Математические модели и методы в экономике

УДК 330.4

Построение экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае олигополии

С. А. Васильев, Л. А. Севастьянов, Д. А. Урусова

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо–Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В этой статье строится экономико-математическая модель рынка телекоммуникаций в случае олигополии. На базе этой модели проводится анализ равновесных тарифов на телекоммуникационные услуги для этого типа рынка, а также исследуются возможные методы государственного регулирования рынка телекоммуникаций.

Ключевые слова: математическое моделирование, телекоммуникации, ценообразование, рыночное равновесие, государственное регулирование.

1. Введение

В связи с необходимостью анализа тех процессов, которые протекают в телекоммуникационной отрасли, стали активно развиваться методы математического моделирования в экономике телекоммуникаций [1–12].

В данной статье строится экономико-математическая модель рынка телекоммуникаций в случае олигополии (на рынке присутствует M компании), которая обобщает модель, построенную авторами ранее [13].

В рассматриваемой здесь модели предполагается, что телекоммуникационные компании попарно договариваются о правилах тарификации за доступ в сети друг друга, причём эта тарификация строится как функция от тарифов, которые компании предлагают своим абонентам за обслуживание. Таким образом, эти компании ограничиваются на первом шаге договорённостями по обоюдным правилам пропорциональной тарификации за доступ (ОППТД), которые впоследствии позволяют определить абонентские тарифы. Обоюдность правил означает, что компании подчиняются одним и тем же правилам на всем интервале времени, в течение которого действует договорённость.

Принятие компаниями ОППТД может рассматриваться как аналог регулирующей политики государства телекоммуникационной отрасли. Если телекоммуникационные сервисы, предоставляемые различными компаниями, являются близкими субститутами, то использование ОППТД приводит к конкурентным ценам в отрасли. Однако, если предположить, что конкурирующие компании пойдут по пути дифференциации сервисов, то тогда потребуется вмешательство государства для пресечения возможности применения компаниями монопольной власти.

Также предполагается, что функция полезности абонентов состоит из детерминированной и стохастической частей. Детерминированная часть этой функции позволяет найти линейную функцию спроса абонентов на телекоммуникационные услуги, которая обладает постоянной ценовой эластичностью. Это позволяет избежать неограниченного возрастания потребления телекоммуникационных сервисов абонентами при стремлении соответствующих тарифов к нулю и обеспечивает существование точки насыщения, т.е., например, существует предел времени, которое абонент использует для звонков по телефону. Для стохастической компоненты функции полезности используется распределение Вейбулла, которое удобно для дальнейшего анализа.

Статья поступила в редакцию 9 октября 2010 г.

На базе этой модели удаётся найти равновесные тарифы и равновесный спрос на телекоммуникационные услуги, причём это равновесие является равновесием в чистых стратегиях и всегда существует, а абонентские тарифы вычисляются явным образом.

2. Модель телекоммуникационной отрасли в случае олигополии

Рассмотрим случай, когда на рынке телекоммуникаций присутствуют M компаний $TELC_i\,(i \in \{1,\ldots,M\})$, которые предоставляют телекоммуникационные сервисы $TELS_g\,(g \in \{1,\ldots,G\})$. Каждая из этих компаний владеет своей телекоммуникационной сетью $Net_i\,(i \in \{1,\ldots,M\})$, а сети различных компаний попарно соединены.

Будем предполагать, что предельная стоимость телекоммуникационных сервисов, предоставляемых компаниями, равна нулю. Существующие фиксированные издержки компаний связанны с построением сети и её эксплуатацией, причём затраты на эксплуатацию сетей предполагаются независимыми от объёма услуг. Обозначим фиксированные издержки каждой из компаний $F_i = F > 0\,(i \in \{1,\ldots,M\})$.

Для каждой компании $TELC_i\,(i \in \{1,\ldots,M\})$ имеются функции спроса на её телекоммуникационные сервисы. Функция спроса D_{gii} на сервисы $TELS_g\,(g \in \{1,\ldots,G\})$, предоставляемые в пределах её сети Net_i, и функция спроса $D_{gij}\;(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$ на сервисы, предоставляемые совместно как сетью Net_i, так в сетью $Net_j\;(i,j \in \{1,\ldots,M\}, i \neq j)$. Таким образом, возникает вопрос о доступе одной компании к ресурсам сети другой компании.

Пусть компании $TELC_i$ и $TELC_j\;(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$ договариваются о тарифах $\hat{a}_{gij}$ и $\hat{a}_{gji}$, где $\hat{a}_{gij}$ — тариф, по которому компания $TELC_i$ платит компании $TELC_j\;(i,j \in \{1,\ldots,M\}, i \neq j)$ за использование её сетевых ресурсов в связи с сервисом $g \in \{1,\ldots,G\}$, а $\hat{a}_{gji}$ — соответствующий тариф, по которому компания $TELC_j$ платит компании $TELC_i\;(i,j \in \{1,\ldots,M\}, i \neq j)$ за использование сетевых ресурсов в связи с оказанием аналогичного сервиса $g \in \{1,\ldots,G\}$.

Через $p_{gi}\;(i \in \{1,\ldots,M\})$ обозначим тариф, который компания $TELC_i$ взимает за единицу сервиса $g \in \{1,\ldots,G\}$ с каждого из своих абонентов.

Далее предположим, что у любых двух компаний $TELC_i$ и $TELC_j\;(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$ тарифы $\hat{a}_{gij}$ и $\hat{a}_{gji}$ зависят от тарифов p_{gi} и p_{gj} таким образом, что имеет место $\hat{a}_{gij} = a_{gi}(p_{gi}, p_{gj})$ для любых $i,j \in \{1,\ldots,M\}, i \neq j$ и $g \in \{1,\ldots,G\}$.

В рамках рассматриваемой модели ограничимся случаем пропорциональной зависимости между $\hat{a}_{gij}$ и p_{gi}

$$\hat{a}_{gij} = a_{gi} p_{gi},$$

где коэффициент пропорциональности $0 \leqslant a_{gi} \leqslant 1$ для $i \in \{1,\ldots,M\}$ и $g \in \{1,\ldots,G\}$.

Пусть далее $a_{gi} = a_{gj} = a\;(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$, $g \in \{1,\ldots,G\}$, тогда будем считать, что компании $TELC_i$ и $TELC_j\;(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$ применяют обоюдное правило пропорциональной тарификации за доступ (ОППТД).

Функции прибыли компаний $(i,j \in \{1,\ldots,M\},\ i \neq j)$ будут тогда иметь следующий вид:

$$\Pi_i = \sum_{g=1}^{G} [p_{gi} D_{gii} + \sum_{j=1}^{M} (p_{gi} - a p_{gj}) D_{gij} + a p_{gi} D_{gji})] - F, \tag{1}$$

$$\Pi_j = \sum_{g=1}^{G} [p_{gj} D_{gjj} + \sum_{i=1}^{M} (p_{gj} - a p_{gi}) D_{gji} + a p_{gj} D_{gij})] - F. \tag{2}$$

Пусть имеет место следующая последовательность событий:

Шаг 1. Все компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$ принимают ОППТД.

Шаг 2. Компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$ выбирают одновременно и независимо тарифы p_{gi} и сообщают о них потенциальным абонентам.

Шаг 3. После ознакомления с тарифами p_{gi} $(i \in \{1, \dots, M\})$ каждый потенциальный абонент выбирает к сети какой компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$ он подключится, а также определяет для себя объем потребления при соответствующем тарифе каждого из сервисов $g \in \{1, \dots, G\}$ этой компании.

3. Построение функции спроса абонентов

Предположим, что существует N потенциальных абонентов, которые готовы воспользоваться телекоммуникационными сервисами, которые предлагают компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$. Допустим, что у каждого абонента есть индивидуальные вкусы и предпочтения по отношению к этим сервисам. Пусть абонент k $(k \in \{1, \dots, N\})$, который подключился к сети компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$, имеет следующую функцию полезности:

$$u_{kgi}(d) = ((r_g - s_g d_g) d_g + p_{gi} d_g) e^{\sigma \epsilon_{kgi}}, \tag{3}$$

где величина d_g — объем сервиса $g \in \{1, \dots, G\}$, которым готов воспользоваться абонент за определённый промежуток времени.

Случайный параметр ϵ_{kgi} характеризует индивидуальные вкусы и предпочтения абонента и имеет распределение Вейбулла. Величина σ даёт характеристику меры разброса вкусов и предпочтений абонентов, то есть σ позволяет оценить взаимозаменяемость телекоммуникационных сервисов $g \in \{1, \dots, G\}$, которые предоставляют компании $TELC_i$ и $TELC_j$ $(i, j \in \{1, \dots, M\},\ i \neq j)$.

При $\sigma \to 0$ сервисы $g \in \{1, \dots, G\}$ компаний становятся полностью взаимозаменяемыми, а при $\sigma \to \infty$ — полностью взаимодополняющими.

Пусть $u^{det}_{kgi}(d)$ детерминированная часть функции полезности абонента k $(k \in \{1, \dots, N\})$, который подключился к сети компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$ для получения сервиса $g \in \{1, \dots, G\}$, тогда $u^{det}_{kgi}(d)$ при соответствующем тарифе p_{gi} имеет вид:

$$u^{det}_{kgi}(d) = (r_g - s_g d_g) d_g - p_{gi} d_g. \tag{4}$$

Эта функция достигает максимума при

$$d_{gi} = \frac{r_g - p_{gi}}{2 s_g} \tag{5}$$

и тогда

$$u^{det}_{kgi} = \frac{1}{4 s_g} (r_g - p_{gi})^2. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует, что абонент k $(k \in \{1, \dots, N\})$ сделает выбор в пользу компании $TELC_i$, а не в пользу компании $TELC_j$ $(i, j \in \{1, \dots, M\},\ i \neq j)$, если

$$u^{det}_{kgi} e^{\sigma \epsilon_{kgi}} \geqslant u^{det}_{kgj} e^{\sigma \epsilon_{kgj}}.$$

Таким образом, вероятность P_{kgi} того, что абонент k отдаст предпочтение компании $TELC_i$ и отвергнет компанию $TELC_j$ $(i, j \in \{1, \dots, M\},\ i \neq j)$, равна

$$P_{kgi} = \mathrm{P}\{u^{det}_{kdi} e^{\sigma \epsilon_{kgi}} > u^{det}_{kgj} e^{\sigma \epsilon_{kgj}}\}. \tag{7}$$

Так как величины ϵ_{kgi} независимы и имеют распределение Вейбулла, то

$$P_{kgi} = \frac{1}{1 + \left(\frac{u^{det}_{kgj}}{u^{det}_{kgi}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}}. \tag{8}$$

Подставляя (6) в (8), получим для компании $TELC_i$

$$P_{kgi} = \frac{(r_g - p_{gi})^\tau}{(r_g - p_{gi})^\tau + (r_g - p_{gj})^\tau}, \tag{9}$$

где $\tau = 2/\sigma$. Аналогично для компании $TELC_j$ будем иметь, что

$$P_{kgj} = \frac{(r_g - p_{gj})^\tau}{(r_g - p_{gj})^\tau + (r_g - p_{gi})^\tau}. \tag{10}$$

Вероятности P_{kgi} и P_{kgj} не зависит от индекса k ($k \in \{1, \ldots, N\}$), поэтому его можно далее опустить.

С точки зрения компаний $TELC_i$ и $TELC_j$ каждый абонент будет выбирать $TELC_i$ с вероятностью P_{gi} и $TELC_j$ с вероятностью P_{gj}. Ожидаемое число абонентов, которые выберут $TELC_i$, составит NP_i. Таким образом, P_{gi} можно рассматривать как долю рынка компании $TELC_i$.

Из (9) следует, что ожидаемая доля рынка m_{gi} компании $TELC_i$ есть

$$m_{gi} = P_{gi} = \frac{(r_g - p_{gi})^\tau}{(r_g - p_{gi})^\tau + (r_g - p_{gj})^\tau}. \tag{11}$$

Спрос абонентов на сервисы $g \in \{1, \ldots, G\}$ компании $TELC_i$ ($i \in \{1, \ldots, M\}$) представляет собой:

$$D_{gi} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gi})P_{gi} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gi})m_{gi}. \tag{12}$$

Вероятность того, что абонент компании $TELC_i$ воспользуется сервисами в пределах сети Net_i, равна m_{gi}, а вероятность того, что этот абонент воспользуется сервисами сети конкурента Net_j составит m_{gj}. Поэтому из (11) и (12) следуют следующие соотношения:

$$D_{gii} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gi})m^2_{gi}, \tag{13}$$

$$D_{gij} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gi})m_{gi}m_{gj}, \tag{14}$$

$$D_{gjj} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gj})m^2_{gj}, \tag{15}$$

$$D_{gji} = \frac{N}{2s_g}(r_g - p_{gj})m_{gj}m_{gi}. \tag{16}$$

4. Конкуренция телекоммуникационных компаний с ОППТД

Пусть компании $TELC_i$ ($i \in \{1, \ldots, M\}$) используют ОППТД. Это значит, что эти компании используют одно и тоже правило $\hat{a}_{gi} = ap_{gi}$, $0 \leqslant a \leqslant 1$ ($i \in \{1, \ldots, M\}$). Используя (1), (2) и (13)–(16), получим следующие функции прибыли компаний $TELC_i, TELC_j$ $(i,j \in \{1,\dots,M\},\ i \neq j)$, которые будут иметь место при оказании сервисов $g \in \{1,\dots,G\}$:

$$\Pi_{gi} = \frac{N}{2s_g}\{p_{gi}(r_g - p_{gi})m_{gi} + (p_{gi} - ap_{gi})(r_g - p_{gi})m_{gi}m_{gj}) + \\ + ap_{gi}(r_g - p_{gj})m_{gi}m_{gj})\} - F, \quad (17)$$

$$\Pi_{gj} = \frac{N}{2s_g}\{p_{gj}(r_g - p_{gj})m_{gj} + (p_{gj} - ap_{gj})(r_g - p_{gj})m_{gj}m_{gi} + \\ + ap_{gj}(r_g - p_{gi})m_{gj}m_{gi}\} - F. \quad (18)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. *Для каждого* $0 \leqslant a \leqslant 1$, $\tau > 0$ *и* $r_g > 0$ $(g \in \{1,\dots,G\})$ *существует одно и только одно симметричное равновесие вида*

$$p^*_{gi} = p^*_{gj} = \frac{(2+a)r_g}{\tau + 4}.$$

Доказательство. Пусть $\alpha = r_g - p_{gi}$ и $\beta = r_g - p_{gj}$, тогда функции прибыли компаний имеют вид:

$$\Pi_i(\alpha,\beta) = \frac{N}{2s_g}\frac{\alpha^x}{(\alpha^x+\beta^x)}\left[\alpha(r_g-\alpha) + a(\beta-\alpha)\frac{\beta^x}{(\alpha^x+\beta^x)}\right] - F,$$
$$\Pi_j(\alpha,\beta) = \frac{N}{2s_g}\frac{\beta^x}{(\alpha^x+\beta^x)}\left[\beta(r_g-\beta) + a(\alpha-\beta)\frac{\alpha^x}{(\alpha^x+\beta^x)}\right] - F.$$

Пусть $p^*_{gi} = p^*_{gj} = \dfrac{(2+a)r_g}{\tau+4}$, тогда $\alpha^* = \dfrac{(\tau+2-a)r_g}{\tau+4} = \beta^*$. Нужно доказать, что $\Pi_i(\alpha,\beta^*)$ достигает максимума при $\alpha = \alpha^*$ и $\Pi_j(\alpha^*,\beta)$ достигает максимума при $\beta = \beta^*$. В силу симметричности, достаточно доказать, что это имеет место для $\Pi_i(\alpha,\beta^*)$.

Так как функция $\Pi_i(\alpha,\beta)$ непрерывна по τ, то достаточно доказать справедливость для положительных рациональных значений τ. Пусть $\tau = \dfrac{m}{n}$, где $m > 0$, $n > 0$ целые числа, тогда

$$t \equiv \alpha^{\frac{1}{n}} \quad \text{и} \quad s_g \equiv \beta^{\frac{1}{n}},$$

$t^* = (\alpha^*)^{\frac{1}{n}} = s^*_g$, где

$$s^*_g = (\alpha^*)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{m+2n-an}{m+4}r_g\right)^{\frac{1}{n}}, \quad (19)$$

$$\Pi_i(t,s_g) \equiv \frac{N}{2s_g}\frac{t^m}{(t^m+s^m_g)}\left[t^n(r_g-t^n) + ar_g(s^n_g - t^n)\frac{s^m_g}{(t^m+s^m_g)}\right] - F.$$

Так как t^n возрастающая функция по переменной t, то достаточно доказать, что $\Pi_i(t,s^*_g)$ достигает максимума при $t^* = (\alpha^*)^{\frac{1}{n}}$, когда $s^*_g = (\beta^*)^{\frac{1}{n}}$.

Легко показать, что $\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial t} = \dfrac{t^m}{t(t^m+s^m_g)^3}P(t,s_g)$, где $P(t,s_g)$ полином вида:

$$P(t,s_g) = ms^m_g t^n(r_g - t^n)(t^m + s^m_g) + arms^m_g(s^n_g - t^n)(s^m_g - t^m) + \\ + (rnt^n - 2nt^{2n})(t^m + s^m_g)^2 - arnt^n s^m_g(t^m + s^m_g).$$

Отсюда получим

$$P(t,s_g)=s_g^{2m}\left[-(m+2n)t^{2n}+(rm-arm+rn-arn)t^n+arms^n\right]\times \\ \times s_g^m\left[-(m+4n)t^{m+2n}+(rm+arm+2rn-arn)t^{m+n}-armt^ns_g^n\right]- \\ -2nt^{2m+2n}+rnt^{2m+n}.$$

Легко показать, что $t=t^*=s_g^*$ является корнем полинома $P(t,s_g^*)$, следовательно

$$P(t,s_g^*)=(t-s_g^*)g(t,s_g^*), \tag{20}$$

для некоторого полинома $g(t,s_g^*)$. Также можно показать, что

$$g(t,s_g)=-2n\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{2m+2n-j-1}+n(r_g-2s_g^n)\sum_{j=0}^{2m-1}s_g^jt^{2m+n-j-1}- \\ -ws_g^m\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{2n-j-1}+[y-ws_g^n+n(r_g-2s_g^n)]s_g^{2m}\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{n-j-1}- \\ -vs_g^m\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{m+2n-j-1}+(z-vs_g^n)\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{m+n-j-1}+ \\ +(z-vs_g^n-arm)s_g^{m+n}\sum_{j=0}^{n-1}s_g^jt^{m-j-1}, \tag{21}$$

где $s_g=s_g^*=\left(\dfrac{m+2n-an}{m+4n}r_g\right)^{\frac{1}{n}}$. Отсюда следует, что

$$w=m+2n,\quad v=m+4n, \\ y=rm-arm+rn-arn,\quad z=rm+arm+2rn-arn. \tag{22}$$

Легко проверить, что

$$z-vs_g^n-arm=0, \tag{23}$$

$$y-ws_g^n-n(r_g-2s_g^n)=-arm. \tag{24}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Пусть* $0\leqslant t\leqslant r_g^{\frac{1}{n}}$, *тогда для* $0\leqslant t\leqslant r_g^{1/n}$ *будем иметь* $g(t,s_g^*)<0$.

Доказательство. Найдём суммы геометрических прогрессий в (21) и подставим в (22), (23), (24). После этого получим

$$g(t,s_g)=-2nt^{2m+2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}}+n(r_g-2s_g^n)t^{2m+n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^{2m}}{1-\frac{s_g}{t}}- \\ -(m+2n)s_g^mt^{2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}}arms^{2m}t^{n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}}- \\ -(m+4n)s_g^mt^{m+2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}}+arms^mt^{m+n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}}, \tag{25}$$

где $s_g=s_g^*$.

Покажем, что сумма последних трёх слагаемых в правой части (25) отрицательна. Рассмотрим случай $t < s_g^*$. Заметим, что

$$arms^{2m}t^{n-1} > arms^m t^{m+n-1},$$

для всех $s_g > t$, следовательно сумма последних трёх слагаемых (25) отрицательна.

Рассмотрим случай $t > s_g^*$. Здесь достаточно показать, что

$$(m+4n)s_g^m t^{m+2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}} > arms^m t^{m+n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}},$$

откуда следует, что достаточно доказать справедливость выражения

$$(m+4n)s_g^n - arm < 0. \tag{26}$$

Легко проверить, что (26) выполняется для $s_g = s_g^*$. Соответственно, сумма последних трёх слагаемых (25) отрицательна для каждого $0 \leqslant t \leqslant r_g^{1/n}$, и $s_g = s_g^*$. Возвращаясь к (25), нам остаётся показать, что когда $s_g = s_g^*$, то

$$g(t, s_g^*) < -2nt^{2m+2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}} + n(r_g - 2s_g^n)t^{2m+n-1}\frac{(1-\frac{s_g}{t})^{2m}}{1-\frac{s_g}{t}} =$$

$$= -(m+2n)s_g^m t^{2n-1}\frac{1-(\frac{s_g}{t})^n}{1-\frac{s_g}{t}} < 0.$$

Пусть

$$h(t, s_g) = -2t^{2m} - 2s_g^{2m} + (r_g - 2s_g^n)\frac{t^{2m}-s_g^{2m}}{t^n - s_g^n}, \tag{27}$$

тогда легко проверить, что $g(t, s_g) \leqslant \dfrac{n(t^n - s_g^n)}{(t - s_g)}h(t, s_g)$, поэтому достаточно показать, что $h(t, s_g) < 0$ для всех $0 \leqslant t \leqslant r_g^{1/n}$ и $s_g = s_g^*$.

Здесь нам потребуется следующая

Лемма 2. *Пусть* $k(t, s_g) = \dfrac{t^{2m}-s_g^{2m}}{t^n - s_g^n}$, *тогда* $\dfrac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) > 0$, *если* $(2m-n)(t - s_g) > 0$.

Доказательство. Можно легко проверить, что

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) = -\frac{2mt^{2m-1}}{(t^n - s_g^n)}\left[\frac{n}{2mt^{2m-n}}\frac{t^{2m}-s_g^{2m}}{t^n - s_g^n} - 1\right].$$

Используя обозначения теоремы 1

$$\frac{t^{2m}-s_g^{2m}}{t^n - s_g^n} = \frac{2m}{n}c^{2m-n}, \tag{28}$$

где $\min(t, s_g) \leqslant c \leqslant \max(t, s_g)$, получим

$$\frac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) = -\frac{2mt^{2m-1}}{(t^n - s_g^n)}\left[\left(\frac{c}{t}\right)^{2m-n} - 1\right].$$

Откуда следует, что условия леммы 2 выполняются. □

Используем лемму 2 для доказательства того, что $h(t, s_g) < 0$ для каждого $0 \leqslant t \leqslant r_g^{1/n}$ и $s_g = s_g^*$. Вначале заметим, что при (27)

$$h(t, s_g) \leqslant \left[(r_g - 2s_g^n)\frac{t^{2m} - s_g^{2m}}{t^n - s_g^n} - 2s_g^{2m}\right]. \tag{29}$$

Рассмотрим следующие четыре случая.

I. Пусть $2m - n < 0$ и $t < s_g^*$, тогда по лемме 2 получим, что $\dfrac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) > 0$. Теперь достаточно показать, что правая часть (29) отрицательна при $t = s_g^*$. Действительно, при $s_g = s_g^*$ имеет место

$$h(s_g, s_g) \leqslant \frac{2m}{n}(r_g - 2s_g^n)s_g^{2m-n} - 2s_g^{2m} = s_g^{2m}\left[\frac{2m}{n}\frac{(r_g - 2s_g^n)}{s_g^n} - 2\right].$$

Используя (19), остаётся показать, что

$$\frac{2m}{n}\frac{(2an - m)}{(m + 2n - an)} - 2 < 0, \tag{30}$$

выполняется для всех m и n таких, что $2m - n < 0$. Но здесь достаточно показать, что это справедливо для $a = 1$, так как правая часть (30) возрастает по a. Последнее неравенство выполняется, когда $m^2 + n^2 > mn$. Очевидно, это справедливо для всех $m, n > 0$; откуда следует, что функция $h(t, s_g^*)$ отрицательна при $t < s_g^*$.

II. Пусть $2m - n > 0$ и $t < s_g^*$, тогда по лемме 2 получим, что $\dfrac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) < 0$. Таким образом, остаётся показать, что правая часть (29) отрицательна при $t = 0$. Действительно для $s_g = s_g^*$ имеет место

$$h(0, s_g) \leqslant (r_g - 2s_g^n)s_g^{2m-n} - 2s_g^{2m} < s_g^{2m}\left[\frac{(r_g - 2s_g^n)}{s_g^n} - 2\right]. \tag{31}$$

Правая часть (31) отрицательна для $s_g = s_g^*$, если $\dfrac{2an - m}{m + 2n - an} - 2 < 0$ для всех m и n таких, что $2m - n > 0$, а это верно для $a = 1$ и всех $m, n > 0$.

III. Пусть $2m - n < 0$ и $t > s_g^*$, тогда в силу $\dfrac{\partial k}{\partial t}(t, s_g) < 0$ нужно показать, что правая часть (29) отрицательна для $t = s_g^*$. Для $s_g = s_g^*$ будем иметь

$$h(s_g, s_g) \leqslant \frac{2m}{n}(r_g - 2s_g^n)s_g^{2m-n} - 2s_g^{2m} = s_g^{2m}\left[\frac{2m}{n}\frac{(r_g - 2s_g^n)}{s_g^n} - 2\right].$$

Отрицательность этого выражения доказана в случае **I.**

IV. Пусть $2m - n > 0$ и $t > s_g^*$, тогда, используя (27), получим

$$h(t, s_g) \leqslant \left[(r_g - 2s_g^n)\frac{t^{2m} - s_g^{2m}}{t^n - s_g^n} 2t^{2m}\right]. \tag{32}$$

Из (28) следует, что для всех $s_g < t$ существует такое c, для которого при $s_g \leqslant c \leqslant t$ имеем

$$\frac{t^{2m} - s_g^{2m}}{t^n - s_g^n} = \frac{2m}{n}c^{2m-n}. \tag{33}$$

Если $2m - n > 0$, то c^{2m-n} возрастает по c, поэтому при $s_g < t$ имеем $c^{2m-n} < t^{2m-n} < \dfrac{t^{2m}}{s_g^n}$. Тогда из (32) и (33) получим

$$h(t, s_g) \leqslant (r_g - 2s_g^n)\frac{2m}{n} t^{2m} s_g^{-n} - 2s_g^{2m} = t^{2m}\left[\frac{2m}{n}\frac{(r_g - 2s_g^n)}{s_g^n} - 2\right]. \qquad (34)$$

Правая часть (34) отрицательна, когда $\dfrac{2m}{n}\dfrac{(r_g - 2s_g^n)}{s_g^n} - 2 < 0$ для $s_g = s_g^*$. Для случае **I.** было показано, что это условие выполняется. □

По лемме 1 и (20) следует, что $P(t, s_g^*) > 0$ при $0 \leqslant t \leqslant s_g^*$ и $P(t, s_g^*) < 0$ при $s_g^* \leqslant t \leqslant r_g^{1/n}$. Отсюда следует, что $t = s_g^*$ единственное значение, для которого достигается максимум функции $\Pi_i(t, s_g^*)$, а это значит, что α^* — единственное значение, при котором достигается максимум функции $\Pi_i(\alpha, \beta^*)$.

Теорема 1 доказана. □

Из теоремы 1 следует, что ожидаемые доли рынка компаний $TELC_i$ и $TELC_j$ равны между собой $m_{gi_*} = m_{gj_*} = 1/M$, а равновесный спрос абонентов на услуги компании $TELC_i$ $(i \in \{1, \dots, M\})$

$$D^* = D_{gi}^*(p_{gi_*}) = D_{gj}^*(p_{gj_*}, p_{gi_*}) = \frac{Nr_g(\tau - a + 2)}{4s_g(\tau + 4)}. \qquad (35)$$

Главным результатом теоремы 1 является то, что на олигопольном рынке телекоммуникаций компании, используя ОППТД, могут найти в чистых стратегиях равновесные тарифы p_{gi}^* $(i \in \{1, \dots, M\})$ для абонентов. Необходимо отметить, что равновесные тарифы p_{gi}^* изменяются в зависимости от величины параметра τ, чем больше параметр τ, тем выше конкуренция между компаниями и, следовательно, тем ниже тарифы. Помимо этого, тарифы линейно возрастают при увеличении параметра r_g в функции спроса на сервис $g \in \{1, \dots, G\}$. Также тарифы p_{gi}^* $(i \in \{1, \dots, M\})$ возрастают с ростом коэффициента пропорциональности a, который может рассматриваться как предельная стоимость услуг, например телефонных звонков, которые требуют взаимодействия с сетью другой компании. Такими образом, чем больше значение параметра a, тем выше тариф для абонентов за услуги компании.

Значение параметра a компании задают на первом этапе переговоров по поводу ОППТД. Но необходимо отметить, что переговоры между компаниями могут привести к любому значению параметра a из $[0, 1]$ при условии, что прибыль каждой компании будет неотрицательна для такого a. Этот факт является следствием того, что максимизировать прибыль по параметру a каждой компании в отдельности невозможно.

Если компании могут вступить в ценовой сговор и пойти по пути максимизации совместной прибыль $\Pi_{gT} = \Pi_{g1} + \ldots + \Pi_{gM}$ при разделе рынка на равные части между собой $m_{gi}^* = m_{gj}^* = 1/M$. Можно показать, что совместная прибыль Π_{gT} имеет вид:

$$\Pi_{gT} = \sum_{i=1}^{M} \Pi_{gi} = \frac{NM}{2s_g}\frac{(\tau + 2 - a)(2 + a)r_g^2}{(\tau + 4)^2} - 2MF. \qquad (36)$$

Максимум совместной прибыли Π_{gT} достигается при значении параметра $a^* = \frac{\tau}{2}$, но при этом необходимо гарантировать, чтобы $a^* \leqslant 1$. Отсюда следует, что компании должны выбрать параметр $a^* = \min(\dfrac{\tau}{2}, 1)$ при условии положительности совместной прибыли. Таким образом, если по параметру a максимизировать совместную прибыль, то

$$a^* = \begin{cases} 1, & \tau > 2, \\ \dfrac{\tau}{2}, & \tau \leqslant 2, \end{cases} \tag{37}$$

и тогда равновесные тарифы

$$p^*_{gi} = p^*_{gj} = \begin{cases} \dfrac{3r_g}{\tau + 4}, & \tau > 2, \\ \dfrac{r_g}{2}, & \tau \leqslant 2, \end{cases} \tag{38}$$

спрос абонентов на услуги компании $TELC_i$ ($i \in \{1, \ldots, M\}$)

$$D^* = D^*_i(p_{gi_*}) = \begin{cases} \dfrac{Nr_g(\tau + 1)}{4s_g(\tau + 4)}, & \tau > 2, \\ \dfrac{Nr_g}{8s_g}, & \tau \leqslant 2. \end{cases} \tag{39}$$

Таким образом, если параметр $\tau > 2$, то равновесное значение $a^* = 1$, тогда межсетевой тариф между компаниями совпадает с тарифом для абонентов, и компании выступают в этом случае как простые абоненты по отношению друг к другу. Если же параметр $\tau \leqslant 2$, то межсетевой тариф между компаниями будет $\frac{\tau}{2}$, а он меньше чем тариф для абонентов.

При государственном регулировании телекоммуникационной отрасли в случае олигополии имеется возможность найти такое значение параметра a, чтобы максимизировать общественное благо $SS = \Pi_{gT} + CS$ (сумма совместной прибыли компаний Π_{gT} и излишков потребителей (абонентов) CS) при условии, что прибыль каждой компании будет неотрицательна для такого значения a.

Можно показать, что CS имеет вид:

$$CS = \frac{N}{4s_g}(r_g - p_{gi}*)^2,$$

а общественное благо SS при равновесных тарифах p^*_{gi} и p^*_{gj} из теоремы 1 можно записать таким образом:

$$SS = \frac{NMr_g^2}{4s_g(\tau + 4)^2}(\tau + 2 - a)(\tau + 6 + a) - 2MF.$$

Эта функция монотонно возрастает при уменьшении параметра a при $0 \leqslant a \leqslant 1$, следовательно общественное благо SS достигает максимального значения при $a^* = 0$, но при этом прибыль каждой компании должна быть неотрицательна для такого значения a.

Можно заметить, что если $a^* = 0$, то равновесные тарифы по теореме 1 составят $p^*_{gi} = p^*_{gj} = \dfrac{2r_g}{\tau + 4}$, но тогда возможно оценить число абонентов N, при котором прибыли компаний будут положительными

$$N \geqslant \frac{(\tau + 4)^2 s_g}{(\tau + 2)r_g^2} MF.$$

Отсюда следует, что фиксированные затраты компаний могут не покрываться при больших значениях параметра τ, а это значит, что для регулируемой таким образом отрасли может существовать опасность жизнеспособности, которая может быть обеспечена путём предоставления государственных дотаций телекоммуникационным компаниям.

5. Заключение

В этой статье была построена экономико-математическая модель рынка телекоммуникаций в случае олигополии, а также проведён анализ равновесных тарифов на телекоммуникационные услуги для этого типа рынка и исследованы возможные методы государственного регулирования такой олигополии.

Наиболее важный результат данной работы можно свести к тому, что при условии соблюдения компаниями ОППТД равновесные тарифы на услуги всегда существуют. Прикладное значение модели сводится к тому, что применение телекоммуникационными компаниями ОППТД не требует детальной информации рынке телекоммуникаций, так как число параметров модели сведено к минимуму. Эта модель оказалась эффективной при анализе динамики телекоммуникационного рынка, так как позволяет компаниям гибко реагировать на внешние изменения, что даёт возможность своевременно менять стратегию. Также предложенная модель может служить средством для анализа наличия сговора между компаниями на телекоммуникационном рынке, а рассмотренный метод регулирования рынка может обеспечить предотвращение подобных случаев.

Литература

1. *Armstrong M.* Network Interconnection // The Economic Journal. — 1998. — Vol. 108. — Pp. 545–564.
2. *Carter M., Wright J.* Interconnection in Network Industries // Review of Industrial Organization. — 1999. — Vol. 14. — Pp. 1–25.
3. *Carter M., Wright J.* Asymmetric Network Interconnection // Review of Industrial Organization. — 2003. — Vol. 22. — Pp. 27–46.
4. *Dessein W.* Network Competition in Nonlinear Pricing // Rand Journal of Economics. — 2003. — Vol. 34. — Pp. 593–611.
5. *Dessein W.* Network Competition with Heterogeneous Customers and Calling Patterns // Information Economics and Policy. — 2004. — Vol. 16. — Pp. 323–345.
6. *Doganoglu T., Tauman Y.* Network Competition and Access ChargeRules // The Manchester School. — 2002. — Vol. 70. — Pp. 16–35.
7. *Hahn J.-H.* Network Competition and Interconnection with Heterogeneous Subscribers // International Journal of Industrial Organization. — 2004. — Vol. 22. — Pp. 611–631.
8. *Laffont J.-J., Tirole J.* Access Pricing and Competition // European Economic Review. — 1994. — Vol. 38. — P. 1673.
9. *Laffont J.-J., Rey P., Tirole J.* Network Competition I: Overview and Nondiscriminatory Pricing // The Rand Journal of Economics. — 1998. — Vol. 29. — Pp. 1–37.
10. *Laffont J.-J., Rey P., Tirole J.* Network Competition II: Price Discrimination // The Rand Journal of Economics. — 1998. — Vol. 29. — Pp. 38–56.
11. *Laffont J.-J., Tirole J.* Internet Interconnection and the Off-Net-Cost Pricing Principle // Rand Journal of Economics. — 2003. — Vol. 34. — Pp. 73–95.
12. *Laffont J.-J., Tirole J.* Receiver-Pays Principle // Rand Journal of Economics. — 2004. — Vol. 35. — Pp. 85–110.
13. Построение экономико-математической модели рынка телекоммуникаций в случае дуополии / С. А. Васильев, Д. Г. Васильева, М. Э. Костенко и др. // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2009. — Т. 3. — С. 57–67. [Postroenie ehkonomiko-matematicheskoyj modeli rihnka telekommunikaciyj v sluchae duopolii / S. A. Vasiljev, D. G. Vasiljeva, M. Eh. Kostenko и др. // Vestnik RUDN. Seriya «Matematika. Informatika. Fizika». — 2009. — T. 3. — S. 57–67.]

UDC 330.4

Economics and Mathematical Modeling of Oligopoly Telecommunication Market

S. A. Vasilyev, L. A. Sevastianov, D. A. Urusova

Telecommunication Systems Department
Peoples Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

This paper presents a model of M competing telecommunication companies. The telecommunication networks of companies have different attributes which assumed fix and the consumers have idiosyncratic tastes for these attributes. The networks are mandated to interconnect and the access charges are determined by companies cooperatively. M telecommunication network companies are engaged in a price competition to attract consumers. Each consumer selects a network and determines the consumption of the telecommunication services. The regulation policy of the telecommunication market is studied for this model.

Key words and phrases: mathematical modeling, telecommunications, pricing, market equilibrium, state regulation.