УДК 517.98

Связь характеристик последовательности операторов с борнологической сходимостью

С. Н. Мишин

Кафедра геометрии и методики преподавания математики
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
ул. Комсомольская, д. 95, 302026, г. Орёл, Россия

Рассматривается связь характеристик (порядка и типа) последовательности линейных непрерывных операторов со сходимостью относительно равностепенно непрерывной борнологии.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, порядок и тип последовательности операторов, равностепенно непрерывная борнология, борнологическая сходимость.

Введение

Понятие борнологии аналогично понятию топологии с заменой открытого множества на ограниченное. Теория топологических векторных пространств наиболее активно развивалась в 50-е гг. прошлого века и основные её направления были определены к 1957 г. Но, как оказалось, в ряде вопросов концепция топологического векторного пространства является слишком узкой, а рассмотрение наряду с топологией или вместо неё борнологии позволяет продвинуть решение конкретных задач.

Имеются многочисленные примеры, где без борнологий обойтись практически невозможно. Например, если $\mathbf{H}$ — ненормируемое локально выпуклое пространство, $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ — алгебра линейных непрерывных операторов в $\mathbf{H}$, то на $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ не существует никакой σ-топологии, при которой операция умножения была бы непрерывна. Также неизвестно ни одной σ-топологии на $\mathcal{L}(\mathbf{H})$, при которой множество обратимых элементов в $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ было бы открыто. С другой стороны, на $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ существуют естественные борнологии, где операция умножения ограничена, а множество обратимых элементов борнологически открыто.

В данной работе мы установим связь между порядком и типом последовательности линейных непрерывных операторов и борнологической сходимостью в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}_2$.[1]

1. Необходимые сведения из борнологии

Пусть $\mathbf{X}$ — непустое множество. Говорят, что система $\mathfrak{B}$ подмножеств множества $\mathbf{X}$ задаёт на $\mathbf{X}$ борнологию, если выполняются следующие условия:
1) объединение любых двух множеств из $\mathfrak{B}$ принадлежит $\mathfrak{B}$;
2) любое подмножество любого множества из $\mathfrak{B}$ принадлежит $\mathfrak{B}$;
3) любое одноточечное множество принадлежит $\mathfrak{B}$.

Статья поступила в редакцию 27 января 2010 г.

[1]Как известно (см. [1]), на пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ можно рассматривать различные борнологии и, соответственно, различные борнологические сходимости. В данной работе мы под борнологической сходимостью последовательности линейных непрерывных операторов (операторных рядов) в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ будем понимать сходимость относительно равностепенно непрерывной борнологии. Эта сходимость, очевидно, сильнее равномерной сходимости на всех ограниченных подмножествах в $\mathbf{H}_1$ и, следовательно, сильнее поточечной сходимости.

$\mathbf{X}$ называется борнологическим множеством, а элементы семейства $\mathfrak{B}$ — *ограниченными.*

Например, если $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ — линейные топологические пространства, $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ — пространство линейных непрерывных операторов, то множество $\mathfrak{B}$ всех равностепенно непрерывных семейств пространства $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ задаёт на нем борнологию, называемую *равностепенно непрерывной* борнологией.

Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называется *ограниченным*, если ограниченные в $\mathbf{X}$ множества оно переводит в ограниченные в $\mathbf{Y}$.

Множество $\mathbf{X}$ называется *линейным (векторным)* борнологическим пространством, если

1) $\mathbf{X}$ — линейное пространство;
2) $\mathbf{X}$ — борнологическое множество;
3) операции сложения и умножения на число ограничены.

Например, линейное пространство $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ всех линейных непрерывных операторов, действующих из линейного топологического пространства $\mathbf{H}_1$ в линейное топологическое пространство $\mathbf{H}_2$, является борнологическим относительно равностепенно непрерывной борнологии.

Пусть $\mathbf{X}$ — борнологическое векторное пространство, $\{x_\lambda\}$ — обобщённая последовательность элементов этого пространства. Говорят, что $\{x_\lambda\}$ борнологически сходится к нулю, если найдётся ограниченное множество $M \subset \mathbf{X}$, такое, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_0 \in \Lambda$, такое, что $x_\lambda \in \varepsilon M$, $\forall \lambda \succ \lambda_0$. Говорят, что $\{x_\lambda\}$ борнологически сходится к x, если $\{x_\lambda - x\}$ борнологически сходится к нулю.

Последовательность $\{x_n\} \subset \mathbf{X}$ называется *последовательностью Коши–Макки*, если двойная последовательность $\{x_n - x_m\}$ борнологически сходится к нулю.

Всякая последовательность Коши–Макки ограничена. Всякая сходящаяся последовательность является последовательностью Коши–Макки.

Отделимое борнологическое векторное пространство $\mathbf{X}$ называется *полуполным*, если в нем борнологически сходится всякая последовательность Коши–Макки.

Пусть $\mathbf{X}$ — борнологическое векторное пространство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ называется борнологически сходящимся в $\mathbf{X}$, если борнологически сходится в $\mathbf{X}$ последовательность его частичных сумм. Если $\mathbf{X}$ полуполное борнологическое векторное пространство, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ борнологически сходится в $\mathbf{X}$ тогда и только тогда, когда двойная последовательность $\sum\limits_{n=k}^{m} x_n$ борнологически сходится к нулю в $\mathbf{X}$.

Борнологическое векторное пространство $\mathbf{X}$ называется *выпуклым*, если его борнология обладает базой, состоящей из выпуклых уравновешенных множеств (дисков). Диск M в борнологическом векторном выпуклом пространстве $\mathbf{X}$ называется *наполняющим*, если подпространство $\mathbf{X}_M$, порождённое этим диском, является банаховым.

Отделимое борнологическое векторное выпуклое пространство $\mathbf{X}$ называется *полным*, если его борнология обладает базой, состоящей из наполняющих дисков. Всякое полное борнологическое векторное выпуклое пространство является также полуполным.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{H}_1$ *— топологическое векторное пространство,* $\mathbf{H}_2$ *— полное локально выпуклое пространство. Тогда пространство* $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ *всех линейных непрерывных операторов, действующих из* $\mathbf{H}_1$ *в* $\mathbf{H}_2$*, наделённое равностепенно непрерывной борнологией, является полным борнологическим векторным выпуклым пространством.*

Подробные доказательства этой и других теорем, касающихся борнологических векторных выпуклых пространств, можно найти, например, в монографии Я.В. Радыно [1].

Алгебра $\mathbf{X}$ называется *борнологической алгеброй*, если она является борнологическим векторным пространством и произведение элементов из $\mathbf{X}$ ограничено. *Выпуклой* борнологической алгеброй называется борнологическая алгебра, являющаяся борнологическим векторным выпуклым пространством. Выпуклая борнологическая алгебра $\mathbf{X}$ называется *полной,* если полно борнологическое векторное выпуклое пространство $\mathbf{X}$.

Например, если $\mathbf{H}$ — квазиполное отделимое локально выпуклое пространство, то алгебра $\mathcal{L}(\mathbf{H})$ линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}$, наделённая равностепенно непрерывной борнологией, является полной выпуклой борнологической алгеброй (см. [1]).

2. Порядок и тип последовательности операторов

Пусть $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — отделимые локально выпуклые пространства, топологии которых задаются соответственно мультинормами $\{\|\cdot\|_q^1\}$ и $\{\|\cdot\|_p^2\}$, где индексы p и q пробегают соответственно направленные множества $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$. Не ограничивая общности, можно считать мультинормы монотонными функциями своих индексов.

Обозначим $\mathcal{A} = \{A_n\}$ — последовательность линейных непрерывных операторов, действующих из локально выпуклого пространства $\mathbf{H}_1$ в локально выпуклое пространство $\mathbf{H}_2$. Будем говорить, что последовательность $\mathcal{A}$ имеет порядок, если найдётся последовательность положительных чисел $\{c_n\}$, такая, что будет справедливо неравенство

$$\forall p,\ \exists C_p,\ \exists q(p),\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall n:\ \|c_n A_n(x)\|_p^2 \leqslant C_p \|x\|_q^1, \tag{1}$$

то есть, семейство операторов $\{c_n A_n\}$ будет равностепенно непрерывным. В данной работе рассматриваются последовательности, для которых можно взять $c_n = n^{an}$, $a \in \mathbb{R}$ (они встречаются в приложениях наиболее часто).

Пусть

$$\vartheta(p,q,n) = \sup_{\|x\|_q^1 \neq 0} \left\{ \frac{\|A_n(x)\|_p^2}{\|x\|_q^1} \right\},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

(случай $\vartheta(p,q,n) = +\infty$ не исключается).

Обозначим

$$\beta_{p,q}(\mathcal{A}) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln \vartheta(p,q,n)}{n \ln n}.$$

Определение 1. Число $\beta_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q\in\mathcal{Q}} \beta_{p,q}(\mathcal{A}),\ p \in \mathcal{P}$ называется p-порядком последовательности операторов $\mathcal{A}$, а число $\beta(\mathcal{A}) = \sup\limits_{p\in\mathcal{P}} \{\beta_p(\mathcal{A})\}$ — её порядком.

Если последовательность операторов $\mathcal{A}$ имеет p-порядок $\beta_p(\mathcal{A}) \neq \pm\infty$, то для неё вводится более тонкая характеристика. Обозначим

$$\alpha_{p,q}(\mathcal{A}) = \varlimsup_{n\to\infty} n^{-\beta_p(\mathcal{A})} \sqrt[n]{\vartheta(p,q,n)}.$$

Определение 2. Число $\alpha_p(\mathcal{A}) = \inf\limits_{q\in\mathcal{Q}} \alpha_{p,q}(\mathcal{A})$, $p \in \mathcal{P}$ называется p-типом последовательности операторов $\mathcal{A}$ при p-порядке $\beta_p(\mathcal{A})$, а число

$$\alpha(\mathcal{A}) = \begin{cases} \sup\limits_{p\in\mathcal{P}} \{\alpha_p(\mathcal{A})\}, & \beta_p(\mathcal{A}) = \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \\ 0, & \beta_p(\mathcal{A}) < \beta(\mathcal{A}),\ \forall p \end{cases}$$

её типом при порядке $\beta(\mathcal{A})$.[2]

Из определений p-порядка и p-типа последовательности операторов следуют оценки

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_p(\varepsilon),\ \exists q(p,\varepsilon),\ \forall x\in\mathbf{H}_1,\ \forall n:\ \|A_n(x)\|_p^2<C_p n^{(\beta_p(\mathcal{A})+\varepsilon)n}\|x\|_q^1,\quad (2)$$

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall C,\ \forall q,\ \exists n_k\to\infty,\ \exists\{x_k(p,\varepsilon)\}\subset\mathbf{H}_1:$$
$$\|A_{n_k}(x_k)\|_p^2>Cn_k^{(\beta_p(\mathcal{A})-\varepsilon)n_k}\|x_k\|_q^1,\quad (3)$$

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_p(\varepsilon),\ \exists q(p,\varepsilon),\ \forall x\in\mathbf{H}_1,\ \forall n:$$
$$\|A_n(x)\|_p^2<C_p\left(\alpha_p(\mathcal{A})+\varepsilon\right)^n n^{\beta_p(\mathcal{A})n}\|x\|_q^1,\quad (4)$$

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \forall C,\ \forall q,\ \exists n_k\to\infty,\ \exists\{x_k(p,\varepsilon)\}\subset\mathbf{H}_1:$$
$$\|A_{n_k}(x_k)\|_p^2>C(\alpha_p(\mathcal{A})-\varepsilon)^{n_k}n_k^{\beta_p(\mathcal{A})n_k}\|x_k\|_q^1.\quad (5)$$

Из определений порядка и типа последовательности операторов следуют оценки

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_p(\varepsilon),\ \exists q(p,\varepsilon),\ \forall x\in\mathbf{H}_1,\ \forall n:\ \|A_n(x)\|_p^2<C_p n^{(\beta(\mathcal{A})+\varepsilon)n}\|x\|_q^1,\quad (6)$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall C,\ \forall q,\ \exists p,\ \exists n_k\to\infty,\ \exists\{x_k(p,\varepsilon)\}\subset\mathbf{H}_1:$$
$$\|A_{n_k}(x_k)\|_p^2>Cn_k^{(\beta(\mathcal{A})-\varepsilon)n_k}\|x_k\|_q^1,\quad (7)$$

$$\forall p,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists C_p(\varepsilon),\ \exists q(p,\varepsilon),\ \forall x\in\mathbf{H}_1,\ \forall n:$$
$$\|A_n(x)\|_p^2<C_p\left(\alpha(\mathcal{A})+\varepsilon\right)^n n^{\beta(\mathcal{A})n}\|x\|_q^1,\quad (8)$$

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall C,\ \forall q,\ \exists p,\ \exists n_k\to\infty,\ \exists\{x_k(p,\varepsilon)\}\subset\mathbf{H}_1:$$
$$\|A_{n_k}(x_k)\|_p^2>C(\alpha(\mathcal{A})-\varepsilon)^{n_k}n_k^{\beta(\mathcal{A})n_k}\|x_k\|_q^1.\quad (9)$$

Если пространства $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ совпадают алгебраически, $A_n=A^n$ и вложение $\mathbf{H}_1\subset\mathbf{H}_2$ непрерывно, то говорим о порядке и типе оператора $A:\mathbf{H}_1\to\mathbf{H}_2$.

Будем говорить, что оператор A (последовательность операторов $\mathcal{A}$) является оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,a]$, если его (её) p-порядки меньше b, либо равны b, но тогда соответствующие p-типы не превосходят a; оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,a)$, если его (её) p-порядки меньше b, либо равны b, но тогда соответствующие p-типы меньше a; оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,0)$, если все его (её) p-порядки меньше b; оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,a]$, если его (её) порядок меньше b, либо равен b, но тогда тип не превосходит a; оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,a)$,

[2] Можно показать (см. [2]), что случай, когда равенство $\beta_p(\mathcal{A})=\beta(\mathcal{A})$ справедливо не для всех p, а лишь для некоторых, сводится к случаю, когда $\beta_p(\mathcal{A})=\beta(\mathcal{A})$, $\forall p$ заменой мультинормы на эквивалентную. Эта замена не изменяет ни порядка, ни типа последовательности операторов.

если его (её) порядок меньше b, либо равен b, но тогда тип меньше a; оператором (последовательностью операторов) класса $\mathfrak{L}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[b,0)$, если его (её) порядок меньше b.

3. Необходимые и достаточные условия борнологической сходимости последовательности линейных непрерывных операторов и операторных рядов

Пусть $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ — отделимые локально выпуклые пространства с топологиями, задаваемыми соответственно мультинормами $\{\|\cdot\|_q^1\}$, $q \in \mathcal{Q}$ и $\{\|\cdot\|_p^2\}$, $p \in \mathcal{P}$, причём $\mathbf{H}_2$ — полное пространство. Пусть $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathbf{H}_1$ в $\mathbf{H}_2$.

Как уже отмечалось выше, множество всех равностепенно непрерывных семейств операторов задаёт на $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ равностепенно непрерывную борнологию, обращая его в полное борнологическое векторное выпуклое пространство.

Теорема 2 (Критерий борнологической сходимости). *Последовательность $\{A_n\}$ линейных непрерывных операторов борнологически сходится к нулю в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ тогда и только тогда, когда найдутся семейство $\{C_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ положительных чисел и семейство $\{q_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ индексов полунорм в $\mathbf{H}_1$, такие что*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :\ \|A_n(x)\|_p^2 \leqslant \varepsilon C_p \|x\|_{q_p}^1. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть последовательность $\{A_n\}$ борнологически сходится к нулю. Тогда найдётся равностепенно непрерывное семейство $\mathfrak{A}$, такое что $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0 :\ A_n \in \varepsilon\mathfrak{A}$. Из равностепенной непрерывности семейства $\mathfrak{A}$ следует, что существуют семейство $\{C_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ положительных чисел и семейство $\{q_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ индексов полунорм в $\mathbf{H}_1$, такие что $\forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall A \in \mathfrak{A} :\ \|A(x)\|_p^2 \leqslant C_p\|x\|_{q_p}^1$. Тогда $\forall\varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall B \in \varepsilon\mathfrak{A} :\ \|B(x)\|_p^2 \leqslant \varepsilon C_p\|x\|_{q_p}^1$.

$A_n \in \varepsilon\mathfrak{A},\ \forall n > n_0(\varepsilon)$, следовательно, $\forall\varepsilon > 0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall n > n_0(\varepsilon) :$ $\|A_n(x)\|_p^2 \leqslant \varepsilon C_p\|x\|_{q_p}^1$.

Пусть существуют семейство $\{C_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ положительных чисел и семейство $\{q_p\}_{p\in\mathcal{P}}$ индексов полунорм в $\mathbf{H}_1$, такие что выполняется неравенство (10). Докажем, что $\{A_n\}$ сходится к нулю борнологически.

Пусть $\mathfrak{A}$ — семейство всех операторов $A \in \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$, удовлетворяющих условию $\|A(x)\|_p^2 \leqslant C_p\|x\|_{q_p}^1,\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall p \in \mathcal{P}$. Из (10) для $\varepsilon = 1$ имеем:

$$\forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall n > n_1 :\ \|A_n(x)\|_p^2 \leqslant C_p\|x\|_{q_p}^1. \tag{11}$$

Из (11) следует, что подпоследовательность $\{A_n\}$, $n = n_1 + 1, \ldots$ содержится в $\mathfrak{A}$.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Из (10) следует $\forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1,\ \forall n > n_\varepsilon :$ $\left\|\dfrac{A_n}{\varepsilon}(x)\right\|_p^2 \leqslant C_p\|x\|_{q_p}^1$. Тогда $\dfrac{A_n}{\varepsilon} \in \mathfrak{A},\ \forall n > n_0 = \max\{n_\varepsilon, n_1\}$, то есть, $\forall n > n_0,\ A_n \in \varepsilon\mathfrak{A}$. Таким образом существует равностепенно непрерывное семейство $\mathfrak{A}$, такое что $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0 :\ A_n \in \varepsilon\mathfrak{A}$, следовательно $\{A_n\}$ сходится к нулю борнологически в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. □

Следующие две теоремы описывают достаточные условия борнологической сходимости операторных рядов в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. Но сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1.

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0,\ \forall b > 0 :\ n!^{-b} < \frac{\varepsilon}{b}. \tag{12}$$

Доказательство. Так как $n!^{-b} \leqslant n^{-b}$, $\forall n$, $\forall b > 0$, то достаточно показать, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0,\ \forall b > 0 :\ n^{-b} < \frac{\varepsilon}{b}. \tag{13}$$

Действительно, функция $f_\varepsilon(b) = (b/\varepsilon)^{1/b}$ ограничена на луче $(0; +\infty)$ при каждом фиксированном ε, поэтому достаточно взять $n_0 > \sup\limits_{b>0} f_\varepsilon(b)$ и неравенство (13) будет выполнено.

Лемма 2.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n > n_0,\ \forall 0 < a < 1 :\ a^n < \frac{\varepsilon}{1-a}. \tag{14}$$

Доказательство. Действительно, функция $g_\varepsilon(a) = \dfrac{\ln \frac{\varepsilon}{1-a}}{\ln a}$ ограничена сверху на интервале $(0; 1)$ при каждом фиксированном ε, поэтому достаточно взять $n_0 > \sup\limits_{0<a<1} g_\varepsilon(a)$ и неравенство (14) будет выполнено.

Теорема 3. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. *Если*

$$\forall p \in \mathcal{P},\ \exists C_p, b_p > 0,\ \exists q_p \in \mathcal{Q},\ \forall n,\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :\ \|A_n(x)\|_p \leqslant C_p n!^{-b_p} \|x\|_{q_p}, \tag{15}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *борнологически сходится в* $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Доказательство. Возьмём произвольные $m, k \in \mathbb{N}$. Из неравенства (15) следует $\forall p \in \mathcal{P},\ \exists C_p, b_p > 0,\ \exists q_p \in \mathcal{Q},\ \forall m, k,\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :$

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} A_n(x) \right\|_p^2 \leqslant C_p \sum_{n=k}^{m} n!^{-b_p} \|x\|_{q_p}^1, \tag{16}$$

$$\sum_{n=k}^{m} n!^{-b_p} = k!^{-b_p} \left[1 + (k+1)^{-b_p} + (k+1)^{-b_p}(k+2)^{-b_p} + \ldots + \right.$$
$$\left. + (k+1)^{-b_p}(k+2)^{-b_p} \ldots m^{-b_p}\right]. \tag{17}$$

Выражение в квадратных скобках в (17) ограничено при каждом p, то есть,

$$\sum_{n=k}^{m} n!^{-b_p} \leqslant M_p k!^{-b_p},\ \forall k, m.$$

По лемме 1 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0(\varepsilon),\ \forall k > k_0,\ \forall p \in \mathcal{P} :\ k!^{-b_p} < \dfrac{\varepsilon}{b_p}$. Таким образом, существуют семейство положительных чисел $\{\widetilde{C}_p = \dfrac{C_p M_p}{b_p}\}$ и семейство $\{q_p\}$ индексов полунорм в $\mathbf{H}_1$, такие что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0(\varepsilon),\ \forall k, m > k_0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :\ \left\| \sum_{n=k}^{m} A_n(x) \right\|_p^2 \leqslant \varepsilon \widetilde{C}_p \|x\|_{q_p}^1. \tag{18}$$

Из (18) следует, что двойная последовательность $\sum\limits_{n=k}^{m} A_n$ борнологически сходится к нулю по теореме 2, то есть, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ борнологически сходится.

Теорема 4. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. *Если*

$$\forall p \in \mathcal{P},\ \exists C_p > 0,\ \exists 0 < a_p < 1,\ \exists q_p \in \mathcal{Q},\ \forall n, \forall x \in \mathbf{H}_1 :\ \|A_n(x)\|_p \leqslant C_p a_p^n \|x\|_{q_p}, \tag{19}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *борнологически сходится в* $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Доказательство. Возьмём произвольные $m, k \in \mathbb{N}$. Из неравенства (19) следует $\forall p \in \mathcal{P},\ \exists C_p, b_p > 0,\ \exists q_p \in \mathcal{Q},\ \forall m, k,\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :$

$$\left\| \sum_{n=k}^{m} A_n(x) \right\|_p^2 \leqslant C_p \sum_{n=k}^{m} a_p^n \|x\|_{q_p}^1, \tag{20}$$

$$\sum_{n=k}^{m} a_p^n = a_p^k \left(1 + a_p + a_p^2 + \ldots + a_p^{m-k}\right) \leqslant \frac{a_p^k}{1 - a_p}. \tag{21}$$

По лемме 2 $\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0(\varepsilon),\ \forall k > k_0,\ \forall p \in \mathcal{P} :\ a_p^k < \dfrac{\varepsilon}{1 - a_p}$. Таким образом, существуют семейство положительных чисел $\left\{ \widetilde{C}_p = \dfrac{C_p}{(1 - a_p)^2} \right\}$ и семейство $\{q_p\}$ индексов полунорм в $\mathbf{H}_1$ такие, что

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0(\varepsilon),\ \forall k, m > k_0,\ \forall p \in \mathcal{P},\ \forall x \in \mathbf{H}_1 :\ \left\| \sum_{n=k}^{m} A_n(x) \right\|_p^2 \leqslant \varepsilon \widetilde{C}_p \|x\|_{q_p}^1. \tag{22}$$

Из (22) следует, что двойная последовательность $\sum\limits_{n=k}^{m} A_n$ борнологически сходится к нулю по теореме 2, то есть ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ борнологически сходится.

Следующие две теоремы описывают достаточные условия борнологической расходимости операторных рядов в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Теорема 5. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. *Если для некоторого* $p \in \mathcal{P}$ *найдётся* $b_p > 0$ *такое, что*

$$\forall C,\ \forall q \in \mathcal{Q},\ \exists n_k \to \infty,\ \exists \{x_k\} \subset \mathbf{H}_1 :\ \|A_{n_k}(x_k)\|_p > C n_k!^{b_p} \|x_k\|_q, \tag{23}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *борнологически расходится в* $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Теорема 6. *Пусть* $\{A_n\} \subset \mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. *Если для некоторого* $p \in \mathcal{P}$ *найдётся* $a_p > 1$ *такое, что*

$$\forall C,\ \forall q \in \mathcal{Q},\ \exists n_k \to \infty,\ \exists \{x_k\} \subset \mathbf{H}_1 :\ \|A_{n_k}(x_k)\|_p > C a_p^{n_k} \|x_k\|_q, \tag{24}$$

то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ *борнологически расходится в* $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$.

Доказательство. Действительно, в условиях теорем 5 и 6 семейство $\{A_n\}$ не является равностепенно непрерывным, и следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ не может борнологически сходиться в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$. □

Из теорем 3–6 следует, что необходимым условием борнологической сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ является принадлежность последовательности $\mathcal{A} = \{A_n\}$ классу $\mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[0,1]$, а достаточным — принадлежность классу $\mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2}[0,1)$. В случае, когда $\beta(\mathcal{A}) = 0$, $\alpha(\mathcal{A}) = 1$, вопрос о борнологической сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n$ в $\mathcal{L}(\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2)$ остаётся открытым.

Из теорем 3–6 также следует, что необходимым условием борнологической сходимости последовательности операторов $\mathcal{A} = \{A_n\}$ к *ненулевому* оператору A является равенство нулю её порядка и равенство единицы её типа.

Проиллюстрируем доказанные теоремы на примере дифференциального оператора бесконечного порядка.

Пусть D — выпуклая односвязная область, G — её сужение на $0 \leqslant d < d_0$, т.е. область, для которой D является d-окрестностью (d_0 — «верхняя граница сужаемости» области D, то есть верхняя грань чисел d, таких что сужение области D на d непусто). Пусть $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}(D)$ — пространство всех функций, аналитических в D с мультинормой

$$\|F\|^1_q = \max_{z\in\overline{D}_q} |F(z)|, \quad \forall F \in \mathbf{H}(D), \quad D_1 \subset D_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{q=1}^{\infty} D_q = D, \tag{25}$$

$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}(G)$ — пространство всех функций, аналитических в G с мультинормой

$$\|F\|^2_p = \max_{z\in\overline{G}_p} |F(z)|, \quad \forall F \in \mathbf{H}(G), \quad G_1 \subset G_2 \subset \dots, \quad \bigcup_{p=1}^{\infty} G_p = G, \tag{26}$$

Пусть $\mathbf{H}_G(D)$ — пространство всех функций, аналитических в D с мультинормой (26).

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z) \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}, \tag{27}$$

где $c_n(z) \in \mathbf{H}(G)$. Обозначим

$$\gamma_p = \varliminf_{n\to\infty} \frac{-\ln \|c_n(z)\|^2_p}{n \ln n}, \ \varkappa_p = \varliminf_{n\to\infty} \frac{n^{-\gamma_p}}{\sqrt[n]{\|c_n(z)\|^2_p}}.$$

Из определения нижнего предела следует оценка

$$\forall p, \ \forall\varepsilon > 0, \quad \exists K_p(\varepsilon), \quad \forall n: \ \|c_n(z)\|^2_p < K_p \left(\frac{1}{\varkappa_p} + \varepsilon\right)^n n^{-\gamma_p n}. \tag{28}$$

Пусть d_p — расстояние от границы области G_p до границы области D. Оператор $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} : \mathbf{H}(D) \to \mathbf{H}_G(D)$ имеет p-порядки $\beta_p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = 1$ и p-типы $\alpha_p\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{1}{ed_p} < \frac{1}{ed}$ (см. [2, 3]), т.е. справедлива оценка $\forall p, \forall\varepsilon > 0$, $\exists C_p(\varepsilon)$, $\exists q(p,\varepsilon)$, $\forall F \in \mathbf{H}(D)$, $\forall n$:

$$\|F^{(n)}(z)\|_p^2 < C_p\left(\frac{1}{ed_p} + \varepsilon\right)^n n^n \|F\|_q^1. \tag{29}$$

Из (29) и (28) следует $\forall p,\ \forall\varepsilon > 0,\ \exists M_p(\varepsilon),\ \exists q(p,\varepsilon),\ \forall F \in \mathbf{H}(D),\ \forall n :$

$$\|c_n(z)F^{(n)}(z)\|_p^2 < M_p\left(\frac{1}{ed_p\varkappa_p} + \varepsilon\right)^n n^{(1-\gamma_p)n} \|F\|_q^1. \tag{30}$$

Пусть при каждом p либо $\gamma_p > 1$, либо $\gamma_p = 1,\ \varkappa_p > \frac{1}{ed_p}$. Тогда последовательность операторов $\mathcal{A} = \left\{c_n(z)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\right\}$, действующих из $\mathbf{H}(D)$ в $\mathbf{H}(G)$, имеет p-порядки $\beta_p(\mathcal{A}) \leqslant 1 - \gamma_p \leqslant 0$, причём в случае равенства справедлива оценка на p-типы $\alpha_p(\mathcal{A}) \leqslant \frac{1}{ed_p\varkappa_p} < 1$, то есть $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}^{\mathcal{P}}_{\mathbf{H}(D),\mathbf{H}(G)}[0,1)$. Из теорем 3–4 следует, что ряд (27) борнологически сходится в пространстве $\mathcal{L}(\mathbf{H}(D), \mathbf{H}(G))$ к линейному непрерывному оператору $B : \mathbf{H}(D) \to \mathbf{H}(G)$.

Литература

1. *Радыно Я. В.* Линейные уравнения и борнология. — Мн.: БГУ, 1982. [*Radihno Ya. V.* Lineyjnihe uravneniya i bornologiya. — Mn.: BGU, 1982.]
2. *Мишин С. Н.* Операторы конечного порядка в локально выпуклых пространствах и их применение: Дисс. … к. ф.-м. н.: 01.01.01. — Орел: ОГУ, 2002. [*Mishin S. N.* Operatorih konechnogo poryadka v lokaljno vihpuklihkh prostranstvakh i ikh primenenie: Diss. … k. f.-m. n.: 01.01.01. — Orel: OGU, 2002.]
3. *Мишин С. Н.* Порядок и тип оператора и последовательности операторов, действующих в локально выпуклых пространствах // Ученые записки ОГУ (лаб. ТФФА). — 2001. — № 3. — С. 28–75. [*Mishin S. N.* Poryadok i tip operatora i posledovateljnosti operatorov, deyjstvuyuthikh v lokaljno vihpuklihkh prostranstvakh // Uchenihe zapiski OGU (lab. TFFA). — 2001. — No 3. — S. 28–75.]

UDC 517.98

Connection of the Characteristics of Sequence of the Operators with Convergence by Bornology

S. N. Mishin

Departement of Geometry and Technique of Teaching Mathematician
Oryol State University
Komsomolskaya str., 95, Oryol, Russia, 302026

The connection between characteristics (order and type) of sequence of linear continuous operators with convergence by equicontinuous bornology is considered.

Key words and phrases: locally convex space, order and type of sequence of operators, equicontinuous bornology, convergence by bornology.