Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3 (1). 2010. С. 28–33

УДК 517.9

О некоторых свойствах решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений

Г. Г. Саакян

Кафедра прикладной математики и информатики
Арцахский государственный университет
ул. М. Гоша, д.5, г. Степанакерт, 375009, Республика Армения

В работе рассматриваются свойства нулей компонент решений одной линейной однородной системы дифференциальных уравнений в случае знакопостоянных коэффициентов.

Ключевые слова: линейная однородная система дифференциальных уравнений, свойства нулей.

Как известно, результаты, полученные для нормальных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (см., например, [1–4]), носят общий характер и не позволяют судить, например, о свойствах компонент решений. Методы численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые применяются всякий раз, когда для конкретной задачи нужно получить числовой ответ, имеют существенный дефект — они дают только одно частное решение. Для нахождения другого частного решения нужно все вычисления произвести заново. В этой связи нам кажется актуальным изучение свойств решений, а также нахождение общих закономерностей, присущих решениям линейных систем дифференциальных уравнений. Изучение линейных однородных систем особенно существенно потому, что решение неоднородной системы (см., например, [3]) может быть получено из решения соответствующей однородной системы одними квадратурами.

Рассматривается следующая линейная однородная система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y_1' = p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2, \\ y_2' = p_{21}(t)y_1 + p_{22}(t)y_2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ — действительные функции, определённые и непрерывные на отрезке $[a, b]$.

В дальнейшем нам понадобится запись системы (1) и в виде векторного уравнения

$$\overline{y}' = P(t)\overline{y}, \tag{2}$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad \overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Заметим, прежде всего, что имеют место (см. [5])

Утверждение 1. Компоненты всякого нетривиального решения системы (1) не могут иметь нуль в одной и той же точке.

Утверждение 2. Компоненты всякого нетривиального решения системы (1) при $p(t) \cdot r(t) \neq 0$ могут иметь на отрезке $[a, b]$ не более конечного числа нулей, причём все нули простые.

Имеет место

Статья поступила в редакцию 5 июня 2010 г.

Лемма. *Если в системе* (2) *коэффициенты* $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *не являются тождественными нулями, то существует матрица*

$$R(t) = \begin{pmatrix} 0 & p_0(t) \\ r_0(t) & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

такая, что уравнение (2) *равносильно уравнению*

$$\overline{z}' = R(t)\overline{z}. \tag{5}$$

Доказательство. Представим матрицу $P(t)$ в виде

$$P(t) = P_0(t) + P_1(t),$$

где

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & 0 \\ 0 & p_{22}(t) \end{pmatrix}, \quad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & p_{12}(t) \\ p_{21}(t) & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Примем

$$Q(t) = e^{\int_{t_0}^{t} P_0(\tau)d\tau}, \tag{7}$$

где t_0 — произвольная точка из отрезка $[a, b]$. Учитывая определение экспоненты матрицы (см., например, [6]), найдём, что матрицы $Q(t)$ и $P_o(t)$ перестановочны, причём $Q'(t) = Q(t)P_0(t)$. Воспользуемся подстановкой

$$\overline{y}(t) = Q(t)\overline{z}(t). \tag{8}$$

Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$Q'(t)\overline{z} + Q(t)\overline{z}' = P_0(t)Q(t)\overline{z} + P_1(t)Q(t)\overline{z}.$$

Так как матрица $Q(t)$ — невырожденная, то существует обратная к ней матрица $Q^{-1}(t)$. Умножив слева обе части последнего равенства на $Q^{-1}(t)$, и, учитывая, что $Q^{-1}(t)Q'(t) \equiv P_0(t)$, получим

$$\overline{z}' = Q^{-1}(t)P_1(t)Q(t)\overline{z}' = R(t)\overline{z}',$$

где

$$R(t) \equiv Q^{-1}(t)P_1(t)Q(t). \tag{9}$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться в том, что матрица $R(t)$ имеет вид, указанный в лемме. Лемма доказана. □

Из леммы и соотношений (5)–(9) следует, что система (1) при условии, что коэффициенты $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ не являются тождественными нулями, равносильна системе

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases} \tag{10}$$

где

$$p_0(t) = p_{12}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{22}(\tau)-p_{11}(\tau)]d\tau}, \quad r_0(t) = p_{21}(t)e^{\int_{t_0}^{t}[p_{11}(\tau)-p_{22}(\tau)]d\tau}, \tag{11}$$

т.е. всякому решению системы (1) соответствует одно и только одно решение системы (8), задаваемое формулами

$$y_1(t) = z_1(t)e^{\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau}, \tag{12a}$$

$$y_2(t) = z_2(t)e^{\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau}, \tag{12b}$$

где t_0 — произвольная точка из отрезка $[a, b]$, верно и обратное.

Из соотношений (12a) и (12b) вытекает

Замечание. Нули и знаки компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решений системы (12a)–(12b) совпадают с нулями и знаками соответствующих им компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ канонической системы (10).

Теорема 1. *Если в системе* (1) $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *имеют одинаковые знаки при* $t \in [a, b]$*, то наличие нуля на отрезке* $[a, b]$ *у одной из компонент всякого нетривиального решения системы* (1) *исключает существование других нулей у компонент того же решения на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ — произвольное нетривиальное решение системы (1). Тогда имеет место система тождеств

$$\begin{cases} y_1'(t) \equiv p_{11}(t)y_1(t) + p_{12}(t)y_2(t), \\ y_2'(t) \equiv p_{21}(t)y_1(t) + p_{22}(t)y_2(t), \end{cases} \tag{13}$$

Применив описанное в лемме преобразование, систему (13) приведём к следующей равносильной системе

$$\begin{cases} z_1'(t) \equiv p_0(t)z_2(t), \\ z_2'(t) \equiv r_0(t)z_1(t), \end{cases} \tag{14}$$

при этом из соотношений (11) и условий теоремы будет следовать, что в системе (14) коэффициенты $p_0(t)$ и $r_0(t)$ имеют одинаковые знаки. Далее, умножив первое тождество системы (14) на $z_2(t)$, а второе — на $z_1(t)$, затем сложив полученные, будем иметь

$$(z_1(t)z_2(t))' \equiv p_0(t)z_2^2(t) + r_0(t)z_1^2(t).$$

Так как $p_0(t)$ и $r_0(t)$ на отрезке $[a, b]$ имеют одинаковые знаки, то в полученном тождестве правая часть, а значит и левая, будут иметь при $t \in [a, b]$ один и тот же знак. Это означает, что функция $z_1(t) \cdot z_2(t)$ при $t \in [a, b]$ будет либо строго возрастающей (при $p_0(t) > 0$ и $r_0(t) > 0$), либо строго убывающей (при $p_0(t) < 0$ и $r_0(t) < 0$). Отсюда следует, что функция $z_1(t) \cdot z_2(t)$ может иметь нуль на отрезке $[a, b]$ только в одной точке, причём наличие общего нуля у обеих компонент, согласно утверждению 1, невозможно. Учитывая замечание, мы найдём, что указанным свойством будут обладать и компоненты $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решения $\overline{y}(t)$ системы (1), что и требовалось доказать. □

Следствие 1. Если в системе (1) $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ имеют одинаковые знаки при $t \in [a, b]$, то ни одна из компонент произвольного нетривиального решения системы (1) не может быть осциллирующей на отрезке $[a, b]$.

Действительно, из теоремы 1 следует, что если $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ имеют одинаковые знаки при $t \in [a, b]$, то ни одна из компонент всякого нетривиального решения системы не может иметь на отрезке $[a, b]$ более одного нуля, а значит быть осциллирующей.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий утверждение теоремы 1.

Пример 1. Пусть в системе (1) $p_{11}(t) = p_{21}(t) = -t, p_{12}(t) = -m^2, p_{22}(t) = -n^2$, где m и n — произвольные вещественные числа, не равные нулю. В данном случае, на любом отрезке $[a, b]$, не содержащем нуль, $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ имеют одинаковые знаки. Система (1) при этом может быть записана в виде

$$\begin{cases} y_1' + ty_1 + m^2 y_2 = 0, \\ y_2' + n^2 y_1 + ty_2 = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Приведя рассматриваемую систему к равносильной системе вида (10), получим следующую систему

$$\begin{cases} z_1' + m^2 z_2 = 0, \\ z_2' + n^2 z_1 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Нетрудно найти, что общее решение системы (16) можно представить в виде

$$z_1(t) = C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}, \quad z_2(t) = \frac{n}{m}\left(-C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Тогда, вновь учитывая соотношения (12a) и (12b), получим общее решение системы (15)

$$y_1(t) = \left(C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_{11}(\tau)d\tau} = \left(C_3 e^{mnt} + C_4 e^{-mnt}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$y_2(t) = \frac{n}{m}\left(-C_1 e^{mnt} + C_2 e^{-mnt}\right) \cdot e^{-\int_{t_0}^{t} p_{22}(\tau)d\tau} = \frac{n}{m}\left(-C_3 e^{mnt} + C_4 e^{-mnt}\right) e^{-\frac{t^2}{2}},$$

где C_3 и C_4 — произвольные постоянные. Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что если какая-то из компонент полученного решения имеет нуль справа или слева от нуля, то другая компонента в этой же части числовой оси не имеет нуля.

Теорема 2. *Если в системе* (1) $p_{12}(t)$ *и* $p_{21}(t)$ *сохраняют свои знаки при* $t \in [a, b]$*, то между всякими соседними нулями любой из компонент решения системы* (1) *находится ровно один нуль другой компоненты того же решения (нули перемежаются).*

Доказательство. Пусть $\overline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ — произвольное нетривиальное решение системы (1). Вновь, воспользовавшись леммой, преобразуем систему (1) к равносильной системе (10). Из соотношений (11) следует, что если $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ сохраняют свои знаки при $t \in [a, b]$, т.е. не имеют нулей на отрезке $[a, b]$, то тогда в системе (10) $p_0(t) \cdot r_0(t) \neq 0$. Пусть $\overline{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ — соответствующее $\overline{y}(t)$ решение системы (10). Не теряя общности рассуждений, предположим, что t_1 и t_2 — соседние нули $z_2(t)$, т. е. $z_2(t_1) = z_2(t_2) = 0$ и $z_2(t) \neq 0$ при $t \in (t_1, t_2)$ (аналогично проводится доказательство и в случае $z_1(t_1) = z_1(t_2) = 0$). Заметим, что относительно функции $z_2(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ имеют место условия теоремы Ролля (см., например, [5]). Тогда, применив её, найдём, что существует по крайней мере одна такая точка $t_0 \in (t_1, t_2)$, что $z_2'(t_0) = 0$. Но тогда, так как в силу условия теоремы $r_0(t) \neq 0$, то из второго уравнения системы (10) получим, что $z_1(t_0) = 0$. Следовательно, $z_1(t)$ имеет по крайней мере один нуль на интервале (t_1, t_2).

Теперь предположим, что $z_1(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) более одного нуля, и пусть t_3 и t_4 $(t_1 < t_3 < t_4 < t_2)$ — два его соседних нуля. Тогда, вновь воспользовавшись теоремой Ролля, найдём, что $z_2(t)$ имеет на интервале (t_3, t_4), а, следовательно, и на интервале (t_1, t_2), хотя бы один нуль, что противоречит предположению о том, что t_1 и t_2 соседние нули $z_2(t)$. Следовательно, $z_1(t)$ имеет на интервале (t_1, t_2) ровно один нуль. Так как, согласно замечанию, нули компонент $y_1(t)$ и $y_2(t)$ решений системы (1) совпадают с нулями соответствующих им компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$ системы (10), то получим, что доказанное выше свойство перемежаемости нулей будет верным и для компонент решений системы (1). Теорема доказана. □

Теорема 3. *Если в системе* (10) $p_0(t)$ *и* $r_0(t)$ *знакопостоянны на отрезке* $[a, b]$*, то нуль одной компоненты всякого нетривиального решения системы* (10) *на интервале* (a, b) *является точкой экстремума для другой компоненты этого же решения.*

Доказательство. Пусть $\overline{z}(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ — произвольное нетривиальное решение системы (10), а t_0 — нуль второй компоненты ($z_2(t_0) = 0, t_0 \in (a,b)$). Заметим, что $z_2(t)$ не может иметь один и тот же знак и слева и справа от t_0, так как в этом случае точка t_0 окажется точкой экстремума для $z_2(t)$, и мы получим, что $z_2'(t_0) = 0$. Но тогда из второго уравнения системы (1) найдём, что $z_1(t_0) = 0$, а это невозможно в силу утверждения 1. Значит, $z_2(t)$ имеет по разные стороны от t_0 разные знаки, и, так как функция $p_0(t)$ знакопостоянна на отрезке $[a,b]$, то из первого уравнения системы (1) будет следовать, что $z_1'(t)$ при переходе через точку t_0 меняет свой знак, причём, $z_1'(t_0) = p(t_0)y_2(t_0) = 0$, а значит, точка t_0 является точкой экстремума для $z_1(t)$.

Аналогично доказывается, что нуль первой компоненты всякого нетривиального решения системы (10) является точкой экстремума для второй. Теорема доказана. □

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} z_1' = -q(t)z_2, \\ z_2' = q(t)z_1, \end{cases}$$

где $q(t)$ — действительная, непрерывная и знакопостоянная на некотором отрезке $[a,b]$ функция. В рассматриваемом случае $p_0(t) \equiv -r_0(t) \equiv -q(t)$, и, следовательно, коэффициенты системы на отрезке $[a,b]$ будут иметь разные знаки. Нетрудно найти, что общее решение рассматриваемой системы можно записать в виде

$$z_1(t) = C\cos\left(\int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right), \quad z_2(t) = C\sin\left(\int\limits_{t_0}^{t} q(\tau)d\tau\right),$$

где C — произвольная постоянная, t_0 — произвольная точка из отрезка $[a,b]$. Из полученных соотношений для компонент $z_1(t)$ и $z_2(t)$, а также свойств функций $\sin(t)$ и $\cos(t)$ будет следовать, что нуль любой компоненты всякого нетривиального решения рассматриваемой системы является точкой экстремума для другой компоненты, причём нули $z_1(t)$ и $z_2(t)$ перемежаются.

Из теоремы 3 вытекает следующее экстремальное свойство: если рассмотреть задачу Коши

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases} \quad z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = c,$$

где $p_0(t), r_0(t)$ — действительные, знакопостоянные функции, определённые и непрерывные на отрезке $[a,b]$, то, согласно теореме 3, значение c будет экстремальным для компоненты z_2. Очевидно, что характер экстремальности (минимум или максимум) будет зависеть как от знаков коэффициентов, так и от знака постоянной c. Нетрудно доказать, что в случае $p_0(t)r_0(t)c > 0$ будем иметь максимум, а при $p_0(t)r_0(t)c < 0$ — минимум.

Аналогично, рассматривая задачу Коши

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)y_2, \\ z_2' = r_0(t)y_1, \end{cases} \quad z_1(t_0) = c, \quad z_2(t_0) = 0,$$

при тех же предположениях относительно коэффициентов $p_0(t)$ и $r_0(t)$, что и выше, мы найдём, что значение c будет экстремальным для компоненты z_1. Как и в рассмотренном выше случае при $p_0(t)r_0(t)c > 0$ мы будем иметь максимум для компоненты z_1, а при $p_0(t)r_0(t)c < 0$ — минимум. Таким образом, из теоремы 3 вытекает

Следствие 2. Если рассматривается задача Коши для системы уравнений

$$\begin{cases} z_1' = p_0(t)z_2, \\ z_2' = r_0(t)z_1, \end{cases}$$

причём начальные условия имеют вид

$$z_1(t_0) = 0, \quad z_2(t_0) = c, \quad (z_1(t_0) = c, \quad z_2(t_0) = 0)\,,$$

и при $t \in (a, b)$ имеет место условие

$$p_0(t)r_0(t)c \neq 0,$$

то значение c является экстремальным для компоненты $z_2(t)$ (соответственно для $z_1(t)$).

Что касается экстремальных свойств нулей компонент решений системы (1), то нетрудно доказать, что если t_0 — нуль первой (второй) компоненты нетривиального решения системы (1) является нулём и для $p_{22}(t)(p_{11}(t))$, а $p_{12}(t)$ и $p_{21}(t)$ знакопостоянны при $t \in [a, b]$, то t_0 является критической точкой для второй (первой) компоненты этого же решения.

Литература

1. *Кодингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ЛКИ, 2007.
2. *Трикоми Ф.* Дифференцилаьные уравнения. — М.: Едиториал УРСС, 2007.
3. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: КомКнига, 2007.
4. *Агафонова С. А., Муратова Т. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Академия, 2008.
5. *Саакян Г. Г.* О некоторых свойствах решений канонической системы Дирака // Ученые записки ЕрГУ. — 2007. — № 2.
6. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: ФМЛ, 2004.

UDC 517.9

On Several Properties of The Solutions of One Linear Homogenous System of Differential Equations

G. G. Sahakyan

Department of the Applied Mathematics and Informatics
Artsakh State University
st. M. Gosh 5, 375009 Stepanakert, Armenia

The properties of the zero component solutions of one homogenous linear system of differential equations in case of sign constant coefficients are considered in the work.

Key words and phrases: linear homogenous system of differential equations, properties of zeros.