УДК 531.36:531.381

Об устойчивости относительных равновесий твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса

О. В. Холостова

Кафедра теоретической механики
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, 117198, Россия

Рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела, одна из точек которого (точка подвеса) совершает вертикальные гармонические колебания высокой частоты и малой амплитуды. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения проведён анализ существования, бифуркации и устойчивости «боковых» относительных равновесий тела, для которых центр масс и точка подвеса не лежат на одной вертикали. Показано, что, в зависимости от частоты колебаний точки подвеса, боковые относительные равновесия могут отсутствовать или их может быть два или четыре. Установлено, что все боковые относительные равновесия тела в области своего существования неустойчивы.

Ключевые слова: уравнения Эйлера–Пуассона, высокочастотные вибрации, вибрационный момент, относительные равновесия, устойчивость.

1. Введение

Изучение динамики твёрдых тел при наличии высокочастотных вибраций точки подвеса начато более ста лет назад [1] с исследования устойчивости перевёрнутого положения математического маятника и продолжается до сих пор. Были исследованы математический [2–4], физический [5], сферический [6] маятники при вертикальных высокочастотных вибрациях точки подвеса; математический маятник при вибрациях точки подвеса вдоль произвольной наклонной оси [7]; маятник или система маятников при периодических или условно-периодических вибрациях точки подвеса по вертикали, вдоль наклонной оси, по эллипсу [8]; волчок Лагранжа [9] и система двух физических маятников [10] при вертикальных вибрациях точки подвеса. Наиболее полная библиография по данной тематике содержится в работах [8, 11].

В статье [12] получены приближенные автономные дифференциальные уравнения движения твёрдого тела с произвольной геометрией масс в предположении, что одна из точек тела совершает произвольные периодические или условно-периодические вибрации высокой частоты и малой амплитуды.

В данной работе рассмотрен случай вертикальных гармонических вибраций точки подвеса тела. В рамках указанной приближенной системы решается вопрос о существовании, числе и устойчивости равновесий тела (в системе координат, движущейся поступательно вместе с точкой подвеса), для которых центр масс и точка подвеса не лежат на одной вертикали. Геометрия масс и точка подвеса в теле предполагаются произвольными.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движения твёрдого тела в однородном поле тяжести. Пусть одна из точек тела O, называемая далее точкой подвеса, совершает вертикальные гармонические колебания по закону $O_*O = h\cos\Omega t$ относительно некоторой фиксированной точки O_*.

Статья поступила в редакцию 1 ноября 2010 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 08-01-00363, № 10-01-00381-а) и гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (проект № НШ-3797.2010.1).

Введём поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направлена вертикально вверх, и связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O. Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A, B, C, а проекции вектора $\mathbf{OG}$ на оси Ox, Oy, Oz — через x_G, y_G, z_G. Связанные оси направляем и именуем таким образом, чтобы были выполнены неравенства

$$A \geqslant B > C, \quad x_G > 0, \quad y_G \geqslant 0. \tag{1}$$

Будем предполагать, что амплитуда h колебаний точки подвеса тела мала по сравнению с расстоянием $r_G = OG$, а частота Ω велика по сравнению с характерной частотой $\omega = \sqrt{g/r_G}$; здесь m — масса тела, g — ускорение свободного падения. Введём малый параметр ε и будем считать, что

$$h/r_G = \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \ll 1), \quad \omega/\Omega \sim \varepsilon. \tag{2}$$

При помощи методов теории возмущений дифференциальные уравнения движения тела в системе координат $OXYZ$ можно преобразовать к виду, главная часть которого соответствует автономной механической системе. Приближенные автономные уравнения имеют вид модифицированных уравнений Эйлера — Пуассона [12]

$$\begin{gathered}
A\dot{p} + (C - B)qr = mga + m_x, \quad B\dot{q} + (A - C)rp = mgb + m_y, \\
C\dot{r} + (B - A)pq = mgc + m_z; \\
\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2; \\
a = z_G\gamma_2 - y_G\gamma_3, \quad b = x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1, \quad c = y_G\gamma_1 - x_G\gamma_2.
\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 и m_x, m_y, m_z — проекции вектора абсолютной угловой скорости тела, орта $\mathbf{n}$ оси OZ и вектора вибрационного момента [2, 12] на оси связанной системы координат соответственно, причём [12]

$$\begin{gathered}
m_x = \alpha\left[x_G\left(\frac{b\gamma_2}{B} + \frac{c\gamma_3}{C}\right) - (y_G\gamma_2 + z_G\gamma_3)\frac{a}{A}\right], \\
m_y = \alpha\left[y_G\left(\frac{a\gamma_1}{A} + \frac{c\gamma_3}{C}\right) - (x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3)\frac{b}{B}\right], \\
m_z = \alpha\left[z_G\left(\frac{a\gamma_1}{A} + \frac{b\gamma_2}{B}\right) - (x_G\gamma_1 + y_G\gamma_2)\frac{c}{C}\right]; \\
\alpha = (mh\Omega)^2/2, \quad h\Omega \sim 1.
\end{gathered} \tag{4}$$

Стационарные решения системы (2), (3) вида

$$p = q = r = 0, \quad \gamma_j = \gamma_{j0} = \mathrm{const}\ (j = 1, 2, 3) \tag{5}$$

соответствуют, в рамках рассматриваемой приближенной системы, относительным равновесиям тела. Значения величин γ_j в положениях равновесия удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$0 = mga + m_x, \quad 0 = mgb + m_y, \quad 0 = mgc + m_z. \tag{6}$$

Уравнения (6) следует рассматривать вместе с соотношениями (4), (5) и геометрическим интегралом

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{7}$$

Данная система уравнений всегда имеет два частных решения

$$\gamma_{10} = \pm\frac{x_G}{r_G}, \quad \gamma_{20} = \pm\frac{y_G}{r_G}, \quad \gamma_{30} = \pm\frac{z_G}{r_G}, \tag{8}$$

для которых центр масс тела в положении относительного равновесия находится на одной вертикали с точкой подвеса, выше или ниже её. Эти стационарные решения существуют и в полной неавтономной системе дифференциальных уравнений движения тела.

Цель работы — решение вопроса о существовании и устойчивости (в рамках приближенной системы) других положений относительного равновесия тела, для которых ось OG не вертикальна. В дальнейшем будем называть такие положения равновесия боковыми.

3. Случай положения центра масс тела в главной плоскости инерции

Рассмотрим сначала случай, когда центр масс тела лежит в одной из главных плоскостей инерции тела, например, Oxz (т.е. $y_G = 0$).

3.1. Существование относительных равновесий

Равновесные значения γ_{j0} удовлетворяют в случае $y_G = 0$ уравнениям

$$\begin{gathered}
\gamma_2\left\{mgz_G + \alpha\left[\frac{x_G}{B}(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1) - \left(\frac{x_G^2}{C} + \frac{z_G^2}{A}\right)\gamma_3\right]\right\} = 0,\\
(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1)\left[mg - \frac{\alpha}{B}(x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3)\right] = 0,\\
\gamma_2\left\{-mgx_G + \alpha\left[\frac{z_G}{B}(x_G\gamma_3 - z_G\gamma_1) + \left(\frac{x_G^2}{C} + \frac{z_G^2}{A}\right)\gamma_1\right]\right\} = 0
\end{gathered} \tag{9}$$

и интегралу (7).

Кроме решений вида (8) (при $y_G = 0$), система (9) имеет ещё два типа решений. Решения первого типа описываются соотношениями

$$\gamma_2 = 0, \quad mg = \frac{\alpha}{B}(x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Им соответствуют равновесия, для которых плоскость Oxz, содержащая центр масс тела, вертикальна, причём радиус-вектор **OG** составляет с вертикалью угол ξ, определяемый условием

$$\cos\xi = \frac{mgB}{\alpha r_G}.$$

Отсюда следует, что угол ξ — острый, а сами решения существуют при условии

$$\alpha > \alpha_1, \quad \alpha_1 = \frac{mgB}{r_G}.$$

Решения второго типа удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_1 = \frac{mgACx_G}{\alpha(Ax_G^2 + Cz_G^2)}, \quad \gamma_3 = \frac{mgACz_G}{\alpha(Ax_G^2 + Cz_G^2)}, \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Условие существования этих решений задаётся неравенством $\gamma_1^2 + \gamma_3^2 \leqslant 1$, откуда следует, что

$$\alpha > \alpha_2, \quad \alpha_2 = \frac{mgACr_G}{Ax_G^2 + Cz_G^2}.$$

Введём обозначение

$$\Delta = C(A-B)z_G^2 - A(B-C)x_G^2.$$

При $\Delta > 0$ и $\Delta < 0$ имеем соответственно $\alpha_1 < \alpha_2$ и $\alpha_1 > \alpha_2$.

Таким образом, в интервалах $0 < \alpha < \min(\alpha_1, \alpha_2)$, $\min(\alpha_1, \alpha_2) < \alpha < \max(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\alpha > \max(\alpha_1, \alpha_2)$ изменения параметра α, характеризующего частоту колебаний точки подвеса, система (9) соответственно не имеет стационарных решений, имеет решения одного из двух типов и имеет решения обоих типов, отвечающих боковым относительным равновесиям тела.

В случае $\Delta = 0$ при выполнении неравенства

$$\alpha > \alpha_3, \quad \alpha_3 = \frac{mg}{x_G}\sqrt{\frac{BC(A-B)}{A-C}} \quad (\alpha_3 = \alpha_1 = \alpha_2) \tag{10}$$

существует семейство решений системы (9), определяемое условиями

$$mg = \frac{\alpha}{B}(x_G\gamma_1 + z_G\gamma_3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{11}$$

В пространстве величин $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ эти условия задают окружность, являющуюся пересечением сферы Пуассона и плоскости и представляющую в теле геометрическое место концов вертикального орта $\mathbf{n}$.

Решения первого и второго типов в случае $\Delta = 0$ сливаются и принадлежат семейству (11).

Заметим, что в частных случаях геометрии масс, когда центр масс тела лежит на главной оси инерции (например, на оси Oz), или когда тело динамически симметрично (случай $A = B$), или представляет бесконечно тонкую пластинку (случай $B = A + C$), величина Δ в нуль не обращается, и описанное семейство решений не существует.

3.2. Исследование устойчивости

Для анализа устойчивости найденных решений зададим возмущения

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = x_3, \quad \gamma_1 = \gamma_{10} + y_1, \quad \gamma_2 = \gamma_{20} + y_2, \quad \gamma_3 = \gamma_{30} + y_3 \tag{12}$$

переменных системы (2), (3) относительно их стационарных значений.

Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущённого движения записывается в виде

$$\lambda^2(b_2\lambda^4 + b_1\lambda^2 + b_0) = 0, \quad b_2 = ABC. \tag{13}$$

Для решений первого типа имеем

$$\begin{gathered} b_1 = -\frac{\alpha}{ABC}\Big[A^2C^2(x_G\gamma_{30} - z_G\gamma_{10})^2 + B(A\gamma_{10}^2 + C\gamma_{30}^2)\Delta\Big], \\ b_0 = \frac{\alpha^2\Delta}{AB^2C}(x_G\gamma_{30} - z_G\gamma_{10})^2(A\gamma_{10}^2 + C\gamma_{30}^2). \end{gathered} \tag{14}$$

Для решений второго типа

$$
\begin{gathered}
b_1 = \frac{b_{12}\alpha^2 + b_{10}}{\alpha ABC(Ax_G^2 + Cz_G^2)^2}, \quad b_{10} = m^2 g^2 r_G^2 A^3 C^3 \Delta, \\
b_{12} = B\gamma_{20}^2 (Ax_G^2 + Cz_G^2)^2 [(A + C)\Delta - AC(Ax_G^2 + Cz_G^2)] \\
b_0 = -\frac{\gamma_{20}^2 \Delta}{A^2 BC^2}[\alpha^2 B\gamma_{20}^2 (Ax_G^2 + Cz_G^2) + m^2 g^2 A^2 C^2].
\end{gathered} \tag{15}
$$

Из соотношений (14) следует, что при $\Delta \geqslant 0$ имеем $b_1 < 0$, а при $\Delta < 0$ — $b_0 < 0$. Из соотношений (15) получим, что, наоборот, при $\Delta > 0$ имеем $b_0 < 0$, а при $\Delta \leqslant 0$ — $b_1 < 0$.

Для решений из семейства (11) $b_0 = 0$, а

$$
b_1 = -\frac{A^2(B - C)x_G^2}{\alpha C(A - B)^2 z_G^2}[\alpha^2 x_G^2 (A - C) - m^2 g^2 BC(A - B)]. \tag{16}
$$

В области (10) существования этого семейства коэффициент b_1 из соотношения (16) отрицателен.

Таким образом, во всех описанных случаях боковых относительных равновесий тела один из коэффициентов b_0 или b_1 характеристического уравнения (13) отрицателен, и это уравнение имеет один или два корня с положительными вещественными частями. Поэтому, на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению, все боковые относительные равновесия тела неустойчивы.

Ранее для рассматриваемого случая вертикальных вибраций точки подвеса была установлена неустойчивость боковых относительных равновесий математического маятника [3, 7] и равновесий первого типа для твёрдого тела, центр масс которого лежит на главной оси инерции [12].

4. Общий случай геометрии масс тела

Рассмотрим теперь общий случай геометрии масс тела, когда центр масс тела не лежит в главной плоскости инерции и выполнены соотношения (1), в которых следует взять знаки строгих неравенств.

4.1. Существование относительных равновесий.

Проанализируем решения системы (6), (7) (при учёте соотношений (4), (5)). Умножим первое уравнение из (6) на x_G, второе на y_G, третье на z_G и затем почленно сложим. Учитывая, что

$$
x_G a + y_G b + z_G c = 0, \tag{17}
$$

получим уравнение

$$
\frac{A - B}{AB} z_G ab + \frac{B - C}{BC} x_G bc + \frac{C - A}{AC} y_G ac = 0. \tag{18}
$$

Соотношение (18), рассматриваемое в пространстве величин a, b, c, представляет собой уравнение конической поверхности с вершиной в точке $a = b = c = 0$. Исследуемые величины a, b, c лежат в сечении этого конуса плоскостью (17).

Из уравнений (17) и (18) следует, что если одна из величин a, b или c равна нулю, то две другие также равны нулю. Случай $a = b = c = 0$ приводит к решениям (8).

Пусть ни одна из величин a, b или c не равна нулю. Исключая c при помощи соотношения (17) и вводя обозначение $k = b/a$, получим из (18) квадратное уравнение для k

$$\frac{B-C}{BC}x_G y_G k^2 + \left(\frac{B-C}{BC}x_G^2 - \frac{A-C}{AC}y_G^2 - \frac{A-B}{AB}z_G^2\right)k - \frac{A-C}{AC}x_G y_G = 0. \qquad (19)$$

Его дискриминант имеет вид $D = d/(ABC)^2$, где

$$d = [A(B-C)x_G^2 - B(A-C)y_G^2 - C(A-B)z_G^2]^2 + 4AB(A-C)(B-C)x_G^2 y_G^2. \qquad (20)$$

Из условий (1) (взятых со знаками строгих неравенств) следует, что $d > 0$. Поэтому уравнение (19) имеет два вещественных корня $k = k_{1,2}$ ($k_1 < 0 < k_2$).

Заметим, что в случае $y_G = 0$ получаем $d = \Delta^2$; величина Δ, использованная в разд.2 при описании и исследовании устойчивости относительных равновесий тела, может иметь разные знаки и обратиться в нуль.

Положим в соотношениях (6) (при учёте (5)) $b = k_j a$, $c = -(x_G + k_J y_G)a/z_G$ ($j = 1, 2$) и, сократив на a, получим систему трёх линейных уравнений относительно стационарных значений $\gamma_{10}, \gamma_{20}, \gamma_{30}$. Определитель этой системы равен нулю, и независимыми будут только два уравнения, имеющие вид

$$\begin{aligned} &mg + \alpha\left(\frac{x_G\gamma_{20}}{B}k_j - \frac{x_G\gamma_{30}}{C}\,\frac{x_G + k_j y_G}{z_G} - \frac{y_G\gamma_{20} + z_G\gamma_{30}}{A}\right) = 0,\\ &mgk_j + \alpha\left(\frac{y_G\gamma_{10}}{A} - \frac{y_G\gamma_{30}}{C}\,\frac{x_G + k_j y_G}{z_G} - \frac{x_G\gamma_{10} + z_G\gamma_{30}}{B}k_j\right) = 0. \end{aligned} \qquad (21)$$

К ним следует присоединить ещё геометрический интеграл (7).

При помощи уравнений (21) исключим γ_{10} и γ_{20} и приведём уравнение (7) к виду

$$\begin{gathered} \ell_2\beta^2 + \ell_1\beta + \ell_0 = 0, \qquad \beta = \alpha\gamma_{30},\\ \ell_2 = A^2[(By_G^2 + Cz_G^2)^2 + (B^2y_G^2 + C^2z_G^2)x_G^2]k_j^2 +\\ +2ABx_G y_G[A(B(x_G^2 + y_G^2) + Cz_G^2) + C(B-C)z_G^2]k_j +\\ +B^2[(Ax_G^2 + Cz_G^2)^2 + y_G^2(A^2x_G^2 + C^2z_G^2)],\\ \ell_1 = -2mgz_G ABC[A(By_G^2 + Cz_G^2)k_j^2 + 2ABx_G y_G k_j + B(Ax_G^2 + Cz_G^2)],\\ \ell_0 = -C^2z_G^2[(Ak_j x_G - By_G)^2\alpha^2 - m^2g^2A^2B^2(1 + k_j^2)]. \end{gathered} \qquad (22)$$

Проанализируем решения уравнения (22).

Дискриминант квадратного относительно k_j трёхчлена в выражении для ℓ_2, равный $-4A^2B^2C^2z_G^2r_G^2(Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)^2$, строго отрицателен, поэтому $\ell_2 > 0$. Для определения знака свободного члена подставим в формулу для ℓ_0 выражения для k_j из уравнения (19), в результате получим

$$\begin{gathered} \ell_0 = \frac{C^2z_G^2}{4(B-C)^2x_G^2y_G^2}(f_2\alpha^2 + f_0),\\ f_2 = -x_G^2(p \pm \sqrt{d})^2,\ f_0 = 2m^2g^2B^2(g_0 \pm g_1\sqrt{d}),\\ p = A(B-C)x_G^2 + B(2B-A-C)y_G^2 + C(B-A)z_G^2,\\ g_0 = \Delta^2 + [2A^2(B-C)^2x_G^2 + B^2(A-C)^2y_G^2 + 2BC(A-B)(A-C)z_G^2]y_G^2,\\ g_1 = -\Delta - B(A-C)y_G^2. \end{gathered} \qquad (23)$$

В формулах для f_2 и f_0 (и далее в аналогичных формулах) верхний и нижний знаки относятся к величинам k_2 и k_1 соответственно, а величина d вычисляется по формуле (20).

Непосредственным вычислением проверяется, что

$$\begin{aligned} p^2 - d &= 4B(B-A)(B-C)(Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)y_G^2 \neq 0, \\ g_0^2 - g_1^2 d &= 4A^2(B-C)^2 x_G^2 y_G^2 [d + C^2(A-B)^2 x_G^2 y_G^2] > 0. \end{aligned} \tag{24}$$

Из неравенства (24) следует, что выражение в скобках в формуле для f_2 в нуль не обращается, поэтому $f_2 < 0$. Неравенство (25) вместе с условием $g_0 > 0$ приводит к соотношению $g_0 > |g_1|\sqrt{d}$, означающему, что для обоих значений k_1 и k_2 имеем $f_0 > 0$. Введём обозначение

$$\alpha_* = (f_0/|f_2|)^{1/2}. \tag{25}$$

Из соотношения (23) получим, что при выполнении условий $0 < \alpha < \alpha_*$ и $\alpha > \alpha_*$ справедливы соответственно неравенства $\ell_0 > 0$ и $\ell_0 < 0$.

Проанализируем дискриминант D_1 квадратного уравнения (22). Имеем

$$D_1 = 4C^2 z_G^2 [(Ak_j x_G - By_G)^2 \ell_2 \alpha^2 - m^2 g^2 A^2 B^2 w_0], \tag{26}$$

$$\begin{aligned} w_0 = {} & [A^2B^2(x_G^4 - 4x_G^2 y_G^2 + y_G^4) + AC(AC - 2AB + 2B^2)x_G^2 z_G^2 + \\ & + C^2(A-B)^2 z_G^4]k_j^2 - 2ABx_G y_G[AB(x_G^2 - y_G^2) + C(B + C - A)z_G^2]k_j + \\ & + B^2(A^2 x_G^2 + C^2 z_G^2)y_G^2. \end{aligned} \tag{27}$$

причём величина ℓ_2 определена в (22). Заметим, что множитель $Ak_j x_G - By_G$ в выражении (27) в нуль не обращается, так как величина By_G/Ax_G не является решением уравнения (19). А так как $\ell_2 > 0$, то коэффициент при α^2 в (27) строго положителен.

Для определения знака последнего слагаемого (27) подставим в выражение для w_0 значения k_j согласно уравнению (19); получаем

$$w_0 = \frac{\sqrt{d}(q_1\sqrt{d} \pm q_0)}{16A^2(B-C)^4 x_G^2 y_G^4}.$$

Здесь q_1 и q_0 — однородные многочлены относительно A, B, C и x_G, y_G, z_G, которые в силу громоздкости не выписаны. Вычисления показывают, что

$$q_1^2 d - q_0^2 = 256A^2B^2C^4(A-B)^2(B-C)^4(Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)^2 x_G^2 y_G^6 z_G^2 r_G^2,$$

поэтому $\sqrt{d}|q_1| > |q_0| \geqslant 0$. Следовательно, знак величины w_0 совпадает со знаком q_1. А так как $|q_1| \neq 0$, то в области допустимых значений параметров A, B, C, x_G, y_G, z_G эта величина сохраняет постоянный знак; проверка показывает, что этот знак положительный. Таким образом, $w_0 > 0$.

Следовательно, для каждого $k = k_j$ $(j = 1$ или $2)$ дискриминант (27) положителен при выполнении неравенства $\alpha > \alpha_j$, где

$$\alpha_j^2 = \frac{m^2 g^2 A^2 B^2 w_0}{(Ak_j x_G - By_G)^2 \ell_2}.$$

Заметим, что

$$\alpha_1^2-\alpha_2^2=\frac{(k_2-k_1)m^2g^2z_G^2AB^4C^2(A-B)^2(B-C)^2ud}{(Ak_1x_G-By_G)^2(Ak_2x_G-By_G)^2\ell_2^{(1)}\ell_2^{(2)}(B-C)^6x_Gy_G},$$
$$u=(Ax_G^2+By_G^2+Cz_G^2)^2[A(B+C)x_G^2+B(A+C)y_G^2+C(A+B)z_G^2],$$

где $\ell_2^{(j)}$ $(j=1,2)$ — это функция ℓ_2 из (22), в выражении для которой стоит соответствующая величина k_j. Так как $k_2>k_1$, то $\alpha_1>\alpha_2$.

Таким образом, при $0<\alpha<\alpha_2$ квадратное уравнение (22) не имеет действительных корней, при $\alpha_2<\alpha<\alpha_1$ это уравнение имеет два действительных корня (соответствующих $k=k_2$), а при $\alpha>\alpha_1$ — четыре действительных корня (при $k=k_1$ и $k=k_2$).

Каждому решению уравнения (22) соответствует боковое относительное равновесие тела в рассматриваемом здесь общем случае геометрии масс. Таких равновесий может быть ноль, два или четыре, в зависимости от частоты вибраций точки подвеса.

Сравним теперь величину α_* из (26) с величинами α_j; найдём разность

$$\alpha_*^2-\alpha_j^2=-\frac{2m^2g^2A^2B^2[AB(x_G+k_jy_G)^2+Cz_G^2(B+Ak_j^2)]^2(B-C)^2x_G^2y_G^2}{(s_1\sqrt{d}\pm s_0)\sqrt{d}(Ak_jx_G-By_G)^2}.$$

Здесь

$$s_1=(By_G^2+Cz_G^2)^2+(B^2y_G^2+C^2z_G^2)x_G^2>0,$$
$$s_1^2d-s_0^2=4B^2C^2(B-C)^2x_G^2y_G^2z_G^2r_G^2(Ax_G^2+By_G^2+Cz_G^2)^2>0.$$

Следовательно, $s_1\sqrt{d}>|s_0|$ и значит, $\alpha_*<\alpha_j$ $(j=1,2)$.

Отсюда заключаем, что в области $\alpha>\alpha_2$ существования решений уравнения (22) его свободный член ℓ_0 всегда отрицателен. Поэтому для каждого значения $k=k_1$ и $k=k_2$ решения уравнения (22) в области их существования имеют разные знаки. Для соответствующих им относительных равновесий угол наклона оси Oz тела к вертикали острый и тупой.

4.2. Исследование устойчивости

Исследуем устойчивость найденных решений. Анализируемые в этом разделе выражения, как правило, весьма громоздки и не могут быть помещены в статье. Поэтому ниже будут изложены основные этапы исследования, которые были проведены на компьютере при помощи системы аналитических вычислений MAPLE, и полученные выводы.

Введём возмущения по формулам (12). Характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущённого движения имеет вид (13), где

$$b_1=\frac{1}{ABC}\big[d_1\gamma_{10}^2+d_2\gamma_{20}^2+d_3\gamma_{30}^2+d_4\gamma_{10}\gamma_{20}+d_5\gamma_{20}\gamma_{30}+d_6\gamma_{10}\gamma_{30}-$$
$$-mgABC[A(B+C)x_G\gamma_{10}+B(A+C)y_G\gamma_{20}+C(A+B)z_G\gamma_{30}]\big],\quad(28)$$

$$d_1=\alpha A[A(B^2+C^2)x_G^2-B(AB+AC-C^2)y_G^2-C(AB+AC-B^2)z_G^2],$$
$$d_4=\alpha AB(AC+BC+4AB)x_Gy_G;$$

$$b_0=\frac{1}{A^2B^2C^2}[e_1\gamma_{10}^4+e_2\gamma_{20}^4+e_3\gamma_{30}^4+e_4\gamma_{10}^3\gamma_{20}+e_5\gamma_{20}^3\gamma_{30}+e_6\gamma_{30}^3\gamma_{10}+$$
$$+e_7\gamma_{10}^3\gamma_{30}+e_8\gamma_{20}^3\gamma_{10}+e_9\gamma_{30}^3\gamma_{20}+e_{10}\gamma_{10}^2\gamma_{20}\gamma_{30}+e_{11}\gamma_{20}^2\gamma_{10}\gamma_{30}+$$

$$+ e_{12}\gamma_{30}^2\gamma_{10}\gamma_{20} + e_{13}\gamma_{10}^2\gamma_{20}^2 + e_{14}\gamma_{20}^2\gamma_{30}^2 + e_{15}\gamma_{10}^2\gamma_{30}^2], \quad (29)$$

$$e_1 = \alpha^2 A^2[ABCx_G^4 + B^2(A-C)y_G^4 + C^2(A-B)x_G^4 - \\ - (AB+AC-BC)(By_G^2 + Cz_G^2)x_G^2 + BC(2A-B-C)y_G^2 z_G^2]$$

$$e_4 = \alpha^2 ABx_G y_G[A(AB+B^2+4AC)x_G^2 - AB(5A+B-4C)y_G^2 + \\ + C(B^2 - BC + 3AC - 5A^2)z_G^2],$$

$$e_{10} = \alpha^2 BCy_G z_G\big\{A\big[3A(4A+B+C) + (B+C)^2\big]x_G^2 - \\ - (B+C)\big[B(2A-C)y_G^2 + C(2A-B)z_G^2\big]\big\},$$

$$e_{13} = -\alpha^2\big\{A^2B(AC-BC+B^2)x_G^4 + AB^2(BC-AC+A^2)y_G^4 + \\ + C^2(A+B)(A-B)^2 z_G^4 - AB\big[5AB(A+B) + C(A-B)^2\big]x_G^2 y_G^2 + \\ + AC\big[A^2(C-B) + BC(A-B) + B^2(2B-A)\big]x_G^2 z_G^2 - \\ - BC\big[B^2(A-C) + AC(A-B) + A^2(B-2A)\big]y_G^2 z_G^2\big\}.$$

Коэффициенты d_2 и d_3 в (28) получаются из $d_!$, а d_5 и d_6 из d_4 в результате одновременного проведения циклических перестановок троек величин A, B, C и x_G, y_G, z_G. Коэффициент e_7 в (29) имеет вид коэффициента e_4, в котором поменялись местами величины B и C, а также y_G и z_G. Коэффициенты e_2 и e_3 получаются из e_1, e_5 и e_6 — из e_4, e_8 и e_9 — из e_7, e_{11} и e_{12} — из e_{10}, e_{14} и e_{15} — из e_{13} в результате проведения тех же циклических перестановок.

Преобразуем величины b_1 и b_0, сделав в (28), (29) подстановку выражений для γ_{10}, γ_{20} через γ_{30} согласно равенствам (21) и выражения для k_j $(j = 1, 2)$ из уравнения (19). Получаем

$$b_1 = -\frac{m^2 g^2 B\sqrt{d}}{4\alpha AC(B-C)^2(Ak_j x_G - By_G)^2 x_G^2 y_G^2}\, b_{11}, \quad \delta = \frac{\beta}{BCmgz_G}, \\ b_{11} = (\mp n_{21} + \sqrt{d}n_{20})\delta^2 + (\mp n_{11} + \sqrt{d}n_{10})\delta + (\mp n_{01} + \sqrt{d}n_{00}); \quad (30)$$

$$b_0 = -\frac{m^4 g^4 B^2 d}{8A^2C^2(B-C)^4(Ak_j x_G - By_G)^4 x_G^4 y_G^4} b_{01}, \quad (31)$$

$$b_{01} = (\mp m_{41}\sqrt{d} + m_{40})\delta^4 - (\mp m_{31}\sqrt{d} + m_{30})\delta^3 + (\mp m_{21}\sqrt{d} + m_{20})\delta^2 - \\ - (\mp m_{11}\sqrt{d} + m_{10})\delta + (\mp m_{01}\sqrt{d} + m_{00}).$$

Коэффициенты n_{kl} и m_{kl} суть однородные функции (разных степеней) относительно параметров A, B, C и x_G, y_G, z_G. Входящие в выражения (30), (31) величины β удовлетворяют квадратному уравнению (22) и определяются выражениями (дискриминант D_1 вычисляется по формуле (27))

$$\beta = \beta_* = \frac{-l_1 \pm z}{2l_2}, \quad z = \sqrt{D}_1. \quad (32)$$

Пусть $k = k_1$ и выполнено условие $\alpha > \alpha_1$ (что равносильно условию $z > 0$). Сделаем подстановку $\delta = \beta_*/(BCmgx_G)$ в выражение для b_{01} из формулы (31) (выбирая нижний знак). Величина b_{01} представляется тогда многочленом четвёртой степени относительно z. Расчёты показывают, что свободный член этого многочлена и коэффициент линейного члена тождественно обращаются в нуль. Имеем

$$b_{01} = z^2[(p_{21}\sqrt{d} + p_{20})z^2 \pm (p_{21}\sqrt{d} + p_{210})z + (p_{01}\sqrt{d} + p_{00})], \tag{33}$$

причём знаки плюс и минус соответствуют знакам плюс и минус в выражении (32). Можно показать, что

$$p_{21}^2 d - p_{20}^2 = 64AB^5C^5(B-C)^4 x_G^4 r_G^4 (Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)^5 X_1, \tag{34}$$

$$\begin{aligned} X_1 = B(Az_G^2 + Cx_G^2)\Delta^2 + \big\{B^2(A-C)^2(ACy_G^4 + B^2x_G^2z_G^2) + \\ + (Az_G^2 + Cx_G^2)\big[A^3(B-C)^2x_G^2 + B^3(A-C)^2y_G^2 + C^3(A-B)^2z_G^2\big] + \\ + 2ABC(A-C)\big[(B-C)(Bx_G^2 + Ay_G^2)x_G^2 + (A-B)(Bz_G^2 + Cy_G^2)z_G^2\big]\big\}y_G^2. \end{aligned}$$

Так как в области допустимых значений параметров $X_1 > 0$, то $p_{21}^2 d > p_{20}^2$, и старший коэффициент $p_{21}\sqrt{d} + p_{20}$ квадратного трёхчлена в (34) в нуль не обращается и, следовательно, сохраняет постоянный знак. Проверка показывает, что этот знак положительный.

Дискриминант квадратного относительно z трёхчлена в (34) приводится к виду

$$D_2 = \frac{16AB^2C^4m^2g^2z_G^2d}{(B-C)^4y_G^4}(d_{21}\sqrt{d} + d_{20}). \tag{35}$$

Аналогично (35) имеем

$$d_{21}^2 d - d_{20}^2 = 16A^2B^{12}C^{10}(A-B)^2(B-C)^{12}x_G^{10}y_G^{14}z_G^{10}r_G^8(Ax_G^2 + By_G^2 + Cz_G^2)^{13}X_2,$$

где X_2 — некоторый однородный многочлен относительно A, B, C и x_G, y_G, z_G, который в силу громоздкости не выписан. Аналитически показано, что в области допустимых значений параметров $X_2 > 0$. Поэтому множитель $d_{21}\sqrt{d} + d_{20}$ в (**??**) в нуль не обращается, а дискриминант D_2 сохраняет постоянный знак (отрицательный).

Квадратный трёхчлен в (34), имея положительный старший коэффициент и отрицательный дискриминант, всегда положителен, а коэффициент b_0 (см. (31)) характеристического уравнения отрицателен. Поэтому в рассматриваемом случае $k = k_1$ относительные равновесия тела, соответствующие обоим решениям (32), неустойчивы.

Пусть теперь $k = k_2$ и выполнено условие $\alpha > \alpha_2$. Проанализируем квадратный относительно δ трёхчлен в выражении для b_{11} из формулы (30) (выбирая верхний знак). Способ исследования, подобный предыдущему, в данном случае оказывается непригодным, так как выражения вида $n_{21}^2 d - n_{20}^2$ и т. п. знакопеременные.

Анализ коэффициентов величины b_{11} был проведён в пространстве безразмерных параметров $a_1 = B/A$, $a_2 = C/A$, $c_1 = y_G/x_G$, $c_2 = z_G/x_G$. В силу условий (1) и неравенств треугольника для осевых моментов инерции допустимые значения параметров a_1, a_2 принадлежат области, задаваемой неравенствами $0.5 < a_1 < 1$, $1 - a_1 < a_2 < a_1$.

Был использован аналитический и численный подходы в сочетании с построением и анализом графических изображений. В результате исследования установлено, что квадратный трёхчлен b_{11}, как и квадратный трёхчлен в (34), во всем рассмотренном диапазоне изменения параметров имеет положительный старший коэффициент и отрицательный дискриминант. Поэтому $b_{11} > 0$, а коэффициент

b_1 (см. (30)) характеристического уравнения отрицателен. Следовательно, соответствующие $k = k_2$ боковые относительные равновесия тела также оказываются неустойчивыми.

5. Заключение

В статье решена задача о существовании и устойчивости (в рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения) боковых относительных равновесий твёрдого тела в предположении, что одна из точек тела совершает вертикальные высокочастотные гармонические вибрации малой амплитуды. Рассмотрены случай расположения центра масс тела в главной плоскости инерции и случай произвольной геометрии масс. Исследован весь диапазон допустимых значений параметров задачи. Показано, что при не слишком больших частотах вибраций точки подвеса боковые относительные отсутствуют (как и для тела с неподвижной точкой подвеса), с ростом этой частоты появляются два относительных равновесия и с дальнейшим ростом — четыре. Все боковые относительные равновесия неустойчивы в области своего существования.

Литература

1. *Stephenson A.* On a New Type of Dynamical Stability // Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society. — Vol. 52, No 2. — 1908. — Pp. 1–10.
2. *Капица П. Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. — 1951. — Т. 44, № 1. — С. 7–20. [*Kapica P. L.* Mayatnik s vibriruyuthim podvesom // Uspekhi fiz. nauk. — 1951. — T. 44, No 1. — S. 7–20.]
3. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Журнал эксперим. и теорет. физики. — 1951. — Т. 21, № 5. — С. 588–597. [*Kapica P. L.* Dinamicheskaya ustoyjchivostj mayatnika pri koleblyutheyjsya tochke podvesa // Zhurnal ehksperim. i teoret. fiziki. — 1951. — T. 21, No 5. — S. 588–597.]
4. *Бардин Б. С., Маркеев А. П.* Об устойчивости равновесия маятника при вертикальных колебаниях точки подвеса // Прикладная математика и механика. — 1995. — Т. 59, № 6. — С. 922–929. [*Bardin B. S., Markeev A. P.* Ob ustoyjchivosti ravnovesiya mayatnika pri vertikaljnihkh kolebaniyakh tochki podvesa // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1995. — T. 59, No 6. — S. 922–929.]
5. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. трудов Института строит. механики АН УССР. — 14. 1950. — № 14. — С. 9–34. [*Bogolyubov N. N.* Teoriya vozmutheniyj v nelineyjnoyj mekhanike // Sb. trudov Instituta stroit. mekhaniki AN USSR. — 14. 1950. — No 14. — S. 9–34.]
6. *Маркеев А. П.* О динамике сферического маятника с вибрирующим подвесом // Прикладная математика и механика. — 1999. — Т. 63, № 2. — С. 213–219. [*Markeev A. P.* O dinamike sfericheskogo mayatnika s vibriruyuthim podvesom // Prikladnaya matematika i mekhanika. — 1999. — T. 63, No 2. — S. 213–219.]
7. *Холостова О. В.* О движениях маятника с вибрирующей точкой подвеса // Сб. научно-методич. статей. Теоретическая механика. — М.: Изд-во МГУ, 2003. — Т. 24. — С. 157–167. [*Kholostova O. V.* O dvizheniyakh mayatnika s vibriruyutheyj tochkoyj podvesa // Sb. nauchno-metodich. stateyj. Teoreticheskaya mekhanika. — M.: Izd-vo MGU, 2003. — T. 24. — S. 157–167.]
8. *Стрижак Т. Г.* Методы исследования динамических систем типа «маятник». — Алма-Ата: Наука, 1981. [*Strizhak T. G.* Metodih issledovaniya dinamicheskikh sistem tipa «mayatnik». — Alma-Ata: Nauka, 1981.]

9. *Холостова О. В.* Динамика волчка Лагранжа с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. — М.: Изд-во МАИ, 2000. [*Kholostova O. V.* Dinamika volchka Lagranzha s nepodvizhnoyj i vibriruyutheyj tochkoyj podvesa. — M.: Izd-vo MAI, 2000.]
10. *Холостова О. В.* О движениях двойного маятника с вибрирующей точкой подвеса // Известия РАН. Механика твердого тела. — 2009. — № 2. — С. 25–40. [*Kholostova O. V.* O dvizheniyakh dvoyjnogo mayatnika s vibriruyutheyj tochkoyj podvesa // Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela. — 2009. — No 2. — S. 25–40.]
11. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. — 2006. — Т. 4, № 3. — С. 26–158. [*Yudovich V. I.* Vibrodinamika i vibrogeometriya mekhanicheskikh sistem so svyazyami // Uspekhi mekhaniki. — 2006. — T. 4, No 3. — S. 26–158.]
12. *Маркеев А. П.* К теории движения твердого тела с вибрирующим подвесом // Доклады Академии наук. — 2009. — Т. 427, № 6. — С. 771–775. [*Markeev A. P.* K teorii dvizheniya tverdogo tela s vibriruyuthim podvesom // Dokladih Akademii nauk. — 2009. — T. 427, No 6. — S. 771–775.]

UDC 531.36:531.381

On Stability of Relative Equilibriums of a Rigid Body with a Vibrating Point of Support

O. V. Kholostova

Department of Theoretical Mechanics
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho–Maklaya str. 6, Moscow, 117198, Russia

In this paper motions of a heavy rigid body, of which point of support performs vertical harmonical vibrations of a high frequency and a small amplitude, are studied. Using an approximate autonomous system of differential equations of the motion, an analysis of existence, bifurcations and stability of relative equilibrium is carried out, for which the mass center and the point of support of the body don't lie at the same vertical. It is shown that all of these relative equilibria are unstable.

Key words and phrases: Euler–Poisson equations, high-frequency vibration, vibratory moment, relative equilibrium, stability.