УДК 517.98

Об одном варианте теоремы Банаха–Стоуна для банаховых расслоений

М. А. Плиев, С. Н. Табуев

Лаборатория теории операторов
Южный математический институт ВНЦ РАН и Правительства РСО-А
ул. Маркуса, д. 22, 362027, Владикавказ, Россия

Рассматриваются банаховы пространства непрерывных сечений банахового расслоения, где каждый слой расслоения — банахова решётка. Устанавливается вариант теоремы Банаха-Стоуна.

Ключевые слова: непрерывные банаховы расслоения, банаховы решётки, компакты, гомеоморфизмы.

1. Введение

Одной из важных классических теорем современного функционального анализа является изоморфизм категорий компактных хаусдорфовых топологических пространств и пространств непрерывных функций, заданных на этих компактах. Указанный факт является, в частности, отправной точкой бурно развивающейся области математики — некоммутативной геометрии. Но если пространства непрерывных функций на компакте в вышеуказанной ситуации заменить пространствами непрерывных вектор-функций на тех же компактах, принимающими значение в некоторых банаховых пространствах X и Y, то возможна ситуация, когда банаховы пространства $C(Q, X)$ и $C(K, Y)$ изоморфны для негомеоморфных компактов Q и K. Соответственно возникает естественная математическая проблема — какие дополнительные условия необходимо наложить на отображение $T : C(Q, X) \to C(K, Y)$, осуществляющее изоморфизм, или на пространства X и Y, чтобы гарантировать существование $\varphi : K \to Q$ — гомеоморфизма компактов K и Q? Эта проблема с различными уточнениями и дополнениями известна как задача Банаха–Стоуна. Имеется богатая литература, посвящённая различным аспектам этой проблемы [1–6]. Вместе с тем теория непрерывных банаховых расслоений позволяет рассматривать пространства непрерывных вектор-функций как частный случай расслоений с постоянным слоем. Таким образом возникает задача — распространить теорию Банаха–Стоуна на пространства сечений непрерывных банаховых расслоений. Настоящая заметка — первый шаг в этом направлении.

2. Предварительные сведения

Приведём некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о векторных решётках, решёточно нормированных пространствах и банаховых расслоениях можно найти в монографии [7] и работе [8], о банаховых пространствах — в [9]. Все банаховы пространства рассматриваются над полем действительных чисел.

1.1. Пусть V — вещественное векторное пространство, а E — некоторое K-пространство. Отображение $\lvert\!\lvert \cdot \rvert\!\rvert : V \to E$ называется решёточной нормой, если выполняются следующие аксиомы:
1) $\lvert\!\lvert v \rvert\!\rvert \geqslant 0$; $\lvert\!\lvert v \rvert\!\rvert = 0 \Leftrightarrow v = 0$; $(\forall v \in V)$;
2) $\lvert\!\lvert v_1 + v_2 \rvert\!\rvert \leqslant \lvert\!\lvert v_1 \rvert\!\rvert + \lvert\!\lvert v_2 \rvert\!\rvert$; $(v_1, v_2 \in V)$;
3) $\lvert\!\lvert \lambda v \rvert\!\rvert = |\lambda| \, \lvert\!\lvert v \rvert\!\rvert$; $(\lambda \in R,\ v \in V)$.

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2009 г.

Говорят, что для нормы справедливо условие Канторовича, или условие разложимости, если выполняется ещё одно условие:

4) $(\forall v \in V)$; $\forall e_1,\, e_2 \in E_+$ $|v| = e_1 + e_2 \Rightarrow (\exists v_1, v_2 \in V,\, v = v_1 + v_2)$; $|v_1| = e_1$, $|v_2| = e_2$.

Векторное пространство V, снабжённое решёточной нормой со значениями в векторной решётке E, называется *решёточно нормированным пространством* (РНП) и обозначается $(V, |\cdot|, E)$ или сокращённо (V, E). Если норма $|\cdot|$ разложима, то и пространство (V, E) называется разложимым. Множество $M \subset V$ называется *bo-ограниченным*, если существует элемент $e \in E_+$, такой что $|v| \leqslant e, \forall v \in M$. РНП (V, E) называется *пространством Банаха–Канторовича* (ПБК), если оно разложимо и порядково полно в следующем смысле: любая bo-фундаментальная сеть $(v_\alpha)_{\alpha \in \Xi} \subset V$ сходится к некоторому элементу $v \in V$.

1.2. Пусть Q — топологическое пространство. Банахово расслоение над Q — произвольное отображение $\mathcal{X}$, определённое на Q и ставящее в соответствие каждой точке $q \in Q$ некоторое банахово пространство $\mathcal{X}_q :=$ — слой в точке q.

Норму элемента x в слое $\mathcal{X}_q$ будем обозначать через $||x||_q := ||x||_{\mathcal{X}_q}$. Функция v, определённая на множестве $\mathrm{dom}(v)$, называется сечением над $\mathrm{dom}(v)$ расслоения $\mathcal{X}$, если $v(q) \in \mathcal{X}(q)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(v)$.

Множество сечений $V \subset S\ (Q, \mathcal{X})$ называется послойно плотным в $\mathcal{X}$, если множество $\{v(q) : v \in V,\, q \in \mathrm{dom}(v)\}$ послойно плотно в $\mathcal{X}(q)$ для любой точки $q \in Q$. Сечение называется *скалярно непрерывным*, если непрерывна функция $q \mapsto ||v(q)||_q$.

1.3. *Непрерывной структурой* в $\mathcal{X}$ называют послойно плотное множество скалярно непрерывных сечений $\mathcal{J} \subset S\ (Q, \mathcal{X})$, являющееся векторным подпространством в $S\ (Q, \mathcal{X})$. Банахово расслоение над множеством $\mathcal{X}$ с заданной непрерывной структурой называют *непрерывным банаховым расслоением* над Q и обозначают $(Q, \mathcal{X}, \mathcal{J})$ или просто $(Q, \mathcal{X})$. Сечение $v \in S\ (Q, \mathcal{X})$ называют *непрерывным*, если для любого $u \in \mathcal{J}$ непрерывна функция $q \mapsto \|v(q) - u(q)\|_{\mathcal{X}(q)}$. Множество всех непрерывных сечений расслоения $\mathcal{X}$ обозначим $C(Q, \mathcal{X})$. Векторное пространство $C(Q, \mathcal{X})$ является решёточно нормированным пространством, где решёточная норма непрерывного сечения вычисляется по формуле $|f| := \|f(\cdot)\|_{\mathcal{X}(\cdot)}$. Топологическое пространство Q называется *экстремальным*, если замыкание каждого открытого множества в Q открыто. Непрерывное банахово расслоение $(Q, \mathcal{X})$ над экстремальным компактом Q называется *насыщенным*, если $C(Q, \mathcal{X})$ является пространством Банаха–Канторовича. Напомним, что для банаховых пространств X и Y через $L(X, Y)$ обозначается пространство линейных непрерывных операторов из X в Y. Пусть $(K, \mathcal{X})$ и $(K, \mathcal{Y})$ — непрерывные банаховы расслоения над компактом K. Отображение $H : K \to \bigcup\limits_{s \in K} L(\mathcal{X}_s, \mathcal{Y}_s)$, такое что $s \mapsto L(\mathcal{X}_s, \mathcal{Y}_s)$ называется *гомоморфизмом* НБР, если для любого сечения $f \in C(K, \mathcal{X})$ сечение $g \in S(K, \mathcal{Y})$, где $s \mapsto g(s) := H(s)f(s)$ также принадлежит $C(K, \mathcal{Y})$.

3. Теорема Банаха–Стоуна

В настоящем пункте установим основной результат — вариант теоремы Банаха–Стоуна для непрерывных банаховых расслоений.

2.1. Ниже будем полагать, что Q и K — компактные хаусдорфовы пространства, $(\mathcal{X})$ и $(\mathcal{Y})$ — непрерывные банаховы расслоения над Q и K соответственно, где каждый слой $\mathcal{X}_t$ и $\mathcal{Y}_s$ является банаховой решёткой. Ясно, что пространства $C(Q, \mathcal{X})$ и $C(K, \mathcal{Y})$ также будут банаховыми решётками, где порядок задаётся поточечно, норма сечения f вычисляется по формуле $|||f||| = |||\|f(\cdot)\|_{\mathcal{X}(\cdot)}\|_{C(Q)}$. Возьмём произвольные $t \in Q$ и $s \in Q$ и введём множества

$$M_t = \{f \in C(Q, \mathcal{X}) : f(t) = 0\};\ N_s = \{g \in C(K, \mathcal{Y}) : g(s) = 0\}.$$

Легко видеть, что множества M_t и N_s будут замкнутыми порядковыми идеалами в $C(Q,\mathcal{X})$ и $C(K,\mathcal{Y})$ соответственно. Пусть T — решёточный изоморфизм векторных решёток $C(Q,\mathcal{X})$ и $C(Q,\mathcal{X})$. Будем говорить, что оператор T удовлетворяет свойству $\mathcal{P}$, если для любого $f \in C(Q,\mathcal{X})$

$$(Tf)(s) \neq 0,\ \forall s \in K \Leftrightarrow f(t) \neq 0,\ \forall t \in Q.$$

Следующая лемма описывает одно важное свойство решёточных изоморфизмов со свойством $\mathcal{P}$.

Лемма. *Пусть $T : C(Q,\mathcal{X}) \to C(K,\mathcal{Y})$ — изоморфизм банаховых решёток со свойством $\mathcal{P}$. Тогда для любого $t \in Q$ найдётся единственный элемент $s \in K$, такой что $T(M_t) = N_s$.*

Доказательство. Для произвольного $t \in Q$ введём множество

$$\Phi(T(M_t)) := \{s \in K : (Tf)(s) = 0,\ \forall f \in M_t\}.$$

Установим, что множество $\Phi(T(M_t))$ не будет пустым. Предположим противное. Тогда для каждого $s \in K$ найдётся непрерывное сечение $f_s \in M_t$, такое что $(Tf_s)(s) \neq 0$, и в силу непрерывности найдётся окрестность U_s точки s, такая что сечение Tf_s отлично от нуля в каждой точке $s' \in U_s$. Кроме того $|f_s| \in M_t$, и в силу того, что T — решёточный изоморфизм, получаем, что $|T(f_t)| = T|f_t|$. Таким образом можем считать, что f_t и Tf_t положительные элементы в соответствующих решётках. Используя компактность K, можем найти конечный набор непрерывных сечений $f_1,\dots,f_n \in M_t^+$, таких что непрерывные сечения $Tf_1,\dots,Tf_n$ не имеют общих нулей в K. Отсюда имеем, что сечение $T(f_1+\ldots+f_n)$ отлично от нуля в каждой точке $s \in K$. Однако сечение $f_1+\ldots+f_n$ обращается в нуль в точке t, а оператор T обладает свойством $\mathcal{P}$. Пришли к противоречию.

Докажем теперь, что $\Phi(T(M_t))$ состоит из единственной точки. Действительно, если $s_1, s_2 \in \Phi(T(M_t))$, то $T(M_t) = N_{s_i}$, $i \in \{1,2\}$. Рассуждая аналогично, получим, что $T^{-1}(N_{s_i}) = M_{t_i}$, $i \in \{1,2\}$. Отсюда получаем, что $T(M_t) \subset N_{s_i} \subset T(M_{t_i})$ для некоторых $t_i \in Q$, $i \in \{1,2\}$. В силу биективности оператора T и хаусдорфовости пространства Q получаем, что $s_1 = s_2$ и $T(M_t) = N_{s_1} = N_{s_2}$. Теперь можем задать биективное отображение $\psi : K \to Q$, $s \mapsto \psi(s)$, где $T(M_{\psi(s)}) = N_s$. $\square$

2.2. Теперь сформулируем основной результат.

Теорема. *Пусть $T : C(Q,\mathcal{X}) \to C(K,\mathcal{Y})$ — изоморфизм банаховых решёток со свойством $\mathcal{P}$. Тогда компакты Q и K гомеоморфны, и оператор T может быть записан в виде $(Tf)(s) = H(s)f(\psi(s))$; $\forall f \in C(Q,\mathcal{X})$; $s \in K$, где $\psi : K \to Q$ — гомеоморфизм компактов Q и K, а H — гомоморфизм НБР $(Q,\mathcal{X})$ и $(K,\mathcal{Y})$, где $s \mapsto H(s) \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\psi(s)}, \mathcal{Y}_s)$. Если кроме того $(Q,\mathcal{X})$ и $(K,\mathcal{Y})$ — насыщенные НБР над экстремальными компактами Q и K, то $\|T\| = \sup\limits_{s\in K} \|H(s)\|$.*

Доказательство. Покажем, что биекция ψ, построенная в лемме, является гомеоморфизмом. В силу компактности топологических пространств Q и K достаточно установить непрерывность ψ. Предположим противное. Тогда найдётся сеть $(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ элементов пространства K, сходящаяся к точке s_0, такая что сеть $(\psi(s_\alpha))_{\alpha\in\Lambda}$ сходится к $t_0 \in Q \neq \psi(s_0)$. Пусть V_{t_0} и $V_{\psi(s_0)}$ — непересекающиеся окрестности точек t_0 и ψ_{s_0}. Выберем сечение $f \in C(Q,\mathcal{X})$ таким образом, что $f(t) = 0$ для любых $t \in Q \backslash V_{\psi(s_0)}$. Тогда $(Tf)(s_0) = 0$. Действительно, найдётся такой номер $\alpha_0 \in \Lambda$, что для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ элементы $\psi(s_\alpha) \in V_{t_0}$ и, так как $f(\psi(s_\alpha)) = 0$, то $(Tf)(s_\alpha) = 0$. Так как $(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ сходится к s_0, а также в силу непрерывности сечения Tf, получаем, что $(Tf)(s_0) = 0$. Возьмём теперь непрерывную функцию $\rho \in C(Q)$, такую что $\rho(t) = 0$ для любых $t \in Q \backslash V_{\psi(s_0)}$ и $\rho(t_0) = 1$. Тогда произвольное сечение $f \in C(Q,\mathcal{X})$ можно представить в виде суммы $f = \rho f + (\mathbf{1} - \rho)f$, где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная единице в каждой точке $t \in Q$. Так как $(\rho f)(t) = 0$ для любых $t \in Q \backslash V_{\psi(s_0)}$, то $T(\rho f)(s_0) = 0$. Кроме того, $T((\mathbf{1} - \rho)f)(s_0) = 0$ в силу того, что $(\mathbf{1} - \rho)f \in M_{\psi(s_0)}$. Таким образом получаем, что для произвольного сечения $f \in C(Q, \mathcal{X})$ справедлива формула

$$Tf(s_0) = T(\rho f + (\mathbf{1} - \rho)f)(s_0) = T(\rho f)(s_0) + T((\mathbf{1} - \rho)f)(s_0) = 0.$$

Но последнее равенство противоречит сюръективности оператора T. Следовательно функция ψ непрерывна.

Построим теперь операторное сечение

$$H : K \to \bigcup_{s \in K} \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\psi(s)}, \mathcal{Y}_s);\ H(s) \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}_{\psi(s)}, \mathcal{Y}_s);\ \forall s \in K.$$

Для произвольной точки $s_0 \in K$ оператор $H(s_0) \in L(\mathcal{X}_{\psi(s_0)}, \mathcal{Y}_{s_0})$ зададим следующим образом. Пусть $x \in \mathcal{X}_{\psi(s_0)}$ и сечение $f \in C(Q, \mathcal{X})$ выбрано так, что $f(\psi(s_0)) = x$. Тогда $H(s_0)x = (Tf)(s_0)$. В силу того, что оператор T обладает свойством $\mathcal{P}$, значение $H(s_0)x$ не зависит от выбора сечения f. Аддитивность и однородность оператора $H(s_0)$ очевидны.

Покажем, что $H(s_0)$ — линейный и решёточный изоморфизм банаховых решёток $\mathcal{X}_{\psi(s_0)}$ и $\mathcal{Y}_{s_0}$. Действительно, если $x \in \mathcal{X}_{\psi(s_0)} \neq 0$, то $f(\psi(s_0)) = x \neq 0$ и $(Tf)(s_0) \neq 0$. Таким образом оператор $H(s_0)$ инъективен. Покажем сюръективность. Пусть $y \in \mathcal{Y}_{s_0}$, тогда выберем сечение $g \in C(K, \mathcal{Y})$, где $g(s_0) = y$. Тогда в силу того, что T — изоморфизм банаховых решёток $C(Q, \mathcal{X})$ и $C(K, \mathcal{Y})$, найдётся непрерывное сечение f, такое что $Tf = g$ и $f(\psi(s_0)) = x$. Отсюда получаем $H(s_0)x = (Tf)(s_0) = g(s_0) = y$. Таким образом $H(s_0)$ — биекция.

Покажем, что $H(s_0)$ — решеточный изоморфизм. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{X}_{\psi(s_0)}$ и $x = x_1 \vee x_2$. Выберем сечения $f_1, f_2 \in C(Q, \mathcal{X})$, где $f_i(\psi(s_0)) = x_i$; $i \in \{1, 2\}$, и пусть $f := f_1 \vee f_2$. Тогда $f(\psi(s_0)) = f_1(\psi(s_0)) \vee f_2(\psi(s_0)) = x_1 \vee x_2$. Далее имеем

$$H(s_0)(x_1 \vee x_2) = T(f_1 \vee f_2)(s_0) = T(f_1)(s_0) \vee T(f_2)(s_0) = H(s_0)x_1 \vee H(s_0)x_2.$$

Отсюда получаем, что $H(s_0)$ — решеточный изоморфизм. Так как каждый положительный оператор в банаховой решётке непрерывен по норме, то заключаем, что оператор $H(s_0)$ непрерывен по норме.

Пусть теперь компакты K и Q экстремальны. Для произвольной точки $s \in K$ можно найти сечение $f \in C(K, \mathcal{X})$, такое что $|||f||| = \|f(s)\|_{\mathcal{X}(s)}$. Действительно, в силу того, пространство $C(K, \mathcal{X})$ будет пространством Банаха–Канторовича, то в силу разложимости векторной нормы найдётся непрерывное сечение $f \in C(K, \mathcal{X})$, такое что $\|f(\cdot)\|_{\mathcal{X}(\cdot)} = \mathbf{1}(\cdot)$, где $\mathbf{1}$ — функция тождественно равная единице на K. Для произвольной точки $s \in K$ возьмём замкнутое множество $D \subset K$, $s \notin D$. Воспользовавшись леммой Урысона [10, теорема 1.5.10], найдём непрерывную функцию $\varphi : K \to [0, 1]$, такую что $\varphi(t) = 0$ для любого $t \in D$ и $\varphi(s) = 1$.

Рассмотрим непрерывное сечение $g(t) = \varphi(t)f(t)$. Ясно, что сечение $g \in C(K, \mathcal{X})$ обладает требуемыми свойствами. Далее можем написать

$$\|H(s)f(\psi(s))\| = \|(Tf)(s)\| \leqslant \|Tf\| \leqslant \|T\| |||f|||.$$

Отсюда получаем, что $\sup\limits_{s \in K} \|H(s)\| \leqslant \|T\|$. С другой стороны,

$$\|Tf(s)\| = \|H(s)f(\psi(s))\| \leqslant \|H(s)\| \|f(\psi(s))\| \leqslant \sup_{s \in K} \|H(s)\| |||f|||,$$

$$|||Tf||| = \sup_{s \in K} \|Tf(s)\| \leqslant \sup_{s \in K} \|H(s)\| |||f|||;\ \|T\| \leqslant \sup_{s \in K} \|H(s)\|.$$

Таким образом окончательно получаем, что $\|T\| = \sup\limits_{s \in K} \|H(s)\|$. $\square$

Литература

1. *Behrends E., Cambern M.* An Isomorphic Banach-Stone Theorem // Studia Math. — 1988. — Vol. 90. — Pp. 15–26.
2. *Cao J., Reilly I., Xiong H.* A Lattice-Valued Banach-Stone Theorem // Acta Math. Hungar. — 2003. — Vol. 98. — Pp. 103–110.
3. *Chen J.-X., Chen Z.-L., Wong N.-C.* A Banach-Stone Theorem for Riesz Isomophisms for Banach Lattices // Proc. Amer. Math.Soc. — 2008. — Vol. 136. — Pp. 3869–3874.
4. *Ercan Z., Onal S.* Banach-Stone Theorem for Banach Lattice Valued Continuous Functions // Proc. Amer. Math.Soc. — 2007. — Vol. 135. — Pp. 2827–2829.
5. *Fleming R., Jamison J.* Isometries on Banach Spaces Vector-Valued Function Sraces. — Chaptman and Hall/CRS, 2008. — 245 p.
6. *Jeang J.-S., Wong N.-C.* On Banach-Stone Problem // Studia Math. — 2003. — Vol. 155. — Pp. 95–105.
7. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. — М.: Наука, 2003. — 624 с.
8. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995. — С. 63–211.
9. *Megginson R. E.* An Introduction to Banach Space Theory. — Springer-Verlag, 1998. — 600 p.
10. *Энгелькинг Р.* Общая топология. — М.: Мир, 1986. — 752 с.

UDC 517.98

A Variant of the Banach–Stone for Banach Bundles

M. A. Pliev, S. N. Tabuev

Laboratory Operator Theory
Southern Mathematical Institute
of Vladikavkaz Scientific Center of RAS and RSO-A
22, Marcus str., 362027, Vladikavkaz, Russia

We consider Banach spaces continuous sections when every fiber is Banach lattice. A some versions of the Banach-Stone theorem was obtained.

Key words and phrases: continuous Banach bundles, Banach lattices, compacts, homeomorphisms.