Математика

УДК 517.95

Обратная задача определения коэффициента поглощения в параболическом уравнении на плоскости

В. Л. Камынин, Т. И. Бухарова

Кафедра высшей математики
Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Каширское шоссе, 31, Москва, 115409, Россия

Изучены вопросы существования и единственности решения обратной задачи определения неизвестного коэффициента $\alpha(x)$ перед $u(t,x)$ в недивергентном параболическом уравнении на плоскости. В качестве дополнительной информации задаётся интеграл от решения по времени с некоторой заданной весовой функцией. Важно, что коэффициенты рассматриваемого уравнения зависят как от временной, так и от пространственной переменной. Получены достаточные условия существования и единственности обобщённого решения рассматриваемой задачи. Приведены примеры обратных задач, для которых применимы доказанные в работе теоремы.

Ключевые слова: обратная задача, параболические уравнения, интегральное наблюдение по пространственным переменным.

1. Введение. Постановка обратной задачи

В работе изучаются вопросы существования и единственности решения $\{u(t,x), \alpha(x)\}$ обратной задачи

$$\rho(t,x)u_t - u_{xx} + b(x)u_x + \mathrm{d}(t,x)u + \alpha(x)u = f(t,x), \quad (t,x) \in Q; \tag{1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in [0,l]; \tag{2}$$

$$u(t,0) = \beta_1(t),\ u(t,l) = \beta_2(t), \quad t \in [0,T]; \tag{3}$$

$$\int\limits_0^T u(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(x), \quad x \in [0,l]; \tag{4}$$

здесь $Q = [0,T] \times [0,l]$, T, l — некоторые числа.

Аналогичная обратная задача при других предположениях о входных данных и другими методами изучалась ранее в [1–3]. В настоящей работе установлены достаточные условия, при которых решение обратной задачи (1)–(4) существует и единственно. Обратим внимание, что применяемые в работе методы позволяют рассматривать уравнения с коэффициентами, зависящими как от x, так и от t.

Положим $Q_\tau = [0,\tau] \times [0,l], \tau \in [0,T]$, $Q_T \equiv Q$. Используемые в работе пространства Лебега, Соболева и Гольдера с соответствующими нормами будем понимать в общепринятом смысле (см., например, [4]). Введём множества $L^+_\infty([0,l]) = \{\alpha(x) \in L_\infty([0,l]) : \alpha(x) \geqslant 0\}$, $B_R = \{\alpha(x) \in L_\infty([0,l]) : 0 \leqslant \alpha(x) \leqslant R\}$, $R = \mathrm{const} > 0$.

В дальнейшем нам понадобятся известные неравенства:
1) арифметическое неравенство Коши

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2, \quad \varepsilon > 0, \quad a, b \in R; \tag{5}$$

Статья поступила в редакцию 4 ноября 2010 г.
Работа выполнена при поддержке АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/6827) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг. (проект П268).

2) неравенство Пуанкаре–Стеклова

$$\|z\|^2_{L_2([0,l])} \leqslant \frac{l^2}{2}\|z_x\|^2_{L_2([0,l])}, \ \ z(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2([0,l]); \tag{6}$$

3) а также легко выводимые (см., например, [5]) неравенства

$$\|z_x\|^2_{L_2([0,l])} \leqslant \frac{l^2}{2}\|z_{xx}\|^2_{L_2([0,l])}, \ z(x) \in W^2_{2,0}([0,l]); \tag{7}$$

$$\|z\|_{L_\infty([0,l])} \leqslant l^{1/2}\|z_x\|_{L_2([0,l])}, \ z(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2([0,l]); \tag{8}$$

$$\int\limits_0^T \|v(t,\cdot)\|_{L_\infty([0,l])}\mathrm{d}t \leqslant (lT)^{1/2}\|v_x\|_{L_2(Q)}, \ v(t,x) \in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}^1_2([0,l])). \tag{9}$$

Во всех дальнейших рассуждениях мы будем предполагать, что функции, входящие в исходные данные задачи (1)–(4), измеримы и удовлетворяют следующим условиям:

(A) $\quad 0 < \rho_1 \leqslant \rho(t,x) \leqslant \rho_2, \quad |\rho_t| \leqslant K_\rho, \quad (t,x) \in Q;$

(B) $\quad |b(x)| \leqslant K_b,\ |b'(x)| \leqslant K_b^*,\ x \in [0,l];\ |d(t,x)| \leqslant K_d,\ |f(t,x)| \leqslant K_f,\ (t,x) \in Q;$

(C) $\quad u_0(x) \in W^2_\infty([0,l]),\ \beta_i(t) \in W^1_\infty([0,T]), i = 1,2;$

$$\|u_0\|_{W^2_\infty([0,l])} \leqslant M_0,\ \|\beta_i\|_{W^1_\infty([0,T])} \leqslant K_\beta; \quad u_0(0) = \beta_1(0),\ u_0(l) = \beta_2(0);$$

(D) $\quad |\chi(t)| \leqslant K_\chi,\ |\chi'(t)| \leqslant K_\chi^*,\ t \in [0,T]; \quad \varphi(x) \in W^2_\infty([0,l]),\ 0 < \varphi_1 \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi_2,$

$$|\varphi'(x)| \leqslant K_\varphi,\ \varphi_3 \leqslant \varphi''(x) \leqslant \varphi_4, x \in [0,l];$$

$$\int_0^T \beta_1(t)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0), \quad \int_0^T \beta_2(t)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(l);$$

здесь ρ_1, ρ_2, M_0, K_β, φ_1, $\varphi_2 = \mathrm{const} > 0$; K_φ, K_ρ, K_b, K_d, K_f, $K_\chi = \mathrm{const} \geqslant 0$, φ_3, $\varphi_4 = \mathrm{const}$.

Определение. Обобщённым решением задачи (1)–(4) будем называть пару функций $\{u(t,x),\alpha(x)\}$, $u(t,x) \in W^{1,2}_2(Q) \cap C^{1,\gamma}(Q)$, $\gamma = \mathrm{const} \in (0,1)$, $\alpha(x) \in L^+_\infty([0,l])$ такую, что эта пара удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в Q, а функция $u(t,x)$ удовлетворяет условиям (2)–(4).

2. Оценки решения прямой задачи

Рассмотрим прямую задачу (1)–(3) с $\alpha(x) \in B_R$ при некотором $R > 0$. Пусть выполнены условия $(A) - (C)$. Тогда в силу [4] обобщённое решение $u(t,x)$ прямой задачи (1)–(3) существует, единственно и для него справедливы оценки

$$\|u\|_{W^{1,2}_2(Q)} \leqslant K_1(R), \tag{10}$$

$$\|u\|_{C^{1,\gamma}(Q)} \leqslant K_2(R), \tag{11}$$

где $K_1(R), K_2(R) = \mathrm{const} > 0$ зависят от входных данных задачи (1)–(3), в том числе и от R.

В силу принципа максимума (см., например, [6, с. 28–30] или [7, с. 60–61]) для решения $u(t,x)$ прямой задачи (1)–(3) справедлива также оценка

$$|u(t,x)| \leqslant M, \quad (t,x) \in Q, \tag{12}$$

где $M = \mathrm{const} > 0$ может быть выбрана не зависящей от R. Например, в [6]

$$M = \left(\max\{M_0, K_\beta\} + \frac{K_f}{\rho_1}T\right) e^{\frac{K_d}{\rho_1}T}. \tag{13}$$

Лемма 1. *Рассмотрим в Q прямую задачу*

$$\rho(t,x)v_t - v_{xx} + b(x)v_x + d(t,x)v + \alpha(x)v = g(t,x); \tag{14}$$

$$v(0,x) = v_0(x), \ x \in [0,l]; \tag{15}$$

$$v(t,0) = v(t,l) = 0, \ t \in [0,T], \tag{16}$$

где функции $\rho(t,x), b(x), d(t,x)$ удовлетворяют условиям $(A), (B)$, $\alpha(x) \in B_R$, $g(t,x) \in L_2(Q)$, $v_0(x) \in \overset{0}{W}{}^1_2([0,l])$.

Положим

$$\mu(R) = \frac{4\rho_2}{\rho_1^2}\left(K_b^2 + \frac{l^2}{2}K_d^2 + \frac{l^2}{2}R^2\right) - \frac{2}{\rho_2 l^2}. \tag{17}$$

Тогда для решения $v(t,x) \in W^{1,2}_{2,0}(Q)$ задачи (14)–(16) справедлива оценка

$$\|v_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])} \leqslant \left\{\|v_0'\|^2_{L_2([0,l])} + 4\rho_2\,\|g/\rho\|^2_{L_2(Q)}\right\} e^{\mu(R)\tau}. \tag{18}$$

Доказательство. Разделим уравнение(14) на $\rho(t,x)$, затем умножим получившееся соотношение на $-v_{xx}$ и проинтегрируем по $Q_\tau, \tau \in [0,T]$. После интегрирования по частям с учётом (15), (16) получим

$$\frac{1}{2}\int_0^l v_x^2(\tau,x)\mathrm{d}x + \int_{Q_\tau} \frac{v_{xx}^2}{\rho(t,x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^l v_0'^2(x)\mathrm{d}x + \int_{Q_\tau}\frac{b(x)}{\rho(t,x)}v_x v_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{Q_\tau}\frac{\alpha(x)}{\rho(t,x)}v v_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_{Q_\tau}\frac{d(t,x)}{\rho(t,x)}v v_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{Q_\tau}\frac{g(t,x)}{\rho(t,x)}v_{xx}\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{19}$$

Применяя для оценки четырёх последних слагаемых в правой части соотношения (19) неравенство (5) с $\varepsilon = 1/4\rho_2$, учитывая затем неравенства (6), (7) и условия леммы, имеем

$$\frac{1}{2}\|v_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])} + \frac{1}{\rho_2 l^2}\|v_x\|^2_{L_2(Q_\tau)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0'\|^2_{L_2([0,l])} + \frac{2\rho_2}{\rho_1}\left(R^2 + \frac{l^2}{2}K_d^2\right)\|v_x\|^2_{L_2(Q_\tau)} + 2\rho_2\,\|g/\rho\|^2_{L_2(Q)},$$

откуда с учётом определения $\mu(R)$ в (17)

$$\|v_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])} \leqslant \mu(R)\|v_x\|^2_{L_2(Q_\tau)} + \|v_0'\|^2_{L_2([0,l])} + 4\rho_2\,\|g/\rho\|^2_{L_2(Q)}. \tag{20}$$

Применяя к неравенству (20) лемму Гроноулла (см., например, [8, с. 112]), приходим к искомой оценке (18). Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* $(A)-(C)$, $\alpha(x)\in B_R$,. *Введём функции*

$$\Phi(t,x)=\frac{x}{l}\beta_2(t)+\frac{l-x}{l}\beta_1(t), w_0(x)=u_0(x)-\Phi(0,x).$$

Тогда для решения $u(t,x)$ *прямой задачи* (1)–(3) *справедлива оценка*

$$\|u_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])}\leqslant\frac{4K^2_\beta}{l}+$$
$$+\left\{2\|w_0'\|^2_{L_2([0,l])}+\frac{40\rho_2}{\rho_1^2}lT\left[K^2_\beta\left(\rho_1^2+\frac{2K_b^2}{l^2}+K_d^2+R^2\right)+K_f^2\right]\right\}e^{\mu(R)\tau},\tau\in[0,T]. \tag{21}$$

Доказательство. Введём функцию $w(t,x)=u(t,x)-\Phi(t,x)$, где $\Phi(t,x)$ из (2.6). Тогда, как нетрудно видеть, $w(t,x)$ является обобщённым решением из $W^{1,2}_{2,0}(Q)$ задачи (14)–(16) с $v_0(x)=w_0(x)$,

$$g(t,x)=f(t,x)-\rho(t,x)\Phi_t(t,x)-b(x)\Phi_x(t,x)-d(t,x)\Phi(t,x)-\alpha(x)\Phi(t,x).$$

Имеем $\Phi_t^2\leqslant K^2_\beta$, $\Phi_x^2\leqslant\dfrac{2K^2_\beta}{l^2}$, $\Phi^2\leqslant K^2_\beta$. Поэтому, учитывая условия $(A)-(C)$, получаем

$$\|(f-\rho\Phi_t-b\Phi_x-\mathrm{d}\Phi-\alpha\Phi)/\rho\|^2_{L_2(Q_\tau)}\leqslant 5lT\left[\frac{K_f^2}{\rho_1^2}+K^2_\beta\left(1+\frac{2K_b^2}{l^2\rho_1^2}+\frac{K_d^2}{\rho_1^2}+\frac{R^2}{\rho_1^2}\right)\right].$$

Применяя лемму 1 к функции $w(t,x)$, получаем

$$\|w_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\|w_0'\|^2_{L_2([0,l])}+\frac{20\rho_2}{\rho_1^2}lT\left[K_f^2+K^2_\beta\left(\rho_1^2+\frac{2K_b^2}{l^2}+K_d^2+R^2\right)\right]\right\}e^{\mu(R)\tau},$$

а учитывая, что $\|u_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])}\leqslant 2\|w_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])}+2\|\Phi_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])}$, приходим к оценке (21). Лемма 2 доказана. □

3. Существование решения обратной задачи

Рассмотрим обратную задачу (1)–(4) и выведем операторное уравнение для коэффициента $\alpha(x)$. Пусть $\alpha(x)$ — произвольная функция из $L^+_\infty([0,l])$. Умножим уравнение (1) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. Учитывая условия (3), (4) и предположения $(A)-(D)$, приходим к соотношению

$$\alpha(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\Big\{F(x)+\varphi''(x)-b(x)\varphi'(x)-\rho(T,x)\chi(T)u(T,x)+$$
$$+\rho(0,x)\chi(0)u_0(x)+\int\limits_0^T[(\rho\chi)_t-\mathrm{d}\chi]u\mathrm{d}t\Big\}, \tag{22}$$

где $F(x)=\displaystyle\int_0^T f(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t$.

Введём нелинейный оператор $\mathcal{A} : L^+_\infty([0,l]) \to L_\infty([0,l])$ по формуле

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\varphi(x)}\Big\{F(x) + \varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - \rho(T,x)\chi(T)u(T,x)+ \\ +\rho(0,x)\chi(0)u_0(x) + \int\limits_0^T [(\rho\chi)_t - \mathrm{d}\chi]u\mathrm{d}t\Big\}, \quad (23)$$

где $u(t,x)$ — обобщённое решение прямой задачи (1)–(3) с коэффициентом $\alpha(x) \in L^+_\infty([0,l])$ в уравнении (1).

В силу условий $(A)-(D)$ оператор $\mathcal{A}$ действительно действует из $L^+_\infty([0,l])$ в $L_\infty([0,l])$, а соотношение (22) можно переписать в виде

$$\alpha = \mathcal{A}(\alpha). \quad (24)$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия $(A)-(D)$. Тогда для того, чтобы пара $\{u(t,x), \alpha(x)\}$ была обобщённым решением задачи (1)–(4), необходимо и достаточно, чтобы эта пара удовлетворяла соотношениям (1)–(3), (24).*

Доказательство. Необходимость доказана выше при выводе соотношения (24).

Докажем достаточность. Пусть $\alpha^*(x) \in L^+_\infty([0,l])$ является решением уравнения (24). Рассмотрим функцию $u^*(t,x)$ как единственное обобщённое решение прямой задачи (1)–(3) с выбранным коэффициентом $\alpha(x) = \alpha^*(x)$ в уравнении (1). Положим

$$\varphi^*(x) = \int\limits_0^T u^*(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t. \quad (25)$$

Очевидно, $\varphi^*(x) \in W^2_2([0,l])$. Повторяя рассуждения, приведённые выше при выводе (22) (в этих рассуждениях достаточно, чтобы $\varphi^*(x) \in W^2_2([0,l])$), приходим к соотношению

$$\alpha^*(x)\varphi^*(x) = F(x) + {\varphi^*}''(x) - b(x){\varphi^*}'(x) - \rho(T,x)\chi(T)u^*(T,x)+ \\ + \rho(0,x)\chi(0)u_0(x) + \int\limits_0^T [(\rho\chi)_t - \mathrm{d}\chi]u^*\mathrm{d}t. \quad (26)$$

С другой стороны, $\alpha^*(x)$ является решением уравнения (24), поэтому учитывая определение оператора $\mathcal{A}$ в (23), имеем

$$\alpha^*(x)\varphi(x) = F(x) + \varphi''(x) - b(x)\varphi'(x) - \rho(T,x)\chi(T)u^*(T,x)+ \\ + \rho(0,x)\chi(0)u_0(x) + \int\limits_0^T [(\rho\chi)_t - \mathrm{d}\chi]u^*\mathrm{d}t. \quad (27)$$

Заметим, что из определения функции $\varphi^*(x)$ в (25) и условия (D) следует, что

$$\varphi^*(0) = \int\limits_0^T \beta_1(t)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(0), \quad \varphi^*(l) = \int\limits_0^T \beta_2(t)\chi(t)\mathrm{d}t = \varphi(l). \quad (28)$$

Положим $\psi(x)=\varphi(x)-\varphi^*(x)$. Тогда вычитая (27) из (26) и учитывая (28), получаем, что $\psi(x)$ является на отрезке $[0,l]$ решением краевой задачи

$$-\psi''+b(x)\psi'+\alpha^*(x)\psi=0,\quad \psi(0)=\psi(l)=0.$$

Напомним, что $\alpha^*(x)\geqslant 0$ на $[0,l]$. Поэтому $\psi(x)\equiv 0$ на $[0,l]$ (см., например, [9, с.173]), а следовательно, пара $\{u^*(t,x),\alpha^*(x)\}$ является обобщённым решением обратной задачи (1)–(4). Лемма 3 доказана. $\square$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия* $(A)-(D)$. *Пусть* M *— константа из оценки* (12), *не зависящая от* R *(например, определена формулой* (13)*). Предположим, что выполняется неравенство*

$$F_1+\varphi_3\geqslant K_bK_\varphi+(K_dK_\chi+K_\rho K_\chi+\rho_2K_\chi^*)MT+\rho_2|\chi(T)|M+\rho_2|\chi(0)|M_0,\quad (29)$$

где

$$F_1=\inf_{[0,l]}\int\limits_0^T f(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t\equiv\inf_{[0,l]}F(x).\quad (30)$$

Тогда $\forall\,\alpha(x)\in L_\infty^+([0,l])$ $\mathcal{A}(\alpha)\geqslant 0$.

Доказательство. Из (29) с учётом (30) и оценки (12) вытекает неравенство

$$F(x)+\varphi''(x)-b(x)\varphi'(x)+\\+\int\limits_0^T(\rho_t\chi+\rho\chi_t-\mathrm{d}\chi)u\mathrm{d}t-\rho(T,x)\chi(T)u(T,x)+\rho(0,x)\chi(0)u_0(x)\geqslant 0,$$

из которого в силу определения оператора A следует утверждение леммы. $\square$

Лемма 5. *Пусть выполнены условия* $(A)-(D)$. *Пусть* M *— константа из оценки* (12), *не зависящая от* R. *Тогда* $\forall\,\alpha(x)\in L_\infty^+([0,l])$ *справедлива оценка*

$$A(\alpha)\leqslant R_0,\quad (31)$$

где

$$R_0=\frac{1}{\varphi_1}\left[K_fK_\chi T+K_bK_\varphi+(K_dK_\chi+K_\rho K_\chi+\rho_2K_\chi^*)MT+\right.\\\left.+\rho_2|\chi(T)|M+\rho_2|\chi(0)|M_0\right].\quad (32)$$

Доказательство. Оценка (31) есть непосредственное следствие определения оператора $\mathcal{A}$, условий $(A)-(D)$ и оценки (12). $\square$

Лемма 6. *Пусть выполнены условия* $(A)-(D)$ *и* (29), *где* M *из* (12). *Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *отображает множество* $L_\infty^+([0,l])$ *в множество* B_{R_0}, *где* R_0 *из* (32).

Доказательство. Утверждение леммы 6 является следствием лемм 3 и 4. $\square$

Лемма 7. *Пусть выполнены условия* $(A)-(D)$. *Тогда оператор* $\mathcal{A}$ *непрерывен на множестве* B_R $\forall R>0$.

Доказательство. Пусть $\alpha^{(1)}(x)$, $\alpha^{(2)}(x)\in B_R$, а $u^{(1)}(t,x),u^{(2)}(t,x)$ — соответствующие обобщённые решения прямой задачи (1)–(3). Положим $\hat{u}(t,x)=$

$u^{(1)}(t,x) - u^{(2)}(t,x), \hat{\alpha}(x) = \alpha^{(1)}(x) - \alpha^{(2)}(x)$. Для данных функций выполняются соотношения

$$\rho(t,x)\hat{u}_t - \hat{u}_{xx} + b(x)\hat{u}_x + \mathrm{d}(t,x)\hat{u} + \alpha^{(1)}(x)\hat{u} = -\hat{\alpha}(x)u^{(1)}(t,x),\ (t,x) \in Q;$$

$$\hat{u}(0,x) = 0,\ x \in [0,l]; \quad \hat{u}(t,0) = \hat{u}(t,l) = 0,\ t \in [0,T].$$

В силу леммы 1 имеем оценку $\|\hat{u}_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])} \leqslant \dfrac{4\rho_2}{\rho_1^2} M^2 \|\hat{\alpha}\|^2_{L_\infty([0,l])} l^2 T^2 e^{\mu(R)\tau}$, из которой следует, что $\sup_{0\leqslant\tau\leqslant T} \|\hat{u}_x(\tau,\cdot)\|^2_{L_2([0,l])} \to 0$ при $\|\hat{\alpha}\|^2_{L_\infty([0,l])} \to 0$. С другой стороны, учитывая $(A) - (D)$ и неравенства (8), (9), получаем

$$\|\mathcal{A}(\alpha^{(1)}) - \mathcal{A}(\alpha^{(2)})\|_{L_\infty([0,l])} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\|\hat{u}(T,\cdot)\|_{L_\infty([0,l])} + c_2\int\limits_0^T \|\hat{u}(t,\cdot)\|_{L_\infty([0,l])}\mathrm{d}t \leqslant c_3\|\hat{u}_x(T,\cdot)\|_{L_2([0,l])} + c_4\|\hat{u}_x\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно, $\|\mathcal{A}(\alpha^{(1)}) - \mathcal{A}(\alpha^{(2)})\|_{L_\infty([0,l])} \to 0$ при $\|\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\|_{L_\infty([0,l])} \to 0$. Лемма доказана. □

Лемма 8. *Пусть выполнены условия $(A) - (D)$, $R > 0$ — произвольно. Тогда оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором на множестве B_R.*

Лемма 9. *Утверждение леммы есть прямое следствие оценки* (11), *компактности вложения пространства $C^{1,\gamma}(Q)$ в $C(Q)$, определения оператора $\mathcal{A}$ и леммы 7.*

Теорема 1. *Пусть выполнены условия $(A) - (D)$ и неравенство* (29). *Тогда обобщённое решение $\{u(t,x), \alpha(x)\}$ обратной задачи* (1)–(4) *существует, причём справедлива оценка*

$$0 \leqslant \alpha(x) \leqslant R_0,\ x \in [0,l], \tag{33}$$

где R_0 — константа, определённая в (32), *а также справедливы оценки* (10), (11) *при $R = R_0$.*

Доказательство. В силу лемм 4–8 оператор $\mathcal{A}$ является вполне непрерывным оператором, переводящим множество B_{R_0} в себя. Поэтому по теореме Шаудера о неподвижной точке (см. [10, с. 193]) существует решение $\alpha(x)$ уравнения (24).

Но тогда в силу леммы 3 существует обобщённое решение $\{u(t,x), \alpha(x)\}$ задачи (1)–(4), причём для функции $u(t,x)$ справедливы оценки (10), (11) с $R = R_0$. Теорема доказана. □

4. Единственность решения обратной задачи

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $(A) - (D)$ и неравенство* (29). *Предположим дополнительно, что входные данные обратной задачи* (1)–(4) *удовлетворяют неравенству*

$$\frac{2M\rho_2^{1/2}}{\varphi_1\rho_1} lT\left[(K_\rho + K_d)K_\chi + \rho_2 K_\chi^*\right]\left\{\int\limits_0^T e^{\mu_0\tau}\mathrm{d}\tau\right\}^{1/2} + \frac{2M\rho_2^{3/2}}{\varphi_1\rho_1} lT^{1/2}|\chi(T)|e^{\frac{\mu_0 T}{2}} < 1, \tag{34}$$

где M из (12), *R_0 из* (32), *$\mu_0 = \mu(R_0)$, а $\mu(R)$ определена в* (17).

Тогда решение $\{u(t,x), \alpha(x)\}$ обратной задачи (1)–(4), *существование которого обеспечено теоремой 1, будет единственным.*

Доказательство. В условиях теоремы 2 справедлива также и теорема 1, поэтому решение $\{u(t,x),\alpha(x)\}$ обратной задачи (1)–(4) существует и для него выполняются оценки (33) и (10), (11) при $R=R_0$.

Предположим теперь, что вопреки утверждению теоремы 2 существует два различных решения $\{u^{(1)}(t,x),\alpha^{(1)}(x)\}$ и $\{u^{(2)}(t,x),\alpha^{(2)}(x)\}$ обратной задачи (1)–(4). Тогда обязательно

$$\alpha^{(1)}(x)\not\equiv\alpha^{(2)}(x),\quad x\in[0,l],\tag{35}$$

иначе и $u^{(1)}(t,x)\equiv u^{(2)}(t,x)$ в Q в силу единственности решения прямой задачи (1)–(3) (см. [4]).

Положим

$$z(t,x)=u^{(1)}(t,x)-u^{(2)}(t,x),\quad \sigma(x)=\alpha^{(1)}(x)-\alpha^{(2)}(x).$$

Тогда данная пара функций удовлетворяет соотношениям

$$\rho((t,x))z_t-z_{xx}+b(x)z_x+d(t,x)z+\alpha^{(1)}(x)z=-\sigma(x)u^{(2)}(t,x),\quad (t,x)\in Q;\tag{36}$$

$$z(0,x)=0,\quad x\in[0,l];\quad z(t,0)=0,\ z(t,l)=0,\quad t\in[0,T];\tag{37}$$

$$\int\limits_0^T z(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t=0,\quad x\in[0,l].\tag{38}$$

Умножим соотношение (36) на $\chi(t)$ и проинтегрируем по t в пределах от 0 до T. Учитывая (37), (38) и (4), после интегрирования по частям придём к соотношению

$$\sigma(x)=\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int\limits_0^T(\rho_t\chi+\rho\chi'-\mathrm{d}\chi)z\mathrm{d}t-\rho(T)\chi(T)z(T,x)\right].\tag{39}$$

Учитывая условия $(A)-(D)$ и неравенства (8), (9), получаем отсюда оценку

$$\begin{gathered}\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])}\leqslant\frac{1}{\varphi_1}\left[(K_\rho+K_d)K_\chi+\rho_2K_\chi^*\right]\times\\ \times\int\limits_0^T\|z(t,\cdot)\|_{L_\infty([0,l])}\mathrm{d}t+\frac{1}{\varphi_1}\rho_2|\chi(T)|\|z(T,\cdot)\|_{L_\infty([0,l])}\leqslant\\ \leqslant\frac{1}{\varphi_1}\left[(K_\rho+K_d)K_\chi+\rho_2K_\chi^*\right](lT)^{1/2}\|z_x\|_{L_2(Q)}+\frac{1}{\varphi_1}\rho_2|\chi(T)|l^{1/2}\|z_x(T,\cdot)\|_{L_2([0,l])}.\end{gathered}\tag{40}$$

Заметим, что функция $z(t,x)$ является обобщённым решением задачи (14)–(16) с $v_0(x)=0$ и $g(t,x)=-\sigma(x)u^{(2)}(t,x)$, поэтому, применяя лемму 1, получаем оценки

$$\|z_x(T,\cdot)\|_{L_2([0,l])}\leqslant\frac{2\rho_2^{1/2}}{\rho_1}\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])}(lT)^{1/2}Me^{\mu_0T/2},\tag{41}$$

$$\|z_x\|_{L_2(Q)}\leqslant\frac{2\rho_2^{1/2}}{\rho_1}\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])}(lT)^{1/2}M\left[\int\limits_0^T e^{\mu_0\tau}\mathrm{d}\tau\right]^{1/2}.\tag{42}$$

Мы здесь ещё учли, что для функции $\alpha^{(1)}(x)$ справедлива оценка (33).

Подставляя оценки (41) и (42) в (40), получим

$$\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])} \leqslant \frac{1}{\varphi_1}\left\{\left[(K_\rho + K_d)K_\chi + \rho_2 K_\chi^*\right]\frac{2\rho_2^{1/2}}{\rho_1} lTM\left[\int\limits_0^T e^{\mu_0\tau}\mathrm{d}\tau\right]^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{2\rho_2^{3/2}}{\rho_1}|\chi(T)|lT^{1/2}Me^{\mu_0 T/2}\right\}\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])},$$

откуда в силу условия (34) и предположения (35) приходим к неравенству

$$\|\sigma\|_{L_\infty([0,l])} < \|\sigma\|_{L_\infty([0,l])},$$

что невозможно. Теорема доказана. □

5. Некоторые примеры

Приведём примеры обратных задач, для которых справедливы доказанные в работе теоремы существования и единственности.

Пример 1. Рассмотрим в $Q = [0,T] \times [0,l]$ обратную задачу

$$\left(2 + \sin\frac{xt}{T}\right)u_t - u_{xx} + \alpha(x)u = 0, \quad (t,x) \in Q; \tag{43}$$

$$u(0,x) = 1,\ x \in [0,l];\ u(t,0) = u(t,l) = 1,\ t \in [0,T]; \tag{44}$$

$$\int\limits_0^T u(t,x)t(T-t)\mathrm{d}t = \frac{T^3}{12}\left(\frac{(x-l/2)^2}{(l/2)^2} + 1\right). \tag{45}$$

Очевидно, что для задачи (43)–(45) выполнены условия $(A) - (D)$. В качестве константы M в (12) можно выбрать $M = 1$ (см. (13)). Как нетрудно вычислить, в нашем случае

$$R_0 = \frac{12}{T}\left(\frac{l}{4} + 3\right), \quad \mu_0 = 6l^2R_0^2 - \frac{2}{3l^2}. \tag{46}$$

Тогда неравенство (29) для задачи (43)–(45) запишется в виде

$$\frac{2T}{3l^2} \geqslant \frac{l}{4} + 3,$$

и, очевидно, оно выполнено либо при малых l (T–фиксировано), либо при больших T (l–фиксировано).

Неравенство (34) запишется в виде

$$24\sqrt{3}\frac{l}{T}\left(\frac{l}{4} + 3\right)\left\{\int\limits_0^T e^{\mu_0\tau}\mathrm{d}\tau\right\}^{1/2} < 1, \tag{47}$$

где μ_0 определена в (46).

Если зафиксировать $T > 0$, то при малых l величина $\mu_0 < 0$ (см. (46)) и неравенство (47), очевидно, будет выполнено за счёт малого множителя $24\sqrt{3}l$.

Если зафиксировать $l > 0$, то при больших T величина μ_0 также будет отрицательной (при $T \to +\infty$ $\mu_0 \to -2/3l^2$), и неравенство (47) будет выполнено за счёт малого множителя $\dfrac{24\sqrt{3}}{T}$.

Таким образом, при малых l (и фиксированном T) или при больших T (и фиксированном l) для задачи (43)–(45) будут выполнены условия теорем 1 и 2, а следовательно, в этих случаях решение данной обратной задачи существует и единственно.

Пример 2. Рассмотрим в Q обратную задачу для уравнения (43) с краевыми условиями (44), но с дополнительным условием

$$\frac{1}{T}\int_0^T u(t,x)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{(x-l/2)^2}{(l/2)^2}+1\right). \tag{48}$$

Заметим, что условие (48) имеет простой физический смысл: это взятие среднего по времени от функции $u(t,x)$.

Как нетрудно видеть, для задачи (43), (44), (48) условия $(A)-(D)$ выполнены, а также в данном случае

$$R_0 = \frac{2l}{T}(l+6), \quad \mu_0 = 6l^2R_0^2 - \frac{2}{3l^2}. \tag{49}$$

Неравенство (29) для задачи (43), (44), (48) запишется в виде

$$\frac{4}{l^2} \geqslant \frac{l+6}{T}, \tag{50}$$

а неравенство (34) — в виде

$$4\sqrt{3}\frac{l^2}{T}\left\{\int_0^T e^{\mu_0\tau}\mathrm{d}\tau\right\}^{1/2} + 12\sqrt{3}\frac{l}{T^{1/2}}e^{\frac{\mu_0 T}{2}} < 1, \tag{51}$$

Как и в примере 1, неравенства (50) и (51) будут выполнены либо при малых l (и фиксированном T), либо при больших T (и фиксированном l). Следовательно, в указанных случаях для задачи (43), (44), (48) будут выполнены условия теорем 1 и 2 и будет существовать единственное решение этой задачи.

Литература

1. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении I // Сиб. матем. журн. — 1992. — Т. 33, № 3. — С. 146–155. [*Prilepko A. I., Kostin A. B.* Ob obratnihkh zadachakh opredeleniya koehfficienta v parabolicheskom uravnenii I // Sib. matem. zhurn. — 1992. — T. 33, No 3. — S. 146–155.]
2. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициента в параболическом уравнении II // Сиб. матем. журн. — 1993. — Т. 34, № 5. — С. 147–162. [*Prilepko A. I., Kostin A. B.* Ob obratnihkh zadachakh opredeleniya koehfficienta v parabolicheskom uravnenii II // Sib. matem. zhurn. — 1993. — T. 34, No 5. — S. 147–162.]
3. *Камынин В. Л., Костин А. Б.* Две обратные задачи определения коэффициента в параболическом уравнении // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46, № 3. — С. 372–383. [*Kamihnin V. L., Kostin A. B.* Dve obratnihe

zadachi opredeleniya koehfficienta v parabolicheskom uravnenii // Differencialjnihe uravneniya. — 2010. — T. 46, No 3. — S. 372–383.]
4. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Труды сем. им. И.Г.Петровскогою. — 1979. — Т. 31, № 5. — С. 217–272. [*Kruzhkov S. N.* Kvazilineyjnihe parabolicheskie uravneniya i sistemih s dvumya nezavisimihmi peremennihmi // Trudih sem. im. I.G.Petrovskogoyu. — 1979. — T. 31, No 5. — S. 217–272.]
5. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения старшего коэффициента в параболическом уравнении // Математические заметки. — 2008. — Т. 84, № 1. — С. 48–58. [*Kamihnin V. L.* Ob obratnoyj zadache opredeleniya starshego koehfficienta v parabolicheskom uravnenii // Matematicheskie zametki. — 2008. — T. 84, No 1. — S. 48–58.]
6. *Кружков С. Н.* Нелинейные уравнения с частными производными. Ч.1. — М.: изд-во МГУ, 1969. — 168 с. [*Kruzhkov S. N.* Nelineyjnihe uravneniya s chastnihmi proizvodnihmi. Ch.1. — M.: izd-vo MGU, 1969. — 168 s.]
7. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. — М.: МИР, 1962. — 428 с. [*Fridman A.* Uravneniya s chastnihmi proizvodnihmi parabolicheskogo tipa. — M.: MIR, 1962. — 428 s.]
8. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с. [*Ladihzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Uraljceva N. N.* Lineyjnihe i kvazilineyjnihe uravneniya parabolicheskogo tipa. — M.: Nauka, 1967. — 736 s.]
9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптичесие дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989. — 463 с. [*Gilbarg D., Trudinger N.* Ehllipticheskie differencialjnihe uravneniya s chastnihmi proizvodnihmi vtorogo poryadka. — M.: Nauka, 1989. — 463 s.]
10. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982. — 272 с. [*Lyusternik L. A., Sobolev V. I.* Kratkiyj kurs funkcionaljnogo analiza. — M.: Vihsshaya shkola, 1982. — 272 s.]

UDC 517.95

Inverse Problem of Determination of Absorbtion Coefficient in Parabolic Equation in a Plane

V. L. Kamynin, T. I. Bukharova

Department of Mathematics
National Research Nuclear University "MEPhI"
31, Kashirskoe highway, Moscow, 115409, Russia

We consider existence and uniqueness of solution for the inverse problem of determination of the unknown coefficient $\alpha(x)$ at the $u(t,x)$ in nondivergent parabolic equation in a plane. The additional information is given by $\int_0^T u(t,x)\chi(t)\mathrm{d}t$, with $\chi(t)$ being the weight function. It should be noted that the coefficients of the equation depend both on time as well as spatial variable. For the problem concerned we obtain conditions sufficient for the existence and the uniqueness of generalized solution. We adduce the examples of the inverse problems satisfying the conditions imposed.

Key words and phrases: inverse problem, parabolic equations, integral observation with respect to spatial variables.