УДК 621.39

Рекуррентный алгоритм расчета вероятностей блокировок на звене мультисервисной сети с многоадресными соединениями

О. Н. Плаксина, К. Е. Самуйлов

Кафедра систем телекоммуникаций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

При расчете вероятностных характеристик моделей мультисервисных сетей эффективными являются точные рекуррентные алгоритмы. В статье получен рекуррентный алгоритм для мультисервисной модели отдельного звена сети с многоадресными соединениями (англ. multicast connections, multicasting — мультивещание). Показан пример погрешности вычислений в случае применения алгоритма Кауфмана-Робертса.

Ключевые слова: мультисервисная сеть, отдельное звено сети, мультивещание, вероятность блокировки, рекуррентный алгоритм.

1. Введение

При расчете вероятностных характеристик моделей мультисервисных сетей наиболее эффективными являются рекуррентные алгоритмы, которые даже при больших размерностях пространства состояний модели позволяют быстро получить точные значения искомых характеристик. Для звена сети с одноадресными соединениями широко известен алгоритм Кауфмана–Робертса (см., например, [1]), а анализу и методам расчета моделей звена сети с многоадресными соединениями посвящен ряд работ [1–6]. Обратим внимание на статью [4], где построена модель звена сети с одноадресными и многоадресными соединениями и предложен рекуррентный алгоритм для расчета ее вероятностных характеристик. Заметим, что независимо и практически одновременно с результатами [4] для звена сети только с многоадресными соединениями рекуррентный алгоритм был получен и опубликован на английском языке в [5]. В данной статье по сравнению с [4, 5] предложен новый подход к выводу и применению рекуррентного алгоритма для расчета характеристик мультисервисной модели отдельного звена сети мультивещания.

2. Модель звена сети мультивещания

Рассматривается звено сети мультивещания [1, 3] емкостью C единиц, по которому однородным пользователям предоставляются услуги из множества $\mathscr{M} = \{1, \ldots, M\}$, причем m-услуга требует b_m условных единиц емкости звена. Каждая услуга может находиться в состоянии «1» — включено, если она предоставляется хотя бы одному из пользователей, или в состоянии «0» — выключено, в противном случае.

Модель описывается в терминах системы массового обслуживания $M|G|C|0|\Pi$ с «прозрачными» заявками [2], состоящей из C приборов, на которые поступают $M = |\mathscr{M}|$ пуассоновских потоков заявок с интенсивностями λ_m, $m \in \mathscr{M}$. Все m-заявки, находящиеся в системе, одновременно обслуживаются на b_m приборах, а длительности их обслуживания независимы и распределены по произвольному закону со средним значением μ_m^{-1}. В марковском случае модель описывается с помощью случайного процесса $\left\{N(t) = N_m(t)_{m\in\mathscr{M}}, t \geqslant 0\right\}$ на множестве состояний $\mathscr{N} := \{\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_M) : c(\mathbf{n}) \leqslant C\}$, где n_m — число m-заявок в системе и

Статья поступила в редакцию 2 июня 2010 г.

$c(\mathbf{n}) := \sum\limits_{m=1}^{M} b_m u(n_m)$ — число занятых обслуживанием приборов, когда система находится в состоянии $\mathbf{n} \in \mathscr{N}$. Нетрудно убедиться, что стационарное распределение вероятностей процесса $N(t)$ имеет мультипликативный вид

$$\pi(\mathbf{n}) = G^{-1}(\mathscr{N}) \prod_{m=1}^{M} \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!}, \quad \mathbf{n} \in \mathscr{N}; \quad G(\mathscr{N}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{N}} \prod_{m=1}^{M} \frac{\rho_m^{n_m}}{n_m!}, \tag{1}$$

причем в [2] показана инвариантность распределения (1) относительно закона распределения длительности обслуживания заявок.

Поскольку условием потери m-заявки помимо недостаточного числа свободных приборов является отсутствие в системе заявок данного типа, то множество потерь m-заявок определяется формулой

$$\mathscr{B}_m := \{\mathbf{n} \in \mathscr{N} : c(\mathbf{n}) > C - b_m, n_m = 0\}, \tag{2}$$

а искомой характеристикой является вероятность блокировки m-заявки «по времени» [1]:

$$B_m := P\{\mathbf{n} \in \mathscr{B}_m\} = \sum_{\mathbf{n} \in \mathscr{B}_m} \pi(\mathbf{n}). \tag{3}$$

Задача состоит в расчете нормирующей константы $G(\mathscr{N})$ распределения $\pi(\cdot)$ и вероятностей блокировок B_m, $m \in \mathscr{M}$.

3. Пространство состояний модели

Ниже мы проводим разбиение пространства состояний модели в виде, удобном для вывода рекуррентного алгоритма, как это показано в разделе 4 данной статьи. Для этого рассмотрим вектор $\mathbf{n}(m) := (n_1, \ldots, n_m)$, состоящий из $m \leqslant M$ первых координат вектора $\mathbf{n} \in \mathscr{N}$, введем множество $\mathscr{N}(m, c) := \{\mathbf{n}(m) : c(\mathbf{n}(m)) = c\}$, где $c(\mathbf{n}(m)) := \sum\limits_{i=1}^{m} u(n_i) b_i$, и заметим, что множество $\mathscr{N}(m, c)$ представимо в виде:

$$\mathscr{N}(m, c) = \mathscr{N}_{+i}(m, c) \cup \mathscr{N}_{-i}(m, c), \quad m = 1, \ldots, M, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{4}$$

где

$$\mathscr{N}_{-i}(m, c) := \{\mathbf{n}(m) \in \mathscr{N}(m, c) : n_i = 0\},$$
$$\mathscr{N}_{+i}(m, c) := \{\mathbf{n}(m) \in \mathscr{N}(m, c) : n_i > 0\}.$$

По построению $\mathscr{N}(m, c) \cap \mathscr{N}(m, \widetilde{c}) = \emptyset$, $c \neq \widetilde{c}$, и, очевидно, что разбиение пространства состояний модели определяется формулой $\mathscr{N} = \bigcup\limits_{c=0}^{C} \mathscr{N}(M, c)$. Поскольку $\mathbf{n}(M) = \mathbf{n}$, то можно представить множество $\mathscr{B}_m$ блокировок m-заявок в виде

$$\mathscr{B}_m = \bigcup_{c=C-b_m+1}^{C} \mathscr{N}_{-m}(M, c), \quad m = 1, \ldots, M. \tag{5}$$

С учетом введенных обозначений структура пространства состояний $\mathscr{N}$ системы проиллюстрирована на рис. 1.

Необходимые в дальнейшем свойства множеств $\mathscr{N}(m, c)$ и $\mathscr{N}_{-i}(m, c)$ сформулируем в виде леммы, положив для определенности $\mathscr{N}(m, c) = \mathscr{N}_{-i}(m, c) = \emptyset$, если $c < 0$.

Лемма 1.

$$\mathscr{N}(m, 0) = \{\mathbf{0}^m\}, \quad m = 0, \ldots, M, \tag{6}$$

$$\mathscr{N}(0,c)=\emptyset,\quad c=1,\ldots,C, \tag{7}$$

$$\mathscr{N}(m,c)=\mathscr{N}(m-1,c)\times\{0\}\cup\left(\bigcup\nolimits_{k\geqslant 1}\mathscr{N}(m-1,c-b_m)\times\{k\}\right),$$
$$c=1,\ldots,C,\quad m=1,\ldots,M. \tag{8}$$

$$\mathscr{N}_{-i}(m,0)=\{\mathbf{0}^m\},\quad i=1,\ldots,m,\quad m=1,\ldots,M, \tag{9}$$

$$\mathscr{N}_{-i}(m,c)=\mathscr{N}(m,c)\Big/\bigcup\nolimits_{k\geqslant 1}(\mathscr{N}_{-i}(m,c-b_i)+ke_i),\quad c=1,\ldots,C,$$
$$i=1,\ldots,m,\quad m=1,\ldots,M. \tag{10}$$

На рис. 2 для наглядности проиллюстрировано построение множества $\mathscr{N}(3,2)$ для случая $b_m=1$, $m=1,\ldots,3$, по формуле

$$\mathscr{N}(3,2)=\mathscr{N}(2,2)\times\{0\}\cup\left\{\bigcup\nolimits_{k\geqslant 1}\mathscr{N}(2,1)\times\{k\}\right\}.$$

Теперь все готово для вывода рекуррентного алгоритма для расчета нормирующей константы и вероятностей блокировок заявок.

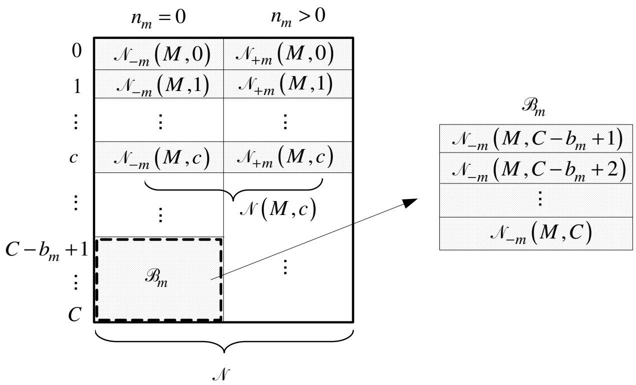

Рис. 1. **Структура пространства состояний $\mathscr{N}$ и множества $\mathscr{B}_m$ блокировок m-заявок**

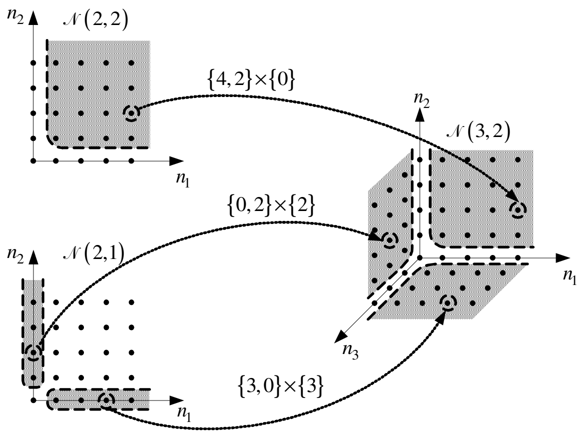

Рис. 2. **Иллюстрация построения множества $\mathscr{N}(m,c)$**

4. Рекуррентный алгоритм для расчета нормирующей константы и вероятностей блокировок

Обозначим $q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right) := \prod\limits_{i=1}^{m} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}$ ненормированную вероятность состояния $\mathbf{n}\left(m\right)$, $m = 1, \ldots, M$ и положим $q\left(\mathbf{n}\left(0\right)\right) := 1$. Нам также понадобятся следующие свойства функции $q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right)$:

$$\sum_{\mathbf{n}(m)\in(\mathscr{A}\cup\mathscr{B})} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right) = \sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{A}} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right) + \sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{B}} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right),$$
$$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \emptyset, \quad m = 1, \ldots, M, \tag{11}$$

$$\sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{N}(m-1,c)\times\{k\}} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right) = \frac{\rho_m^k}{k!} \sum_{\mathbf{n}(m-1)\in\mathscr{N}(m-1,c-u(k)b_m)} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right),$$
$$m = 1, \ldots, M, \quad k \geqslant 0, \tag{12}$$

Введем теперь функции

$$g(m, c) := \sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{N}(m,c)} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right), \quad m = 1, \ldots, M, \quad c = 0, \ldots, C, \tag{13}$$

$$g_{\pm i}(m, c) := \sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{N}_{\pm i}(m,c)} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right), \quad m = 1, \ldots, M, \quad c = 0, \ldots, C,$$
$$i = 1, \ldots, m, \tag{14}$$

которые задают ненормированные вероятности того, что k-заявками, $k = 1, \ldots, m$, занято ровно c приборов. Заметим, что нормирующая константа $G\left(\mathscr{N}\right)$ распределения $\pi\left(\cdot\right)$ может быть представлена в виде

$$G\left(\mathscr{N}\right) = \sum_{c=0}^{C} g\left(M, c\right), \tag{15}$$

а с учетом (5) и (14) получаем формулу для расчета вероятности блокировки m-заявок:

$$B_m = G^{-1}\left(\mathscr{N}\right) \sum_{\mathbf{n}(M)\in\mathscr{B}_m} q\left(\mathbf{n}\left(M\right)\right) =$$
$$= G^{-1}\left(\mathscr{N}\right) \sum_{c=C-b_m+1}^{C} \sum_{\mathbf{n}(M)\in\mathscr{N}_{-m}(M,c)} q\left(\mathbf{n}\left(M\right)\right) =$$
$$= \left(\sum_{c=0}^{C} g\left(M, c\right)\right)^{-1} \sum_{c=C-b_m+1}^{C} g_{-m}\left(M, c\right). \tag{16}$$

Введем для удобства записи величины $a_i := e^{\rho_i} - 1$, $i = 1, \ldots, M$, и заметим, что при $c < 0 \quad g(m, c) = g_{-i}(m, c) = 0$, $m = 1, \ldots, M$.

Теорема 1. *Функции $g(m,c)$ и $g_{-i}(m,c)$ удовлетворяют соотношениям:*

$$g(m,0)=1, \quad m=0,\ldots,M, \tag{17}$$

$$g(0,c)=0, \quad c=1,\ldots,C, \tag{18}$$

$$g(m,c)=g(m-1,c)+a_m g(m-1,c-b_m), \quad m=1,\ldots,M, \quad c=1,\ldots,C, \tag{19}$$

$$g_{-i}(m,0)=1, \quad m=1,\ldots,M, \quad i=1,\ldots,m, \tag{20}$$

$$g_{-i}(m,c)=g(m,c)-a_i g_{-i}(m,c-b_i), \quad m=1,\ldots,M, \quad i=1,\ldots,m, \quad c=1,\ldots,C. \tag{21}$$

Доказательство. Для краткости ограничимся доказательством формулы (19), вытекающим из свойств (11) и (12):

$$g(m,c)=\sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{N}(m,c)} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right)=\sum_{\mathbf{n}(m)\in\mathscr{N}(m-1,c)\times\{0\}} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right)+$$

$$+\sum_{\mathbf{n}(m)\in\bigcup_{k\geqslant 1}(\mathscr{N}(m-1,c-b_m)\times\{k\})} q\left(\mathbf{n}\left(m\right)\right)=\sum_{\mathbf{n}(m-1)\in\mathscr{N}(m-1,c)} q\left(\mathbf{n}\left(m-1\right)\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_m^k}{k!}\sum_{\mathbf{n}(m-1)\in\mathscr{N}(m-1,c-b_m)} q\left(\mathbf{n}\left(m-1\right)\right)=g\left(m-1,c\right)+\left(e^{\rho_m}-1\right)g\left(m-1,c-b_m\right).$$

Теорема 1 и формула (15) определяют рекуррентный алгоритм расчета нормирующей константы $G\left(\mathscr{N}\right)$, причем общая сложность вычислений вероятностей блокировок заявок всех типов, включая расчет нормирующей константы, равна $O\left(MC\right)$. Для наглядности схема расчета нормирующей константы и вероятности блокировки m-заявок проиллюстрирована на рис. 3, где $\widetilde{B}_m=\sum\limits_{c=C-b_m+1}^{C} g\left(M,c\right)$ — ненормированная вероятность блокировки m-заявки.

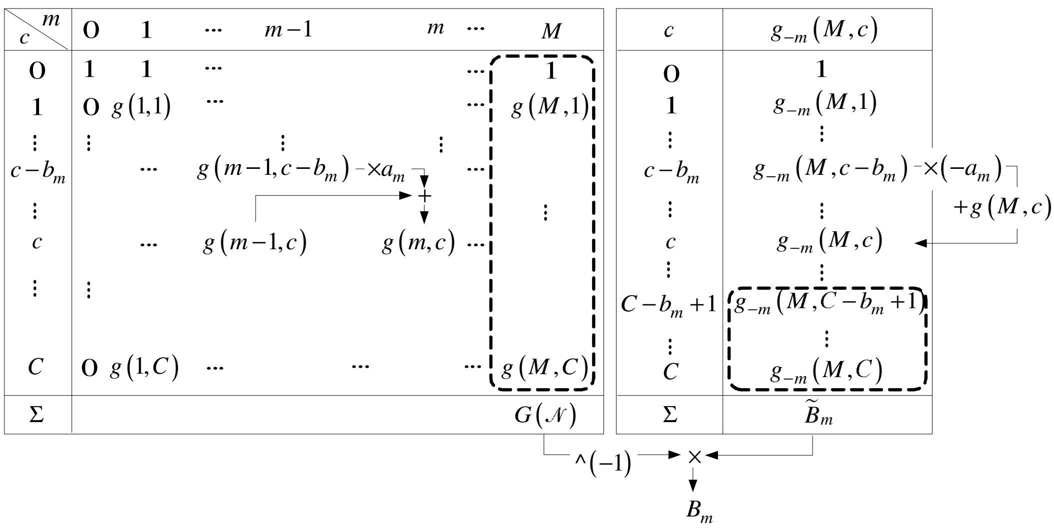

Рис. 3. **Схема расчета нормирующей константы $G\left(\mathscr{N}\right)$ и вероятности B_m блокировки m-заявок**

5. Заключение

В заключение отметим, что нередко при оценке характеристик сетей мультивещания используется мультисервисная модель Эрланга, а вычисления проводятся по алгоритму Кауфмана–Робертса. На примере покажем, что погрешность такой оценки может быть недопустимой даже в упрощенных инженерных расчетах. Рассмотрим звено сети мультивещания емкостью $C = 3$ условные единицы, по которому предоставляются $M = 3$ услуги мультивещания с требованиями $b_1 = 1$, $b_2 = 2$ и $b_3 = 3$ условных единиц соответственно. На рис. 4 приведен график зависимости вероятности блокировки B_1 от суммарной нагрузки $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$. Из графика видно, что погрешность расчётов вероятностей блокировок по алгоритму Кауфмана–Робертса по сравнению с алгоритмом теоремы 1 уже при значениях $\rho \in \{0, 1\}$ достигает 100% и быстро растет при дальнейшем увеличении нагрузки.

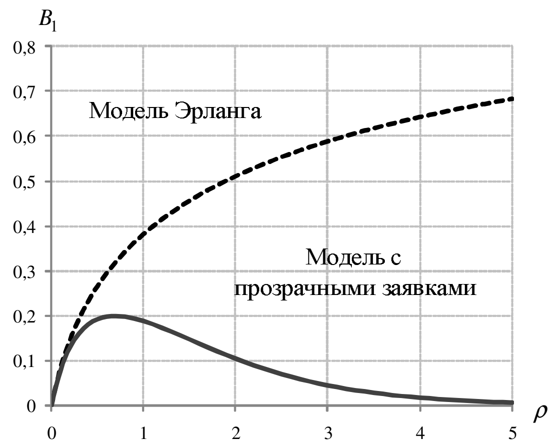

Рис. 4. **Вероятность блокировки в модели Эрланга и в модели с прозрачными заявками**

Литература

1. Новый этап развития математической теории телетрафика / Г. П. Башарин, К. Е. Самуйлов, Н. В. Яркина, И. А. Гудкова // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 12. — С. 16–28.
2. *Плаксина О. Н.* О двух системах массового обслуживания с «прозрачными» заявками и их применении к анализу услуг мультивещания // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия «Математика, информатика, физика». — 2010. — № 2. — С. 37–41.
3. *Наумов В. А., Самуйлов К. Е., Яркина Н. В.* Теория телетрафика мультисервисных сетей. Монография. — М.: Изд-во РУДН, 2007.
4. *Boussetta K., Beylot A.-L.* Multirate Resource Sharing for Unicast and Multicast Connections // Proc. of 5th FIP Broadband Communications (BC'99, Hong Kong). — 1999.
5. *Gaidamaka Y., Samouylov K.* Analytical model of multicast network and single link performance analysis // Proc. of the 6-th Int. Conf. on Telecommunications (ConTEL-2001, Zagreb, Croatia). — 2001.
6. Blocking of Dynamic Multicast Connections in a Single Link / J. Karvo, J. Virtamo, S. Aalto, O. Martikainen // Proceedings of the IFIP TC6/WG6.2 Fourth International Conference on Broadband Communications: The future of telecommunications. — 1998. — Pp. 473–484.

UDC 621.39

Recursive Algorithm for Calculating Blocking Probabilities in Multiservice Loss Network with Multicast Traffic

O. N. Plaksina, K. E. Samouylov

Telecommunication Systems Department
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198, Russia

We consider a model of a single-link network serving multicast traffic. A recursive algorithm for computing blocking probabilities and other characteristics is given. It is also shown that the inaccuracy of computing blocking probabilities for multicast traffic with the use of Kaufman-Roberts recursive formula is unacceptable.

Key words and phrases: multicasting, queuing model, recursive algorithm.