Физика

УДК 539.9

О некоторых неканонических связях спиноров со скалярами и уравнений Клейна–Гордона и Дирака

В. В. Кассандров, Н. В. Маркова

Институт гравитации и космологии
Российский университет дружбы народов
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

Обсуждаются различные аспекты неканонической интерпретации проблемы лоренц-инвариантности уравнения Дирака, предложенной А. Зоммерфельдом в 1951 г. В её контексте поле Дирака рассматривается как квартет *скалярных* полей, а *спиноры* вообще не возникают в теории. Представлены также основные результаты работы одного из авторов 2007 г., в которой скалярные поля Клейна–Гордона трактуются как *потенциалы* для решений уравнения Дирака, а не как самостоятельное поле. Само поле Дирака по существу становится при этом калибровочно инвариантным.

Ключевые слова: лоренц-инвариантность, спинорные преобразования, калибровочная инвариантность, квадрированное уравнение Дирака.

1. Теория Зоммерфельда: поле Дирака как квартет скалярных полей?

Современное состояние «теорий объединения», в том числе единого описания бозонов и фермионов в рамках *суперсимметричных* схем, достаточно неопределенно. В частности, до сих пор не предложен достоверный механизм нарушения суперсимметрии, не являющийся чисто феноменологическим. Как известно (см., например, [1]), наличие такого нарушения необходимо как для обеспечения точного совпадения констант трёх основных взаимодействий в ТэВ-ной области энергий, так и для получения реалистических масс *суперпартнёров* известных элементарных частиц. С другой стороны, никакого экспериментального подтверждения существования суперпартнёров на сегодняшний день не имеется, а последние LHC-данные закрывают всё большую область параметров модели, в которой возможно их обнаружение. Всё это, наряду с другими проблемами, требующими, по-видимому, кардинального пересмотра Стандартной модели (в их числе проблема *массы*, а возможно, и *тахионной* природы нейтрино), стимулирует, в частности, поиски альтернативных механизмов единого описания бозонов и фермионов.

В настоящее время общепризнанно, что существование двух этих классов частиц, подчиняющихся разным статистикам и в силу этого проявляющих разные свойства в многочастичных системах (бозе-конденсат или принцип Паули для фермионов), тесно связано с геометрией физического пространства–времени, а точнее, с двумя классами неприводимых *представлений* группы Лоренца как его группы симметрии. А именно, *тензорные* представления отвечают релятивистским полям, ассоциируемым с бозонами как частицами *целого* спина, в то время как *спинорные* — с фермионами, частицами с *полуцелым* спином.

Спиноры, введённые в физику в 20-е годы В. Паули и П.А.М. Дираком, а с математической точки зрения примерно в то же время разработанные Э. Картаном и Ван дер Варденом, сразу получили заслуженное признание и до сих пор считаются одним из самых фундаментальных и необходимых атрибутов всякой

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2011 г.

релятивистской теории поля. Удивительно, однако, что уже в 50-е годы выдающийся немецкий физик А. Зоммерфельд обратил внимание на возможность альтернативной, **не использующей понятие спинора** точки зрения на проблему лоренц-инвариантности уравнения Дирака и, тем самым, на математическую природу 4-компонентного дираковского поля (см. [2, глава IV]).

Напомним, что канонический подход к этой проблеме состоит в следующем (см., например, [3]). Пусть производится одно из 6-параметрических (собственных) преобразований Лоренца координат пространства–времени Минковского

$$x \mapsto \tilde{x}, \quad \tilde{x}^\mu = L^\mu_\nu x^\nu. \tag{1}$$

Совместно с ними выполним «биспинорное» преобразование компонент поля Дирака $\Psi(x)$ по матричному закону

$$\Psi \mapsto \tilde{\Psi}(\tilde{x}) = \Lambda\Psi(x), \tag{2}$$

причём параметры матриц преобразования координат L^μ_ν и поля Λ согласованы условиями вида

$$\Lambda^{-1}\gamma^\mu\Lambda = L^\mu_\nu\gamma^\nu \tag{3}$$

для каждой из 4 образующих *матриц Дирака* γ^μ с (анти)коммутационными соотношениями вида

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{4}$$

(известно, что условия (3) можно удовлетворить в случае *произвольного* собственного преобразования Лоренца).

При совместных вышеописанных преобразованиях координат и поля *уравнение Дирака*

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} + m\right)\Psi = 0 \tag{5}$$

принимает вид

$$\left(i\gamma^\mu\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} + m\right)\tilde{\Psi} = 0, \tag{6}$$

т.е. остаётся *форм-инвариантным*, причём при использовании **того же исходного набора матриц** γ^μ.

Хорошо известно также, что при этом *билинейные формы*, построенные из Ψ и *дираковски сопряжённого* биспинора $\bar{\Psi} = \Psi^+\gamma^0$ с помощью базисных матриц алгебры Дирака, ведут себя как (псевдо)тензоры (0-го, 1-го или 2-го рангов). Например, форма $\bar{\Psi}\Psi$ является *скаляром*, а величины $J^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ведут себя как компоненты *4-вектора* (в теории Дирака J^μ удовлетворяет *уравнению непрерывности*, а положительно определенная величина $J^0 = \Psi^+\Psi$ рассматривается как квантовомеханическая *плотность вероятности* для ассоциированной частицы – фермиона со спином 1/2).

Между тем, А. Зоммерфельд отметил [2, глава IV], что более простая и естественная точка зрения на лоренц-инвариантность уравнения Дирака состоит в том, чтобы при преобразованиях координат **считать каждую из компонент дираковского поля Ψ скаляром**, вместо того *преобразуя сами матрицы Дирака* γ^μ по 4-векторному закону

$$\gamma^\mu \mapsto \tilde{\gamma}^\mu = L^\mu_\nu\gamma^\nu. \tag{7}$$

В новой системе отсчёта уравнение Дирака принимает тогда вид

$$\left(i\tilde{\gamma}^\mu\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\mu} + m\right)\tilde{\Psi} = 0, \quad \tilde{\Psi}(\tilde{x}) \equiv \Psi(x). \tag{8}$$

При этом из (хорошо известной в теории Дирака возможности выполнения) условий согласования (3) следует, что всегда найдётся матрица Λ, реализующая заданное преобразование Лоренца L^{μ}_{ν} для каждой из матриц γ^{μ} как соответствующее ей преобразование подобия $\tilde{\gamma}^{\mu} = \Lambda\gamma^{\mu}\Lambda^{-1}$, сохраняющее все свойства матричного умножения, в том числе и вид определяющих соотношений (4). Отметим, что свойство инвариантности соотношений (4) легко доказать и непосредственно, *без привлечения условий согласования* (4). Отсюда следует, в свою очередь, что никакой «двузначности» спинорного типа в данном подходе вообще не возникает: при повороте на 360° матрицы Дирака возвращаются к своему первоначальному виду.

Таким образом, преобразованное уравнение (8) *со скалярным законом преобразования поля Дирака* Ψ действительно представляет собой уравнение Дирака, однако **с матрицами** $\tilde{\gamma}^{\mu}$ **в новом представлении той же алгебры**. Заметим, что конкретный вид этих матриц зависит как от выбора исходного представления, так и от параметров преобразования Лоренца.

С математической точки зрения, концепция *матриц Дирака как 4-векторных величин* вполне естественна, так как соответствует линейным преобразованиям базисных элементов векторного пространства алгебры и переходу к алгебре, *изоморфной* исходной. Более того, такой подход допускает естественное обобщение теории *скалярного(!)* поля Дирака на преобразования к *произвольно движущейся и вращающейся системе отсчёта* с (шестью) параметрами, зависящими от координат; на этом пути мы естественно приходим к концепции *локальных алгебр* со структурными константами, зависящими от точки пространства–времени (см. [4, глава II]), а также к концепции *Q-базиса* А.П. Ефремова [5]. Очевидно также, что рассматриваемая точка зрения идеально согласуется со введением непостоянных матриц Дирака $\gamma^{\mu}(x) = h^{\mu}_{a}\gamma^{a}_{(0)}$ при записи уравнения Дирака на фоне искривлённого пространства–времени с *тетрадами* $\{h^{\mu}_{a}(x)\}$. Все эти вопросы, безусловно, заслуживают специального рассмотрения и развития.

С целью доказательства непротиворечивости вышеизложенной концепции необходимо ещё показать, что дираковски сопряженный «биспинор» $\bar{\Psi}(x)$ на самом деле также **ведёт себя как скаляр** при преобразованиях Лоренца координат и γ-матриц. Для этого следует определить его с помощью постоянной, не меняющейся при переходе к другой системе отсчёта фундаментальной матрицы ε, формально совпадающей с исходной матрицей $\gamma^0 = \gamma^0_{(0)}$. А именно, положим

$$\bar{\Psi} := \Psi^{+}\varepsilon, \quad \varepsilon = \gamma^0_{(0)}. \tag{9}$$

Используя тогда очевидные коммутационные свойства

$$\varepsilon\gamma^0_{(0)} = \gamma^0_{(0)}\varepsilon, \quad \varepsilon\gamma^a_{(0)} = -\gamma^a_{(0)}\varepsilon \quad (a = 1,\, 2,\, 3), \tag{10}$$

сразу устанавливаем, что для всех четырёх *преобразованных* γ-матриц $\gamma^{\mu} = L^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu}_{(0)}$ имеет место аналог известного в теории Дирака соотношения

$$\varepsilon(\gamma^{\mu})^{+}\varepsilon \equiv \gamma^{\mu}, \tag{11}$$

что автоматически ведёт к стандартному виду уравнения для *сопряжённого* поля Дирака

$$i\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu} - m\bar{\Psi} = 0, \tag{12}$$

и к его *форм-инвариантности* при 4-векторных преобразованиях Лоренца координат и γ-матриц (и *неизменности самого поля* $\bar{\Psi}$).

Дальнейшие выводы теории скалярного поля Дирака достаточно тривиальны. Все канонические билинейные формы (например, 4-вектор $\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\Psi$), очевидно, остаются тензорами соответствующих рангов, однако уже не в силу специальных биспинорных преобразований полей $\Psi, \bar{\Psi}$, а как следствие непосредственных тензорных преобразований 16 базисных элементов полной алгебры Дирака. Очевидно, что весь *лагранжев формализм* теории Дирака также остаётся неизменным. В новой интерпретации величина спина ассоциированных с уравнением Дирака частиц также остаётся прежней и равной $1/2$, если спин понимается в связи с собственными значениями оператора полного момента количества движения $j = k \pm 1/2$. Отметим также, что вышеприведённые рассуждения остаются неизменными и в случае наличия *взаимодействия* дираковского поля с другими релятивистскими полями, в первую очередь с электромагнитным.

Представляется, таким образом, что трактовка поля Дирака (как, очевидно, и двухкомпонентного поля, фигурирующего в уравнениях Вейля и Паули) как мультиплета скалярных полей мало что меняет в практических результатах теории Дирака и оказывается вполне допустимой. Тогда возникает вопрос, что нового, помимо математически эквивалентной интерпретации, может привнести такая трактовка в физику? Мы выскажем здесь лишь несколько предварительных соображений по этому поводу.

Во-первых, скалярная природа дираковского поля может дать возможность введения *инвариантного дираковского вакуума* $\Psi_{(0)}$, описывающего процессы на микромасштабах и/или *космологического фонового поля*, способного, в частности, послужить заменой скалярного поля *инфлатона*.

С другой стороны, дираковский скаляр может быть подчинен некоторому инвариантному условию связи типа $\Psi^+\Psi = const$, геометрически обеспечивающему ограничение значений дираковского поля на 7-сферу S^7. Эти связи могут обуславливать существование целочисленного *топологического заряда* и быть востребованы, например, при попытках описания частиц полуцелого спина в рамках топологических моделей типа *модели Скирма* (см., например, [6]). Наконец, скалярная трактовка поля Дирака позволяет лучше понять некоторые неожиданные связи между решениями уравнений Клейна–Гордона и Дирака, обнаруженные недавно в нашей работе [7], к краткому изложению результатов которой мы и переходим.

2. Уравнения Клейна–Гордона и Дирака: различные эквивалентные представления единой полевой структуры?

В работе [7] показано, что *любое* решение свободного уравнения Дирака (5) может быть получено дифференцированием квартета скалярных (в общепринятом смысле) полей, каждое из которых удовлетворяет свободному уравнению Клейна–Гордона. (Необходимо сразу предупредить читателя, что вышеприведённое утверждение не следует путать с хорошо известным обратным свойством компонент произвольного решения свободного уравнения Дирака тождественно удовлетворять уравнению Клейна–Гордона.)

А именно, пусть каждое из четырёх комплексных полей $\varphi = \{\varphi_a\}$, $a = 1, 2, 3, 4$ подчиняется уравнению Клейна–Гордона

$$(\Box - m^2)\varphi = 0, \tag{13}$$

где $\Box := -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$ – волновой оператор д'Аламбера (здесь и в дальнейшем $\partial_\mu := \partial/\partial x^\mu$) и m – (общая) масса частиц, ассоциированных с φ-полями. Оператор Клейна–Гордона может быть факторизован в произведение двух коммутирующих операторов Дирака первого порядка $P, \tilde{P}$:

$$(\Box - m^2) = P\tilde{P} = \tilde{P}P, \tag{14}$$

$$P := i\gamma^\mu\partial_\mu - m, \quad \tilde{P} := i\gamma^\mu\partial_\mu + m, \tag{15}$$

с матрицами Дирака, подчиняющимися соотношениям (4).

Определим теперь новое 4-компонентное комплексное поле χ через производные от исходного поля φ как

$$\chi := \tilde{P}\varphi \tag{16}$$

Тогда, вследствие (13) и (14), это поле тождественно удовлетворяет уравнению Дирака:

$$P\chi = P\tilde{P}\varphi \equiv 0. \tag{17}$$

Таким образом, каждое решение уравнения Клейна–Гордона для 4-компонентного скалярного поля, хотя и необязательно удовлетворяет уравнению Дирака, но всегда *порождает* некоторое его решение. Обратно, пусть имеем некоторое *произвольное* решение χ уравнения Дирака (17). Тогда, как уже отмечалось выше и хорошо известно, каждая компонента поля Дирака удовлетворяет уравнению Клейна–Гордона

$$0 = \tilde{P}(P\chi) = (\Box - m^2)\chi \equiv 0. \tag{18}$$

Мы, однако, интересуемся сейчас другим его свойством, а именно, возможностью восстановления генерирующих данное решение *потенциалов* φ из основного соотношения (16). Последнее представляет собой систему четырёх неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка, которая, для *любого* χ в левой части, может быть (локально) разрешена относительно потенциалов φ (совершенно аналогично отношению между напряжённостями и потенциалами электромагнитного поля). Полученные таким образом потенциалы будут, разумеется, тождественно удовлетворять уравнению Клейна–Гордона

$$0 = P\chi = P\tilde{P}\varphi = (\Box - m^2)\varphi \equiv 0, \tag{19}$$

которое выполняет при этом роль *условий интегрируемости* для системы (16).

Как и можно было ожидать, потенциалы φ определяются неоднозначно, с точностью до общего решения «однородного» уравнения Дирака. Иными словами, изначально фиксированное решение χ уравнения Дирака $P\chi = 0$ («напряжённость дираковского поля») остаётся инвариантным относительно следующих *калибровочных преобразований потенциалов Клейна–Гордона* (16):

$$\varphi \mapsto \varphi + \kappa, \tag{20}$$

с величинами κ, являющимися *произвольным* решением уравнения Дирака

$$\tilde{P}\kappa = 0. \tag{21}$$

Более того, поскольку для всякого κ существуют некоторые потенциалы ξ Клейна–Гордона, такие что $\kappa = P\xi$, калибровочные преобразования (20) могут быть представлены в хорошо знакомой *градиентно-подобной* форме

$$\varphi \mapsto \varphi + P\xi\,. \tag{22}$$

Теперь уже ξ следует рассматривать как *произвольное* поле, удовлетворяющее уравнениям Клейна–Гордона.

Мы показали, таким образом, что (свободное) *поле Дирака само по себе есть калибровочно инвариантное поле*, родственное электромагнитным напряжённостям. С другой стороны, поле Клейна–Гордона выступает как *поле потенциалов* по отношению к дираковскому. По аналогии с электромагнетизмом, следует заключить, что уравнения Клейна–Гордона и Дирака представляют собой разные, но *эквивалентные* формы описания физически одной и той же полевой (и ассоциированной частицеподобной) структуры (какой именно?). Разумеется, такой вывод находится в очевидном противоречии со взглядами, принятыми в квантовой и классической теории поля!

Как следствие вышеизложенных построений, нетрудно предложить метод получения целой *иерархии* решений уравнений Дирака и Клейна–Гордона [7], исходя из некоторого начального. Кроме того, в вышеуказанной работе было выяснено, что канонические спинорные преобразования (и даже более общие преобразования, приводящие к *однозначности* спинора при вращениях на 360°!) строятся как комбинация преобразований Лоренца для оператора Дирака и внутренних преобразований симметрии из группы $GL(4, \mathbb{C})$, перемешивающих компоненты квартета скалярных полей. С другой стороны, с учётом вышеописанной эквивалентности решений уравнений Клейна–Гордона и Дирака, становится ещё более оправданной развитая в предыдущем разделе трактовка самого поля Дирака как квартета скалярных полей, аналогичных квартету полей Клейна–Гордона. В таком случае вопрос о происхождении спинорных трансформационных свойств при генерации решений уравнения Дирака из уравнения Клейна–Гордона вообще не возникает.

К сожалению, вышеописанная процедура не может быть обобщена непосредственно на случай скалярных-спинорных полей, взаимодействующих с электромагнитным или гравитационным. Это связано с отсутствием возможности факторизации обобщённого оператора Клейна–Гордона в этих случаях. Однако многие интересные следствия вышеописанной конструкции сохраняются при рассмотрении *квадрированного* уравнения Дирака, которое в случае, например, присутствия внешнего электромагнитного поля имеет вид

$$(i\gamma^\mu \nabla_\mu - m)(i\gamma^\nu \nabla_\nu + m)\psi \equiv -\nabla_\mu \nabla^\mu \psi - m^2\psi + i\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma^\nu\psi = 0, \qquad (23)$$

где A_μ – 4-вектор потенциалов, а $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ – тензор напряжённостей, и через $\nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ обозначена «удлинённая» производная в присутствии внешнего электромагнитного поля. Взаимоотношения квадрированного и обычного уравнения Дирака и возможная самостоятельная роль первого из них весьма интересны, и мы надеемся подробно рассмотреть эти вопросы в дальнейшем.

3. Заключение

Выше мы описали две различные конструкции, заставляющие задуматься о корректности и неизбежности некоторых основополагающих парадигм теории поля. Строго установленная *эквивалентность* уравнений полей «различных спинов» как в массивном, так и в безмассовом [8] случае означает, что *все* линейные релятивистские уравнения на самом деле есть разные формы описания одной и той же физической «сущности». Такой вывод напрашивается и из возможности единообразного представления этих уравнений в 2-спинорной форме, как и их решений (в безмассовом случае) в виде контурных интегралов (см., например, [9]). Отметим в этой связи, что физически интересный класс решений линейных полевых уравнений вовсе не исчерпывается обычно используемыми в КТП *всюду регулярными* распределениями (разлагаемыми в интеграл Фурье), но включает и решения с точечными или распределенными *сингулярностями* (примеры см. в [7, 8]).

С другой стороны, отмеченная А. Зоммерфельдом и рассмотренная выше возможность описания полей «полуцелого спина» без использования спиноров, хотя и представляется на сегодняшний день экзотической, может послужить отправной точкой для действительно единого описания всех классов элементарных частиц в рамках одного (скорее всего, существенно *нелинейного*) дифференциального уравнения.

Литература

1. *Высоцкий М. И., Невзоров Р. Б.* Избранные вопросы феноменологической суперсимметрии // УФН. — 2001. — Т. 172. — С. 939–950. [*Vihsockiyj M. I.,*

Nevzorov R. B. Izbrannihe voprosih fenomenologicheskoyj supersimmetrii // UFN. — 2001. — T. 172. — S. 939–950.]

2. *Зоммерфельд А.* Строение атома и спектры. Т. II. — М.: ГИТТЛ, 1956. [*Zommerfeljd A.* Stroenie atoma i spektrih. T. II. — M.: GITTL, 1956.]
3. *Богуш А. А., Мороз Л. Г.* Введение в теорию классических полей. — М.: УРСС, 2004. [*Bogush A. A., Moroz L. G.* Vvedenie v teoriyu klassicheskikh poleyj. — M.: URSS, 2004.]
4. *Кассандров В. В.* Алгебраическая структура пространства–времени и алгебродинамика. — М.: УДН, 1992. [*Kassandrov V. V.* Algebraicheskaya struktura prostranstva–vremeni i algebrodinamika. — M.: UDN, 1992.]
5. *Ефремов А. П.* Кватернионные пространства, системы отсчета и поля. — М.: РУДН, 2005. [*Efremov A. P.* Kvaternionnihe prostranstva, sistemih otscheta i polya. — M.: RUDN, 2005.]
6. *Rybakov Y. P.* Soliton Configurations in Generalized Mie Electrodynamics // Phys. Atom. Nucl. — 2011. — Vol. 74. — Pp. 1102–1105.
7. *Kassandrov V. V.* On Hierarchy and Equivalence of Relativistic Equations for Massive Fields // Gravit. and Cosmol. — 2008. — Vol. 14. — Pp. 53–59.
8. *Kassandrov V. V.* Singular Solutions of Maxwell Equations with Self-Quantized Electric Charge / Ed. by A. Chubykalo, A. Espinoza, V. Onoochin, R. Smirnov-Rueda. — Rinton Press, 2004. — Pp. 42–66.
9. *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство–время. Т. II. — М.: Мир, 1988. [*Penrouz R., Rindler V.* Spinorih i prostranstvo–vremya. T. II. — M.: Mir, 1988.]

UDC 539.9

On Some Noncanonical Relations of Spinors to Scalars and of the Klein–Gordon and Dirac Equations

V. V. Kassandrov, N. V. Markova

Institute of Gravitation and Cosmology
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We discuss various aspects of noncanonical interpretation of the problem of Lorentz invariance for the Dirac equation suggested by A. Zommerfeld in 1951. In its framework, Dirac field is treated as a quartet of *scalar* fields whereas *spinors* do not arise in the theory at all. Then we present principal results of one of the authors' 2007 paper, in which scalar Klein–Gordon fields are treated as *potentials* for the solutions of Dirac equation, and not as an independent field. The Dirac field then manifests itself as a gauge invariant entity.

Key words and phrases: Lorentz invariance, spinor transformations, gauge invariance, squared Dirac equation.