УДК 517.51

Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования. III

Альхалил Айман

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Маклухо-Маклая, д.6, Москва, 117198, Россия

В работе закончено, начатое в [1] и [2], изучение задачи о необходимых и достаточных условиях выполнения дискретных неравенств типа Харди с переменными пределами суммирования в пространствах последовательностей.

Ключевые слова: дискретные неравенства типа Харди.

1. Введение

Пусть $0 < p, q \leqslant +\infty$. В работе рассматривается задача о нахождении необходимых и достаточных условий выполнения дискретных неравенств типа Харди вида

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} v(n) \left(\sum_{a(n)\leqslant k\leqslant b(n)} f(k)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{n=1}^{\infty} f^p(n) w(n)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(n) \geqslant 0, \quad (1)$$

где $v(n), w(n)$ положительные числа и $a(n), b(n)$ возрастающие последовательности натуральных чисел.

Константу $C \geqslant 0$ в неравенстве (1) мы считаем выбранной наименьшей из возможных.

В статье [2] нами характеризовано дискретное неравенство (1) для случая $0 < p \leqslant q < \infty$.

Целью настоящей работы является характеризация неравенства (1) при $0 < q < p < +\infty$. Об истории вопроса об изучении дискретных неравенств Харди см. [1] и [2].

Мы используем ряд стандартных обозначений. Соотношения $A \ll B$ и $B \gg A$ означают $A \leqslant cB$ или $B \geqslant cA$ с константой c, зависящей только от p и q, $A \approx B$ равносильно $A \ll B \ll A$ или $A = cB$. Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел, χ_E суть характеристическая функция (индикатор) множества $E \subset \mathbb{N}$. Сопряжённый показатель p' определяется из уравнений $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, при $p \neq 1, p \neq \infty$, $p' = 1$ при $p = \infty$ и $p' = \infty$ при $p = 1$, а также мы полагаем $r = \dfrac{qp}{p-q}$ при $0 < q < p < \infty$. Знаки := и =: используются для определения новых величин, а также символ $\Box$ для отметки конца доказательства.

2. Блочно-диагональный метод

Определение. Пусть $U = \bigsqcup_k U_k$, $V = \bigsqcup_k V_k$ и $P = \sum_k P_k$, где $P_k : L^p(U_k) \to L^q(V_k)$. Тогда $Pf(i) = \sum_k \chi_{V_k}(i) P_k(\chi_{U_k} f)(i)$ называется блочно-диагональным оператором.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Статья поступила в редакцию 20 октября 2010 г.

Лемма 1. *Пусть* $U = \bigsqcup_k U_k$ *и* $V = \bigsqcup_k V_k$ *и* $P = \sum_k P_k$ *блочно-диагональный оператор, где* $P_k : L^p(U_k) \to L^q(V_k)$. *Тогда если* $0 < q < p < \infty$, *то*

$$\|P\|_{L^p(U)\to L^q(V)} = \left(\sum_k \|P_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{1/r}. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что левая часть в (2) не превосходит правой. Это следует из следующей цепочки (применено неравенства Гёльдера):

$$\|Pf\|^q_{L^q(V)} = \sum_k \|P_k(\chi_{U_k} f)\|^q_{L^q(V)} \leqslant \sum_k \|P_k\|^q_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \|\chi_{U_k} f\|^q_{L^p(U_k)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_k \|P_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{q/r} \left(\sum_k \|\chi_{U_k} f\|^p_{L^p(U_k)}\right)^{q/p} =$$
$$= \left(\sum_k \|P_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{q/r} \|f\|^q_{L^p(U)}.$$

Для доказательства обратного предположим, что $0 < \lambda < 1$ — произвольное фиксированное число. Тогда найдутся функции $f_k \in L^p(U_k)$ такие, что для всех k

$$\|f_k\|_{L^p(U_k)} = \|P_k\|^{r/p}_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}, \quad \lambda \|P_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \|f_k\|_{L^p(U_k)} \leqslant \|P_k f_k\|_{L^q(V_k)}.$$

Положим $f = \sum_k \chi_{U_k} f_k$, тогда

$$\lambda^q \sum_k \|P_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} = \lambda^q \sum_k \left(\|P_k\|_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)} \|f_k\|_{L^p(U_k)}\right)^q \leqslant$$
$$\leqslant \sum_k \|P_k f_k\|^q_{L^p(U_k)} = \|Pf\|^q_{L^q(V)} \leqslant \|P\|^q_{L^p(U)\to L^q(V)} \|f\|^q_{L^p(U)} =$$
$$= \|P\|^q_{L^p(U)\to L^q(V)} \left(\sum_k \|P_k\|^r_{L^p(U_k)\to L^q(V_k)}\right)^{q/p}$$

и неравенство $\geqslant$ в (2) следует при $\lambda \to 1$. □

Пусть $a(n)$ и $b(n)$ — две возрастающие последовательности, удовлетворяющие следующим условиям:

(i) $a(n)$ и $b(n)$ строго возрастают;
(ii) $a(1) = b(1) = 1$ и $a(n) < b(n)$ для любого $n > 1$. (3)

Для заданных последовательностей $a(n)$ и $b(n)$, удовлетворяющих (3), выберем последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ такие, что $n_1 = 2$ и при $n_k \leqslant n \leqslant n'_k$

$$n'_k : a(n'_k) \leqslant b(n) \leqslant b(n_k) < a(n'_k + 1); \quad n_{k+1} := n'_k + 1. \tag{4}$$

Разбивая $\mathbb{N}$ точками последовательности $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{n'_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, получаем представление оператора H вида

$$Hf(n) := \sum_{a(n)\leqslant i\leqslant b(n)} f(i), \tag{5}$$

в виде суммы $H = T + S$ блочно-диагональных операторов T и S таких, что

$$T = \sum_{k\in\mathbb{N}} T_k, \quad S = \sum_{k\in\mathbb{N}} S_k, \tag{6}$$

где

$$T_k f(n) := \sum_{i=a(n)}^{b(n_k)} f(i), \quad n \in [n_k, n'_k], \tag{7}$$

$$S_k f(n) := \sum_{i>b(n_k)}^{b(n)} f(i), \quad n \in (n_k, n'_k]. \tag{8}$$

3. Случай $0 < q < p < \infty$

В дальнейшем нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, *натуральные числа* $l, m, L \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, L \leqslant b(l)$, *где* $b : (l, m] \to (L, b(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{n>l}^{m} v(n) \left(\sum_{i>L}^{b(n)} f(i)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i>L}^{b(m)} f^p(i) w(i)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(i) \geqslant 0, \tag{9}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$B_{[l,m]} := \left(\sum_{n=L}^{b(m)} \left(\sum_{i=b^{-1}(n)}^{m} v(i)\right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{j>L}^{n} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx B_{[l,m]}$.

Лемма 3. *Пусть* $1 < q < p < \infty$, *натуральные числа* $l, m, M \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, a(m) \leqslant M$, *где* $a : [l, m] \to [a(l), a(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство*

$$\left(\sum_{n=l}^{m} v(n) \left(\sum_{i=a(n)}^{M} f(i)\right)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant C \left(\sum_{i=a(l)}^{M} f^p(i) w(i)\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{для всех } f(i) \geqslant slant 0, \tag{10}$$

выполнено тогда и только тогда, когда

$$B^*_{[l,m]} := \left(\sum_{n=a(l)}^{M} \left(\sum_{i=l}^{a^{-1}(n)} v(i)\right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{j=n}^{M} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx B^*_{[l,m]}$.

Лемма 4. *Пусть* $0 < q < p, 1 < p < +\infty$, *натуральные числа* $l, m, L \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, L \leqslant b(l)$, *где* $b : (l, m] \to (L, b(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство* (9) *выполнено тогда и только* *тогда, когда*

$$\mathcal{B}_{[l,m]} := \left(\sum_{n=l}^{m} \left(\sum_{k=n}^{m} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k>L}^{b(n)} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} v(n) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{B}_{[l,m]}$.

Лемма 5. *Пусть* $0 < q < p, 1 < p < +\infty$, *натуральные числа* $l, m, M \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, a(m) \leqslant M$, *где* $a : [l,m] \to [a(l), a(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство* (10) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathcal{B}^*_{[l,m]} := \left(\sum_{n=l}^{m} \left(\sum_{k=l}^{n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k=a(n)}^{M} w(k)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{p'}} v(n) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathcal{B}^*_{[l,m]}$.

Лемма 6. *Пусть* $0 < q < p \leqslant 1$, *натуральные числа* $l, m, L \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, L \leqslant b(l)$, *где* $b : (l,m] \to (L, b(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство* (9) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{B}_{[l,m]} := \left(\sum_{n=l}^{m} v(n) \left(\sum_{k=n}^{m} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \sup_{L \leqslant k \leqslant b(n)} w^{\frac{-r}{p}}(k) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathbf{B}_{[l,m]}$.

Лемма 7. *Пусть* $0 < q < p \leqslant 1$, *натуральные числа* $l, m, M \in \mathbb{N}$ *таковы, что* $l < m, a(m) \leqslant M$, *где* $a : [l,m] \to [a(l), a(m)] \subset \mathbb{N}$ *— строго возрастающая целочисленная функция. Тогда неравенство* (10) *выполнено тогда и только тогда, когда*

$$\mathbf{B}^*_{[l,m]} := \left(\sum_{n=l}^{m} v(n) \left(\sum_{k=l}^{n} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \sup_{a(n) \leqslant k \leqslant M} w^{\frac{-r}{p}}(k) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Более того, справедливо соотношение $C \approx \mathbf{B}^*_{[l,m]}$.

Доказательство. Леммы 2–7 следуют применением теорем 3–5 из [1] и теоремы 1 из [2]. □

Из лемм 2–7 вытекают следующие утверждения.

Следствие 1. При $1 < q < p < \infty$

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]} \to \ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \approx \left(\sum_{n=a(n_k)}^{a(n'_k)} \left(\sum_{i=n_k}^{a^{-1}(n)} v(i) \right)^{\frac{r}{q}} \left(\sum_{j=n}^{a(n'_k)} w(j)^{1-p'} \right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n) \right)^{\frac{1}{r}}. \tag{11}$$

Следствие 2. При $1 < q < p < \infty$

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} \approx \left(\sum_{n=b(n_k)}^{b(n'_k)}\left(\sum_{i=b^{-1}(n)}^{n'_k} v(i)\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{j>b(n_k)}^{n} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{12}$$

Следствие 3. При $0 < q < p, 1 < p < +\infty$

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \approx \left(\sum_{n=n_k}^{n'_k}\left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{k=a(n)}^{a(n'_k)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} v(n)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{13}$$

Следствие 4. При $0 < q < p, 1 < p < +\infty$

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} \approx \left(\sum_{n=n_k}^{n'_k}\left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{k>b(n_k)}^{b(n)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} v(n)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{14}$$

Следствие 5. При $0 < q < p \leqslant 1$

$$\|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} \approx \left(\sum_{n=n_k}^{n'_k} v(n)\left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\sup_{a(n)\leqslant k\leqslant a(n'_k)} w^{\frac{-r}{p}}(k)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{15}$$

Следствие 6. При $0 < q < p \leqslant 1$

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} \approx \left(\sum_{n=n_k}^{n'_k} v(n)\left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k)\right)^{\frac{r}{p}}\sup_{b(n_k)\leqslant k\leqslant b(n)} w^{\frac{-r}{p}}(k)\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{16}$$

Теорема 1. *Пусть $1 < q < p < +\infty$. Тогда*

$$\|H\|_{\ell^p\to\ell^q} \approx B := \left[\sum_k \left(B^r_{k,1} + B^r_{k,2}\right)\right]^{\frac{1}{r}} < +\infty, \tag{17}$$

где

$$B_{k,1} := \left(\sum_{n=a(n_k)}^{a(n'_k)}\left(\sum_{i=n_k}^{a^{-1}(n)} v(i)\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{j=n}^{a(n'_k)} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$B_{k,2} := \left(\sum_{n=b(n_k)}^{b(n'_k)}\left(\sum_{i=b^{-1}(n)}^{n'_k} v(i)\right)^{\frac{r}{q}}\left(\sum_{j>b(n_k)}^{n} w(j)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{q'}} w^{1-p'}(n)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Доказательство. Пусть $B < +\infty$ и ℓ^p обозначает пространство последовательностей, суммируемых с p-й степенью модуля. Обозначим

$$\|S_k\|_{\ell^p_{(n_k,n'_k]}\to\ell^q_{(b(n_k),b(n'_k)]}} := \|S_k\|,\ \|T_k\|_{\ell^p_{[n_k,n'_k]}\to\ell^q_{[a(n_k),b(n_k)]}} := \|T_k\|,\ \|H\|_{\ell^p\to\ell^q} := \|H\|,$$

где H оператор вида (5). Запишем оператор H в виде $H = T + S$, где T и S блочно-диагональные операторы, определённые в (6), (7) и (8). Соответственно, из (6), (7) и (8) следует, что

$$\|H\| = \|T + S\| \leqslant \|T\| + \|S\|. \tag{18}$$

Кроме того, мы имеем $Hf \geqslant Tf$ и $Hf \geqslant Sf$. Отсюда по определению нормы получим

$$\|H\| \geqslant \|T\|, \ \|H\| \geqslant \|S\|, \tag{19}$$

из (18) и (19) вытекает, что

$$\frac{1}{2}(\|T\| + \|S\|) \leqslant \|H\| \leqslant \|T\| + \|S\|. \tag{20}$$

Отсюда, применяя оценку (20) и лемму 1, находим

$$\|H\| \approx \|T\| + \|S\| \approx \left(\sum_k \|T_k\|^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_k \|S_k\|^r\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{21}$$

Нормы операторов T_k и S_k оцениваются в следствиях 1 и 2, откуда находим

$$\|T_k\| \approx B_{k,1}, \ \|S_k\| \approx B_{k,2}, \tag{22}$$

из (21) и (22) вытекает, что $\|H\| \approx B$. □

Аналогично доказываются теоремы 2 и 3, сформулированные ниже.

Теорема 2. *Пусть* $0 < q < p, 1 < p < +\infty$ *и* $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$\|H\| \approx \mathcal{B} := \left[\sum_k \left(\mathcal{B}_{k,1}^r + \mathcal{B}_{k,2}^r\right)\right]^{\frac{1}{r}} < \infty, \tag{23}$$

где

$$\mathcal{B}_{k,1} := \left(\sum_{n=n_k}^{n_k'} \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k=a(n)}^{a(n_k')} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} v(n)\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\mathcal{B}_{k,2} := \left(\sum_{n=n_k}^{n_k'} \left(\sum_{k=n}^{n_k'} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \left(\sum_{k>b(n_k)}^{b(n)} w(k)^{1-p'}\right)^{\frac{r}{p'}} v(n)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Теорема 3. *Пусть* $0 < q < p \leqslant 1, \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$\|H\| \approx \mathbf{B} := \left[\sum_k \left(\mathbf{B}_{k,1}^r + \mathbf{B}_{k,2}^r\right)\right]^{\frac{1}{r}} < \infty, \tag{24}$$

где

$$\mathbf{B}_{k,1} := \left(\sum_{n=n_k}^{n_k'} v(n) \left(\sum_{k=n_k}^{n} v(k)\right)^{\frac{r}{p}} \sup_{a(n)\leqslant k \leqslant a(n_k')} w^{\frac{-r}{p}}(k)\right)^{\frac{1}{r}},$$

$$\mathbf{B}_{k,2} := \left(\sum_{n=n_k}^{n'_k} v(n) \left(\sum_{k=n}^{n'_k} v(k) \right)^{\frac{r}{p}} \sup_{b(n_k)\leqslant k\leqslant b(n)} w^{\frac{-r}{p}}(k) \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Литература

1. *Альхалил А.* Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования I // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2010. — № 4. — С. 55–68.
2. *Альхалил А.* Дискретные неравенства типа Харди с переменными пределами суммирования II // Вестник РУДН. Серия «Математика. Информатика. Физика». — 2011. — № 1. — С. 5–13.

UDC 517.51

Discrete Inequalities of Hardy Type with Variable Limits of Summation. III

Alkhliel Aiman

Mathematical Analysis and Functiona Theory Department
Peoples friendship university of Russia
6, Miklukho Maklai str., 117198, Moscow, Russia

It is finished the study of the necessary and sufficient conditions of validity for discrete inequalities of Hardy type with variable limits of summation in the sequence spaces started in the papers [1] and [2].

Key words and phrases: discrete Hardy inequality.