdmann K. G.* The Blocking Technique, Weighted Mean Operators and Hardy's Inequality // Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag. — Vol. 1679. — 1998.
3. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). — 1987. — Vol. 38. — Pp. 401–425.
4. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities. II // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). — 1988. — Vol. 39. — Pp. 385–400.
5. *Bennett G.* Some Elementary Inequalities. III // Quart. J. Math. Oxford Ser.(2). — 1991. — Vol. 42. — Pp. 149–174.
6. *Braverman M. S., Stepanov V. D.* On the discrete Hardy s inequality // Bull. London Math. Soc. — 1994. — Vol. 26. — Pp. 283–287.
7. *Goldman M. L.* Hardy Type Inequalities on the Cone of Quasi-Monotone Functions // Research Report 98/31, Russian Acad. Sci. Far-East Branch, Computer Centre, Khabarovsk. — 1998. — 70 p.
8. *Okpoti C. A.* Weight Characterizations for Hardy and Carleman Type Inequalities // Lulea University of Technology, Department of Mathematics. — Vol. 36. — 2006. — Pp. 1–81.
9. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. — 2001. — Вып. 232. — С. 298–317. [*Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Ob integraljnihkh operatorakh s peremennihmi predelami integrirovaniya // Trudih Matem. in-ta RAN. — 2001. — Вып. 232. — S. 298–317.]
10. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об операторе геометрического среднего с переменными пределами интегрирования // Труды Матем. ин-та РАН. — 2008. — Вып. 260. — С. 264–288. [*Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Ob operatore geometricheskogo srednego s peremennihmi predelami integrirovaniya // Trudih Matem. in-ta RAN. — 2008. — Вып. 260. — S. 264–288.]
11. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel Operators with Variable Limits Intervals of Integration in Lebesgue Speces and Applications // Math. Inequal. Appl. — 2010. — Vol. 13. — Pp. 449–510.
12. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М: Наука, 1980. [*Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Funkcionaljnihyj analiz. — M: Nauka, 1980.]
13. *Прохоров Д. В.* Неравенства Харди с тремя мерами // Труды Матем. ин-та РАН. — 2006. — Вып. 255. — С. 233–245. [*Prokhorov D. V.* Neravenstva Khardi s tremya merami // Trudih Matem. in-ta RAN. — 2006. — Вып. 255. — S. 233–245.]

UDC 517.51

Discrete Inequalities of Hardy Type with Variable Limits of Summation. I

Alkhliel Aiman

Mathematical Analysis and Functiona Theory Department
Peoples friendship university of Russia
6, Miklukho Maklai str., 117198, Moscow, Russia

The problem of necessary and sufficient couditions of validity for discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation in the sequence spaces is studied.

Key words and phrases: discrete Hardy inequality.