УДК 517.925

Анализ устойчивости решений одного класса квазилинейных неавтономных разрывных систем

В. И. Безяев[*], **Ю. А. Коняев**[†]

[*] *Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики*
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

[†] *Кафедра высшей математики*
Российский Университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

С помощью спектрального метода исследована устойчивость решений разрывных квазилинейных систем дифференциальных уравнений с нормальными матрицами.

Ключевые слова: устойчивость, спектральный метод, нормальная матрица.

1. Введение

Для одного класса квазилинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными правыми частями приведены конструктивные спектральные условия устойчивости и неустойчивости решений, доказаны теоремы, являющиеся аналогами теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению и принципа суперпозиции для квазилинейных систем. Приведены нетривиальные примеры. Полученные без использования аппарата функций Ляпунова результаты дополняют или уточняют ранее известные [1–5].

2. Устойчивость решений одного класса квазилинейных неавтономных разрывных систем

В дальнейшем под *кусочно-непрерывной* функцией (может быть матричной) $f(x,t)$ в ограниченной области G пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{x,t}$ понимается функция, непрерывная вплоть до границы каждой из подобластей G_i ($i=\overline{1,k}$), где

$$G=\left(\bigcup_{i=1}^{k} G_i\right)\bigcup M, \quad G_i\bigcap G_j=\varnothing \quad \text{при} \quad i\neq j, \quad M\subset \bigcup_{i=1}^{k}(\partial G_i),$$

$\operatorname{mes} M=0$ — мера Лебега.

Если область G неограниченная, то в определении кусочно непрерывной функции каждая ограниченная часть области G может иметь общие точки лишь с конечным семейством областей G_i [2, § 4]. Наиболее часто встречается случай, когда множество M точек разрыва функции f состоит из конечного семейства гиперповерхностей. Кроме того, будем предполагать, что для каждой области G_i при почти всех t сечение границы области плоскостью $t=\mathrm{const}$ совпадает с границей сечения области той же плоскостью.

Система дифференциальных уравнений $\dot{x}=f(x,t)$ с кусочно непрерывной вектор-функцией $f(x,t)$ в области G доопределяется по А.Ф. Филиппову [2, § 4, п. 2а] до дифференциального включения

$$\dot{x}\in F(x,t), \tag{1}$$

Статья поступила в редакцию 29 марта 2010 г.

где многозначная функция $F(x,t)$ определена при почти всех t ($t \not\subseteq T_0$, $\operatorname{mes} T_0 = 0$, mes — мера Лебега) и всех x, для которых $(x,t) \in G$. При этом $F(x,t)$ — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные значения вектор-функции $f(\tilde{x},t)$, когда $(\tilde{x},t) \not\subseteq M$, $\tilde{x} \to x$, $t = \mathrm{const}$, а многозначная функция $F(x,t)$ — β-непрерывна (полунепрерывна сверху относительно включения) по x,t в области G. Указанные свойства функции $F(x,t)$ обеспечивают существование решения включения (2) в некоторой окрестности любой точки $(x^0,t_0) \in G$ и возможность его продолжения до выхода на границу замкнутой ограниченной области $D \subset G$, где $(x^0,t_0) \in D$ [2].

Заметим ещё, что при указанном выше условии на подобласти G_i доопределение по А.Ф. Филлипову равносильно доопределению по Н.Н. Красовскому и А.И. Субботину [5].

Теорема 1. *Пусть для автономной квазилинейной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x \tag{2}$$

с кусочно непрерывной в области $\Omega = \{(x,t) : x \in R^n,\ |x| < \delta < 1,\ t > 0\}$ *и нормальной в области* $\Omega \backslash M$ *матрицей* $A(x,t)$ *(*M *— множество точек разрыва матричной функции* $A(x,t)$*), спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *которой удовлетворяет в* $\Omega \backslash M$ *неравенствам*

$$\mu(x,t) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \leqslant \nu(x,t) \quad (\, j = \overline{1,n}\,), \tag{3}$$

где μ,ν *— непрерывные функции на* Ω*. Тогда для любого решения* $x(t)$ *включения (1), определённого системой (2), при п. в.* $t \in I \subseteq [0,\infty)$*, где* I *— промежуток существования решения* $x(t)$*, выполняются, соответственно, неравенства*

$$2\mu(x,t)|x|^2 \leqslant \frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \quad \text{или} \quad \frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant 2\nu(x,t)|x|^2. \tag{4}$$

Доказательство. Для любого решения $x(t)$ включения (1), соответствующего системе (2), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = x^T\dot{x} \in x^T F(x,t) \quad \text{при п.в. } t \in I.$$

В силу определения $F(x,t)$ [2, § 4] при п.в. $t \in I$ в любой точке (x,t) непрерывности всех элементов матрицы $A(x,t)$ имеется равенство $F(x,t) = A(x,t)x$, а при п. в. $t \in I$ в любой в точке разрыва $(x,t) \in M$ множество $F(x,t)$ определяется по формуле

$$F(x,t) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A_i(x,t)x : \ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l} \right\},$$

где $A_i(x,t)$ — пределы матричной функции $A(\tilde{x},t)$ при $\tilde{x} \to x$, $(\tilde{x},t) \in \Omega_i$, $i = \overline{1,l}$, $t = \mathrm{const} \geqslant 0$.

В любой точке непрерывности $(x,t) \in \Omega \backslash M$ матрицы $A(x,t)$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} = x^T A(x,t)x = y^* U^*(x,t)A(x,t)U(x,t)y =$$
$$= y^*\Lambda_A(x,t)y = \operatorname{Re}(y^*\Lambda_A(x,t)y) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_j(x,t)|y_j|^2, \tag{5}$$

где $U(x,t)U^*(x,t) = E$, $x = U(x,t)y$, $|x| = |y|$, $y^* = \bar{y}^T$, $U^*(x,t)A(x,t)U(x,t) = \Lambda_A(x,t) = \mathrm{diag}\,\{\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_n(x,t)\}$. Следовательно в любой точке непрерывности $(x,t) \in \Omega\backslash M$ матрицы $A(x,t)$ выполняются неравенства

$$\mu(x,t)|x|^2 \leqslant \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant \nu(x,t)|x|^2.$$

Аналогично, при почти всех $t \in I$ в точках разрыва $(x,t) \in M$ получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \in x^T F(x,t) = \left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i x^T A_i(x,t)x : \ \sum_{i=1}^{l}\alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l}\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i y^{i*}U_i^*(x,t)A_i(x,t)U_i(x,t)y^i\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i y^{i*}\Lambda_{A_i}(x,t)y^i\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i y^{i*}\Lambda_{A_i}(x,t)y^i\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\,\lambda_{ij}(x,t)|y_j^i|^2)\right\},$$

где $U_i^*(x,t)U_i(x,t) = E,\ x = U_i(x,t)y^i,\ |x| = |y^i|,\ i = \overline{1,l}\ , U_i^*(x,t)A_i(x,t)U_i(x,t) = \Lambda_{A_i}(x,t) = \mathrm{diag}\{\lambda_{i1}(x,t),\dots,\lambda_{in}(x,t)\}$, $\lambda_{ij}(x,t)$ — пределы функций $\lambda_j(\tilde{x},t)$ при $\tilde{x} \to x,\quad (\tilde{x},t) \in \Omega_i,\quad t = \mathrm{const},\quad (x,t) \in M,\ j = \overline{1,n},\quad i = \overline{1,l}.$

Следовательно при почти всех $t \in I$ в точках разрыва $(x,t) \in M$ также выполняются неравенства (4), так как в этом случае

$$\left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\,\lambda_{ij}(x,t)|y_j^i|^2) : \ \sum_{i=1}^{l}\alpha_i = 1, : \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l}\right\} \subseteq (-\infty,\ \mu(x,t)|x|^2)$$

или

$$\left\{\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Re}\,\lambda_{ij}(x,t)|y_j^i|^2) : \ \sum_{i=1}^{l}\alpha_i = 1, : \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l}\right\} \subseteq (\nu(x,t)|x|^2, +\infty).$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 1 и неравенства

$$1)\ \varphi(t)|x|^\alpha \leqslant \mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t) \quad \text{или} \quad 2)\ \mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t) \leqslant \varphi(t)|x|^\alpha \tag{6}$$

для $j = \overline{1,n},\ (x,t) \in \Omega\backslash M$, где функция $\varphi(t)$ кусочно-непрерывна при $t \geqslant 0$, а $\alpha \geqslant 0$. Тогда решение $x(t) \equiv 0$ рассматриваемого включения (2), соответственно: 1) неустойчиво при $\overline{\lim_{t\to+\infty}} b(t) = +\infty$, где $b(t) \equiv \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s$ или 2) асимптотически устойчиво при $\lim_{t\to+\infty} b(t) = -\infty$, либо устойчиво при $\overline{\lim_{t\to+\infty}} b(t) < +\infty$.

Доказательство. При $a > 0$ и $\alpha = 0$ положим $H(u) = \ln(u/a),\ 0 < u < a$, а при $\alpha > 0$ пусть $H(u) = (2/\alpha)(a^{-\alpha/2} - u^{-\alpha/2}),\ 0 < u < a$. Тогда $H(u)$ — непрерывная отрицательная возрастающая при $0 < u < a$ функция и $H(u) \to -\infty$ при $u \to 0+$. Следовательно обратная функция $H^{-1}(v)$ является непрерывной положительной возрастающей функцией при $-\infty < v < 0$ и $H^{-1}(v) \to 0$ при $v \to -\infty$.

Далее из неравенства (6) (случай 2)) и второго неравенства (4) для любого решения $x(t),\ t \in I \subseteq [0,\infty)$, рассматриваемого включения (1) (I — промежуток существования решения $x(t)$), имеем дифференциальное неравенство

$$\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant 2\varphi(t)|x|^{\alpha+2} \quad \text{при п.в.} \quad t \in I.$$

Отсюда для $x(0) \neq 0$ непосредственно получаем неравенство

$$|x(t)|^2 \leqslant H^{-1}(H(|x(0)|^2) + 2b(t)) \quad \text{при} \quad t \in I,$$

из которого сразу следуют оба утверждения об устойчивости.

Аналогично из неравенства (6) (случай 1)) при $x(0) \neq 0$ получается неравенство $|x(t)|^2 \geqslant H^{-1}(H(|x(0)|^2) + 2b(t))$ при $t \in I$, из которого сразу следует утверждение о неустойчивости. □

Пример 1. Включение (1), соответствующее квазилинейной системе с нормальной матрицей

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} (a+\cos t)|x|^\alpha & t\,\mathrm{sgn}(x_1+x_2) \\ -t\,\mathrm{sgn}(x_1+x_2) & (a+\cos t)|x|^\alpha \end{pmatrix} x,$$

имеет устойчивое решение $x(t) \equiv 0$ при $a = 0$, асимптотически устойчивое при $a < 0$ и неустойчивое в случае $a > 0$ (таким образом при $a = 0$ имеется бифуркация), если $\alpha \geqslant 0$. Эти утверждения получаются непосредственным применением следствия 1, поскольку $\mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t) \equiv (a+\cos t)|x|^\alpha$ для $j = 1, 2$, $x_1 + x_2 \neq 0$, $t > 0$.

Для квазилинейных «неоднородных» систем имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Если для квазилинейной неавтономной системы*

$$\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t), \quad f(0,t) \equiv 0, \tag{7}$$

с кусочно непрерывными в области $\Omega = \{(x,t) : x \in R^n,\ |x| < \delta < 1,\ t > 0\}$ *вектор-функцией* $f(x,t)$ *и матрицей* $A(x,t)$, *нормальной в* $\Omega \backslash M$, *спектр* $\{\lambda_j(x,t)\}_1^n$ *матрицы* $A(x,t)$ *удовлетворяет неравенствам* $\mathrm{Re}\,\lambda_j(x,t) \leqslant -C_1|x|^\alpha$ $(j = \overline{1,n}$, $C_1 > 0$, $\alpha \geqslant 0$, $(x,t) \in \Omega\backslash M)$ *и для функции* $f(x,t)$ *справедлива оценка* $|f(x,t)| \leqslant C_2|x|^{1+\beta}$ $(C_2 > 0$, $0 \leqslant \alpha < \beta$, $(x,t) \in \Omega\backslash M)$, *то решение* $x(t) \equiv 0$ *включения вида (1), соответствующего системе (7), асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Правая часть $F(x,t)$ включения (1), соответствующего системе (7), определяется по формулам: $F(x,t) = A(x,t)x + f(x,t)$ при $(x,t) \in \Omega\backslash M$,

$$F(x,t) = \left\{ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i [A_i(x,t)x + f^i(x,t)] : \ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i = 1,\ \alpha_i \geqslant 0,\ i = \overline{1,l} \right\}$$

при $(x,t) \in M$, где $A_i(x,t)$ и $f^i(x,t)$ — пределы функций $A(\tilde{x},t)$ и $f(\tilde{x},t)$ при $\tilde{x} \to x$, $t = \mathrm{const} \geqslant 0$, $(\tilde{x},t) \in \Omega_i$, $i = \overline{1,l}$.

Отсюда, как и при доказательстве теоремы 1, для любого решения $x(t)$ данного включения (1) получаем дифференциальное неравенство

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant -C_1|x|^{2+\alpha} + C_2|x|^{2+\beta} = -C_1|x|^{2+\alpha}(1 - (C_2/C_1)|x|^{\beta-\alpha}) \text{ при п.в. } t \in I.$$

Рассматривая решения $x(t)$ данного включения (1) в области $\Omega_1 = \{(x,t) : |x| < \delta_1,\ t \geqslant 0\} \subset \Omega$ для достаточно малого $\delta_1 > 0$, при п.в. $t \in I$ получаем неравенство $\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}|x|^2}{\mathrm{d}t} \leqslant -C_3|x|^{2+\alpha}$ $(|x(0)| \ll 1,\ C_3 > 0)$. Следовательно при

$\alpha > 0$ и $x(0) \neq 0$ $|x(t)| \leqslant (\alpha C_3 t + |x(0)|^{-\alpha})^{-1/\alpha} \to 0$ $(t \to +\infty)$, а при $\alpha = 0$ $|x(t)| \leqslant |x(0)| \exp(-C_3 t) \to 0$ $(t \to +\infty)$, т.е. $x(t) \equiv 0$ является асимптотически устойчивым решением рассматриваемого включения (1). □

Замечание 1. Теорему 2 можно считать аналогом теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости по первому приближению для систем вида (6) с кусочно-непрерывной правой частью.

Пример 2. Тривиальное решение включения вида (1), соответствующего системе

$$\dot{x} = A(x,t)x + f(x,t),$$

$$A(x,t) = \begin{pmatrix} -|x|^2 & \operatorname{sgn}(x_1+x_2)\cos t \\ -\operatorname{sgn}(x_1+x_2)\cos t & -|x|^2 \end{pmatrix}, f(x,t) = \begin{pmatrix} |x|^3(1+\sin^2 t) \\ |x|^3(1+\cos t) \end{pmatrix}$$

с нормальной матрицей $A(x,t)$, асимптотически устойчиво в силу теоремы 2, так как $\operatorname{Re}\lambda_j(x,t) \equiv -|x|^2$ и $|f(x,t)| \leqslant \sqrt{2}|x|^3$ $(\, j = 1, 2,\ x_1 + x_2 \neq 0,\ t \geqslant 0\,)$.

Предположение о нормальности матрицы системы вида (2) может быть ослаблено.

Теорема 3. *Пусть для квазилинейной системы вида (2) матрица* $A(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} A_k(x,t)$, *где* $A_k(x,t)$ $(k = \overline{1,N})$ *квадратные кусочно непрерывные в области* Ω *матрицы, нормальные в точках определения и удовлетворяющие при* $k = \overline{1,N}$, $(x,t) \in \Omega \backslash M$ *условиям*

$$\mu_k(x,t) \leqslant \operatorname{Re}\lambda_{jA_k}(x,t) \quad \text{или} \quad \operatorname{Re}\lambda_{jA_k}(x,t) \leqslant \nu_k(x,t) \quad \text{для всех } j = \overline{1,n},$$

где $\mu_k(x,t)$, $\nu_k(x,t)$ $(k = \overline{1,N})$ *—непрерывные в* Ω *функции. Тогда для любого решения* $x(t)$ *включения (1), соответствующего данной системе (2), при п.в.* $t \in I$, *где* I *— промежуток существования решения* $x(t)$, *выполняются неравенства (4), где* $\mu(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \mu_k(x,t)$, $\quad \nu(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} \nu_k(x,t)$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы является непосредственным обобщением доказательства теоремы 1. □

Следствие 2. Пусть выполнены условия теоремы 3 и равенства

$$1)\ \mu(x,t) = \varphi(t)|x|^\alpha \quad \text{или} \quad 2)\ \nu(x,t) = \varphi(t)|x|^\alpha \quad \text{для } (x,t) \in \Omega,$$

где функция $\varphi(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$, а $\alpha \geqslant 0$. Тогда решение $x(t) \equiv 0$ включения (1), определённого данной системой (2), соответственно: 1) неустойчиво при $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} b(t) = +\infty$, где $b(t) \equiv \int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s$, или 2) асимптотически устойчиво при $\lim\limits_{t\to+\infty} b(t) = -\infty$, либо устойчиво при $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}} b(t) < +\infty$.

Доказательство. Доказательство этих утверждений повторяет доказательство следствия 1. □

Пример 3. Включение (1), соответствующее квазилинейной системе

$$\dot{x} = \left(\begin{pmatrix} a+\sin t & t^2\operatorname{sgn}(x_1+x_2) \\ -t^2\operatorname{sgn}(x_1+x_2) & a+\sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (1+t)^{-1} & \operatorname{sgn}(x_1x_2) \\ -\operatorname{sgn}(x_1x_2) & (1+t)^{-1} \end{pmatrix} \right) x,$$

матрица которой является суммой двух нормальных матриц $A_1(x,t)$ и $A_2(x,t)$, имеет асимптотически устойчивое решение $x(t) \equiv 0$ при $a < 0$ и неустойчивое при $a \geqslant 0$. Доказательства получаются непосредственно из тождества $\operatorname{Re} \lambda_{A_1 j}(x,t) + \operatorname{Re} \lambda_{A_2 j}(x,t) \equiv a + \sin t + (1+t)^{-1}$ ($j = 1,2,\ x_1 + x_2 \neq 0,\ x_1 x_2 \neq 0,\ t \geqslant 0$) и следствия 2.

Замечание 2. Нетрудно сформулировать и доказать аналог теоремы 2 для системы вида (7) с матрицей $A(x,t) = \sum_{k=1}^{N} A_k(x,t)$ как в теореме 3.

Отметим ещё, что моделирование в программной среде MAPLE многочисленных примеров систем, рассмотренных в данной статье, подтверждает полученные теоретические результаты.

3. Заключение

Предложенный в работе метод исследования устойчивости квазилинейных неавтономных разрывных систем ОДУ с нелинейной нормальной матрицей отличается от ранее известных и особенно полезен в критических случаях. Полученные без использования аппарата функций Ляпунова результаты позволяют сформулировать и нелокальные условия устойчивости решений.

Литература

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с. [*Demidovich B. P.* Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti. — M.: Nauka, 1967. — 472 s.]
2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985. — 224 с. [*Filippov A. F.* Differencialjnihe uravneniya s razrihvnoyj pravoyj chastjyu. — M.: Nauka, 1985. — 224 s.]
3. *Руш Н.and Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. — М.: Мир, 1980. — 300 с. [*Rush N.and Abets P., Lalua M.* Pryamoyj metod Lyapunova v teorii ustoyjchivosti. — M.: Mir, 1980. — 300 s.]
4. *Розо М.* Нелинейные колебания и теория устойчивости. — М.: Наука, 1971. — 288 с. [*Rozo M.* Nelineyjnihe kolebaniya i teoriya ustoyjchivosti. — M.: Nauka, 1971. — 288 s.]
5. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с. [*Krasovskiyj N. N., Subbotin A. I.* Pozicionnihe differencialjnihe igrih. — M.: Nauka, 1974. — 456 s.]

UDC 517.925

Stability Analysis of Solutions to One Class Quasilinear Nonautonomous Discontinuous Systems

V. I. Bezyaev[*], **Yu. A. Konyaev**[†]

[*] *Department of Differential Equations and Mahtematical Physics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

[†] *Department of Mathematics*
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

Stability of solutions to one class quasilinear differential systems with normal matrices studied by spectral method.

Key words and phrases: stability, spectral method, normal matrix.