Математика

УДК 517.977

Задача управляемости для нелинейной системы дифференциальных уравнений специального вида

В. Н. Розова

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В работе исследуется управляемость нелинейной системы дифференциальных уравнений второго порядка специального вида.

Ключевые слова: управляемость.

1. Постановка задачи

Рассматривается управляемая система вида:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = f(t, x_1) + u, \end{cases} \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2)$, $t \in [t_0, T]$, $u(\cdot) \in L_1[t_0, T], |u| \leqslant 1, u(t) \in R^1$.

Пусть заданы множества $M_0 \subset R^2$ и $M_1 \subset R^2$. M_0 и M_1 — выпуклые компакты, такие что $intM_0 \neq \varnothing$ и $intM_1 \neq \varnothing$.

Обозначим через P — прямоугольник $P = \{x : |x_1| \leqslant a; |x_2| \leqslant b\}$. Функция $f(t, x_1)$ — непрерывна по совокупности переменных при $t \in [t_0, T]$ и при $x \in P$, не возрастает по x_1.

Задача I. Найти условия, при которых существует допустимое управление $u(\cdot)$ и $t_1 \in [t_0, T]$ такое, что $x(t_0) \in M_0$, $x(t_1) \in M_1$, т.е. система (1) управляема из M_0 в M_1 за конечное время.

Для решения поставленной задачи используем следующую краевую задачу.

2. Вспомогательная краевая задача

Обозначим $y = x_1$, тогда $\dot{y} = x_2$ и система (1) эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\ddot{y} = f(t, y) + u. \tag{2}$$

По условию на функции $f(t, y)$ и $u(t)$, по теореме Пеано [1] решение задачи Коши существует на некотором отрезке $[t_0, t_1], t_1 \in [t_0, T]$, который и будет рассматриваться в дальнейшем.

Пусть $y(t_0) = y_0$; $\dot{y}(t_0) = \dot{y_0}$, $(y_0, \dot{y_0}) \in M_0$, следовательно, по условию на M_0, y_0 принадлежит отрезку, являющемуся проекцией множества M_0 на ось Ox_1. Пусть y_1 принадлежит проекции множества M_1 на ось Ox_1.

Задача II. Найти условия существования решения для уравнения (2) следующей краевой задачи $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$.

Для решения задачи II воспользуемся результатами, полученными в [2].

Рассмотрим функции $y = q(t), y = p(t)$ такие, что

$$\begin{cases} \ddot{q} = f(t, q(t)) + 1, \\ q(t_0) \leqslant y_0 \leqslant p(t_0). \end{cases} \tag{3}$$

и
$$\begin{cases} \ddot{p} = f(t, p(t)) - 1, \\ q(t_1) \leqslant y_1 \leqslant p(t_1). \end{cases} \quad (4)$$

Так как $f(t, y$ и $u(t)$ ограничены на P при $t \in [t_0, T]$, то решение (3) и (4) существует на одном и том же отрезке $[t_0, t_1] \subset [t_0, T]$. При этом для любого допустимого $u(\cdot)$ при $|u| \leqslant 1$ выполнено
$$\begin{cases} \ddot{q}(t) \geqslant f(t, q(t)) + u(t), \\ \ddot{p}(t) \leqslant f(t, p(t)) + u(t). \end{cases} \quad (5)$$

Пусть выполнено
$$\begin{cases} q(t_0) \leqslant y_0 \leqslant p(t_0), \\ q(t_1) \leqslant y_1 \leqslant p(t_1). \end{cases} \quad (6)$$

Тогда из теоремы [2] следует, что краевая задача для уравнения (2) с условиями $y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1$ имеет решение на $[t_0, t_1]$ при любом непрерывном управлении $u(\cdot)$, таком что $|u| \leqslant 1$.

3. Управляемость системы (1)

Для того чтобы система (1) была управляема из M_0 в M_1, требуется, чтобы точка $(y(t_1), \dot{y}(t_1)) \in M_1$, если $(y(t_0), \dot{y}(t_0)) \in M_0$. Так как $y(t_1) = y_1$ выбрана так, что y_1 принадлежит проекции M_1 на ось Ox_1, то прямая $x_1 = y_1$ в силу выпуклости и замкнутости M_1, а также $intM_1 \neq \varnothing$ в пересечении с M_1 образует отрезок l_1, целиком принадлежащий M_1. Пусть концы отрезка l_1 имеют следующие координаты: (y_1, ξ_1) и (y_1, ξ_2). Если $(y_1, \dot{y}_1) \in M_1$, то это значит, что $\dot{y}_1 \in l_1$. Следовательно
$$\dot{y}(t_1) = \lambda\xi_2 + (1 - \lambda)\xi_1 = \xi_1 + \lambda(\xi_2 - \xi_1),$$
где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Из (2)
$$\dot{y}(t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\mathrm{d}t + \int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)\mathrm{d}t + \dot{y}(t_0).$$

Тогда
$$\int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\mathrm{d}t + \int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)\mathrm{d}t + \dot{y}(t_0) = \xi_1 + \lambda(\xi_2 - \xi_1).$$

Откуда
$$|\lambda| = \frac{|\int_{t_0}^{t_1} f(t, y(t))\mathrm{d}t + \int_{t_0}^{t_1} u(t)\mathrm{d}t + \dot{y}(t_0) - \xi_1|}{|\xi_2 - \xi_1|} \leqslant 1. \quad (7)$$

Таким образом, если $u(t)$ допустимое, $\dot{y}_0$ и $\dot{y}_1$ выбраны так, что y_0 и y_1 принадлежат проекциям множеств M_0 и M_1 на Ox_1, соответственно, и выполнено (7), то (1) управляема из M_0 в M_1 , при условии, что краевая задача II имеет решение.

По условию $|u| \leqslant 1$ и $f(t, x_1)$ ограничена на P, $t \in [t_0, T]$, т.е. $|f(t, x_1)| \leqslant k$. Тогда (7) можно заменить на следующее выражение
$$\frac{|(k + 1)(t_1 - t_0) + \dot{y}(t_0) - \xi_1|}{|\xi_2 - \xi_1|} \leqslant 1. \quad (8)$$

4. Примеры

Рассмотрим примеры нахождения функций $y = p(t)$ и $y = q(t)$, удовлетворяющих условиям (5) и (6).

Пример 1. Пусть

$$\ddot{y} = \sin t + u,\ y(t_0) = y_0, y(t_1) = y_1 \tag{9}$$

при $|u| \leqslant 1,\ t \in [t_0, t_1]$. Для построения функций $y = p(t)$ и $y = q(t)$ рассмотрим уравнения:

$$\ddot{y} = \sin t + 1,\ \ddot{y} = \sin t - 1. \tag{10}$$

Тогда

$$y(t) = -\sin t + C_1 t + C_2 + \frac{t^2}{2},\ y(t) = -\sin t + K_1 t + K_2 - \frac{t^2}{2} \tag{11}$$

соответственно. Пусть $p(t_0) = q(t_0) = y_0$ и $p(t_1) = q(t_1) = y_1$. Найдём C_1, C_2, K_1, K_2.

$$\begin{cases} y_0 = \sin t_0 + C_1 t_0 + C_2 + \dfrac{t_0^2}{2}, \\ y_1 = \sin t_1 + C_1 t_1 + C_2 + \dfrac{t_0^2}{2}. \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} C_2 = y_0 + \sin t_0 - \dfrac{t_0^2}{2} - C_1 t_0, \\ C_1 = \dfrac{(y_0 - y_1) + \sin t_1 - \sin t_0 + \frac{1}{2}(t_1^2 - t_0^2)}{t_0 - t_1}. \end{cases}$$

Аналогично

$$\begin{cases} K_2 = y_0 + \sin t_0 + \dfrac{t_0^2}{2} - K_1 t_0, \\ K_1 = \dfrac{(y_0 - y_1) + \sin t_1 - \sin t_0 - \frac{1}{2}(t_1^2 - t_0^2)}{t_0 - t_1}. \end{cases}$$

Тогда в качестве функции $q(t)$ возьмём $q(t) = -\sin t + C_1 t + C_2 + \dfrac{t^2}{2}$, а в качестве $p(t) = -\sin t + K_1 t + K_2 - \dfrac{t^2}{2}$. Получим

$$\ddot{q}(t) \geqslant \sin t + u,$$

$$\ddot{p}(t) \leqslant \sin t + u,$$

где $|u| \leqslant 1$ и при условии $p(t_0) = q(t_0) = y_0,\ p(t_1) = q(t_1) = y_1$.

Таким образом, оказывается возможным исследовать управляемость системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \sin t + u \end{cases} \tag{12}$$

из M_0 в M_1 указанным выше способом.

Пример 2.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{x_1}} + u \end{cases} \tag{13}$$

Аналогично предыдущему для того, чтобы исследовать управляемость системы (13) с помощью данного метода, требуется найти функции $y = p(t)$ и $y = q(t)$, удовлетворяющие условиям (5) и (6).

Для нахождения функций $p(t)$ и $q(t)$, так же как и в примере 1, рассмотрим уравнения

$$\begin{cases} \ddot{q} = \dfrac{1}{\sqrt{q}} + 1, \\ \ddot{p} = \dfrac{1}{\sqrt{p}} - 1. \end{cases} \tag{14}$$

При допустимом управлении $|u| \leqslant 1$, $t \in [t_0, t_1]$ имеем

$$\begin{cases} \ddot{q} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{q}} + u, \\ \ddot{p} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p}} + u. \end{cases}$$

Уравнение (14) интегрируется в элементарных функциях. При надлежащем выборе начальных и конечных значений функций $p(t)$ и $q(t)$ их можно найти и тем самым обеспечить возможность использования описанного в данной работе способа исследования управляемости системы (13).

Заметим, что искать функции $p(t)$ и $q(t)$ не обязательно с помощью уравнений (3) и (4). В ряде случаев их можно просто подобрать или воспользоваться какими-либо другими соображениями.

5. Заключение

Указанный подход к исследованию проблемы управляемости не является распространённым и может оказаться полезным для решения конкретных задач.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979. [*Erugin N. P.* Kniga dlya chteniya po obthemu kursu differencialjnihkh uravneniyj. — Minsk: Nauka i tekhnika, 1979.]
2. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О краевой задаче нелинейного дифференциального уравнения. — М., 1957. — Т. 1. [*Rofe-Beketov F. S.* O kraevoyj zadache nelineyjnogo differencialjnogo uravneniya. — M., 1957. — T. 1.]

UDC 517.977

Problem of Controllability of Nonlinear System of Special Type

V. N. Rozova

Department of Optimization and Nonlinear Analysis
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., 117198, Moscow, Russia

The arcticle is dedicated to investigation of nonlinear control system of special type controllability.

Key words and phrases: controllability.