УДК 517.9

Уравнение свёртки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами. Часть 1

В. Б. Дыбин

Кафедра алгебры и дискретной математики
Южный федеральный университет
Б. Садовая, д. 105, Ростов-на-Дону, 344006, Россия

В этой работе (части 1 и 2) рассмотрена теория односторонней обратимости оператора свёртки на R в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами. В части 1 представлены результаты об ограниченности оператора свёртки, теорема деления в алгебре аналитических функций в полосе, связанной с рассматриваемым оператором, и критерий фредгольмовости оператора Винера–Хопфа в изучаемом пространстве.

Ключевые слова: оператор свёртки, символ, весовое пространство, фредгольмовость.

1. Введение

Всюду ниже под символом E будем понимать одно из следующих пространств: $L_p(\mathrm{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $C_0(\mathrm{R})$, $C(\mathrm{R})$. В этой работе рассматривается уравнение

$$\lambda f(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t = g(x), \quad x \in \mathrm{R}, \tag{1}$$

в пространстве $\{a,b\}_E$ функций вида

$$f(x) = e^{ax}\widetilde{f}_+(x) + e^{bx}\widetilde{f}_-(x), \tag{2}$$

где a и b — произвольные вещественные числа, а функции $\widetilde{f}_\pm(x) \in E$ и имеют носители, сосредоточенные соответственно на полупрямых $\mathrm{R}_+ = (0,+\infty)$ и $\mathrm{R}_- = (0,-\infty)$. В дальнейшем для краткости пространство $\{a,b\}_E$ в случае $E = L_p(\mathrm{R})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ будем обозначать $\{a,b\}_p$. Аналогичный смысл имеют обозначения $\{a,b\}_{C_0}$ и $\{a,b\}_C$ в случае пространств $E = C_0(\mathrm{R})$ и $E = C(\mathrm{R})$.

Внимание к рассматриваемой задаче связано с классической работой Н. Винера и Е. Хопфа [1], в которой к аналогичному уравнению на полупрямой R_+ был впервые применён метод факторизации «символа» уравнения — функции $\widetilde{K}(z) = \lambda + (Fk)(z)$, где F — преобразование Фурье, получивший впоследствии название метода Винера–Хопфа. Через четверть века этот метод был обобщён в работах М.Г. Крейна и И.Ц. Гохберга [2,3] на широкие классы скалярных уравнений типа свёртки в безвесовых банаховых пространствах функций и последовательностей вида E, а в работе [3] фактически была поставлена задача развития построенной теории на пространствах функций и последовательностей, суммируемых с экспоненциальными весами.

Приведём краткий обзор основных результатов в данном направлении.

В монографии Е. Титчмарша [4], опубликованной в 1937 г. (русский перевод в 1948 г.), рассмотрены частные случаи уравнения (1) в пространствах типа $\{a,b\}_2$, в частности, найдено общее решение однородного уравнения в пространстве $\{a,-a\}_2$, $a > 0$. В монографии Ф.Д. Гахова и Ю.И. Черского [5] (1978г.) уравнение (1) в числе ряда других скалярных уравнений типа свёртки решено

Статья поступила в редакцию 19 ноября 2010 г.

методом граничных задач теории аналитических функций в пространстве, связанном с пространством $\{a, b\}_2$ при $a > b$.

Несколько раньше (1964–1971 г.г.) И.А. Фельдман построил Ф-теорию широких классов уравнений типа свёртки в пространстве $\{a, -a\}_E$, $a > 0$, содержащих уравнение (1), вычислил индексы операторов и нашёл асимптотические разложения решений однородных уравнений (см. Добавление в монографии [6]). После этого, несмотря на то, что проблема, поставленная М.Г. Крейном и И.Ц. Гохбергом, оставалась нерешённой, исследования в рассматриваемом направлении фактически остановились. Как выяснилось впоследствии, причина этой остановки состояла в том, что решение рассматриваемой задачи лежало на пересечении не только построенной к тому времени так называемой эллиптической теории уравнений типа свёртки (теории уравнений с невырожденными символами) [2, 3, 6], но и недостаточно разработанной на тот момент неэллиптической теории этих уравнений [7] и, более того, фактически отсутствовавшей тогда теории сингулярных уравнений и уравнений типа свёртки с бесконечным индексом. Понадобилось почти три десятилетия для того, чтобы подтянулся фронт соответствующих исследований [8–12] и появились предпосылки для решения обсуждаемой задачи.

Настоящая работа была выполнена десять лет тому назад и легла в стол. Но её перспективы оказались столь обнадёживающими, что в период с 2001 по 2003 годы автору вместе со своей ученицей С.Б. Джиргаловой удалось построить конструктивную теорию обратимости (двусторонней, односторонней и обобщённой) скалярных операторов свёртки, Винера–Хопфа, парного и транспонированного парному в дискретном случае [13–15]. Эти статьи содержат решение проблемы М.Г. Крейна–И.Ц. Гохберга в дискретном варианте. Необходимость в отложенной работе появилась в последние годы и связана с возрастающим интересом выпускников Южного Федерального Университета к продолжению обучения в магистратуре и аспирантуре [16]. В связи с этим автор счёл необходимым ознакомить научную общественность с содержанием этой работы, полное изложение которой депонировано в ВИНИТИ [17].

В первой части работы рассмотрены пространства $\{a, b\}_E$, доказаны теоремы об ограниченности в этих пространствах оператора $C(\widetilde{K})$порождаемого левой частью уравнения (1), получена теорема деления в алгебре символов, являющихся аналитическими функциями в соответствующей полосе, и получены критерии фредгольмовости оператора Винера-Хопфа и ему двойственного оператора в пространствах $P_\pm\big(\{a, b\}_E\big)$.

Дискретный вариант данной задачи рассмотрен в работе [13].

2. Пространства $\{a, b\}_E$

Пусть $a, b \in \mathrm{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Через $\{a, b\}_E$ обозначим комплексное линейное пространство функций $f(x)$, определённых почти всюду на R и имеющих вид (2), где

$$\widetilde{f}_\pm(x) \in E_\pm = P_\pm(E), \quad (P_\pm f)(x) = \frac{1}{2}(1 \pm \operatorname{sign} x) f(x).$$

Введём операторы M_a и $V_{a,b}$,

$$M_a f(x) = e^{ax} f(x), \quad V_{a,b} = M_a P_+ + M_b P_- \tag{3}$$

и заметим, что оператор $V_{a,b}$ осуществляет алгебраический изоморфизм пространства E на пространство $\{a, b\}_E$, причём

$$V_{a,b}^{-1} = M_{-a} P_+ + M_{-b} P_- = V_{-a,-b}.$$

Поэтому введение в $\{a,b\}_E$ нормы

$$\|f\|_{\{a,b\}_E} = \|V_{-a,-b}f\|_E = \|\widetilde{f}\|_E = \begin{cases} \left(\int\limits_R |\widetilde{f}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{1/p}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{supess}\limits_{x\in\mathrm{R}} |\widetilde{f}|, & p = \infty, \end{cases}$$

превращает его в банахово пространство, изометрически изоморфное пространству E. Заметим, что пространства $\{a,b\}_{C_0}$ и $\{a,b\}_C$ являются подпространствами в пространстве $\{a,b\}_\infty$. Поэтому норма во всех трёх пространствах берётся одинаковой.

Введём следующие обозначения:

$$\{a,\infty\}_E = \bigcap_{y\in[a,\infty)} \{a,y\}_E, \quad \{-\infty,a\}_E = \bigcap_{y\in(-\infty,a]} \{y,a\}_E, \quad \{a\}_E = \{a,a\}_E,$$

и рассмотрим ряд свойств пространств $\{a,b\}_E$.

1. $P_+\{a\}_E \subset P_+\{a,\infty\}_E$, $P_-\{a\}_E \subset P_-\{-\infty,a\}_E$.
2. $a_1 \geqslant a \Rightarrow P_+\{a_1\}_E \subset P_+\{a\}_E$, $b_1 \leqslant b \Rightarrow P_-\{b_1\}_E \subset P_-\{b\}_E$.

   Следствие.

   i) $P_+\{a\}_E \cap P_+\{a_1\}_E = P_+\{\min(a,a_1)\}_E$ для $\forall a,\ a_1 \in \mathrm{R}$.

   ii) $P_-\{b\}_E \cap P_-\{b_1\}_E = P_-\{\max(b,b_1)\}_E$ для $\forall b,\ b_1 \in \mathrm{R}$.
3. $\{a,b\}_E \cap \{a_1,b_1\}_E = \{\min(a,a_1),\max(b,b_1)\}_E$.
4. $\sum\limits_{j=1}^n \{a_j,b_j\}_E = \{\max\limits_j a_j, \min\limits_j b_j\}_E$.
5. $\{a_1,b_1\}_E \subseteq \{a,b\}_E \Leftrightarrow a_1 \leqslant a,\ b_1 \geqslant b$.
6. $(\{a,b\}_p)^* = \{-a,-b\}_q$, $q = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$; $(\{a,b\}_1)^* = \{-a,-b\}_\infty$.

Доказательства свойств 1–6 опущены ввиду их элементарности.

3. Свёртка

В этом разделе даётся уточнение и обобщение двух теорем Ю.И. Черского [5, гл. IV, 12.3], выделившего достаточные условия существования свёртки функций, обладающих экспоненциальным ростом или убыванием на бесконечности. Пусть

$$k * f = (Cf)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in \mathrm{R}.$$

Теорема 1. *Если* $f \in \{a,b\}_E$, $a \leqslant b$, $k \in \{\alpha,\beta\}_1$, $\alpha \leqslant \beta$ *и* $[a,b] \cap [\alpha,\beta] \neq \varnothing$, *тогда* $Cf \in \{c,d\}_E$, *где* $c = \max(a,\alpha)$, $d = \min(b,\beta)$ *и*

$$\|Cf\|_{\{c,d\}_E} \leqslant \mathrm{const}\|k\|_{\{\alpha,\beta\|_1}\|f\|_{\{a,b\}_E}. \tag{4}$$

Доказательство. Будем опираться на известную оценку (см., например, [2, лемма 6.1]) для оператора C, если $k \in L_1(\mathrm{R})$, $f \in E$, то

$$\sqrt{2\pi}\|Cf\|_E \leqslant \|k\|_1\|f\|_E. \tag{5}$$

В условиях теоремы $\alpha - c \leqslant 0$, $\beta - c \geqslant 0$, $a - c \leqslant 0$, $b - c \geqslant 0$, $\alpha - d \leqslant 0$, $b - d \geqslant 0$, $\beta - d \geqslant 0$, $a - d \leqslant 0$. Поэтому учитывая, что

$$k(x) = e^{\alpha x}\widetilde{k}_+(x) + e^{\beta x}\widetilde{k}_-(x), \widetilde{k}_\pm(x) \in L_1(\mathrm{R}),$$

а $f(x)$ имеет вид (3), используя оценку (5), получаем, что

$$\sqrt{2\pi}\|Cf\|_{\{c,d\}_E} = \sqrt{2\pi}\|V_{-c,-d}Cf\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2\pi}\Bigg(\Big\|\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_+}(x-t)e^{(\alpha-c)(x-t)}\widetilde{f_+}(t)e^{(a-c)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E +$$
$$+\Big\|P_+\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_+}(x-t)e^{(\alpha-c)(x-t)}\widetilde{f_-}(t)e^{(b-c)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E +$$
$$+\Big\|P_+\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_-}(x-t)e^{(\beta-c)(x-t)}\widetilde{f_+}(t)e^{(a-c)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E +$$
$$+\Big\|P_-\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_+}(x-t)e^{(\alpha-d)(x-t)}\widetilde{f_-}(t)e^{(b-d)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E +$$
$$+\Big\|P_-\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_-}(x-t)e^{(\beta-d)(x-t)}\widetilde{f_+}(t)e^{(a-d)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E +$$
$$+\Big\|\int\limits_{\mathrm{R}} \widetilde{k_-}(x-t)e^{(\beta-d)(x-t)}\widetilde{f_-}(t)e^{(b-d)t}\,\mathrm{d}t\Big\|_E\Bigg) \leqslant \Big\|\widetilde{k_+}(x)e^{(\alpha-c)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_+}(x)e^{(a-c)x}\Big\|_E +$$
$$+\Big\|\widetilde{k_+}(x)e^{(\alpha-c)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_-}(x)e^{(b-c)x}\Big\|_E + \Big\|\widetilde{k_-}(x)e^{(\beta-c)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_+}(x)e^{(a-c)x}\Big\|_E +$$
$$+\Big\|\widetilde{k_+}(x)e^{(\alpha-d)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_-}(x)e^{(b-d)x}\Big\|_E + \Big\|\widetilde{k_-}(x)e^{(\beta-d)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_+}(x)e^{(a-d)x}\Big\|_E +$$
$$+\Big\|\widetilde{k_-}(x)e^{(\beta-d)x}\Big\|_1\Big\|\widetilde{f_-}(x)e^{(b-d)x}\Big\|_E \leqslant$$
$$\leqslant \|\widetilde{k_+}\|_1\Big(\|\widetilde{f_+}\|_E+\|\widetilde{f_-}\|_E\Big)+\|\widetilde{k_-}\|_1\|\widetilde{f_+}\|_E+\|\widetilde{k_+}\|_1\|\widetilde{f_-}\|_E+\|\widetilde{k_-}\|_1\Big(\|\widetilde{f_+}\|_E+\|\widetilde{f_-}\|_E\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \mathrm{const}\|\widetilde{k}\|_1\cdot\|\widetilde{f}\|_E = \mathrm{const}\|k\|_{\{\alpha,\beta\}_1}\cdot\|f\|_{\{a,b\}_E}.$$

□

Перейдём к общему случаю.

Теорема 2. *Пусть $f \in \{a,b\}_E$, $k \in \{\alpha,\beta\}_1$ и $\alpha \leqslant b$, $\beta \geqslant a$. Тогда справедливы все утверждения теоремы 1.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы в существенной части не отличается от доказательства Ю.И. Черского [5, гл. IV, стр. 116]. □

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Для того, чтобы $C \in \operatorname{End}\{a,b\}_E$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\alpha \leqslant \min(a,b), \quad \beta \geqslant \max(a,b). \tag{6}$$

Доказательство. При выполнении условий (6) $c = \max(a,\alpha) = a$, $d = \min(b,\beta) = b$. Откуда по теореме 2 $C \in \operatorname{End}\{a,b\}_E$. Вместе с тем, если потребовать, чтобы в условиях теоремы 2 $c = \max(a,\alpha) = a$, $d = \min(b,\beta) = b$, что равносильно условиям $\alpha \leqslant a$, $\beta \geqslant b$, то ввиду условий теоремы 2 неравенства (6) являются необходимыми для того, чтобы $C \in \operatorname{End}\{a,b\}_E$. □

Следствие 2. В условиях теоремы 2 и следствия 1 класс $\{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}_1$, $\widetilde{a} = \min(a, b)$, $\widetilde{b} = \max(a, b)$, является максимально широким ($k \in \{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}_1$) для того, чтобы $C \in \mathrm{End}\,\{a, b\}_E$.

Доказательство. В силу свойства 5 пространств $\{a, b\}_E$ при выполнении условия (6) $\{a, b\}_1 \subseteq \{\widetilde{a}, \widetilde{b}\}_1$. □

Следствие 3. Пусть $a \leqslant b$, тогда $C \in \mathrm{End}\,\{a, b\}_1$,

$$\|Cf\|_{\{a,b\}_1} \leqslant \mathrm{const}\|k\|_{\{a,b\}_1}\|f\|_{\{a,b\}_1}$$

и, следовательно, $\{a, b\}_1$ является свёрточной коммутативной банаховой алгеброй без единицы над полем комплексных чисел.

4. Алгебра $\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, $a \leqslant b$

Пусть $k \in \{a\}_1$, тогда определено комплексное преобразование Фурье

$$F_z k = K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t) e^{izt}\,\mathrm{d}t, \quad z = x + ia, \quad x \in \mathrm{R}. \tag{7}$$

Действительно, функция

$$K(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{at}\widetilde{k}(t) e^{-at} e^{ixt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{k}(t) e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

принадлежит алгебре Винера $\mathbb{W}(\mathrm{R})$, так как $\widetilde{k}(t) \in \mathrm{L}_1(\mathrm{R})$.

Поскольку для $k_1, k_2 \in \{a\}_1$ и $z = x + ia$ $F_z(k_1 * k_2) = F_z k_1 \cdot F_z k_2$, то множество $F_z(\{a\}_1)$ образует коммутативную банахову алгебру $\mathbb{W}(\mathrm{R}_a)$ функций, определённых на прямой $R_a = \{z | z = x + ia, x \in \mathrm{R}\}$ и представимых абсолютно сходящимся интегралом Фурье вида (7). При этом норма в алгебре $\mathbb{W}(\mathrm{R}_a)$ определяется равенством $\|K\| = \|k\|_{\{a\}_1}$, а алгебра $\mathbb{W}(\mathrm{R}_a)$ изометрически изоморфна свёрточной алгебре $\{a\}_1$. Заметим, что $\mathbb{W}(\mathrm{R}_0) = \mathbb{W}(\mathrm{R})$.

Пусть теперь $k \in \{a, b\}_1$, где $a < b$. Так как для любого $y \in [a, b]$ $e^{-yt}k(t) = e^{(a-y)t}\widetilde{k}_+(t) + e^{(b-y)t}\widetilde{k}_-(t) \in \mathrm{L}_1(\mathrm{R}), \{a, b\}_1 \subset \{y\}_1$. Поэтому для каждой функции $k \in \{a, b\}_1$ существует комплексное преобразование Фурье $K(z) = F_z k$, являющееся функцией, определённой в полосе $\overline{\Pi}_a^b = \{z | x \in \mathrm{R}, y \in [a, b]\}$ и при каждом фиксированном y из $[a, b]$ представимой в виде абсолютно сходящегося интеграла Фурье. При этом функция $K(z)$ аналитическая в полосе $\Pi_a^b = \{z | x \in \mathrm{R}, y \in (a, b)\}$ и непрерывна в $\overline{\Pi}_a^b$.

Действительно, во-первых, функция

$$\frac{\mathrm{d}K(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} tk(t) e^{izt}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} te^{(a-y)t}\widetilde{k}_+(t) e^{ixt}\,\mathrm{d}t + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} te^{(b-y)t}\widetilde{k}_-(t) e^{ixt}\,\mathrm{d}t$$

существует для любых $z \in \Pi_a^b$, так как интегралы в правой части последнего равенства сходятся абсолютно для любого $y \in (a, b)$, а во-вторых, за счёт выбора $N, N > 0$,

$$\sqrt{2\pi}\big|K(z)-K(x+ia)\big| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}|k(t)(e^{-yt}-e^{-at})|\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{0}^{\infty}|\widetilde{k}(t)|(1-e^{(a-y)t})\,\mathrm{d}t+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{(b-y)t}|\widetilde{k}(t)|(1-e^{(y-a)t})\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+(y-a)\Bigg(\int\limits_{0}^{N}|\widetilde{k}(t)|t\int\limits_{0}^{1}e^{(a-y)t\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t+$$

$$+\int\limits_{-N}^{0}|t\widetilde{k}(t)|e^{(b-y)t}\int\limits_{-1}^{0}e^{(a-y)t\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t\Bigg) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

при надлежащем выборе y. Откуда следует, что

$$\lim_{y\to a}K(x+iy)=K(x+ia), \quad x\in\mathrm{R}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{y\to b}K(x+iy)=K(x+ib), \quad y\in(a,b), \quad x\in\mathrm{R}.$$

Алгебру $F_z\big(\{a,b\}_1\big)$, где $z=x+iy$, $y\in[a,b]$, $x\in\mathrm{R}$, всех функций, аналитических в Π_a^b, непрерывных в $\overline{\Pi}_a^b$ и представимых в виде абсолютно сходящихся интегралов Фурье на любой прямой R_y, $y\in[a,b]$, обозначим через $\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^b)$. Вводя норму $\|K\|=\|k\|_{\{a,b\}_1}$, превращаем её в коммутативную банахову алгебру, изометрически изоморфную алгебре $\{a,b\}_1$.

Пусть $a\in\mathrm{R}$, $\overline{\Pi}_a^+=\{z|y\geqslant a\}$, $\overline{\Pi}_a^-=\{z|y\leqslant a\}$. Через $\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^\pm)$ обозначим алгебры функций, аналитических соответственно в полуплоскостях $\Pi_a^\pm$, непрерывных в $\overline{\Pi}_a^\pm$ и представимых в виде абсолютно сходящихся интегралов Фурье на любой прямой $\mathrm{R}_y,\mathrm{R}_y\subset\overline{\Pi}_a^\pm$. Легко заметить, что $\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^\pm)=F_z\Big(P_\pm(\{a\}_1)\Big)$, где $y\geqslant a$ и $y\leqslant a$ соответственно для верхних и нижних знаков. Справедливы следующие равенства

$$\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^+)+\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^-)=\mathbb{W}(R_a),\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^+)\cap\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^-)=\{0\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{W}(R_a)=\mathbf{C}+\mathbb{W}(R_a),\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^\pm)=\mathbf{C}+\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^\pm),\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)=\mathbf{C}+\mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^b)$$

и заметим, что введение в последней алгебре нормы

$$\|\widetilde{K}\|=\|\lambda+K\|=|\lambda|+\|k\|_{\{a,b\}_1}=|\lambda|+\|V_{-a,-b}k\|_1$$

превращает её в банахову алгебру изоморфную алгебре

$$\{\widehat{a,b}\}_1=\{\lambda\delta(x)\}+\{a,b\}_1,$$

где $\lambda\in\mathbf{C}$, $\delta(x)$ — δ-функция Дирака. Пространством максимальных идеалов алгебры $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ является бикомпакт $\overline{\Pi}_a^b$, представляющий из себя полосу $\overline{\Pi}_a^b$, компактифицированную одной бесконечно удалённой точкой, гомеоморфный плоскому кольцу, перевязанному в одной точке. Следующая теорема является стандартным следствием для алгебры $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ из теории коммутативных банаховых алгебр.

Теорема 3. *Пусть* $\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$. *Для того, чтобы* $[\widetilde{K}(z)]^{-1} \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\inf_{z \in \overline{\Pi}_a^b} |\widetilde{K}(z)| > 0. \tag{8}$$

Если $\widetilde{K}(z) = \lambda + F_z k \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ *и выполнено условие* (8), *тогда существует функция* $g \in \{a, b\}_1$ *такая, что*

$$[\widetilde{K}(z)]^{-1} = [\lambda + F_z k]^{-1} = \lambda^{-1} + F_z g. \tag{9}$$

Нашей ближайшей задачей является описание всех функций из алгебры $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, для которых условие (8) нарушается только во внутренних точках полосы $\overline{\Pi}_a^b$, то есть тех функций из алгебры $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, для которых выполнено условие

$$inf_{z \in \partial\overline{\Pi}_a^b} |\widetilde{K}(z)| > 0. \tag{10}$$

Прежде всего заметим, что функция $\widetilde{K}(z)$, принадлежащая алгебре $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$ и удовлетворяющая условию (10), будучи аналитической в полосе Π_a^b, не может в ней иметь ни нулей бесконечного порядка, ни бесконечного числа нулей. В последнем случае при нарушении отмеченного условия множество нулей этой функции будет иметь предельную точку на границе бикомпакта $\overline{\Pi}_a^b$, что приводит к нарушению условия (10). Следовательно, при выполнении условия (10) функция $\widetilde{K}(z)$ либо не обращается в Π_a^b в нуль, либо имеет вырождение полиномиального характера, то есть существует конечное множество $\{z_j\}_{j=1}^m \subset \Pi_a^b$ такое, что

$$\widetilde{K}(z) = \prod_{j=1}^m (z - z_j)^{n_j} G(z),$$

где $n_j \in \mathrm{N}$, а функция $G(z)$ является аналитической в Π_a^b и $G(z) \neq 0$, $z \in \Pi_a^b$.

Имеет место следующий аналог теоремы деления Ф. Рисса в пространстве H^p [18, гл.II, теорема 2.3] для алгебры $\mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$.

Теорема 4. *Пусть* $\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, *выполнено условие* (10) *и* $\widetilde{K}(z_j) = 0$, $j \in \overline{1, m}$, $z_j \in \Pi_a^b$. *Тогда найдутся такие натуральные числа* $n_j, j \in \overline{1, m}$, $n = \sum_{j=1}^m n_j$, *что для любой точки* $z_0, z_0 \notin \overline{\Pi}_a^b$,

$$\widetilde{K}(z) = \widetilde{\Omega}(z) \widetilde{G}(z), \tag{11}$$

где

$$\widetilde{\Omega}(z) = \prod_{k=1}^m \left(\frac{z - z_k}{z - z_0} \right)^{n_k}, \quad \widetilde{G}(z) = \widetilde{K}(z) [\widetilde{\Omega}(z)]^{-1} \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b). \tag{12}$$

Доказательству теоремы 4 предшествует следующее утверждение.

Утверждение 1. Пусть $a < b$, $f \in \{a, b\}_1$, $F(z) = F_z f$, $z_0 \in \Pi_a^b$. Тогда оператор

$$(Nf)(\tau) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\Big[P_+ e^{-iz_0\tau}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{iz_0t} f(t)\,\mathrm{d}t - P_- e^{-iz_0\tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{iz_0t} f(t)\,\mathrm{d}t\Big], \quad \tau \in \mathrm{R}, \quad (13)$$

ограничен в пространстве $\{a, b\}_1$, а

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = F_z(Nf) \in \mathbb{W}(\overline{\Pi}_a^b). \quad (14)$$

Доказательство. Из равенства (13) следует, что

$$(Nf)(\tau) = P_+(ie_-^{-iz_0t} * f_+(t)) - P_-(ie_+^{-iz_0t} * f_-(t)), \quad (15)$$

$$e^{-iz_0t} = e^{-ix_0t + y_0t} = e^{(y_0+\varepsilon)t} e_+^{-ix_0t} e_+^{-\varepsilon t} + e^{(y_0+\varepsilon)t} e_-^{-ix_0t} e_-^{-\varepsilon t} \in \{y_0 + \varepsilon, y_0 - \varepsilon\}_1$$

для любого $\varepsilon > 0$. Так так

$$f_+ \in \{a, \infty\}_1, \quad f_- \in \{-\infty, b\}_1, \quad e_+^{-iz_0t} = P_+ e^{-iz_0t} \in \{y_0 + \varepsilon, \infty\}_1,$$

$$e_-^{-iz_0t} = P_- e^{-iz_0t} \in \{-\infty, y_0 - \varepsilon\}_1, \quad y_0 \in [a, b],$$

то выполнено условие существования свёрток в равенстве (15) и по теореме 1

$$e_-^{-iz_0t} * f_+(t) \in \{a, y_0 - \varepsilon\}_1, \quad e_+^{-iz_0t} * f_-(t) \in \{y_0 + \varepsilon, b\}_1.$$

Но тогда из равенства (15) следует, что $Nf \in \{a, b\}_1$. Переходя к доказательству равенства (14), получаем, что для $z = x + iy \in \Pi_a^b$

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{izt} - e^{iz_0t}}{z - z_0}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iz_0t} f(t)\,\mathrm{d}t \int\limits_{0}^{t} e^{i(z-z_0)\tau}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} e^{iz\tau}\mathrm{d}\tau\big(e^{-iz_0\tau}\int\limits_{\tau}^{\infty} e^{iz_0\tau} f(t)\,\mathrm{d}t\big) - \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{iz\tau}\mathrm{d}\tau\big(e^{-iz_0\tau}\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{iz_0\tau} f(t)\,\mathrm{d}t\big).$$

При этом проведённая перемена порядка интегрирования обеспечивается абсолютной сходимостью повторных интегралов, вытекающей из следующих оценок,

$$\sqrt{2\pi}\left|\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0}\right| \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} |\widetilde{f}_+(t)| e^{(a-y_0)t}\int\limits_{0}^{\tau} e^{(y-y_0)\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{0} |\widetilde{f}_-(t)| e^{(b-y_0)t}\int\limits_{0}^{\tau} e^{(y-y_0)\tau}\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}t \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{f}(t)|\,\mathrm{d}t,$$

так как при $y_0 \in (a, b), y \in [a, b]$ и $t > 0$

$$e^{(a-y_0)t}\int\limits_{0}^{t} e^{(y_0-y)\tau}\mathrm{d}\tau \leqslant \begin{cases} te^{(a-y_0)t}, & \text{при } y_0 \leqslant y \leqslant b, \\ te^{(a-y)t}, & \text{при } a < y < y_0, \\ \dfrac{1}{y_0 - a}, & \text{при } y = a, \end{cases}$$

а при $t < 0$

$$e^{(b-y_0)t}\int\limits_0^t e^{(y_0-y)\tau}\mathrm{d}\tau \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{b-y_0}, & \text{при } y=b,\\ -te^{(b-y)t}, & \text{при } y_0<y<b,\\ -te^{(b-y_0)t}, & \text{при } a\leqslant y\leqslant y_0. \end{cases}$$

□

Доказательство. Доказательство теоремы 4 достаточно провести в случае одного нуля $z = z_1$. Пусть $\widetilde{K}(z) = \lambda + K(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b)$, $z_1 \in \Pi_a^b$ и $\widetilde{K}(z_1) = 0$. Тогда $\lambda = -K(z_1)$ и

$$\widetilde{K}(z) = K(z) - K(z_1) = \frac{z-z_1}{z-z_0}\frac{(z-z_0)\Big(K(z)-K(z_1)\Big)}{z-z_1} = \frac{z-z_1}{z-z_0}\widetilde{G}(z), \quad \text{где}$$

$$\widetilde{G}(z) = \left(K(z) - K(z_1) + \frac{(z_1-z_0)(K(z)-K(z_1))}{z-z_1}\right) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b),$$

так как в силу утверждения 1

$$\frac{K(z)-K(z_1)}{z-z_1} \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_a^b).$$

□

5. Оператор Винера–Хопфа

Наряду с оператором

$$C(\widetilde{K})f(x) = \lambda f(x) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(x-t)f(t)\,\mathrm{d}t, \tag{16}$$

символ которого имеет вид

$$\widetilde{K}(z) = \lambda + F_z k = \lambda + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t)e^{izt}\,\mathrm{d}t, \quad z \in \overline{\Pi}_{\tilde{a}}^{\tilde{b}}, \tag{17}$$

будем рассматривать оператор Винера–Хопфа $W_+(\widetilde{K})$ в пространстве $P_+\{a,b\}_E$ и двойственный ему оператор $W_-(\widetilde{K})$ в пространстве $P_-\{a,b\}_E$,

$$W_\pm(\widetilde{K})f = P_\pm C(\widetilde{K})P_\pm f. \tag{18}$$

Теория операторов $W_\pm(\widetilde{K})$ является более простой по сравнению с теорией оператора $C(\widetilde{K})$, поскольку операторы $W_\pm(\widetilde{K})$ подобны классическому оператору Винера–Хопфа в пространстве P_+E.

Введём инволюцию $\breve{I}\, f(x) = f(-x)$, $x \in \mathrm{R}$, и отметим следующие её свойства,

$$\breve{I}\Big(\{a,b\}_E\Big) = \{-b,-a\}_E,\ \breve{I}\,C(\widetilde{K})\,\breve{I} = C(\breve{I}\,\widetilde{K}),\ \breve{I}\,W_\pm(\widetilde{K})\,\breve{I} = W_\mp(\breve{I}\,\widetilde{K}). \tag{19}$$

Теорема 5. *Пусть* $\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}})$. *Тогда* $W_{\pm}(\widetilde{K}) \in \operatorname{End} P_{\pm}\{a,b\}_E$ *и*

$$M_{-a} W_{+}(\widetilde{K}) M_a = W_{+}(\widetilde{K}_a), \tag{20}$$

где $\widetilde{K}_a(z) = \widetilde{K}(z + ia) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{\widetilde{a-a}}^{\widetilde{b-a}}), \quad W_{+}(\widetilde{K}_a) \in \operatorname{End} P_{+}E,$

$$M_{-b} W_{-}(\widetilde{K}) M_b = W_{-}(\widetilde{K}_b), \tag{21}$$

где $\widetilde{K}_b(z) = \widetilde{K}(z + ib) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{\widetilde{a-b}}^{\widetilde{b-b}}), \quad W_{-}(\widetilde{K}_b) \in \operatorname{End} P_{-}E.$

Доказательство. Доказательство теоремы сводится к элементарному применению формул (19) к операторам $C(\widetilde{K})$ вида (16) и $W_{\pm}(\widetilde{K})$ вида (18). □

Теорема 6. *Пусть* $\widetilde{K}(z) \in \mathcal{W}(\overline{\Pi}_{\widetilde{a}}^{\widetilde{b}})$. *1) Для того, чтобы оператор* $W_{+}(\widetilde{K})$ *вида* (18) *был* Φ *— оператором в пространстве* $P_{+}\{a,b\}_E$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\widetilde{K}(z) \neq 0, \quad z \in R_a = \{x + ia\}_{x \in \mathrm{R}}. \tag{22}$$

При выполнении этого условия $\operatorname{ind} W_{+}(\widetilde{K}) = -\operatorname*{ind}_{z \in \mathrm{R}_a} \widetilde{K}(z)$.

2) Для того, чтобы оператор $W_{-}(\widetilde{K})$ *вида* (18) *был* Φ*-оператором в пространстве* $P_{-}\{a,b\}_E$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\widetilde{K}(z) \neq 0, \quad z \in R_b = \{x + ib\}_{x \in \mathrm{R}}. \tag{23}$$

При выполнении этого условия $\operatorname{ind} W_{-}(\widetilde{K}) = -\operatorname*{ind}_{z \in \mathrm{R}_b} \widetilde{K}(z)$.

Доказательство. Справедливость первой части этой теоремы вытекает из равенства (20) и соответствующих результатов для оператора $W_{+}(\widetilde{K}_a)$ в пространстве $P_{+}E$ ([6, гл. I, § 8]. Справедливость второй части теоремы является следствием операторного равенства $W_{-}(\widetilde{K}) = \breve{I}\, W_{+}(\breve{I}\,\widetilde{K})\,\breve{I}$. □

6. Заключение

Представленные выше результаты составляют базу для построения теории фредгольмовости (односторонней обратимости) рассматриваемого здесь оператора свёртки. Эта теория будет изложена в части 2, в которой будут также предъявлены конструкции обратных операторов и описаны дефектные подпространства.

Литература

1. *Wiener N., Hopf E.* Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen // Sitz. Acad. Wiss. Berlin. — 1931. — Pp. 696–706.
2. *Krein M. G.* Integral Equations on the Half-Line with a Kernel Depending on the Difference of the Arguments. — 1962. — Vol. 2, No 22. — Pp. 163–288.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Парное интегральное уравнение и его транспонированное // Теоретическая и прикладная математика. — 1958. — № 1. —

С. 58–81. [*Gokhberg I. C., Kreyjn M. G.* Parnoe integraljnoe uravnenie i ego transponirovannoe // Teoreticheskaya i prikladnaya matematika. — 1958. — No 1. — S. 58–81.]
4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. — М.-Л.: Гостехиздат, 1948. [*Titchmarsh E.* Vvedenie v teoriyu integralov Furje. — M.-L.: Gostekhizdat, 1948.]
5. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свёртки. — М.: Наука, 1978. — 296 с. [*Gakhov F. D., Cherskiyj Yu. I.* Uravneniya tipa svyortki. — M.: Nauka, 1978. — 296 s.]
6. *Gohberg I., Feldman I. A.* Convolution Equations and Projection Methods for Their Solution. Translations of Mathematical Monographs. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974. — Vol. 41.
7. *Prössdorf S.* Einige Klassen Singulärer Gleichungen. — Birkhäuser, Basel and Stuttgart, 1974.
8. *Дыбин В. Б.* Корректные задачи для сингулярных интегральных уравнений. — Ростов на Дону: Изд. РГУ, 1988. — 160 с. [*Dihbin V. B.* Korrektnihe zadachi dlya singulyarnihkh integraljnihkh uravneniyj. — Rostov na Donu: Izd. RGU, 1988. — 160 s.]
9. *Dybin V. B.* One-Dimensional Singular Integral Equations with Coefficients that Vanish on Countable Sets // Math. USSR-Izv. — 1988. — Vol. 31, No 2. — Pp. 245–271. — Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. — Vol. 51, № 5. — 1987. — Pp. 936-961 (Russian).
10. *Dybin V. B.* The Wiener-Hopf Equation and the Blaschke Product // Math. USSR-Sb. — 1991. — Vol. 70, No 1. — Pp. 205–230. — Mat. Sb. — Vol. 181, № 6. — 1990. — Pp. 779-803 (Russian).
11. *Пасенчук А. Э.* Абстрактные сингулярные операторы. — Новочеркасск: Изд. НПИ, 1993. — 216 с. [*Pasenchuk A. Eh.* Abstraktnihe singulyarnihe operatorih. — Novocherkassk: Izd. NPI, 1993. — 216 s.]
12. *Dybin V. B., Grudsky S. M.* Introduction to the Theory of Toeplitz Operators with Infinite Index // Operator Theory: Advances and Applications. — 137. Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 2002. — No 137. — 312 p.
13. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Оператор дискретной свёртки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Известия вузов, Северо-Кавказский регион, Ест. науки, Приложение. — 2003. — № 9. — С. 3–16. [*Dihbin V. B., Dzhirgalova S. B.* Operator diskretnoyj svyortki v prostranstve $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Izvestiya vuzov, Severo-Kavkazskiyj region, Est. nauki, Prilozhenie. — 2003. — No 9. — S. 3–16.]
14. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Скалярные составные дискретные свёртки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Односторонняя обратимость // Известия вузов, Северо-Кавказский регион, Ест. науки, Спецвыпуск, Псевдодифференциальные уравнения и некоторые проблемы математической физики. — 2005. — С. 56–63. [*Dihbin V. B., Dzhirgalova S. B.* Skalyarnihe sostavnihe diskretnihe svyortki v prostranstve $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Odnostoronnyaya obratimostj // Izvestiya vuzov, Severo-Kavkazskiyj region, Est. nauki, Specvihpusk, Psevdodifferencialjnihe uravneniya i nekotorihe problemih matematicheskoyj fiziki. — 2005. — S. 56–63.]
15. *Дыбин В. Б., Джиргалова С. Б.* Составные дискретные свёртки в пространстве $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Часть 2 // РГУ Ростов-на-Дону, Деп. в ВИНИТИ 12.11.03. — 2003. — № 49. [*Dihbin V. B., Dzhirgalova S. B.* Sostavnihe diskretnihe svyortki v prostranstve $\{\alpha,\beta\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, Chastj 2 // RGU Rostov-na-Donu, Dep. v VINITI 12.11.03. — 2003. — No 49.]
16. *Дыбин В. Б., Бредихин И. Н.* Об одном разностном уравнении в пространстве $\{a,b\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // ЮФУ-Ростов-на-Дону, Деп. в ВИНИТИ 10.06.10. — 2010. — № 357-В2010. [*Dihbin V. B., Bredikhin I. N.* Ob odnom raznostnom uravnenii v prostranstve $\{a,b\}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // YuFU-Rostov-na-Donu, Dep. v

VINITI 10.06.10. — 2010. — No 357-V2010.]

17. *Дыбин В. Б.* Уравнение свёртки на вещественной прямой в пространстве функций, суммируемых с экспоненциальными весами // ЮФУ-Ростов-на-Дону-Деп. в ВИНИТИ 19.01.10. — 2010. — № 12-В2010. [*Dihbin V. B.* Uravnenie svyortki na vethestvennoyj pryamoyj v prostranstve funkciyj, summiruemihkh s ehksponencialjnihmi vesami // YuFU-Rostov-na-Donu-Dep. v VINITI 19.01.10. — 2010. — No 12-V2010.]
18. *Garnett J.* Bounded Analytic Functions. Pure and Applied Mathematics. — New York and London: Academic Press, Inc., 1981. — Vol. 96.

UDC 517.9

The Convolution Type Equation on R in Space of Functions those are Summed with Exponential Weights. Part 1

V. B. Dybin

Chair Algebra and Disscrete Mathematics
Southern Federal University
105/42, Bolshaya Sadovaya Str., Rostov-on-Don, 344006, Russia

In this paper (parts 1 and 2) the theory of one-sided invertibility of the convolution operator on R in space of functions those are summed with exponential weights is considered. In part 1 we present results on the boundedness of the convolution operator, the division theorem in the algebra of the analytic functions in the band and a Fredholm problem for Wiener-Hopf operator in studying space.

Key words and phrases: convolution operator, symbol, weight space, Fredholm property.