Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3. 2008. С. 13–21

УДК 517.97

Задачи управляемости для модифицированного уравнения переноса в случае переопределения на выходящем потоке

Исмаил Ахмед Абдел Басет

Кафедра дифференциальных уравнений и математической физики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

Доказана локальная разрешимость обратных задач в случае переопределения на выходящем потоке для линейного и нелинейного модифицированного уравнения переноса, где управлением является индикатриса рассеяния.

Ключевые слова: модифицированное уравнение переноса, обратные задачи, дифференциальные операторы, функционал Минковского.

1. Введение

В работе доказана локальная разрешимость обратной задачи для линейного и нелинейного модифицированного уравнения переноса, которую можно трактовать как задачу управляемости. Аналогичный результат линейной задачи для обычного уравнения переноса получен ранее в работе [1]. В основе доказательства лежат известные свойства решений линейных (прямой и обратной) задач, а также двукратное применение теоремы об обратной функции в соответствующих функциональных пространствах (в одном из двух случаев пространство прообразов определяется как множество решений соответствующей задачи). Ранее эта методика в обратной задаче для квазилинейного уравнения теплопроводности была проведена в [2]. Исследованию линейных уравнений переноса посвящено большое количество работ (см., например, [1, 3–10] и их библиографии).

2. Предварительные сведения. Обозначения

Введём следующие функциональные пространства и обозначения.

1) Пусть область $G \subset \mathbb{R}^n$ строго выпуклая, а ограниченное замкнутое множество V содержится в шаровом слое $\{v \in \mathbb{R}^n : 0 < v_0 \leqslant |v| \leqslant v_1 < \infty\}$.
2) $L_\infty(D, L_p(V))$ — пространство классов существенно ограниченных функций на D со значениями в $L_p(V)$, $1 < p < \infty$, где $D = G \times V \times (0, T)$.
3) $H_p(D) = \{u \in L_p(D) : u_t, (v, \nabla)u \in L_p(D), u|_{\Gamma_-} \in L_p(\Gamma_-)\}$, где $\Gamma_- = \gamma_- \times [0, T]$ и $\gamma_- = \{(x, v) \in \partial G \times V : (v, n_x) < 0\}$, а n_x — внешняя нормаль к границе ∂G области G в точке x. Это пространство является банаховым относительно нормы

$$\|u\|_{H_p(D)} = \Big[\|u\|^p_{p,D} + \|u_t\|^p_{p,D} + \|(v, \nabla)u\|^p_{p,D} + \|u|_{\Gamma_-}\|^p_{p,\Gamma_-}\Big]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

Статья поступила в редакцию 28 февраля 2008 г.
Работа выполнена по направлению «Функциональные методы в дифференциальных уравнениях и междисциплинарных исследованиях» Инновационной образовательной программы РУДН.

4) $W_p^t(D) = \left\{ F(x,v,t) \in L_p(D) : \dfrac{\partial F}{\partial t} \in L_p(D) \right\}$ с нормой

$$\|F\|_{W_p^t(D)} = \left[\|F\|^p_{L_p(D)} + \left\| \frac{\partial F}{\partial t} \right\|^p_{L_p(D)} \right]^{1/p}, \quad 1 < p < \infty.$$

5) $h_p(G \times V) = \{\varphi \in L_p(G \times V) : (v, \nabla)\varphi \in L_p(G \times V), \varphi|_{\gamma_-} \in L_p(\gamma_-)\}$, с нормой

$$\|\varphi\|_{h_p} = \left[\|\varphi\|^p_{L_p(G \times V)} + \|(v,\nabla)\varphi\|^p_{L_p(G\times V)} + \|\varphi|_{\gamma_-}\|^p_{L_p(\gamma_-)} \right]^{1/p}.$$

$C_{X\to Y}$ — наименьшая константа вложения X в Y, т.е. $\|\cdot\|_Y \leqslant C_{X\to Y}\|\cdot\|_X$, $\mathcal{L}(X,Y)$ — множество линейных непрерывных операторов из X в Y.

3. Обобщённая разрешимость обратной задачи для линейного модифицированного уравнения переноса определения пары функций u и j

В этом пункте перейдём к рассмотрению коэффициентной обратной задачи

$$u_t(x,v,t) + (v,\nabla)\, u(x,v,t) + \Sigma(x,v,t)\, u(x,v,t) = \\ = \int_V J(x,v',t,v)\, a(x,v',t)\, \mathrm{d}v' + F(x,v,t), \quad \text{где } (x,v,t) \in D, \tag{1}$$

$$u(x,v,t) = \mu, \quad (x,v,t) \in \gamma_- \times [0,T], \tag{2}$$

$$u(x,v,0) = \varphi, \quad (x,v) \in G \times V, \tag{3}$$

где область $G = \pi_v \times (\zeta_-, \zeta_+)$ такая, что каждый $x \in G$ можно записать следующим образом $y + v\bar{\xi} = x$ — характеристическая прямая вдоль вектора v, при фиксированном v; причём $\bar{\xi}$ — параметр из $[\zeta_-, \zeta_+]$, где $\zeta_- = \zeta_-(y,v)$, $\zeta_+ = \zeta_+(y,v)$: $0 < \zeta_-(y,v) < \zeta_+(y,v)$ при всех $(y,v) \in \pi_v \times V$ и $\zeta_-(y,v) = \zeta_+(y,v)$ при $(y,v) \in \partial\pi_v \times V$, т.е. $y + v\,\zeta_\pm \in \partial G_\pm = \{x \in \partial G : \pm(v, n_x) > 0\}$.

По условию переопределения на выходящем потоке, точнее на его части,

$$u|_{\Gamma'_+} = \nu(y + v\zeta_+, v, t), \quad (y + v\zeta_+, v, t) \in \Gamma'_+ = \gamma_+ \times [0, \zeta_+ - \zeta_-), \tag{4}$$

т. е. задача одновременного определения функции u и коэффициента J. При этом коэффициент J будем искать в виде

$$J(x,v,t,v') = j(x,v)g(x,v,t,v') + h(x,v,t,v'),$$

где j — неизвестная, а g и h — заданные функции. Под обобщённым решением обратной задачи (1)–(4) будем понимать пару функций $\{u, j\}$: $u \in H_p(D)$, $j \in L_p(G\times V)$, почти всюду удовлетворяющих условиям (1)–(4). Пусть данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют следующим условиям: $\Sigma, \Sigma_t \in L_\infty(D)$; $g, g_t \in L_\infty(D; L_2(V))$, $|\int_V g(x,v,0,v')a(x,v',0)\,\mathrm{d}v'| \geqslant g_2 > 0$; $h, h_t \in L_p(D)$; $F, F_t \in L_p(D)$; $\varphi, (v,\nabla)\varphi \in L_p(G\times V)$, $\varphi|\gamma_- \in L_p(\gamma_-)$; $\mu, \mu_t \in L_p(\Gamma_-)$; $\nu, \nu_t \in L_p(\Gamma'_+)$. Исследование разрешимости рассмотренной задачи проведём на множестве $K = \{\{u,j\} : u \in H_p(D), J \in L_p(G \times V), \|u\|^p_{p,D} \leqslant k_1, \|j\|^p_{p,G\times V} \leqslant k_2, \|u_t\|^p_{p,D} \leqslant k_3, \|(v,\nabla)u\|^p_{p,D} \leqslant k_3\}$ в предположение, что выполнены условия согласования

$$\varphi(x,v) = \mu(x,v,0) \quad \text{при почти всех } (x,v) \in \gamma_-, \tag{5}$$

$$\varphi(x,v) = \nu(x,v,0) \quad \text{при почти всех } (x,v) \in \gamma_+. \tag{6}$$

$Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G < \tilde{a}$ (постоянные k_1, K_2, K_3 и $\tilde{a}$ ввиду их громоздкости будут выписаны ниже).

Теорема 1. *Если выполнены вышеуказанные предположения, то существует единственное обобщённое решение* $\{u, j\}$ *обратной задачи* (1)–(4), *принадлежащее множеству* K.

Доказательство. Обратную задачу (1)–(4) сведём к эквивалентной ей в классе $H_p = H_p(D) \times L_p(G \times V)$ системе интегральных уравнений второго рода

$$u(y + v\bar{\xi}, v, t) = \Psi(\bar{\xi}, y, v, t) + \int\limits_{\bar{\eta}}^{\bar{\xi}} \Big[(Pu)(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t) + \\ + j(y + v\theta, v) \int\limits_V g(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v') a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}v' + \\ + \int\limits_V h(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t, v') a(y + v\theta, v', \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}v' \Big] \mathrm{d}\theta, \quad (7)$$

$$j(y + v(\zeta_+ - t), v) = \\ = \left[\int\limits_V g(y + v(\zeta_+ - t), v, 0, v') a(y + v(\zeta_+ - t), v')\, \mathrm{d}v' \right]^{-1} \Big\{ \frac{\partial \nu}{\partial t}(y + v\zeta_+, v, t) + \\ + (v, \nabla)\varphi(y + v(\zeta_+ - t), v) - \int\limits_{\zeta_+ - t}^{\zeta_+} \frac{\partial F}{\partial t}(y + v\theta, v, \theta - \zeta_+ + t)\, \mathrm{d}\theta - F(y + v(\zeta_+ - t), v, 0) - \\ - (P\varphi)(y + v(\zeta_+ - t), v, 0) - \int\limits_{\zeta_+ - t}^{\zeta_+} \Big[\frac{\partial}{\partial t}(Pu)(y + v\theta, v, \theta - \zeta_+ + t) + \\ + j(y + v\theta, v) \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t} \left(g(y + v\theta, v, \theta - \zeta_+ + t, v') a(y + v\theta, v', \theta - \zeta_+ + t) \right) \mathrm{d}v' + \\ + \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t} \left(h(y + v\theta, v, \theta - \zeta_+ + t, v') a(y + v\theta, v', \theta - \zeta_+ + t) \right) \mathrm{d}v' \Big] \mathrm{d}\theta - \\ - \int\limits_V h(y + v(\zeta_+ - t), v, 0, v') a(y + v(\zeta_+ - t), v', 0)\, \mathrm{d}v' \Big\}, \quad (8)$$

где

$$\Psi(\bar{\xi}, y, v, t) = \varphi(y + v(\bar{\xi} - t), v) + \int\limits_{\bar{\xi} - t}^{\bar{\xi}} F(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}\theta, \quad \bar{\eta} = \bar{\xi} - t,$$

когда $0 \leqslant t \leqslant \bar{\xi} - \zeta_-$, $\zeta_- \leqslant \bar{\xi} \leqslant \zeta_+$;

$$\Psi(\bar{\xi}, y, v, t) = \mu(y + v\zeta_-, v, t - \bar{\xi} + \zeta_-) + \int\limits_{\zeta_-}^{\bar{\xi}} F(y + v\theta, v, \theta - \bar{\xi} + t)\, \mathrm{d}\theta, \quad \eta = \zeta_-,$$

когда $\bar{\xi} - \zeta_- \leqslant t \leqslant T$, $\zeta_- \leqslant \bar{\xi} \leqslant \zeta_+$;

$$(Pu)(y + v\bar{\xi}, v, t) = -\Sigma(y + v\bar{\xi}, v, t) u(y + v\bar{\xi}, v, t).$$

Обозначив операторы правых частей уравнений (7), (8) соответственно через A_1, A_2, всю систему для краткости можно записать в виде $\{u,j\} = A\{u,j\} = \{A_1\{u,j\}, A_2\{u,j\}\}$.

Введём в рассмотрение ограниченное замкнутое множество

$$K = \left\{\{u,j\} \in H_p : \|u\|^p_{p,D} \leqslant k_1, \|j\|^p_{p,G\times V} \leqslant k_2, \|u_t\|^p_{p,D} \leqslant k_3, \|(v,\nabla)u\|^p_{p,D} \leqslant k_3\right\},$$

где

$$k_1 = \|\varphi\| + \|\mu\| + k,$$

$$k_2 = \left[\sqrt{m(V)}\|g\|\|a\|\right]^{-1}\left\{\|\nu\| + (1+\|P\|)\|\varphi\| + \|F\| + \sqrt{m(V)}\|h\|\|a\| + k\right\},$$

$$k_3 = \|\varphi\| + \|\mu\| + 2\|F\| + 2\|P\|k_1 + 2\sqrt{m(V)}\|g\|\|a\|k_2 + 2\sqrt{m(V)}\|h\|\|a\| + k,$$

$\|P\| = \|\Sigma\|$, k — произвольная положительная постоянная. Взяв операторы A_1, A_2 в явном виде, легко убедиться, что множество значений оператора A лежит в пространстве H_p. Более того, если

$$Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G < C_1 = k^2\left[\|F\| + \sqrt{m(V)}\|h\|\|a\| + \|P\|k_1 + \sqrt{m(V)}\|g\|\|a\|k_2\right]^{-2},$$

то оператор A будет непрерывно отображать множество K в себя.

Оценим теперь расстояние между образами двух произвольных элементов $\{u_1,j_1\}$,$\{u_2,j_2\}$ из множества K в метрике пространства H_p:

$$\left\|A_1\{u_1,j_1\} - A_1\{u_2,j_2\}\right\|^p_{p,D} \leqslant (Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G)C_2\left\|\{\tilde u,\tilde j\}\right\|^p_{H_p},$$

$$\left\|A_2\{u_1,j_1\} - A_2\{u_2,j_2\}\right\|^p_{p,G\times V} \leqslant \left(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G\right)^{1/2} C_2 g_2^{-p}\left\|\{\tilde u,\tilde j\}\right\|^p_{H_p},$$

$$\left\|A\{u_1,j_1\} - A\{u_2,j_2\}\right\|^p_{H_p} \leqslant \left[5\left(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G\right) + g_2^{-p}\left(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G\right)^{1/2}\right]\times$$
$$\times C_2\left\|\{\tilde u,\tilde j\}\right\|^p_{H_p} + 3C_2\left(\|\tilde u\|^p_{p,D} + \left\|\tilde j\right\|^p_{p,G\times V}\right),$$

где $C_2 = \max\{\|P\|^p, (m(V))^{p/2}\|g\|^p\|a\|^p\}$, $\tilde u = u_1 - u_2$, $\tilde j = j_1 - j_2$.

На основании полученных неравенств имеем следующую оценку

$$\left\|A^2\{u_1,j_1\} - A^2\{u_2,j_2\}\right\|^p_{H_p} \leqslant \left\{\left[5(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G) + g_2^{-p}(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G)^{\frac12}\right]^2 + \right.$$
$$\left. + 6\left[5\left(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G\right) + g_2^{-p}\left(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G\right)^{\frac12}\right]\right\} C_2^2\|\{\tilde u,\tilde j\}\|^p_{H_p} \leqslant \left(\alpha^2 + 6\alpha\right)C_2^2\|\{\tilde u,\tilde j\}\|^p_{H_p},$$

где $\alpha = 5(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G) + g_2^{-p}(Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G)^{1/2}$.

Таким образом, если

$$Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\, G < \tilde a = \left[\frac{\sqrt{1 + 20g_2^{2p}\left(\sqrt{9 + C_2^{-2}} - 3\right)} - 1}{10g_2^p}\right]^2,$$

то вторая степень оператора A будет сжимающей, и, основываясь на принципе сжимающих отображений, можем утверждать, что существует единственный элемент из множества K, являющийся решением системы интегральных уравнений (7), (8), а следовательно, и обобщённым решением обратной задачи (1)–(4). Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. По аналогии с теоремой 1 можем доказать, что существует единственное обобщенное решение $\{u, j\}$ из класса $H_\infty(D) \times L_\infty(G \times V)$.

4. Обратная задача для нелинейного модифицированного уравнения переноса в случае переопределения на выходящем потоке, где управлением является индикатриса рассеяния J

Пусть данные обратной задачи (1)–(4) удовлетворяют следующим условиям: $\sum, \sum_t \in L_\infty(D)$; $F, F_t \in L_\infty(D)$; $a, a_t \in L_\infty\big(D, L_p(V)\big)$; $g, g_t \in L_\infty\big(G \times V, L_p(0,T)\big)$, $|\int\limits_V g(x,v,0,v')a(x,v',0)\mathrm{d}v'| \geqslant g_2 > 0$ при $(x,v) \in G \times V$; $h, h_t \in L_p(D)$; $\varphi, (v,\nabla)\varphi \in L_p(G \times V)$; $\mu \in W_p^t(\Gamma_-)$; $\nu \in W_p^t(\Gamma_+)$; $Tv_0^{-1}\operatorname{diam} G < \tilde{a}$ и выполнены условия согласования

$$\varphi(x,v) = \mu(x,v,0) \quad \text{при почти всех } (x,v) \in \gamma_-,$$

$$\varphi(x,v) = \nu(x,v,0) \quad \text{при почти всех } (x,v) \in \gamma_+.$$

Теорема 2. *Если выполнены вышеуказанные предложения, то исследуемая обратная задача* (1)–(4) *имеет единственное обобщённое решение* $\{u, j\}$ *класса* $H_p(D) \times L_p(G, V)$.

Поскольку оператор

$$\hat{\hat{\mathcal{A}}} : L_p(G \times V) \longrightarrow W_p^t(\Gamma_+), \quad j \mapsto \nu$$

линейный непрерывный и биективный (так как решение единственно), то по теореме Банаха $\hat{\hat{\mathcal{A}}}$ — изоморфизм, т. е.

$$\hat{\hat{\mathcal{A}}}^{-1} : W_p^t(\Gamma_+) \longrightarrow L_p(G \times V)$$

непрерывен и, таким образом, $\forall\, \nu\ \exists\,!$ решение j линейной обратной задачи, причём

$$\|j\|_{L_p(G\times V)} \leqslant \bar{C}\|\nu\|_{W_p^t(\Gamma_+)}, \tag{9}$$

при некотором $\bar{C} > 0$ ($\bar{C}$ зависит от $\sum, F, a, g, h, \mu, G, V$, а также от норм дифференциальных и интегральных операторов, введённых в доказательстве теоремы).

Пусть $\mu(x,v,t) = 0, (x,v,t) \in \gamma_- \times [0, \zeta_+ - \zeta_-)$; $\varphi(x,v) = 0$, $(x,v) \in \bar{G} \times V$; $h(x,v,t) \equiv 0$ на D. Положим $Lu = u_t + (v,\nabla)\, u + \sum u$, $H = \{u \in H_p(D) | \exists J \in W_p^t(D)$: u — решение задачи (1)–(4)$\}$ с нормой $\|u\|_H = \|Lu\|_{W_p^t(D)}$. Тогда $LH = W_p^t(D)$ и $L : H \to W_p^t(D)$ — изометрический изоморфизм H на $W_p^t(D)$ [4, с. 124], H — полно и непрерывно вкладывается в $H_p(D)$. Оттуда же следует, что $\exists \hat{C} > 0$, $\forall\, t_1 \in\,]0, T]$, $\forall\, u \in H$: $\|u|_{t=t_1}\|_{L_p(G\times V)} \leqslant \hat{C}\|u\|_H$. Отметим также, что по теореме о следах для $H_p(D)$ оператор

$$\Lambda_u :\ H \to L_p(G \times V), \quad u \mapsto u_t|_{t=t_1} \tag{10}$$

непрерывен в силу непрерывности вложения H в $H_p(D)$.

Рассмотрим теперь нелинейную обратную задачу

$$u_t(x,v,t)+(v,\nabla)u(x,v,t)+\sum(x,v,t)u(x,v,t)+\big[S(u)\big](x,v,t)= \\ =\int\limits_V J(x,v,t,v')a(x,v',t)\mathrm{d}v',\ \text{где } (x,v,t)\in D,$$

где нелинейная часть

$$\big[S(u)\big](x,v,t)=\int\limits_0^T\int\limits_{G\times V} Q(x,v,x',v',t)\alpha\left(u(x',v',t')\right)\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}v'\,\mathrm{d}t' \tag{11}$$

с условиями

$$u(x,v,0)=0, \qquad (x,v)\in\bar G\times V, \tag{12}$$
$$u(x,v,t)=0, \qquad (x,v,t)\in\gamma_-\times[0,\zeta_+-\zeta_-), \tag{13}$$
$$u|_{\Gamma_+}(x,v,t)=\nu(y+v\zeta_+,v,t), \qquad (y+v\zeta_+,v,t)\in\gamma_+\times[0,\zeta_+-\zeta_-), \tag{14}$$
$$J(x,v,t)=j(x,v)\,g(x,v,t). \tag{15}$$

Будем для краткости обозначать эту задачу обратной задачей II'.

Положим $\chi(x,v)=j(x,v)\,g(y+v\zeta_+,v,t)$.

Определение 1. Пусть X,Y — нормированные пространства. Отображение $f:X\to Y$ называется строго дифференцируемым в точке x_0, если

$$f(x+h)-f(x)=f'(x_0)h+R(x,h),$$

где $f'(x_0)\in\mathcal{L}(X,Y)$, а $\|R(x,h)\|/\|h\|\to 0$ при $x\to x_0$, $h\to 0$.

Напомним теорему об обратной функции.

Теорема 3. *Пусть X, Y — банаховы пространства, U — открытое множество в X, а отображение $f:U\to Y$ строго дифференцируемо на U и $f'(x_0):X\to Y$ — изоморфизм X на Y для некоторой точки $x_0\in U$. Тогда существует такая окрестность U' точки x_0, что f осуществляет гомеоморфизм U' на открытое множество $f(U')$, $f'(x)$ — изоморфизм X на Y при $x\in U'$, $f^{-1}:f(U')\to X$ строго дифференцируемо на $f(U')$ и $(f^{-1})'\big(f(x)\big)=[f'(x)]^{-1}$ при $x\in U'$ (т. е. f — диффеоморфизм U' на $f(U')$ класса C^1).*

4.1. Формулировка основного результата

Всюду в дальнейшем будут использованы принятые ранее обозначения.

Пусть $\alpha:\mathrm{rot}\to\mathrm{rot}$ дважды непрерывно дифференцируемо на rot, причём

$$\begin{cases}|\alpha(u)|\leqslant C_1|u|,\\ |\alpha'(u)|\leqslant C_1,\quad \alpha'(0)=0,\\ |\alpha''(u)|\leqslant C_2\end{cases} \tag{16}$$

(примерами таких функций могут быть $\alpha(u)=\sqrt{1+u^2}-1$, $\alpha(u)=\dfrac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}$, $\alpha(u)=\dfrac{u^3}{1+u^2}$ и многие другие).

Далее, $Q(x,v,x',v',t)$ непрерывна на $\bar{G}\times\bar{V}\times\bar{G}\times\bar{V}\times[0,T]$ и $2\leqslant p<\infty$. Введём оператор

$$S: H_p(D)\to W_p^t(D),\quad [S(u)](x,v,t)=\int\limits_0^T\int\limits_{G\times V} Q(x,v,x',v',t)\,\alpha\big(u(x',v',t')\big)\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'\mathrm{d}t'.$$

Теорема 4. *Пусть* $\sum,\sum_t\in L_\infty(D)$, $|\sum(y+v\zeta_+,v,t)|\geqslant\sum_0>0$, $(y+v\zeta_+,v,t)\in\Gamma_+$; $F,F_t\in L_\infty(D)$; $a,a_t\in L_\infty(D\times V)$; $g,g_t\in L_\infty(G\times V,L_p(0,T))$, $|g(y+v\zeta_+,v,t)|\geqslant g_0>0$; $\varphi,(v,\nabla)\varphi\in L_p(G\times V)$, $\mu\in W_p^t(\Gamma_-)$; $\nu\in W_p^t(\Gamma_+),\Gamma_\pm=\gamma_\pm\times[0,\zeta_+-\zeta_-)$; $Tv_0^{-1}\mathrm{diam}\,G<\tilde{a}$, *и выполнено условие* $\nu(y+v\zeta_+,v,t)=0$ *при* $(x,v)\in\gamma_-$. *Тогда задача* II', *где* j *— искомая, а* g *— априори заданная функция, имеет единственное решение* (u,j) *в окрестности нуля в* $H(D)\times L_p(G\times V)$ *при достаточно малых по норме* $\nu\in H_p(G\times V)$.

Замечание 2. Доказательство теоремы 4 сводится к проверке выполнимости условия теоремы об обратной функции, при этом главными моментами являются проверка строгой дифференцируемости соответствующих отображений и выбор функциональных пространств, связанных с задачей II'.

4.2. Строгая дифференцируемость оператора S

Предложение 1. *Оператор*

$$S: H_p(D)\to W_p^t(D),\quad [S(u)](x,v,t)=\int\limits_0^T\int\limits_{G\times V} Q(x,v,x',v',t)\,\alpha\big(u(x',v',t')\big)\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'\mathrm{d}t'$$

строго дифференцируем на $H_p(D)$ *(доказательство изложено подробно в работе [11]), где*

$$\begin{aligned}
&I_\alpha:\ H_p(D)\to W_1^t(D),\\
&\quad u(x,v,t)\mapsto\alpha\big(u(x,v,t)\big), && (17)\\
&I_Q:\ W_1^t(D)\to W_p^t(D),\\
&\quad \tilde{u}(x,v,t)\mapsto\int\limits_0^T\int\limits_{G\times V} Q(x,v,x',v',t)\tilde{u}(x',v',t')\,\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'\mathrm{d}t', && (18)\\
&\quad S(u)=[I_Q\circ I_\alpha](u). && (19)
\end{aligned}$$

4.3. Завершение доказательства основного результата

По теореме об обратной функции 3 существуют такие открытые окрестности нуля U_1 и V_1 в H и $W_p^t(D)$ соответственно, что оператор $\xi: u\mapsto Lu+S(u)$ осуществляет диффеоморфизм U_1 на V_1 класса C^1. При этом оператор $\eta=\xi^{-1}: V_1\to U_1$ строго дифференцируем на V_1 как отображение в H и, следовательно, в $H_p(D)$ и $\eta'(J)=\big[\xi'\big(\eta(J)\big)\big]^{-1}$ при $J\in V_1$. В этом случае, в силу линейности и непрерывности оператора $\chi(x,v)\mapsto\chi(x,v)g(x,v,t)/g(y+v\zeta_+,v,t)$ из $L_p(G\times V)$ в $W_p^t(D)$ следует, что оператор $P: L_p(G\times V)\to H(D)$, $\chi(x,v)\mapsto P(\chi)=\eta\left(\chi(x,v)g(x,v,t)/g(y+v\zeta_+,v,t)\right)$ строго дифференцируем по Фреше в окрестности нуля V_2 из $L_p(G\times V)$, а операторы

$$
\begin{aligned}
O_1 : V_2 &\to L_p(G \times V), \\
\chi &\mapsto \big(P(\chi)\big)_t\Big|_{\Gamma_+}, \qquad (20) \\
O_2 : V_2 &\to L_p(G \times V), \\
\chi &\mapsto (v, \nabla)\big(P(\chi)\big)\Big|_{\Gamma_+}, \qquad (21) \\
O_3 : V_2 &\to L_p(G \times V), \\
\chi &\mapsto S\big(P(\chi)\big)\Big|_{\Gamma_+}, \qquad (22)
\end{aligned}
$$

также строго дифференцируемы на V_2. Далее будем искать решение нелинейной задачи II' в виде $u = P(\chi)$, где u — решение нелинейной задачи II' с $J(x, v, t) = \chi(x, v) g(x, v, t)/g(y + v\zeta_+, v, t)$.

Введём оператор

$$
M(\chi) = \left\{ \left(\int_V \chi \, a \, \mathrm{d}v' \right)\Bigg|_{\Gamma_+} - (P(\chi))_t \Big|_{\Gamma_+} - (v, \nabla)\,(P(\chi))\Big|_{\Gamma_+} - S\,(P(\chi))\Big|_{\Gamma_+} \right\} \times
\times \left(\frac{1}{\sum(y + v\zeta_+, v, t)} \right), \quad (23)
$$

$$
M'(0)\chi = \left\{ \int_V \chi \, a \, \mathrm{d}v' - \big(P'(0)\chi\big)_t\Big|_{\Gamma_+} - (v, \nabla)\big(P'(0)\chi\big)\Big|_{\Gamma_+} \right\} \times \left(\frac{1}{\sum(y + v\zeta_+, v, t)} \right), \quad (24)
$$

где $P'(0)\chi = \eta'(0)\,(\chi(x, v)g(x, v, t)/g(y + v\zeta_+, v, t))$, т. е. решение прямой линейной задачи с $J(x, v, t) = \chi(x, v)g(x, v, t)/g(y + v\zeta_+, v, t)$ (решение существует, как показано в [12], и оператор $\eta'(0)$ непрерывен).

Подставив в (11) $u|_{x=y+v\zeta_+}$ из (14) и $J(x, v, t) = \chi(x, v)g(x, v, t)/g(y + v\zeta_+, v, t)$, приходим к уравнению

$$
M(\chi) = \nu(y + v\zeta_+, v, t), \quad (25)
$$

к которому в силу непрерывности $M'(0)$, а также существования и ограниченности $[M'(0)]^{-1}$ (это следует из корректной разрешимости линейной обратной задачи), можно применить теорему 3. Согласно теореме 3 существуют такие открытые окрестности нуля U_* в $L_p(G \times V)$ и V_* в $W_p^t(\Gamma_+)$, что $M : \chi \mapsto \nu$ осуществляет диффеоморфизм U_* на V_* класса C^1. Поэтому $\forall\, \nu \in V_*\ \exists!\ \chi \in U_* : M(\chi) = \nu$.

Теперь, сопоставляя определение оператора M (см. (23) и исходное уравнение, на основе полученного результата заключаем, что при $u = P(\chi)$ пара (u, j) — единственное решение задачи II'. Заметим,что принято считать решением пару (u, j), тогда как решением является j, поскольку u однозначно определяется через j. Теорема доказана.

5. Заключение

Аналогичные результаты можно получить для случая, когда управлением является множитель в правой части (т. е. в функции источников) с тем же условием переопределения.

Литература

1. *Волков Н. П.* Обратные задачи для математических моделей физических процессов. — М.: МИФИ, 1991. — С. 16.

2. *Сухинин М. Ф., Акпата Э.* О задаче управляемости для квазилинейного уравнения теплопроводности // Вестник РУДН. серия Математика. — № 3(1). — 1996. — С. 119.
3. *Орловский Д. Г.* Решение одной обратной задачи для уравнения переноса с интегральным переопределением. — М.: МИФИ, 1991. — 71 с.
4. *Прилепко А. И., Волков Н. П.* Обратные задачи определения параметров нестационарного уравнения переноса по переопределениям интегрального типа // Диф. уравнения. — Т. 23, № 1. — 1987. — С. 124–136.
5. *Kaper H. G., Lekkerkerker G. G., Heitmanek J.* Spectral in Linear Transport Theory. — Basel, 1982.
6. *Greiner G.* Spectral Properties and Asymptotic Behavior of the Linear Transport Equation // Math. Z. — Vol. 185, No 2. — 1984. — Pp. 167–177.
7. *Voigt J.* Spectral Properties of the Neutron Transport Equation // J. Math. Anal. Appl. — Vol. 106, No 1. — 1985. — Pp. 140–153.
8. *Волков Н. П.* Анализ математических моделей физических процессов. — М.: Энергоатомиздат, 1988. — 11–19 с.
9. *Волков Н. П.* Теоретико-функциональные методы в задачах математической физики. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 22–26 с.
10. *Тихонов И. В.* Корректность обратной задачи с финальным переопределением для нестационарного уравнения переноса // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15, Вычисл. Матем. и Киберн. — № 1. — 1995. — С. 56.
11. *Хамди Н.* Обратная задача для нелинейного уравнения переноса с финальным переопределением. — Рус. — Деп. в ВИНИТИ, 22.07.2003, № 1435–В2003. — 2003.
12. *Волков Н. П.* Обратные задачи для нестационарного кинетического уравнения переноса с разрывными переменными: Дис. канд физ.-мат. наук / МГУ. — М., 1986.
13. *Сухинин М. Ф.* Избранные главы нелинейного анализа. — М.: РУДН, 1992.
14. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1977.
15. *Прилепко А. И., Волков Н. П.* // Диф. уравнения. — Т. 24, № 1. — 1988. — С. 136–146.
16. *Владимиров В. С.* // Труды Математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. — № 61. — 1961.
17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
18. *Сухинин М. Ф.* // Теоретическая и математическая физика. — Т. 103, № 1. — 1995. — С. 23.
19. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1988.
20. *Красносельский М. А.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.

UDC 517.97

Problems of Controllability for Modified Nonlinear Transport Equation in Case of Redetermination in Output Flow

Ismail Ahmed Abdel Baset

Department of Differential Equations and Mathematical Physics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

The theorem on local controllability for a linear and nonlinear system described by the modified transport equation in the case of redetermination in output flow is proved.