УДК 514.174.5

О размерностях контрпримеров к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса

Л. Л. Иванов

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
улица Миклухо-Маклая, 6, Москва, 117198, Россия

В данной статье воспроизведены конструкции различных контрпримеров к гипотезе Борсука, которые представляют собой множества, лежащие на сфере малого радиуса. В работе отражено, как зависит размерность контрпримера от радиуса сферы, на которой он построен.

Ключевые слова: гипотеза Борсука.

1. Введение

Настоящая работа посвящена классической проблеме Борсука в комбинаторной геометрии. В 1933 году в своей работе [1] Борсук сформулировал гипотезу о том, что всякое множество конечного ненулевого диаметра в пространстве $\mathbb{R}^d$ может быть разбито на $d+1$ часть меньшего диаметра. Впоследствии гипотеза была доказана при $d \leqslant 3$ (см. [2, 3]), а при $d \geqslant 298$ были найдены контрпримеры (см. [3, 4]). Отметим, что гипотеза была опровергнута лишь спустя 60 лет после её постановки. Подробности истории возникновения и решения задачи Борсука можно найти в книгах [5–8] и статьях [2, 3, 9–11].

Числом Борсука $f(d)$ назовём минимальное количество частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное множество диаметра 1 в пространстве $\mathbb{R}^d$ (величина диаметра исходного множества в данном случае не влияет на число Борсука, поэтому мы принимаем её равной 1). В этих терминах в гипотезе Борсука утверждается, что $f(d) = d + 1$. Как было указано выше, это равенство доказано только при $d \leqslant 3$, а при $d \geqslant 298$ выполнено неравенство $f(d) > d + 1$. Также *числом Борсука множества* будем называть то минимальное количество частей, которое необходимо непосредственно для правильного разбиения этого множества.

Известны асимптотические оценки для величины $f(d)$:

$$(1,2255... + o(1))^{\sqrt{d}} \leqslant f(d) \leqslant (1,224... + o(1))^d.$$

Подробнее про нижнюю оценку см. [12], про верхнюю см. [13].

Практически все конструкции контрпримеров к гипотезе Борсука, которые были получены до настоящего времени, представляют собой конечные множества $(0,1)$- или $(-1,0,1)$-векторов и лежат на сферах некоторого радиуса. При соответствующей нормировке можно добиться того, чтобы диаметр каждого множества был равен 1. Радиусы соответствующих сфер при этом станут асимптотически равными $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Известно также, что всякое множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^d$ покрывается шаром радиуса $\sqrt{\dfrac{d}{2d+2}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (см. [14]). Таким образом, существующие контрпримеры представляют собой множества, имеющие максимально большой радиус шаров, в которые их можно поместить.

Однако условие максимальности радиуса не является обязательным. В работе [15] было доказано, что для любого радиуса $r > \sqrt{\dfrac{3}{8}}$ существует контрпример к гипотезе Борсука, лежащий на сфере радиуса r. Более того, недавно появилась работа, в которой доказано то же самое для $r > \dfrac{1}{2}$, но эта работа ещё не опубликована.

Ввиду сказанного выше, осмысленно ввести следующую величину. *Числом Борсука $f_r(d)$ для радиуса r* назовём минимальное количество частей меньшего диаметра, на которые разбивается произвольное множество диаметра 1 в $\mathbb{R}^d$, лежащее на сфере радиуса r. В новых терминах результат работы [15] состоит в том, что для любого $r > \sqrt{\dfrac{3}{8}}$ существует такое d_0, что для всех $d \geqslant d_0$ выполнено $f_r(d) > d + 1$. Это разрешает вопрос о существовании контрпримеров к гипотезе Борсука, лежащих на сфере любого радиуса $r \in \left(\sqrt{\dfrac{3}{8}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Однако в работе [15] не получена явная зависимость величины d_0 от r. Основная цель данной работы состоит в отыскании оценок для минимальной размерности контрпримера в зависимости от величины радиуса сферы, на которой он лежит.

2. Формулировки

Ниже мы приводим список результатов этой статьи в табличной форме (табл. 1, 2). В первой колонке табл. 1, 2 указан радиус сферы r, на которой лежит конструкция контрпримера. Во второй колонке указывается минимальная размерность, в которой строится контрпример в данной работе. В последней колонке указывается разница между нижней оценкой числа Борсука $f_r(d)$, которую мы получили, и размерностью d. В трёх промежуточных колонках также указываются некоторые вспомогательные величины n, a и p. Эти параметры будут участвовать при доказательстве оценок, мы приводим их здесь только для того, чтобы не выписывать таблицу два раза. Ввиду определённого роста размерности конструкций, при стремлении радиуса к $\sqrt{\dfrac{3}{8}}$, считаем уместным привести здесь только часть результатов, в пределах размерности около миллиона.

Теорема 1. *При всех $r \geqslant ...$ и всех $d \geqslant ...$ выполнено неравенство $f_r(d) - d \geqslant ... > 1$*[1].

Ниже мы приводим схематичное изображение графика зависимости размерности построенного нами контрпримера от радиуса сферы, на которой он лежит (рис. 1).

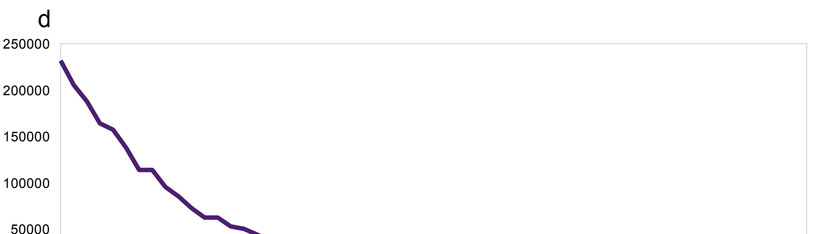

Рис. 1. **Зависимость размерности контрпримера от радиуса**

[1]Под многоточием следует подразумевать соответствующее число в табл. 1.

Таблица 1

Результаты для $r \geqslant 0,67$

r	d	n	a	p	$f_r(d) - d$
0.707106	561	36	0	9	197
0.704502	1830	60	8	17	5604
0.700876	2080	64	12	19	2327
0.698671	2926	76	16	23	5363
0.695221	3240	80	20	25	2221
0.691832	3570	84	24	27	183
0.690955	4656	96	28	31	2907
0.68773	6328	112	36	37	4807
0.68743	7750	124	40	41	14925
0.685234	8256	128	44	43	8758
0.681118	9316	136	52	47	780
0.679633	11628	152	60	53	4698
0.678422	14196	168	68	59	12443
0.676902	14878	172	72	61	6604
0.676042	17766	188	80	67	17798
0.673439	19306	196	88	71	4820
0.672208	20100	200	92	73	8
0.671799	23436	216	100	79	10461
0.670705	24310	220	104	81	4248

Таблица 2

Результаты для $r < 0,67$

r	d	n	a	p	$f_r(d) - d$
0.669448	28920	240	116	89	12119
0.668382	33930	260	128	97	25569
0.666674	36046	268	136	101	8170
0.665857	37128	272	140	103	1242
0.664417	43956	296	156	113	5802
0.663854	50086	316	168	121	24153
0.662546	52650	324	176	125	5166
0.660971	62128	352	196	137	6695
0.659627	72390	380	216	149	11082
0.659118	73920	384	220	151	1131
0.658004	85078	412	240	163	7794
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0.650972	205120	640	412	263	78119
0.650236	212878	652	424	269	17011
0.649928	231540	680	444	281	72584
0.6497	234270	684	448	283	50238
0.649645	250986	708	464	293	151852
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
0.640499	914628	1352	996	587	299276
0.640243	930930	1364	1008	593	154725
0.639992	947376	1376	1020	599	25456
0.639966	991936	1408	1044	613	269280
...					

3. Доказательство теоремы

В этом разделе приводится общее доказательство для всех оценок кроме первой из табл. 1, 2. Конструкция контрпримера для первой оценки получена в работе [16]. Она несколько отличается от остальных. Подробнее об этом сказано в последнем разделе этой статьи. Все остальные оценки получены одинаковым образом и зависят лишь от выбора различных значений параметров n, a и p.

3.1. Общий план доказательства

Для доказательства каждой оценки мы приводим соответствующую конструкцию некоторого множества Σ^* в пространстве размерности d. Множество Σ^* лежит на сфере радиуса r, имеет диаметр 1, и его нельзя разбить на $d+1$ часть меньшего диаметра. Такая конструкция является контрпримером к гипотезе Борсука. Как следствие, получается нижняя оценка числа Борсука $f_r(d)$, которая представлена в табл. 1, 2, из формулировки теоремы в виде разности $f_r(d) - d$.

Для построения множества Σ^* рассматривается вспомогательное множество Σ, которое представляет собой подмножество вершин куба $\{-1,1\}^n$. При некотором отображении $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^*$, которое мы определим специальным образом, образ множества Σ даёт искомое множество Σ^*.

При доказательстве оценки числа Борсука $f_r(d)$ будет получена верхняя оценка ω мощности произвольного подмножества Ω^* из Σ^*, не содержащего диаметра. Число Борсука будет оценено снизу величиной $\dfrac{|\Sigma^*|}{\omega}$. При этом будет использована лемма о мощности подмножества Ω из Σ, в котором установлены некоторые запреты. Эти запреты, а также конструкция множества Σ, позволяют применять линейно-алгебраический метод для получения оценки мощности Ω (см. [17]). Отображение $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^*$ будет взаимно однозначно, поэтому мощности множеств при переходе к их образам не изменятся. При этом наличие запретов в Ω будет равносильно отсутствию в Ω^* точек на расстоянии диаметра.

3.2. Конструкция множества Σ

В заданной размерности n определим множество Σ как подмножество вершин куба $\{-1,1\}^n$, удовлетворяющих условию $x_1 \cdot ... \cdot x_n = 1$ для координат вершин $x_1, ..., x_n$. Мощность множества Σ равна 2^{n-1}.

В дальнейшем мы будем работать с размерностью n, кратной 4. С учётом этого скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ из Σ кратно 4, или $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv 0 \pmod 4$.

3.3. Отображение $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^*$

Для каждого вектора $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ из множества Σ определим отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$ следующим образом:

$$\mathbf{x}^* = (x_1^2, x_1x_2, ..., x_1x_n, x_2x_1, ..., x_2x_n, ..., x_n^2, \alpha x_1, ..., \alpha x_n), \tag{1}$$

где α — некоторая положительная константа, которую мы будем задавать позже. Это отображение переводит множество Σ векторов из пространства размерности n в некоторое множество Σ^* векторов из пространства размерности n^2+n. Однако размерность самого множества Σ^* можно оценить величиной

$$d = C_n^2 + n, \tag{2}$$

Очевидно, что отображение $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^*$ является взаимно однозначным. Поэтому мощность множества Σ при отображении не меняется, т.е. $|\Sigma^*| = |\Sigma| = 2^{n-1}$.

Скалярное произведение между векторами из Σ^* можно выразить через скалярное произведение векторов из Σ:

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})((\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha^2). \tag{3}$$

Расстояние между элементами множества Σ^* будет максимальным (т.е. будет достигаться диаметр), если их скалярное произведение будет наименьшим. Это происходит в случае $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \dfrac{-\alpha^2}{2}$. В наших рассуждениях величина $\dfrac{-\alpha^2}{2}$ будет кратна 2, но не кратна 4. Поскольку в рассматриваемом множестве Σ значение $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ всегда кратно 4, то минимум $(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)$ в этом случае достигается при двух значениях

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-\alpha^2}{2} \pm 2. \tag{4}$$

Диаметр множества Σ^*, возведённый в квадрат, равен

$$\max(|\mathbf{x}^* - \mathbf{y}^*|^2) = 2n^2 + 2\alpha^2 n + \frac{\alpha^4}{2} - 8. \tag{5}$$

Для того, чтобы построенное множество Σ^* имело единичный диаметр, рассмотрим отображение $\mathbf{x} \leftrightarrow \lambda\mathbf{x}^*$ с коэффициентом сжатия λ:

$$\lambda^2 = \frac{1}{2n^2 + 2\alpha^2 n + \frac{\alpha^4}{2} - 8}. \tag{6}$$

Радиус сферы, описанной вокруг множества Σ^*, при отображении без сжатия, это радиус сферы, описанной вокруг параллелепипеда $\{-1, 1\}^{n^2} \times \{-\alpha, \alpha\}^n$, т.е.

$$r_{old}^2 = n^2 + \alpha^2 n. \tag{7}$$

Радиус сферы, описанной вокруг множества Σ^*, при отображении со сжатием:

$$r^2 = \lambda^2 r_{old}^2 = \frac{n^2 + \alpha^2 n}{2n^2 + 2\alpha^2 n + \frac{\alpha^4}{2} - 8}. \tag{8}$$

Отметим, что с ростом величины n значение радиуса r стремится к $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак, при помощи отображения $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^*$ с соответствующим коэффициентом сжатия, мы получили из множества Σ некоторое множество Σ^* единичного диаметра на сфере с радиусом, который определяется величинами n и α. В дальнейшем мы покажем, что при надлежащем выборе величин n и α это множество является контрпримером к гипотезе Борсука, т.е. его нельзя разбить на $d+1$ часть меньшего диаметра.

Прежде чем привести заключительные рассуждения, сформулируем лемму, которая нам понадобится.

3.4. Лемма о мощности подмножества Ω с запретами

Лемма 1. *Пусть величины n и a связаны соотношением $n \equiv -a (mod\ p)$, где p — нечётное простое или степень нечётного простого числа. Тогда мощность подмножества Ω из Σ, в котором для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ выполнено условие $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv -a, -a + 4 (mod\ p)$, может быть оценена следующим образом:*

$$|\Omega| \leqslant \omega = \sum_{i=0}^{p-2} C_n^i. \tag{9}$$

Доказательство. Представим число p в виде степени простого числа $p = q^\gamma$ (здесь γ может быть равно 1). Каждому вектору $\mathbf{c}$ из множества Σ сопоставим многочлен:

$$\mathbf{c} \leftrightarrow F_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{q^\beta} \prod_{i \in I} (i - (\mathbf{c}, \mathbf{x})), \tag{10}$$

где $I = \{0, ..., p-1\} \setminus (\{-a(\mathrm{mod}\ p)\} \cup \{-a + 4(\mathrm{mod}\ p)\})$, а β есть максимальная степень делителя q в произведении $(p-1)!$.

При таком определении многочленов можно установить их следующие свойства:

1. Многочлен $F_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$ принимает целые значения на Σ.
2. $F_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) \equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$ тогда и только тогда, когда $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) \not\equiv -a, -a+4(\mathrm{mod}\ p)$.
3. $F_{\mathbf{c}}(\mathbf{c}) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$, поскольку $(\mathbf{c}, \mathbf{c}) = n \equiv -a(\mathrm{mod}\ p)$ — см. п. 2.

Всякий многочлен на Σ можно представить в виде линейной комбинации мономов. Затем, последовательно применяя соотношение $x_i^2 = 1$, можно получить новый многочлен $\widetilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$ с сохранением всех свойств.

Имеет место связь множества $\Omega = \{\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_m\}$ и полиномов $\widetilde{F}_{\mathbf{c}_1}(\mathbf{x}), ..., \widetilde{F}_{\mathbf{c}_m}(\mathbf{x})$. А именно, если все векторы $\mathbf{c}_i$ различны и $(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) \not\equiv -a, -a+4(\mathrm{mod}\ p)$, то соответствующие векторам полиномы $\widetilde{F}_{\mathbf{c}_i}(\mathbf{x})$ будут независимы. Чтобы пояснить это, рассмотрим произвольную линейную комбинацию полиномов. Выберем некоторый коэффициент $\lambda_j \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$ и подставим в полиномы соответствующий аргумент $\mathbf{x} = \mathbf{c}_j$. Ввиду свойств 2 и 3, описанных выше, полученное выражение не может равняться нулю:

$$\lambda_1 \widetilde{F}_{\mathbf{c}_1}(\mathbf{c}_j) + ... + \lambda_m \widetilde{F}_{\mathbf{c}_m}(\mathbf{c}_j) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\ q). \tag{11}$$

Следовательно, мощность множества Ω при заданных условиях не может превосходить размерность пространства полиномов $\widetilde{F}_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$, т.е. величину $\sum_{i=0}^{p-2} C_n^i$, что и требовалось доказать. □

3.5. Завершение доказательства теоремы

Теперь мы представим все описанные этапы в виде доказательства искомых оценок.

Сначала мы возьмём некоторый радиус r из табл. 1, 2 результатов, а также соответствующие величины n, a и p, связанные равенством $n = 4p - a$. Числа n и a всегда кратны 4, число p — простое или степень простого.

Далее рассмотрим вспомогательное множество Σ, которое было определено выше.

Затем определим отображение $\mathbf{x} \leftrightarrow \mathbf{x}^*$ со сжатием, описанное выше (см. (1), (6)). При этом положим $\alpha = \sqrt{2a-4}$. И построим образ Σ^* множества Σ под действием этого отображения. Размерность множества Σ^* определяется величиной $d = C_n^2 + n$ (см. (2)). Можно проверить, что множество Σ^* будет лежать на сфере радиуса r (см. (8)). При этом диаметр между точками $\mathbf{x}^*$ и $\mathbf{y}^*$ достигается, когда соответствующие им векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ удовлетворяют условию $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a, -a+4$ (см. (4)). Отметим, что в заданных условиях на множество Σ и величины n, a и p,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -a, -a+4 \text{ равносильно } (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv -a, -a+4(\mathrm{mod}\ p). \tag{12}$$

Таким образом, любому подмножеству Ω^* из Σ^*, не содержащему диаметра, взаимно однозначно соответствует прообраз Ω, в котором $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \not\equiv -a, -a+4(\mathrm{mod}\ p)$ для всех пар $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Это позволяет нам применить здесь лемму и оценить мощность Ω^* величиной ω из (9).

Для завершения доказательства оценки достаточно рассмотреть неравенство:

$$f_r(d) \geqslant \frac{|\Sigma^*|}{\omega} \geqslant \frac{2^{n-1}}{\sum_{i=0}^{p-2} C_n^i}. \tag{13}$$

4. Дополнительные замечания

Результаты, представленные в данной статье, были получены при помощи компьютерной программы. В программе перебирались значения параметров n, a и p, и выбирались те, при которых получались оптимальные значения r, d и оценки для $f_r(d)$.

В работе [16] представлено доказательство первой оценки в приведённых нами таблицах результатов. Конструкция контрпримера, приводимая в этой работе, отличается дополнительным накладываемым условием на множество Σ: $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Это позволяет использовать при доказательстве оценки величину $a = 0$, что без дополнительного условия не имеет смысла, так как не выполнено свойство (12). В случае $a = 0$ также имеются отличия в некоторых частях рассуждений, и в частности, число Борсука в расчётах получается несколько меньше. Однако всё же это позволило получить контрпример к гипотезе Борсука в размерности 561.

В завершение мы хотели бы предположить, что для уменьшения размерностей в приведённых оценках следует более избирательно строить множество Σ, выбирая при этом его как подмножество куба $\{-1, 1\}^n$.

Литература

1. *Borsuk K.* Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre // Fundamenta Math. — 1933. — No 20. — Pp. 177–190.
2. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — № 56. — С. 107–146. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Problema Borsuka i khromaticheskie chisla metricheskikh prostranstv // Uspekhi mat. nauk. — 2001. — No 56. — S. 107–146.]
3. *Райгородский А. М.* Вокруг гипотезы Борсука // Итоги науки и техники. «Современная математика». — 2007. — № 23. — С. 147–164. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Vokrug gipotezih Borsuka // Itogi nauki i tekhniki. «Sovremennaya matematika». — 2007. — No 23. — S. 147–164.]
4. *Hinrichs A., Richter C.* New sets with large Borsuk numbers // Discrete Math. — 2003. — No 270. — Pp. 137—-147.
5. *В. Г. Болтянский И. Ц. Гохберг.* Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965. [*V. G. Boltyanskiyj I. C. Gokhberg.* Teoremih i zadachi kombinatornoyj geometrii. — M.: Nauka, 1965.]
6. *Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S.* Excursions into Combinatorial Geometry. — Springer, 1997.
7. *Brass P., Moser W., Pach J.* Research Problems in Discrete Geometry. — Springer, 2005.
8. *Райгородский А. М.* Проблема Борсука. — М.: МЦНМО, 2006. — 56 с. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Problema Borsuka. — M.: MCNMO, 2006. — 56 s.]
9. *Grünbaum B.* Borsuk's Problem and Related Questions // Proc. Symp. Pure Math. — 1963. — No 7. — Pp. 271–284.
10. *Raigorodskii A. M.* Three Lectures on the Borsuk Partition Problem // London Mathematical Society Lecture Note Series. — 2007. — No 347. — Pp. 202–248.
11. *Raigorodskii A. M.* The Borsuk Partition Problem: the Seventieth Anniversary // Mathematical Intelligencer. — 2004. — No 26. — Pp. 4–12.

12. *Райгородский А. М.* Об одной оценке в проблеме Борсука // Успехи мат. наук. — 1999. — № 54. — С. 185–186. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Ob odnoyj ocenke v probleme Borsuka // Uspekhi mat. nauk. — 1999. — No 54. — S. 185–186.]
13. *Schramm O.* Illuminating Sets of Constant Width // Mathematika. — 1988. — No 35. — Pp. 180–189.
14. *Л. Данцер Б. Грюнбаум В. Кли.* Теорема Хелли. — М.: Мир, 1968. [*L. Dancer B. Gryunbaum V. Kli.* Teorema Khelli. — M.: Mir, 1968.]
15. *Райгородский А. М.* Контрпримеры к гипотезе Борсука на сферах малого радиуса // Доклады Академии Наук. — 2010. — № 434. — С. 161–163. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Kontrprimerih k gipoteze Borsuka na sferakh malogo radiusa // Dokladih Akademii Nauk. — 2010. — No 434. — S. 161–163.]
16. *Райгородский А. М.* О размерности в проблеме Борсука // Успехи мат. наук. — 1997. — № 52. — С. 181–182. [*Rayjgorodskiyj A. M.* O razmernosti v probleme Borsuka // Uspekhi mat. nauk. — 1997. — No 52. — S. 181–182.]
17. *Райгородский А. М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007. [*Rayjgorodskiyj A. M.* Lineyjno-algebraicheskiyj metod v kombinatorike. — M.: MCNMO, 2007.]

UDC 514.174.5

On the Dimensions of Counterexamples to Borsuk's Conjecture On Spheres of Small Radii

L. L. Ivanov

Nonlinear Analysis and Optimization Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In this article there are constructions of counterexamples to the Borsuk's conjecture defined, which are sets laying on spheres of small radii. This work shows how the dimension of a counterexample depends on the radius of the covering sphere.

Key words and phrases: Borsuk's conjecture.