Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3 (1). 2010. С. 79–81

УДК 519.6

О моделировании сейсмоустойчивости строений

С. П. Карнилович[*], К. П. Ловецкий[†], Л. А. Севастьянов[†], Е. Л. Щесняк[‡]

[*] *Кафедра экспериментальной физики*

[†] *Кафедра систем телекоммуникаций*

[‡] *Российский университет дружбы народов*
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, Москва, Россия, 117198

В работе обсуждается влияние вынуждающих периодических колебаний опоры строения при землетрясениях на характер колебаний самого строения в случае простейших математических моделей и с учётом последующей реализации расчётов на компьютере.

Ключевые слова: свободные колебания, вынужденные колебания, метод Галёркина.

Большинство научных исследований в области сейсмоустойчивости конструкций часто не доведено до конца в основном по двум причинам: теоретические результаты слишком сложны для практического использования; теоретические результаты касаются чрезмерно упрощённых моделей. Данная работа также представляет собой лишь первый шаг на пути к практическому применению. В ней рассмотрена простейшая модель здания в виде однородного стержня с закреплённым нижним концом. Такая модель обычно служит для введения в предмет при рассмотрении колебаний здания под действием сейсмических волн землетрясения: поперечных и продольных. Изучаются обычно частоты собственных колебаний здания с тем, чтобы они не совпадали с частотами вынуждающих колебаний. В данной работе рассматривается другая постановка задачи о поведении здания под воздействием вынуждающих колебаний точки закрепления в горизонтальном и вертикальном направлении в случае, когда частоты собственных и вынуждающих колебаний сближаются, т.е. рассматриваются явления резонанса при колебаниях стержня под действием вынужденных колебаний точки закрепления.

В решении многих практически важных задач к настоящему времени достигнуты значительные успехи. В тех случаях, когда получение точного решения затруднительно, развиваются приближенные методы. В некоторых случаях решения были получены с помощью экспериментальных методов. Мы предполагаем пойти по пути феноменологических моделей с привлечением экспериментально подобранных подгоночных констант. В работе Михлина С.Г. [1] рассмотрен пример закреплённого в нижнем конце стержня переменного сечения.

Уравнение свободных колебаний стержня переменного сечения имеет вид

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+\rho S(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Здесь ось x направлена по оси стержня, $z(x,t)$ — поперечные смещения его точек, $I(x)$ и $S(x)$ — момент инерции и площадь поперечного сечения с абсциссой x, E и ρ — модуль Юнга и отнесённая к единице длины плотность материала стержня. Допустим для определённости, что один конец стержня закреплён, а другой — свободен. Обозначим через L длину стержня и поместим начало координат в его закреплённом конце. Тогда краевые условия нашей задачи запишутся в виде:

$$z|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0, \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{x=L}=0. \tag{3}$$

Как обычно, решение ищем в виде

$$z(x,t) = u(x)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t + \alpha\right), \quad \alpha = const \tag{4}$$

Тогда уравнение (1) и краевые условия (2) и (3) переходят в следующие:

$$E\frac{d^2}{\mathrm{d}x^2}\left[I(x)\frac{d^2u}{\mathrm{d}x^2}\right] - \rho\lambda S(x)u = 0, \tag{5}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \tag{6}$$

$$u''(L) = 0, \quad u'''(L) = 0. \tag{7}$$

Решая задачу по методу Бубнова–Галёркина, возьмём в качестве координатных собственные функции оператора $\frac{d^4u}{\mathrm{d}x^4}$ при краевых условиях (6) и (7). Эти функции образуют полную ортонормированную систему. Как известно [2], указанные функции имеют вид

$$\begin{cases} \phi_{2m-1}(\xi) = \dfrac{\sin\alpha_k\xi}{\sin\frac{\alpha_k}{2}} + \dfrac{\operatorname{ch}\alpha_k\xi}{\operatorname{ch}\frac{\alpha_k}{2}}, & k = 2m-1, \\ \phi_{2m}(\xi) = \dfrac{\cos\alpha_k\xi}{\cos\frac{\alpha_k}{2}} + \dfrac{\operatorname{sh}\alpha_k\xi}{\operatorname{sh}\frac{\alpha_k}{2}}, & k = 2m, \end{cases} \tag{8}$$

где α_k — корни уравнения [3]

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \operatorname{ch}\dfrac{\alpha}{2}, & k = 2m-1, \\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\operatorname{ch}\dfrac{\alpha}{2}, & k = 2m; \end{cases}$$

в формулах (8) за основной принят отрезок $-1/2 \leqslant \xi \leqslant 1/2$, причём условия (6) относятся к концу $\xi = -1/2$, а условия (7) — к концу $\xi = +1/2$. Чтобы использовать функции (8) в нашей задаче, нужно, очевидно, положить $\xi = \frac{2x-L}{2L}$.

Полагая приближённо $u(x) \approx \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\psi_k(x), \quad \psi_k(x) = \phi_k\left(\frac{2x-L}{2L}\right)$, получим следующее уравнение для определения λ:

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\lambda B_{11} & A_{12}-\lambda B_{12} & \dots & A_{1n}-\lambda B_{1n} \\ A_{21}-\lambda B_{21} & A_{22}-\lambda B_{22} & \dots & A_{2n}-\lambda B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1}-\lambda B_{n1} & A_{n2}-\lambda B_{n2} & \dots & A_{nn}-\lambda B_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

где $A_{ik} = E\int\limits_0^L I(x)\psi_i''(x)\psi_k''(x)\mathrm{d}x,\ A_{ik} = \int\limits_0^L \rho S(x)\psi_i(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x.$

В книге [4] рассмотрена альтернативная простая модель — модель колебаний вдоль вертикальной оси. Причём рассмотрены не только свободные, но и вынужденные колебания. Показано, что действие на сосредоточенную колеблющуюся массу вынуждающей гармонической силы (данная задача хорошо изучена) эквивалентно гармоническому колебанию опоры (в вертикальном направлении). В этом случае получается уравнение с ненулевой правой частью — задача о вынужденных колебаниях линейного осциллятора.

Сейсмические волны от землетрясений являются волнами продольными и поперечными. И если вертикальные колебания хорошо описываются в модели вертикально колеблющегося строения, то горизонтальные колебания грунта удобнее описывать в модели поперечных колебаний строения, представленной в книге [1].

В этом случае вынуждающие колебания опоры естественным образом вносятся в неоднородные граничные условия в точке закрепления нижнего конца стержня.

Таким образом, мы заменяем модель из книги [1] модифицированной моделью:

$$E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[I(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]+\rho S(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0$$

$$z|_{x=0}=a_j\sin\left(\omega_j t\right), \quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{x=L}=0, \quad \left.\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\right|_{x=L}=0,$$

коэффициенты которой a_j, ω_j, подбираем с помощью экспериментальных методов статистической обработки данных о соответствующих сейсмических волнах землетрясений.

Решение ищем в виде $z(x,t)=u(x)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,t+\alpha\right)+v_j\left(t\right)(1-x)$. Тогда уравнение (1) переходит в уравнение (5), а краевые условия (2) переходят в следующие краевые условия: $u(0)=0$, $u'(0)=0$, $v_j\left(t\right)=a_j\sin\left(\omega_j t\right)$, $v_j'\left(t\right)=0$.

В некоторых случаях удобнее иметь дело с ускорениями опоры, так как для получения информации о движении опоры используется акселерометр. Перемещения грунта при землетрясении, как правило, измеряются и записываются в виде трёх взаимно-ортогональных составляющих по осям север-юг, восток-запад и вертикальной составляющей ускорений грунта. Поэтому задачу о движении основания можно и нужно формулировать как задачу о периодических ускорениях.

Безусловно, применение метода Галёркина, т.е. замена бесконечномерной задачи на её конечномерное приближение вносит дополнительную погрешность в модель [5], однако исходная погрешность линейной модели превышает её.

Литература

1. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1979.
2. *Замятина В. Н.* О фундаментальных функциях оператора X^{IV} // Труды инж.-пром. стр-ва. — 1934. — № 6. — С. 75–95.
3. *Фаддеева В. Н.* О фундаментальных функциях оператора X^{IV} // Сборник работ по приближенному анализу Ленинградского отделения института, Тр. МИАН СССР. — 28. М.–Л.: Изд-во АН ССС, 1949. — № 28. — С. 157–159.
4. *Тимошенко С. П., Х. Янг Д., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985.
5. *Алейников И. А., Власова Е. В.* О приближенном решении краевой задачи для неоднородного бигармонического уравнения // Математическое моделирование. — 2004. — Т. 16, № 8. — С. 94–98.

UDC 519.6

On Constructions' Earthquake Resistance Modeling

S. P. Karnilovich*, **K. P. Lovetskiy**†, **L. A. Sevastianov**†, **E. L. Shchesnyak**‡

* *Experimental Physics Department*

† *Telecommunication Systems Department*

‡ *Peoples' Friendship University of Russia*

6, Miklukho–Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

In the paper we discuss the influence of forcing oscillations of a construction's support during earthquake on oscillations of a construction itself in case of the simplest mathematical models with respect to subsequent computer realization.

Key words and phrases: free oscillations, forced oscillations, Galerkin's method.