УДК 517.925.5:519.216

О решении задачи восстановления с вырождающейся диффузией методом разделения

М. И. Тлеубергенов, Г. Т. Ибраева

Лаборатория динамических систем
Институт математики
Казахстан, 050010, Алматы, ул. Пушкина, 125

Методом разделения получены достаточные условия разрешимости задачи восстановления в классе стохастических дифференциальных систем Ито первого порядка (со случайными возмущениями из класса винеровских процессов и вырождающейся относительно части переменных диффузией) по заданным свойствам движения, когда управление входит в коэффициент сноса. В нелинейной и линейной постановках задачи определяется вид управляющих параметром, обеспечивающий достаточные условия существования у множества построенных уравнений заданного интегрального многообразия.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, стохастические уравнения, интегральное многообразие, функция, вероятность, вектор.

Введение

Основы теории и общие методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в [1–7] для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Так, в работе Еругина [1] строится множество ОДУ, которое имеет заданную интегральную кривую. Эта работа, впоследствии, оказалась основополагающей в становлении и развитии теории обратных задач динамики систем, описываемых ОДУ. В работах [2–7] изложены постановка, классификация обратных задач дифференциальных систем и их решение в классе ОДУ. Следует отметить, что один из общих методов решения обратных задач динамики в классе ОДУ метод квазиобращения предложен в работе [7], позволяющий получить необходимые и достаточные условия разрешимости. Но наряду с указанным методом там же предлагаются метод разделения и метод проектирования дающие, вообще говоря, лишь достаточные условия разрешимости обратных задач, но полезные для конкретных прикладных обратных задач.

В работах [8–10] обратные задачи динамики рассматриваются при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений из класса винеровских процессов и, в частности, методом квазиобращения решены:

1) **основная обратная задача динамики** — построение множества стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, обладающих заданным интегральным многообразием;
2) **задача восстановления уравнений движения** — построение множества управляющих параметров, входящих в заданную систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито, по заданному интегральному многообразию;
3) **задача замыкания уравнений движения** — построение множества замыкающих стохастических дифференциальных уравнений второго порядка типа Ито по заданной системе уравнений и заданному интегральному многообразию.

Статья поступила в редакцию 9 декабря 2010 г.

1. Стохастическая задача с управлением сносу

Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot{y} = f_1(y,z,v,w,t), \quad y \in R^{l_1}, \quad z \in R^{l_2}, \quad v \in R^{p_1}, \quad w \in R^{p_2}, \\ \dot{z} = f_2(y,z,v,w,t) + \sigma_1(y,z,v,w,t)\dot{\xi}, \quad \xi \in R^r, \\ \dot{v} = f_3(y,z,v,w,t) + L_1(y,z,v,w,t)u_1, \quad u_1 \in R^{k_1}, \quad u_2 \in R^{k_2}, \\ \dot{w} = f_2(y,z,v,w,t) + L_2(y,z,v,w,t)u_2 + \sigma_2(y,z,v,w,t)\dot{\xi}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $l_1 + l_2 + p_1 + p_2 = n$. Требуется определить по заданному интегральному многообразию

$$\Lambda(t): \quad \lambda(y,z,v,w,t) = 0, \quad \text{где} \quad \lambda = \lambda(y,z,v,w,t) \in C^{12121}_{yzvwt}, \lambda \in R^m \qquad (2)$$

вектор-функции $u_1(y,z,v,w,t) \in R^r$ и $u_1(y,z,v,w,t) \in R^r$, входящие в коэффициент сноса. Здесь C^{12121}_{yzvwt} обозначает множество функций $\gamma(y,z,v,w,t)$, непрерывно дифференцируемых по y, v и по t и дважды непрерывно дифференцируемых по z, w.

Предполагается, что f_1, f_2, f_3, f_4, σ_1, σ_2 принадлежат классу функций K-непрерывных по t и липшицевых по y, z, v и w в окрестности множества $\Lambda(t)$

$$U_h(\Lambda) = \{q = (y^T, z^T, v^T, w^T)^T : \rho(q, \Lambda(t)) < h, \quad h > 0\}. \qquad (3)$$

Поставленная задача:

1) в случае отсутствия случайных возмущений ($\sigma \equiv 0$) достаточно полно исследована в работах [2–7];
2) обобщает рассмотренную в [9] задачу построения стохастических дифференциальных уравнений Ито второго порядка

$$\ddot{x} = f(x,\dot{x},t) + D(x,\dot{x},t)u + \sigma(x,\dot{x},t)\dot{\xi} \qquad (4)$$

по заданному множеству

$$\Lambda(t): \quad \lambda(x,\dot{x},t) = 0, \text{ где } \lambda \in R^m, \ \lambda = \lambda(x,\dot{x},t) \in C^{121}_{x\dot{x}t} \qquad (5)$$

так, чтобы множество (5) было интегральным многообразием уравнения (4);
3) иным методом, а именно, методом квазиобращения решена в [11].

Для решения поставленной задачи построения системы уравнений (1) по заданному интегральному многообразию (2) по правилу Ито стохастического дифференцирования сложной функции [12, с. 204] составляется уравнение возмущённого движения

$$\dot{\lambda} = \frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}f_3 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}f_4 + \frac{\partial\lambda}{\partial v}L_1u_1 + \frac{\partial\lambda}{\partial w}L_2u_2 + \\ + S_1 + S_2 + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1\dot{\xi} + \frac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2\dot{\xi}, \qquad (6)$$

где $S_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z}\sigma_1\sigma_1^T\right]$, $S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial w\partial w} : \sigma_2\sigma_2^T\right]$, а под $\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z} : D\right]$, следуя [12], понимается вектор, элементами которого служат следы произведений матриц вторых производных соответствующих элементов $\lambda_\mu(y,z,v,w,t)$, $\mu = \overline{1,m}$ вектора

$\lambda(y, z, v, w, t)$ по компонентам z на матрицу D:

$$\left[\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial z} : D\right] = \begin{bmatrix} tr\left(\dfrac{\partial^2\lambda_1}{\partial z\partial z}D\right) \\ \vdots \\ tr\left(\dfrac{\partial^2\lambda_m}{\partial z\partial z}D\right) \end{bmatrix},$$

и вводятся произвольные типа Н.П. Еругина [1] m-мерная вектор-функция A и $(m\times r)$-матрица B, обладающие свойством $A(0; y, z, v, w, t) \equiv 0, B(0; y, z, v, w, t) \equiv$ $\equiv 0$, и имеет место равенство

$$\dot\lambda = A(\lambda; y, z, v, w, t) + B(\lambda; y, z, v, w, t)\dot\xi. \tag{7}$$

Сравнивая уравнения (6) и (7), приходим к соотношениям

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}f_3 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}f_4 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}L_1u_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}L_2u_2 + S_1 + S_2 = A, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 = B, \end{cases}$$

которые перепишем в следующем виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}L_1u_1 + Gu_2 = A - \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}f_3 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}f_4 + S_1 + S_2\right), \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}\sigma_2 = B, \end{cases} \tag{8}$$

где через D обозначена $(m \times k_2)$ матрица $D = \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}L_2$.

Из данных соотношений надо найти u_1, u_2, σ_1, σ_2. Для этого используем метод разделения [7, с. 21] искомой системы. Следуя методу разделения, предварительно матрицы D, $\dfrac{\partial\lambda}{\partial w}$, σ_2 и вектор-функцию u_2 представим в виде:

$$D = (D', D''), \quad \frac{\partial\lambda}{\partial w} = (G', G''), \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} \sigma_2' \\ \sigma_2'' \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_2' \\ u_2'' \end{pmatrix},$$

где D' есть квадратная матрица размерности $(m \times m)$, D'' — $(m \times (k_2 - m))$-матрица, G'есть квадратная матрица размерности $(m\times m)$, G'' — $(m\times(p_2-m))$-матрица, σ_2' — $(m\times r)$-матрица, σ_2'' — $((p_2-m)\times r)$-матрица, u_2' — m-вектор, u_2'' — $(k_2 - m)$-вектор.

Тогда систему (8) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}L_1u_1 + D'u_2' + D''u_2'' = N, \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 + G'\sigma_2' + G''\sigma_2'' = B, \end{cases} \tag{9}$$

где $N = A - \left(\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} + \dfrac{\partial\lambda}{\partial y}f_1 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial z}f_2 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial v}f_3 + \dfrac{\partial\lambda}{\partial w}f_4 + S_1 + S_2\right)$.

Предположим, что det $D' \neq 0$ и det $G' \neq 0$, тогда решение системы (9) можно представить в виде

$$u_2' = (D')^{-1}\left(N - \frac{\partial\lambda}{\partial v}L_1 u_1 - D'' u_2''\right), \tag{10}$$

$$\sigma_2' = (G')^{-1}\left(B - \frac{\partial\lambda}{\partial z}\sigma_1 - G''\sigma_2''\right), \tag{11}$$

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы множество (2) было интегральным многообразием системы дифференциальных уравнений (1) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *квадратные подматрицы D', G' матриц D, G были невырожденными* $\det D' \neq 0$, $\det G' \neq 0$*;*
2) *при произвольно заданных u_1, $u_2'' \in K$ первые m координат u_2' вектора u_2 имели вид (10);*
3) *при произвольно заданных σ_1, $\sigma_2'' \in K$ подматрица σ_2' матрицы σ_2 имела вид* (11).

2. Линейный случай стохастической задачи с управлением по сносу

По заданному линейному по сносу стохастическому дифференциальному уравнению первого порядка типа Ито

$$\begin{cases} \dot y = D_1(t)y + D_2(t)z + D_3(t)v + D_4(t)w + d(t), \\ \dot z = C_1(t)y + C_2(t)z + C_3(t)v + C_4(t)w + c(t) + \sigma_1(t)\dot\xi, \\ \dot v = F_1(t)y + F_2(t)z + F_3(t)v + F_4(t)w + F_5(t)u_1 + f(t), \\ \dot w = G_1(t)y + G_2(t)z + G_3(t)v + G_4(t)w + G_5(t)u_2 + g(t) + \sigma_2(t)\dot\xi \end{cases} \tag{12}$$

требуется определить $u_1 = u(y,z,v,w,t)$ и $u_2 = u(y,z,v,w,t) \in R^r$ — вектор-функции управления по заданному линейному интегральному многообразию

$$\Lambda(t) : \lambda \equiv H_1(t)y + H_2(t)z + H_3(t)v + H_4(t)w + h(t) = 0. \tag{13}$$

В рассматриваемой задаче уравнение возмущённого движения имеет вид

$$\begin{aligned} \dot\lambda = E_1(t)y + E_2(t)z + E_3(t)v + E_4(t)w + E_5(t) + \\ + H_3(t)F_5(t)u_1 + H_4(t)G_5(t)u_2 + H_2(t)\sigma_1\dot\xi + H_4(t)\sigma_2\dot\xi, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered} E_1(t) = H_1(t)D_1(t) + H_2(t)C_1(t) + H_3(t)F_1(t) + H_4(t)G_1(t) + \dot H_1(t), \\ E_2(t) = H_1(t)D_2(t) + H_2(t)C_2(t) + H_3(t)F_2(t) + H_4(t)G_2(t) + \dot H_2(t), \\ E_3(t) = H_1(t)D_3(t) + H_2(t)C_3(t) + H_3(t)F_3(t) + H_4(t)G_4(t) + \dot H_3(t), \\ E_4(t) = H_1(t)D_4(t) + H_2(t)C_4(t) + H_3(t)F_4(t) + H_4(t)G_4(t) + \dot H_4(t), \\ E_5(t) = H_1(t)d(t) + H_2(t)c(t) + H_3(t)f(t) + H_4(t)g(t) + \dot h(t), \end{gathered}$$

а, с другой стороны, с помощью произвольной вектор-функции Еругина $A = A_1(t)\lambda$ и матрицы-функции B_1 со свойством $B_1(0,y,z,v,w,t) \equiv 0$ имеем

$$\dot{\lambda} = A_1(t)\lambda + B_1(\lambda,y,z,v,w,t)\dot{\xi}. \tag{15}$$

Из соотношений (14) и (15) следуют равенства

$$\begin{cases} H_3(t)F_5(t)u_1 + H_4(t)G_5(t)u_2 = (A_1H_1 - E_1)\,y + (A_1H_2 - E_2)\,z + \\ \qquad + (A_1H_3 - E_3)\,v + (A_1H_4 - E_4)\,w + (A_1h(t) - E_5)\,, \\ H_2\sigma_1 + H_4\sigma_2 = B. \end{cases} \tag{16}$$

Для применения метода разделения [3, с. 21] предварительно введём обозначения $M(t) = H_4G_5$, $\widetilde{N}(t) = (A_1H_1 - E_1)\,y + (A_1H_2 - E_2)\,z + (A_1H_3 - E_3)\,v + (A_1H_4 - E_4)\,w + + (A_1h(t) - E_5)$ и, далее, систему (16) представим в виде

$$\begin{cases} M'u_2' = \widetilde{N} - H_3(t)F_5(t)u_1 - M''u_2'', \\ H_4'\sigma_2' = B - H_2\sigma_1 - H_4''\sigma_2''. \end{cases} \tag{17}$$

где матрицы M, H_4, σ_2 и вектор-функция $u_2(t)$ разбиты на соответствующие матрицы и вектора:

$$M = (M', M''), \quad H_4 = (H_4', H_4''), \quad \sigma_2 = (\sigma_2', \sigma_2''), \quad u_2 = \begin{pmatrix} u_2' \\ u_2'' \end{pmatrix},$$

где M' — матрица размерности $(m \times m)$, M'' — $(m \times (k_2 - m))$, H_4' — $(m \times m)$, H_4'' — $(m \times (p_2 - m))$; σ_2' — $(m \times r)$, σ_2'' — $((p_2 - m) \times r)$; u_2' — m-вектор-функция, u_2''— $(r_2 - m)$-вектор-функция.

Предположим, что $\det\, M' \neq 0$ и $\det\, H_4' \neq 0$, тогда из (17) следуют соотношения

$$u_2' = \big(M'\big)^{-1}\big(\widetilde{N}(t) - H_3(t)F_5(t)u_1 - M''u_2''\big), \tag{18}$$

$$\sigma_2' = \big(H_4'\big)^{-1}\big(B - H_2\sigma_1 - H_4''\sigma_2''\big). \tag{19}$$

Следовательно, имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Для того чтобы линейное множество (13) было интегральным многообразием системы линейных по сносу дифференциальных уравнений (12) достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) *квадратные подматрицы M' и H_4' прямоугольных матриц $M = H_4G_5$ и H_4 обладали свойством* $\det M' \neq 0$, $\det H_4' \neq 0$*;*
2) *при произвольно заданных u_1, $u_2' \in K$ первые m координат u_2' вектора u_2 имели вид (18);*
3) *при произвольно заданных σ_1, $\sigma_2'' \in K$ подматрица σ_2' матрицы σ_2 имела вид* (19).

Заключение

Таким образом, методом разделения в нелинейной и линейной постановках решены стохастические задачи восстановления с вырождающейся относительно части переменных диффузией.

Литература

1. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // ПММ. — 1952. — Т. 10, вып. 6. — С. 659–670. [*Erugin N. P.* Postroenie vsego mnozhestva sistem differencialjnihkh uravneniyj, imeyuthikh zadannuyu integraljnuyu krivuyu // PMM. — 1952. — T. 10, вып. 6. — S. 659–670.]
2. Построение систем программного движения / А. С. Галиуллин, И. А. Мухаметзянов, Р. Г. Мухарлямов, В. Д. Фурасов. — М.: Наука, 1971. [Postroenie sistem programmnogo dvizheniya / A. S. Galiullin, I. A. Mukhametzyanov, R. G. Mukharlyamov, V. D. Furasov. — M.: Nauka, 1971.]
3. *Галиуллин А. С.* Построение поля сил по заданному семейству траекторий // Дифференциальные уравнения. — 1981. — Вып. 8. — С. 1487–1489. [*Galiullin A. S.* Postroenie polya sil po zadannomu semeyjstvu traektoriyj // Differencialjnihe uravneniya. — 1981. — Vihp. 8. — S. 1487–1489.]
4. *Галиуллин А. С.* Об определении силовой функции по заданному интегралу уравнений движения // Дифференциальные уравнения. — 1982. — Вып. 5. — С. 744–748. [*Galiullin A. S.* Ob opredelenii silovoyj funkcii po zadannomu integralu uravneniyj dvizheniya // Differencialjnihe uravneniya. — 1982. — Vihp. 5. — S. 744–748.]
5. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986. [*Galiullin A. S.* Metodih resheniya obratnihkh zadach dinamiki. — M.: Nauka, 1986.]
6. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. — 1994. — Вып. 5. — С. 5–21. [*Galiullin A. S., Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G.* Obzor issledovaniyj po analiticheskomu postroeniyu sistem programmnogo dvizheniya // Vestnik Rossiyjskogo universiteta druzhbih narodov. Seriya prikladnaya matematika i informatika. — 1994. — Vihp. 5. — S. 5–21.]
7. *Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Уравнения программных движений. — М.: Изд-во УДН, 1986. [*Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G.* Uravneniya programmnihkh dvizheniyj. — M.: Izd-vo UDN, 1986.]
8. *Галиуллин А. С., Мухаметзянов И. А., Мухарлямов Р. Г.* Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия прикладная математика и информатика. — 1994. — Вып. 1. — С. 5–21. [*Galiullin A. S., Mukhametzyanov I. A., Mukharlyamov R. G.* Obzor issledovaniyj po analiticheskomu postroeniyu sistem programmnogo dvizheniya // Vestnik Rossiyjskogo universiteta druzhbih narodov. Seriya prikladnaya matematika i informatika. — 1994. — Vihp. 1. — S. 5–21.]
9. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче динамики при наличии случайных возмущений // Известия МН-АН РК. Серия физико-математическая. Алматы. — 1998. — Вып. 3. — С. 55–61. [*Tleubergenov M. I.* Ob obratnoyj zadache dinamiki pri nalichii sluchayjnihkh vozmutheniyj // Izvestiya MN-AN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya. Almatih. — 1998. — Vihp. 3. — S. 55–61.]
10. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной задаче восстановления стохастических дифференциальных систем // Дифференциальные уравнения. — 2001. — Т. 37, вып. 5. — С. 714–716. [*Tleubergenov M. I.* Ob obratnoyj zadache vosstanovleniya stokhasticheskikh differencialjnihkh sistem // Differencialjnihe uravneniya. — 2001. — T. 37, вып. 5. — S. 714–716.]
11. *Тлеубергенов М. И.* Об обратной стохастической задаче замыкания // Доклады МН-АН РК. Алматы. — 1999. — Вып. 1. — С. 53–60. [*Tleubergenov M. I.* Ob obratnoyj stokhasticheskoyj zadache zamihkaniya // Dokladih MN-AN RK.

Almatih. — 1999. — Vihp. 1. — S. 53–60.]
12. *Тлеубергенов М. И., Ибраева Г. Т.* К стохастической задаче восстановления с вырождающейся диффузией // Известия НАН РК Серия физико-математическая. — 2006. — Вып. 5. — С. 8–13. [*Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* K stokhasticheskoyj zadache vosstanovleniya s vihrozhdayutheyjsya diffuzieyj // Izvestiya NAN RK Seriya fiziko-matematicheskaya. — 2006. — Vihp. 5. — S. 8–13.]

UDC 517.925.5:519.216

On Solving Restoration Problem with Degenerated Diffusion by Separation Method

M. I. Tleubergenov, G. T. Ibraeva

Laboratory of Dynamical Systems
Institute of Mathematics
125, Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan

The sufficient conditions of restoration problems' solvability in a class of the Ito stochastic differential systems of the first order (with random disturbances from a class of Wiener processes and the diffusion degenerated with regard to a part of variables) with the given properties of a movement, when a control is included into the coefficient of drift, are obtained by separation method. The structure of the control parameter is defined, ensuring sufficient conditions of the given integral manifold's existence of constructed equations' set in nonlinear and linear Problem statements.

Key words and phrases: inverse problems, stochastic differential equation, integral manifold.