УДК 517.972.5

Построение группы симметрий и операторов рекурсии для дифференциально-разностных операторов с частными производными

И. А. Колесникова

Кафедра математического анализа и теории функций
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, 117198 Москва, Россия

Для дифференциально-разностного оператора строится группа симметрий. Решается вопрос отыскания оператора рекурсии для некоторого дифференциально-разностного оператора с частными производными.

Ключевые слова: дифференциально-разностные уравнения, функционально-дифференциальные уравнения, симметрии, оператор рекурсии, группы симметрий.

Под дифференциально-разностным уравнением понимается [1, с. 54] уравнение относительно неизвестной функции и её производной, вычисленное при некоторых значениях аргумента, отличающихся на постоянные. Например,

$$u''(t) - u''(t-1) + u(t) = 0.$$

Дифференциально-разностные операторы в частных производных представляют собой весьма сложный математический объект. Функционально-дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения в частных производных изучались во многих работах. Отметим работы по эллиптическим уравнениям [2] и параболическим дифференциально-разностным уравнениям [3].

В данной работе вводится понятие генератора симметрии и оператора рекурсии для дифференциально-разностных уравнений в частных производных. Наличие оператора рекурсии позволяет по одному известному решению уравнения строить целое множество решений.

Рассмотрим уравнение

$$N(u) = 0, \quad u \in D(N), \tag{1}$$

где $N : D(N) \subseteq U \to V$ — заданный оператор, U, V — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел R, $U \subseteq V$. Предположим, что в каждой точке $u \in D(N)$ существует производная Гато $N'_u h = \delta N(u, h)$ оператора N.

Рассмотрим уравнение (1). Пусть u_0 — его решение, т.е. $N(u_0) = 0$.

Рассмотрим преобразование G, действующее на V. Нас интересует, когда

$$\bar{u} = u_0 + \epsilon G(u_0) \tag{2}$$

также является решением (1). Назовём оператор G генератором симметрии.

Определение (см. [4]). Если существует линейный оператор $\Re$ такой, что для любого генератора симметрии G оператор $\Re G$ также является генератором симметрии, то $\Re$ — называется *оператором рекурсии.*

Пусть G — генератор симметрии. Зная хотя бы один оператор рекурсии, можно получить цепочку генераторов: $G_1 = \Re G$, $G_2 = \Re G_1 = \Re^2 G$, и т.д. Таким образом, при этом из любого решения уравнения (1) можно получить множество его решений.

Рассмотрим пример отыскания генератора симметрии.

Статья поступила в редакцию 31 марта 2010 г.

Пример 1. Пусть дифференциально-разностный оператор N_1 имеет вид

$$N_1(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} u_t(x, t+\lambda\tau) - u_{xx}(x, t+\lambda\tau) = 0. \tag{3}$$

Ищем отображение вида

$$\begin{cases} \overline{t} = t + \epsilon\varphi^1(x, t, u(x, t+\lambda\tau)), \\ \overline{x} = x + \epsilon\varphi^2(x, t, u(x, t+\lambda\tau), \\ \overline{u}(\overline{x}, \overline{t}) = u(x, t) + \epsilon\psi(x, t, u(x, t+\lambda\tau), \end{cases} \tag{4}$$

являющееся преобразованием симметрии уравнения (3). Из (4) получим генератор

$$G(u) = \sum_{\lambda=-1}^{1} \psi(x, t, u(x, t+\lambda\tau)) - \varphi^1(x, t, u(x, t+\lambda\tau))u_t - \varphi^2(x, t, u(x, t+\lambda\tau))u_x. \tag{5}$$

Критерий инвариантности для (3) относительно группы (4) может быть записан в виде

$$N'_{1u}G(u) = 0, \quad G : R(G) \subset D(N'_u). \tag{6}$$

Действительно, пусть u — решение уравнения (3). Группе (4) соответствует преобразование $\overline{u} = u + \epsilon G(u)$, т.е.

$$N_1(u + \epsilon G(u)) = N_1(u) + \epsilon N'_{1u}G(u) + r(u, \epsilon G(u)) = 0,$$

откуда получаем (6).

Запишем (3) в виде

$$N_1(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda[u_t(x,t) - u_{xx}(x,t)] = 0,$$

где оператор I_λ действует следующим образом:

$$I_\lambda u(x,t) = u(x, t+\lambda\tau).$$

Критерий инвариантности (6) принимает вид

$$N'_u G(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda (D_t - D_{xx})(\psi(x,t,u) - \varphi^1(x,t,u)u_t - \varphi^2(x,t,u)u_x) = 0,$$

т.е.

$$I_\lambda \left[D_t\left(\psi - \varphi^1 u_t - \varphi^2 u_x\right) - D_{xx}\left(\psi - \varphi^1 u_t - \varphi^2 u_x\right)\right] = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} I_\lambda[\psi_t + \psi_u u_t - (\varphi^1_t + \varphi^1_u u_t)u_t - \varphi^1 u_{tt} - (\varphi^2_t + \varphi^2_u u_t)u_x - \varphi^2 u_{xt} - \\ - (\psi_{xx} + \psi_{xu}u_x + (\psi_{xu} + \psi_{uu}u_x)u_x + \psi_u u_{xx} - (\varphi^1_{xx} + \varphi^1_{xu}u_x + (\varphi^1_{ux} + \varphi^1_{uu}u_x)u_x + \\ + \varphi^1_u u_{xx})u_t - 2(\varphi^1_x + \varphi^1_u u_x)u_{xt} - \varphi^1 u_{txx} - (\varphi^2_{xx} + \varphi^2_{xu}u_x + (\varphi^2_{xu} + \varphi^2_{uu}u_x)u_x + \\ + \varphi^2_u u_{xx})u_x - 2(\varphi^2_x + \varphi^2_u u_x)u_{xx} - \varphi^2 u_{xxx})] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Из уравнения (3) имеем

$$u_{tx} = u_{xxx}, \quad u_{txx} = u_{xxxx}, \quad u_{tt} = u_{xxt} = u_{xxxx}.$$

С учётом этого из (7) находим

$$
\begin{aligned}
&I_\lambda[\psi_t + \psi_u u_{xx} - (\varphi^1_t + \varphi^1_u u_{xx})u_{xx} - \varphi^1 u_{xxxx} - (\varphi^2_t + \varphi^2_u u_{xx})u_x - \varphi^2 u_{xxx} - \\
&\quad - \psi_{xx} - 2\psi_{xu}u_x - \psi_{uu}u_x^2 - \psi_u u_{xx} + \varphi^1_{xx}u_{xx} + 2\varphi^1_{xu}u_x u_{xx} + \varphi^1_{uu}u_x^2 u_{xx} + \\
&\quad + \varphi^1_u u_{xx}^2 + 2\varphi^1_x u_{xxx} + 2\varphi^1_u u_x u_{xxx} + \varphi^1 u_{xxxx} + \varphi^2_{xx}u_x + 2\varphi^2_{xu}u_x^2 + \varphi^2_{uu}u_x^3 + \\
&\qquad + \varphi^2_u u_{xx}u_x + 2\varphi^2_x u_{xx} + 2\varphi^2_u u_x u_{xx} + \varphi^2 u_{xxx}] = 0.
\end{aligned}
$$

В итоге получим

$$
\begin{aligned}
&I_\lambda\left[\psi_t - \varphi^1_t u_{xx} - \varphi^2_t u_x - \psi_{xx} - 2\psi_{xu}u_x - \psi_{uu}u_x^2 + \varphi^1_{xx}u_{xx} + \right.\\
&\quad + 2\varphi^1_{xu}u_x u_{xx} + \varphi^1_{uu}u_x^2 u_{xx} + 2\varphi^1_x u_{xxx} + 2\varphi^1_u u_x u_{xxx} + \\
&\qquad \left. + \varphi^2_{xx}u_x + 2\varphi^2_{xu}u_x^2 + \varphi^2_{uu}u_x^3 + 2\varphi^2_x u_{xx} + 2\varphi^2_u u_x u_{xx}\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для определения функций φ^1, φ^2, ψ имеем следующую систему дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\varphi^1_u = 0, \tag{a}$$

$$\varphi^1_x = 0, \tag{b}$$

$$\varphi^1_{uu} = 0, \tag{c}$$

$$\varphi^1_{xu} + \varphi^2_u = 0, \tag{d}$$

$$-\varphi^1_t + \varphi^1_{xx} + 2\varphi^2_x = 0, \tag{e}$$

$$\varphi^2_{uu} = 0, \tag{f}$$

$$-\psi_{uu} - 2\varphi^2_{xu} = 0, \tag{g}$$

$$-\varphi^2_t - 2\psi_{xu} + \varphi^2_{xx} = 0, \tag{h}$$

$$\psi_t - \psi_{xx} = 0. \tag{j}$$

Решим эту систему. Из формул (a), (b) вытекает, что φ^1 — функция, зависящая только от t. Далее, (d) показывает, что φ^2 не зависит от u, а из (e) следует, что $\varphi^2_x = \frac{\varphi^1_t}{2}$, так что $\varphi^2(x,t) = \varphi^1_t \frac{x}{2} + \gamma(t)$, где γ — некоторая функция, зависящая только от t. Затем в силу (g) функция ψ линейна по u, так что

$$\psi(x,t) = \Omega(x,t)u + \Theta(x,t)$$

для некоторых функций Ω и Θ. В соответствии с (h) $\varphi^2_t = -2\Omega_x(x,t)$, так что функция не более чем второго порядка по x:

$$\Omega(x,t) = -\frac{1}{8}\varphi^1_{tt}x^2 - \frac{1}{2}\gamma_t(t)x + \rho(t).$$

В силу последнего уравнения Ω и Θ удовлетворяют уравнению (3):

$$I_\lambda[\Theta_t(x,t) - \Theta_{xx}(x,t)] = 0,$$

$$I_\lambda[\Omega_t(x,t) - \Omega_{xx}(x,t)] = 0.$$

Пользуясь найденным видом функции γ, получаем

$$\varphi^1_{ttt} = 0,\ \gamma_{tt} = 0,\ \rho_t = -\frac{1}{4}\varphi^1_{tt}.$$

Таким образом, φ^1 — квадратичная функция от t, γ линейна по t, и можно получить формулы для φ^2 и ψ непосредственно из формул для γ, ρ, и φ^1. Тогда функции имеют вид

$$\varphi^1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left(C_1 t^2 + C_2 t + C_3\right),$$

$$\varphi^2 = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left(C_1 t x + \frac{C_2}{2} x + C_4 t + C_5\right),$$

$$\psi = \sum_{\lambda=-1}^{1} I_\lambda \left(\left(-\frac{C_1}{4} x^2 - \frac{1}{2} C_4 x - \frac{1}{2} C_1 t + C_6\right) u + \Theta(x,t)\right).$$

Для отыскания оператора рекурсии удобно пользоваться следующей теоремой:

Теорема 1 (см. [1]). *Пусть задан оператор уравнения $N(u) = 0$. Если существуют линейные операторы $\Re$, $\tilde{\Re}$ такие, что*

$$N'_u \Re = \tilde{\Re} N'_u, \tag{8}$$

то $\Re$ — оператор рекурсии для N.

Применим эту теорему для нахождения оператора рекурсии для заданного дифференциально-разностного оператора.

Пример 2. Рассмотрим оператор уравнения вида

$$N_2(u) \equiv \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_\lambda u_t(x, t+\lambda\tau) - b_\lambda u_{xx}(x, t+\lambda\tau)\right) = 0, \tag{9}$$

где $(x,t) \in Q = \Omega \times (t_0, t_1)$, $a_\lambda(x,t) \in C^{0,1}_{x,t}(\overline{Q})$, $b_\lambda(x,t) \in C^{2,0}_{x,t}(\overline{Q})$ $(\lambda = -1, 0, 1)$ — заданные функции. Найдём оператор рекурсии для заданного оператора N_2.

Оператор N'_{2u} имеет следующий вид:

$$N'_{2u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right).$$

Введём оператор $\Re_1 = D_x$. С одной стороны, имеем

$$N'_{2u} \Re_1 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right) D_x.$$

С другой стороны, получим

$$\Re_1 N'_{2u} = \sum_{\lambda=-1}^{1} D_x \left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right) =$$

$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right) D_x + \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_{\lambda x} I_\lambda D_t - b_{\lambda x} I_\lambda D_x^2\right).$$

Отсюда заключаем, что условия теоремы будут выполнены, если

$$a_{\lambda x} = 0, \quad b_{\lambda x} = 0, \quad \lambda = -1, 0, 1.$$

Значит, при условии

$$a_\lambda = a_\lambda(t),\ b_\lambda = b_\lambda(t), \quad \lambda = -1, 0, 1,$$

оператор $\Re_1 = D_x$ является оператором рекурсии.

Рассмотрим оператор $\Re_2 = tD_x + \frac{1}{2}x$.

С одной стороны,

$$N'_{2u}\Re_2 Q = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right)\left(tD_x + \frac{1}{2}x\right)Q =$$
$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda I_\lambda D_t t D_x Q - b_\lambda I_\lambda D_x^2 t D_x Q + a_\lambda I_\lambda D_t\left(\frac{1}{2}xQ\right) - b_\lambda I_\lambda D_x^2\left(\frac{1}{2}xQ\right) =$$
$$= \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda I_\lambda Q_x + a_\lambda I_\lambda t Q_{tx} + a_\lambda I_\lambda \frac{1}{2}xQ_t - b_\lambda I_\lambda t Q_x^3 - b_\lambda I_\lambda Q_x - \frac{1}{2}b_\lambda I_\lambda x Q_x^2.$$

Преобразуя, получим

$$N'_{2u}\Re_2 Q = \sum_{\lambda=-1}^{1} a_\lambda(t+\lambda\tau)D_x I_\lambda D_t Q - b_\lambda(t+\lambda\tau)D_x I_\lambda D_x^2 Q + \frac{1}{2}x[a_\lambda I_\lambda D_t Q -$$
$$- b_\lambda I_\lambda D_x^2 Q] + (a_\lambda - b_\lambda)I_\lambda D_x Q = \sum_{\lambda=-1}^{1} D_x(a_\lambda(t+\lambda\tau)I_\lambda D_t Q) - a_{\lambda x}(t+\lambda\tau)I_\lambda D_t Q -$$
$$- D_x(b_\lambda(t+\lambda\tau)I_\lambda D_x^2 Q + b_{\lambda x}(t+\lambda\tau)I_\lambda D_x^2 Q + \frac{1}{2}x\left[a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2 Q\right] +$$
$$+ (a_\lambda - b_\lambda)I_\lambda D_x Q.$$

В итоге имеем

$$N'_{2u}\Re_2 Q = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left((t+\lambda\tau)\,D_x + \frac{1}{2}x\right)\left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right)Q -$$
$$- (t+\lambda\tau)\left(a_{\lambda x} I_\lambda D_t - b_{\lambda x} I_\lambda D_x^2\right)Q + (a_\lambda - b_\lambda)I_\lambda D_x Q.$$

С другой стороны, получим

$$\Re_2 N'_{2u} Q = \sum_{\lambda=-1}^{1} \left(tD_x + \frac{1}{2}x\right)\left(a_\lambda I_\lambda D_t - b_\lambda I_\lambda D_x^2\right)Q.$$

Преобразуя, будем иметь следующее:

$$N'_{2u}\Re_2 = \sum_{\lambda=-1}^{1} \tilde{\Re}_2 N'_u - (t+\lambda\tau)\left(a_{\lambda x} I_\lambda D_t - b_{\lambda x} I_\lambda D_x^2\right) + (a_\lambda - b_\lambda)I_\lambda D_x.$$

где $\tilde{\Re}_2 = (t+\lambda\tau)D_x + \frac{1}{2}x$.

Для того чтобы оператор $\Re_2$ был оператором рекурсии, достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$(a_\lambda - b_\lambda)I_\lambda D_x - (t+\lambda\tau)\left(a_{\lambda x} I_\lambda D_t - b_{\lambda x} I_\lambda D_x^2\right) = 0, \quad \lambda = -1, 0, 1.$$

Пусть $a_\lambda = b_\lambda = 1$, тогда уравнение (9) есть уравнение (3), т.е. имеем группу симметрий и R_1, R_2 — операторы рекурсии, $u_0 = e^{-(t+\lambda\tau)}\sin x$ — есть решение уравнения (3), $\overline{u} = u_0 + G(u_0)$, $\overline{u'} = u_0 + G'(u_0)$ — также есть решение уравнения (3). G' может быть представлен как различные произведения операторов рекурсии и генератора симметрии R_2G, R_1G, R_1R_2G, R_2^2G и т.д.

Таким образом из единственного решения u_0 уравнения получаем множество решений данного уравнения.

Литература

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967. — С. 548.
2. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel-Boston-Berlin: Birkhauser, 1996. — P. 91.
3. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения. — М.: Математические заметки, 1999. — Т. 66, С. 145–153.
4. *Олвер П.* Применение групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — С. 639.

UDC 517.972.5

The Construction a Group of Simmetries and the Recursion Operator for Differential Difference Operators with Partial Derivitives

I. A. Kolesnikova

Mathematical Analysis and Theory of Functions Department
Russian University of Peoples's Friendship
Miklykho-Maklaya str., 6, 117198 Moscow, Russia

The group of symmetries for given differential difference operator. The problem of finding out of the recursion operator for given differential difference operator with partial derivitives is considered.

Key words and phrases: differential difference equations, functional difference equations, symmetries method, the recursion operator, the group of symmetries.