Вестник РУДН Серия *Математика. Информатика. Физика.* № 3 (1). 2010. С. 5–16

Математика

УДК 517.958

Потенциалы для линеаризованного уравнения Кавахары

Р. В. Кувшинов

Кафедра нелинейного анализа и оптимизации
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, д. 6, 117198, Москва, Россия

Исследуются свойства решений потенциального типа смешанной задачи в полуполосе для линеаризованного уравнения Кавахары.

Ключевые слова: линеаризованное уравнение Кавахары, решения потенциального типа.

1. Введение

В настоящей работе исследуются свойства решений потенциального типа смешанной задачи для линеаризованного уравнения Кавахары

$$u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x = f(t,x) \tag{1}$$

(a и b некоторые действительные константы) в левой полуполосе $\Pi_T^- = (0,T)\times\mathbb{R}_-$ ($\mathbb{R}_- = (0,-\infty)$, $T>0$ — произвольно).

Для данной задачи установим начальное условие:

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x<0; \tag{2}$$

и для $t\in[0,T]$ следующие граничные условия:

$$u(t,0) = u_1(t), \quad u_x(t,0) = u_2(t), \quad u_{xx}(t,0) = u_3(t). \tag{3}$$

Впервые уравнение $u_t - u_{xxxxx} + bu_{xxx} + au_x + uu_x = f(t,x)$ было получено Кавахарой в 1972 году в работе [1] для описания длинных нелинейных волн в средах со слабой дисперсией (см. также [2,3]). В литературе уравнение Кавахары также называют уравнением Кортевега–де Фриза (КдФ) 5-го порядка или сингулярно возмущённым уравнением КдФ (см. [4,5]) $u_t + u_{xxx} + au_x + uu_x = f(t,x)$.

В работах [6, 7] строятся решения потенциального типа для уравнения КдФ и далее используются для доказательства глобальной корректности смешанной задачи. Глобальная корректность смешанной задачи для уравнения Кавахары в полуполосе Π_T^+ была установлена в работе [8], где было построено решение, представленное в виде суммы потенциалов.

В статье [9] с помощью потенциалов исследованы вопросы существования и единственности слабых решений смешанной задачи для обобщённого уравнения Кавахары в Π_T^+, если начальная функция (возможно, с некоторым степенным весом на $+\infty$) принадлежит пространствам L_2 или H^2.

Основным результатом настоящей работы является построение и изучение свойств решений потенциального типа для линеаризованного уравнения Кавахары при $u_0\equiv 0$, $f\equiv 0$, $u_1\in H^{(k+2)/5}(0,T)$, $u_2\in H^{(k+1)/5}(0,T)$, $u_3\in H^{k/5}(0,T)$, $k\geqslant 0$ целое. Подобные условия гладкости граничных данных являются естественными, поскольку индуцированы свойствами оператора $\partial_t - \partial_x^5$ в следующем

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2010 г.

смысле. Рассмотрим задачу Коши для линеаризованного однородного уравнения Кавахары при $a = b = 0$

$$v_t - v_{xxxxx} = 0, \quad v(0, x) = v_0(x).$$

Тогда, если $v_0 \in H^s(\mathbb{R})$ для некоторого $s \in \mathbb{R}$, то, как легко показать методами работы [10], существует единственное решение этой задачи $v(t, x) \in C(\mathbb{R}^t; H^s(\mathbb{R}))$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения

$$\|D_t^{2/5} v(\cdot, x)\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = \|D_t^{1/5} v_x(\cdot, x)\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = \|v_{xx}(\cdot, x)\|_{H^{s/5}(\mathbb{R}^t)} = c(s)\|v_0\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

2. Обозначения

Пусть $\eta(x)$ — некоторая функция, такая, что $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(x) \geqslant 0$, $\eta'(x) \geqslant 0$ $\forall x$, $\eta(x) = 0$ для $x \leqslant 0$, $\eta(x) = 1$ для $x \geqslant 1$, $\eta'(x) > 0$ для $0 < x < 1$. Положим $P(\partial_x) = \partial_x^5 - b\partial_x^3 - a\partial_x$. Далее, если не оговорено противное, будем считать, что I — некоторый интервал на $\mathbb{R}$ (ограниченный или неограниченный), k, l, m, n, j – целые неотрицательные числа, $p \in [1, +\infty]$, $s \in \mathbb{R}$. Через $C_b^k(\overline{I})$ обозначим пространство функций с непрерывными и ограниченными в $\overline{I}$ производными до порядка k включительно. Положим $C_b(\overline{I}) = C_b^0(\overline{I})$. Если интервал I ограничен, индекс b будем опускать.

Символы $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}[f]$ и $\mathcal{F}^{-1}[f]$ используются соответственно для обозначения прямого и обратного преобразований Фурье, понимаемых как операции в $L_2(\mathbb{R})$. В частности, для $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (пространство Шварца быстро убывающих функций)

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) \mathrm{d}x, \quad \mathcal{F}^{-1}[f](x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} f(\xi) \mathrm{d}\xi.$$

Положим $H^s = H^s(\mathbb{R}) = \left\{ f : \ \mathcal{F}^{-1}\left[(1 + |\xi|)^s \widehat{f}(\xi)\right] \in L_2(\mathbb{R}) \right\}$. Через $H^s(I)$ обозначим пространство сужений на I функций из H^s. Свойства пространств H^s можно найти, например, в [11].

В дальнейшем если $I = \mathbb{R}$, то символ $\mathbb{R}$ в обозначениях для функциональных пространств будем опускать: $L_p = L_p(\mathbb{R})$, $C_b = C_b(\mathbb{R})$ и т.д., а если $I = \mathbb{R}_+$ или $I = \mathbb{R}_-$, то будем использовать нижний индекс $+$ или $-$, а именно: $L_{p,+} = L_p(\mathbb{R}_+)$, $L_{p,-} = L_p(\mathbb{R}_-)$, $H_+^s = H^s(\mathbb{R}_+)$, $H_-^s = H^s(\mathbb{R}_-)$, $C_{b,+} = C_b(\overline{\mathbb{R}_+})$, $C_{0,+}^\infty = C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,+}^k = W_p^k(\mathbb{R}_+)$, $W_{p,-}^k = W_p^k(\mathbb{R}_-)$ и т.д.

Если $\mathcal{B}$ – некоторое банахово пространство, то через $C_b(\overline{I}; \mathcal{B})$ будем обозначать пространство непрерывных ограниченных отображений отрезка $\overline{I}$ в $\mathcal{B}$ (если I ограничен, то индекс b, разумеется, опускается). Символы $L_p(I; \mathcal{B})$ используются в общепринятом смысле.

Будем использовать следующее простое интерполяционное неравенство. Пусть $k \geqslant 1$, $p \in [2, +\infty]$, $m < k$. Тогда для любого интервала I существует такая константа $c = c(k, m, p)$, что для любого $f \in H^k(I)$

$$\|f^{(m)}\|_{L_p(I)} \leqslant c\|f^{(k)}\|_{L_2(I)}^{\vartheta} \|f\|_{L_2(I)}^{1-\vartheta} + c\|f\|_{L_2(I)}, \quad \vartheta = \frac{1}{k}\left(m + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right). \qquad (4)$$

Решение рассматриваемой задачи строится в следующих классах функций.

Определение 1. Для $T > 0$ и $k \geqslant 0$ через $X_k((0, T) \times I)$ (I может быть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_-$) обозначим пространство функций $u(t, x)$ таких, что

$$\partial_t^m u \in C\left([0, T]; H^{k-5m}(I)\right), \quad m \leqslant k/5, \qquad (5)$$

$$\partial_x^l u \in C_b\left(\overline{I}; H^{(k-l+2)/5}(0,T)\right), \quad l \leqslant k+2, \tag{6}$$

$$\partial_t^m \partial_x^l u \in L_8\left(0,T; C_b(\overline{I})\right), \quad 5m+l \leqslant k, \tag{7}$$

Основным результатом работы является доказательство теоремы о представлении решения линейной смешанной задачи с нулевыми начальной функцией и правой частью.

3. Потенциалы

Решение задачи Коши для уравнения (1) с $f \equiv 0$ и начальным условием (2) при $x \in \mathbb{R}$ может быть записано в виде (см., например, [12])

$$u(t,x) = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{it\left(\xi^5 + b\xi^3 - a\xi\right)}\widehat{u}_0(\xi)\right](x) \equiv S(t,x;u_0). \tag{8}$$

Тогда верна лемма

Лемма 1. *Если $u_0 \in H^k$, $f \equiv 0$, то для некоторого $T > 0$ решение $u(t,x)$ задачи (1), (2) в пространстве $X_k(\Pi_T)$ ($\Pi_T = (0,T)\times\mathbb{R}$) существует и для любого $t_0 \in (0,T]$ справедливо неравенство*

$$\|u\|_{X_k(\Pi_{t_0})} \leqslant c(T,k)\|u_0\|_{H^k}. \tag{9}$$

Лемма доказана в статье [8].

Для построения решения потенциального типа для уравнения (1) нам понадобятся некоторые свойства корней алгебраического уравнения

$$r^5 - br^3 - ar - i\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{10}$$

Если $a = b = 0$, то корни этого уравнения тривиально находятся и среди них есть ровно два корня $r_1(\lambda)$ и $r_2(\lambda)$ с положительной действительной частью и один чисто мнимый корень $r_3(\lambda)$. Тогда для произвольных a и b существует такое $\lambda_0(a,b) > 0$, что при $|\lambda| \geqslant \lambda_0$ для некоторых констант $\widetilde{c} > 0$ и $\widetilde{c}_1 > 0$ корни $r_k(\lambda)$ обладают следующими свойствами (нумерацию корней можно выбрать так, чтобы они были непрерывны по λ, $r_k(-\lambda) = \overline{r_k(\lambda)}$, при $k = 1$, 2 и 3):

$$\begin{gathered} \operatorname{Re} r_k(\lambda) \geqslant \widetilde{c}|\lambda|^{1/5}, \quad \text{при } k=1,2; \quad \operatorname{Re} r_3(\lambda) = 0; \\ |r_k(\lambda)| \leqslant \widetilde{c}_1 |\lambda|^{1/5}, \quad \text{при } \quad k=1,2,3; \\ |r_l(\lambda) - r_m(\lambda)| \geqslant \widetilde{c}|\lambda|^{1/5}, \quad \text{при } l,m = 1,2,3 \quad \text{и} \quad l \neq m. \end{gathered} \tag{11}$$

В дальнейшем без ограничения общности будем считать, что $\lambda_0(a,b) \geqslant 1$ для любых a и b.

Заметим, что для уравнения (10) существуют ещё 2 корня $\tilde{r}_1(\lambda)$ и $\tilde{r}_2(\lambda)$ с отрицательной действительной частью и обладающие аналогичными свойствами (см. [8])

$$\operatorname{Re} \tilde{r}_k(\lambda) \leqslant -\widetilde{c}|\lambda|^{1/5}, \quad |\tilde{r}_k(\lambda)| \leqslant \widetilde{c}_1|\lambda|^{1/5}, \quad |\tilde{r}_1(\lambda) - \tilde{r}_2(\lambda)| \geqslant \widetilde{c}|\lambda|^{1/5}.$$

Корни $\tilde{r}_1(\lambda)$ и $\tilde{r}_2(\lambda)$ используются в статье [8] для построения граничного потенциала для однородного уравнения (1) в Π_T^+, а именно, для $x \geqslant 0$ и некоторых функций $\mu(t) \in H^{(k+2)/5}$ и $\nu(t) \in H^{(k+1)/5}$ (с дополнительным условием $\widehat{\mu}(\lambda) = \widehat{\nu}(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < \lambda_0(a,b)$) строится потенциал вида

$$J^+(t,x;\mu,\nu) \equiv \mathcal{F}_t^{-1}\left[\frac{\tilde{r}_1(\lambda)e^{\tilde{r}_2(\lambda)x} - \tilde{r}_2(\lambda)e^{\tilde{r}_1(\lambda)x}}{\tilde{r}_1(\lambda) - \tilde{r}_2(\lambda)}\,\widehat{\mu}(\lambda) + \frac{e^{\tilde{r}_1(\lambda)x} - e^{\tilde{r}_2(\lambda)x}}{\tilde{r}_1(\lambda) - \tilde{r}_2(\lambda)}\,\widehat{\nu}(\lambda)\right].$$

Введём теперь функцию типа граничного потенциала для однородного уравнения (1) в Π_T^-.

Определение 2. Пусть граничные функции (3) $u_1(t), u_2(t), u_3(t) \in L_2$ и $\widehat{u}_1(\lambda) = \widehat{u}_2(\lambda) = \widehat{u}_3(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < \lambda_0(a,b)$. Пусть также

$$\Delta \equiv \Delta\left(1, r_k(\lambda), r_k^2(\lambda)\right) = \begin{vmatrix} 1 & r_1(\lambda) & r_1^2(\lambda) \\ 1 & r_2(\lambda) & r_2^2(\lambda) \\ 1 & r_3(\lambda) & r_3^2(\lambda) \end{vmatrix} = (r_3 - r_2)(r_3 - r_1)(r_2 - r_1).$$

По аналогии с Δ определим $\Delta_1\left(e^{r_k(\lambda)x}, r_k(\lambda), r_k^2(\lambda)\right)$, $\Delta_2\left(1, e^{r_k(\lambda)x}, r_k^2(\lambda)\right)$ и $\Delta_3\left(1, r_k(\lambda), e^{r_k(\lambda)x}\right)$ путём замены соответствующих столбцов на $e^{r_k(\lambda)x}$. Тогда для $t \in \mathbb{R}$ и $x \leqslant 0$

$$J(t,x;u_1,u_2,u_3) \equiv \mathcal{F}_t^{-1}\left[\frac{\Delta_1}{\Delta}\widehat{u}_1(\lambda) + \frac{\Delta_2}{\Delta}\widehat{u}_2(\lambda) + \frac{\Delta_3}{\Delta}\widehat{u}_3(\lambda)\right]. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть $u_1 \in H^{(k+2)/5}$, $u_2 \in H^{(k+1)/5}$, $u_3 \in H^{k/5}$ для некоторого $k \geqslant 0$, причём $\widehat{u}(\lambda) = \widehat{u}_2(\lambda) = \widehat{u}_3(\lambda) = 0$ при $|\lambda| < \lambda_0(a,b)$. Тогда для любого $T > 0$ имеет место неравенство*

$$\|J(\cdot,\cdot;u_1,u_2,u_3)\|_{X_k(\Pi_T^-)} \leqslant c(T,k)\left(\|u_1\|_{H^{(k+2)/5}} + \|u_2\|_{H^{(k+1)/5}} + \|u_3\|_{H^{k/5}}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Преобразуем потенциал J следующим образом

$$J \equiv \widetilde{J} + \mathcal{F}_t^{-1}\left[\frac{e^{r_3(\lambda)x}}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} r_1(\lambda) & r_1^2(\lambda) \\ r_2(\lambda) & r_2^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_1(\lambda) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \begin{vmatrix} 1 & r_1^2(\lambda) \\ 1 & r_2^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_2(\lambda) + \begin{vmatrix} 1 & r_1(\lambda) \\ 1 & r_2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_3(\lambda)\right)\right] \equiv \widetilde{J} + \mathcal{F}_t^{-1}\left[e^{r_3(\lambda)x}G(\lambda)\right],$$

где

$$\widetilde{J} \equiv \mathcal{F}_t^{-1}\left[\frac{e^{r_1(\lambda)x}}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} r_2(\lambda) & r_2^2(\lambda) \\ r_3(\lambda) & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_1(\lambda) - \begin{vmatrix} 1 & r_2^2(\lambda) \\ 1 & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_2(\lambda) + \begin{vmatrix} 1 & r_1(\lambda) \\ 1 & r_3(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_3(\lambda)\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{e^{r_2(\lambda)x}}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} r_1(\lambda) & r_1^2(\lambda) \\ r_3(\lambda) & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_1(\lambda) - \begin{vmatrix} 1 & r_1^2(\lambda) \\ 1 & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_2(\lambda) + \begin{vmatrix} 1 & r_1(\lambda) \\ 1 & r_3(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_3(\lambda)\right)\right].$$

Так как $r_3(\lambda)$ — чисто мнимый корень уравнения (10), то его можно представить в виде $r_3(\lambda) = ip(\lambda)$. Нетрудно видеть, что функция $p(\lambda)$ — непрерывна и монотонна при $|\lambda| \geqslant \lambda_0$, и обладает свойствами: $|p(\lambda)| \leqslant c|\lambda|^{1/5}$, $p'(\lambda)$ — непрерывна и $\frac{1}{|p'(\lambda)|} \leqslant c|\lambda|^{4/5}$. Сделав замену $\xi = p(\lambda)$, получим

$$\mathcal{F}_t^{-1}\left[e^{r_3(\lambda)x}G(\lambda)\right] = \mathcal{F}_x^{-1}\left[e^{ip^{-1}(\xi)t}G(p^{-1}(\xi))(p^{-1}(\xi))'\right] =$$
$$= S\left(t,x,\mathcal{F}_x^{-1}\left[G(p^{-1}(\xi))(p^{-1}(\xi))'\right]\right),$$

где $p^{-1}(\xi) = \xi^5 + b\xi^3 - a\xi$.

Воспользуемся неравенством (9)

$$\left\|S\left(t,x,\mathcal{F}_x^{-1}\left[G(p^{-1}(\xi))(p^{-1}(\xi))'\right]\right)\right\|_{X_k(\Pi_T)} \leqslant$$
$$\leqslant \left\|\mathcal{F}_x^{-1}\left[G(p^{-1}(\xi))(p^{-1}(\xi))'\right]\right\|_{H^k} \leqslant c\left\|(1+|\xi|)^k G(p^{-1}(\xi))(p^{-1}(\xi))'\right\|_{L_2} =$$

$$= c\left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|\xi|)^{2k}\left|G\left(p^{-1}(\xi)\right)\right|^2\left(\left(p^{-1}(\xi)\right)'\right)^2 \mathrm{d}\xi\right)^{1/2} =$$

$$= c\left(\int\limits_{\mathbb{R}} (1+|p(\lambda)|)^{2k} G^2(\lambda)\left(p'(\lambda)\right)^{-1}\mathrm{d}\lambda\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant c_1\left\|\left(1+|\lambda|^{1/5}\right)^k\left(|\widehat{u}_1(\lambda)|\,|\lambda|^{3/5}+|\widehat{u}_2(\lambda)|\,|\lambda|^{2/5}+|\widehat{u}_3(\lambda)|\,|\lambda|^{1/5}\right)|\lambda|^{2/5}/|\lambda|^{3/5}\right\|_{L_2} \leqslant$$
$$\leqslant c(T,k)\left(\|u_1\|_{H^{(k+2)/5}}+\|u_2\|_{H^{(k+1)/5}}+\|u_3\|_{H^{k/5}}\right).$$

Для оценки $\widetilde{J}$ в норме (5) воспользуемся неравенством, установленным в [13]: если некоторая непрерывная функция $\gamma(\xi)$ удовлетворяет неравенству $\operatorname{Re}\gamma(\xi) \geqslant \varepsilon|\xi|$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и любого $\xi \in \mathbb{R}$, то

$$\left\|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\gamma(\xi)x} f(\xi)\mathrm{d}\xi\right\|_{L^x_{2,-}} \leqslant c(\varepsilon)\|f\|_{L_2}.$$

Тогда для любого l заменой $\lambda = \xi^5$ с учётом неравенств (11) получим, что равномерно по $t \in \mathbb{R}$ выполняется цепочка неравенств

$$\|\partial_x^l \widetilde{J}\|_{L_{2,-}} = \left\|\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t}\left[r_1^l(\lambda)\frac{e^{r_1(\lambda)x}}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} r_2(\lambda) & r_2^2(\lambda)\\ r_3(\lambda) & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_1(\lambda) - \begin{vmatrix} 1 & r_2^2(\lambda)\\ 1 & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_2(\lambda) + \right.\right.\right.$$
$$+\left.\begin{vmatrix} 1 & r_2(\lambda)\\ 1 & r_3(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_3(\lambda)\right) - r_2^l(\lambda)\frac{e^{r_2(\lambda)x}}{\Delta}\left(\begin{vmatrix} r_1(\lambda) & r_1^2(\lambda)\\ r_3(\lambda) & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_1(\lambda) - \right.$$
$$\left.\left.\left. - \begin{vmatrix} 1 & r_1^2(\lambda)\\ 1 & r_3^2(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_2(\lambda) + \begin{vmatrix} 1 & r_1(\lambda)\\ 1 & r_3(\lambda)\end{vmatrix}\widehat{u}_3(\lambda)\right)\mathrm{d}\lambda\right]\right\|_{L_{2,-}} \leqslant$$
$$\leqslant c\left\|\int\limits_{\mathbb{R}}\left(e^{\operatorname{Re} r_1(\lambda)x}+e^{\operatorname{Re} r_2(\lambda)x}\right)\left(|\lambda|^{l/5}|\widehat{u}_1(\lambda)|+\right.\right.$$
$$\left.\left. +|\lambda|^{(l-1)/5}|\widehat{u}_2(\lambda)|+|\lambda|^{(l-2)/5}|\widehat{u}_3(\lambda)|\right)\mathrm{d}\lambda\right\|_{L_{2,-}} \leqslant$$
$$\leqslant c_1(\|\xi^{l+4}\widehat{u}_1(\xi^5)\|_{L_2}+\|\xi^{l+3}\widehat{u}_2(\xi^5)\|_{L_2}+\|\xi^{l+2}\widehat{u}_3(\xi^5)\|_{L_2}) \leqslant$$
$$\leqslant c_2(\|u_1\|_{H^{(l+2)/5}}+\|u_2\|_{H^{(l+1)/5}}+\|u_3\|_{H^{l/5}}).$$

Оценка в норме (6) очевидна при $x < 0$, поскольку $\operatorname{Re} r_k > 0$, $\quad k = 1,2$. Оценка $\partial_t^m\partial_x^l\widetilde{J}$ в норме $L_8(0,T;C[-1,0])$ следует из уже установленных оценок в нормах (5), (6) и интерполяционного неравенства (4) (где следует взять $k = 2$, $m = 0$, $p = +\infty$):

$$\left\|D_x^l\widetilde{J}\right\|_{L_8(0,T;C[-1,0])} \leqslant$$
$$\leqslant\left(\int\limits_0^T c\left(\left\|D_x^{l+2}\widetilde{J}\right\|_{L_2(-1,0)}^{1/4}\left\|D_x^l\widetilde{J}\right\|_{L_2(-1,0)}^{3/4}+\left\|D_x^l\widetilde{J}\right\|_{L_2(-1,0)}\right)^8\mathrm{d}t\right)^{1/8} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \sup_{t\in[0,T]} \left\| D_x^l \widetilde{J} \right\|^{3/4}_{L_2(-1;0)} \left(\int_0^T \left(\left\| D_x^{l+2} \widetilde{J} \right\|^{1/4}_{L_2(-1,0)} + \left\| D_x^l \widetilde{J} \right\|^{1/4}_{L_2(-1,0)} \right)^8 \mathrm{d}t \right)^{1/8} \leqslant$$

$$\leqslant c_2 \sup_{t\in[0,T]} \left\| D_x^l \widetilde{J} \right\|^{3/4}_{L_2(-1,0)} \sup_{x\in[-1,0]} \left(\left\| D_x^{l+2} \widetilde{J} \right\|^{1/4}_{L_2(0,T)} + \left\| D_x^l \widetilde{J} \right\|^{1/4}_{L_2(0,T)} \right) \leqslant$$

$$\leqslant c_3 \left(\|u_1\|_{H^{(l+2)/5}} + \|u_2\|_{H^{(l+1)/5}} + \|u_3\|_{H^{l/5}} \right).$$

Для оценки в норме $L_8(0,T;C[-\infty,-1])$ заметим, что для любого $x_0<0$ и $m,l\geqslant 0$ верно неравенство

$$\sup_{\substack{x\leqslant x_0\\ t\in\mathbb{R}}} \left| \partial_t^m \partial_x^l \widetilde{J} \right| \leqslant c(x_0,m,l) \left(\|u_1\|_{L_2} + \|u_2\|_{L_2} + \|u_3\|_{L_2} \right),$$

которое очевидно следует из свойств корней $r_k(\lambda)$. Тогда оценка $\widetilde{J}$ в норме $L_8(0,T;C[-\infty,-1])$ вытекает из этого неравенства. $\square$

Рассмотрим задачу в Π_T^- для уравнения (1) с начальными и граничными данными (2), (3). Корректность этой задачи установлена в [14]. Целью нашего исследования является уточнение некоторых свойств решений задачи (1)–(3).

Начнём с одного вспомогательного результата. Положим $\widetilde{\Phi}_0(x)\equiv u_0(x)$ и для любого натурального m

$$\widetilde{\Phi}_m(x) \equiv \partial_t^{m-1} f(0,x) + P(\partial_x)\widetilde{\Phi}_{m-1}(x).$$

Лемма 2. *Пусть $u_0\in H_-^k$, $u_1,u_2,u_3\in W_{1,+}^k$ для любого k, $f\equiv 0$, $u_1^{(m)}(0)=\widetilde{\Phi}_m(0)$, $u_2^{(m)}(0)=\widetilde{\Phi}'_m(0)$, $u_3^{(m)}(0)=\widetilde{\Phi}''_m(0)$ для любого m. Тогда существует единственное бесконечно дифференцируемое решение $u(t,x)$ задачи (1)–(3) такое, что для любого k, если $5m+l\leqslant 5k$, то*

$$\left\| \partial_t^m \partial_x^l u \right\|_{C_b(\overline{\mathbb{R}}_+^t;L_{2,-})} \leqslant c(k) \left(\|u_0\|_{H_-^{5k}} + \|u_1\|_{W_{1,+}^{k+1}} + \|u_2\|_{W_{1,+}^{k+1}} + \|u_3\|_{W_{1,+}^{k+1}} \right). \quad (14)$$

Доказательство. Положим

$$\psi(t,x) \equiv u_1(t)\eta(1+x) + u_2(t)x\eta(1+x) + u_3(t)\frac{x^2}{2}\eta(1+x)$$

и перейдём от исходной задачи к задаче такого же типа для функции $v(t,x)\equiv u(t,x)-\psi(t,x)$ с нулевыми краевыми условиями, начальной функцией $v_0\equiv u_0-\psi(0,\cdot)$ и правой частью $F\equiv P(\partial_x)\psi-\psi_t$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}=P(\partial_x)$ в $L_{2,-}$ с областью определения $D(\mathcal{A})=\{\varphi\in H_-^5:\ \varphi(0)=\varphi'(0)=\varphi''(0)=0\}$. Этот оператор является диссипативным: $(\mathcal{A}\varphi,\varphi)=0$, и замкнутым. Диссипативным является и сопряжённый оператор $\mathcal{A}^*=-P(\partial_x)$ с областью определения $D(\mathcal{A}^*)=\{\omega\in H_-^5:\ \omega(0)=\omega'(0)=0\}$. Если замкнутый оператор диссипативен вместе со своим сопряжённым, то этот оператор порождает сжимающую полугруппу класса C_0 (см., например, [15]), откуда (заметим, что $v_0\in D(\mathcal{A})$ в силу условий согласования) вытекает существование единственного решения v, а следовательно, и u, для которого неравенство (14) выполнено при $k=0$.

Дифференцированием уравнения (1) по t и аналогичными рассуждениями для соответствующей смешанной задачи для производной u_t получаем сначала неравенство (14) при $k=m=1$, а затем (выражая $\partial_x^5 u$ из самого уравнения (1) и используя (4) для оценки младших производных) при $k=1$, $m=0$. $\square$

Установим теперь теорему о представлении решения линейной смешанной задачи с нулевыми начальной функцией и правой частью.

Определение 3. Пусть $u_0 \equiv 0$, $u_1, u_2, u_3 \in L_2(0,T)$, $f \equiv 0$. Тогда функция $u(t,x) \in L_2((0,T)\times(-x_0,0))$ для любого $x_0 > 0$ называется обобщённым решением задачи (1)–(3), если для любой функции $\varphi(t,x)$, такой, что $\varphi \in L_2(0,T;H^5_-)$, $\varphi_t \in L_2(0,T;L_{2,-})$ и такой, что $\varphi(t,x) \equiv 0$ при $x \leqslant -x_0$ для некоторого $x_0 > 0$, $\varphi|_{t=T} = 0$, $\varphi|_{x=0} = \varphi_x|_{x=0} = 0$, выполняется интегральное тождество

$$\iint\limits_{\Pi_T^-} \left[u\left(\varphi_t - \varphi_{xxxxx} + b\varphi_{xxx} + a\varphi_x\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int\limits_0^T \left(u_1(t)\left(\varphi_{xxxx}(t,0) - b\varphi_{xx}(t,0)\right) - \right.$$

$$\left. - u_2(t)\varphi_{xxx}(t,0) + u_3(t)\varphi_{xx}(t,0)\right) \mathrm{d}t = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $u_0 \equiv 0$, $f \equiv 0$, $u_1 \in H^{2/5}$, $u_2 \in H^{1/5}$, $u_3 \in L_2$ *и* $u_1(t) = u_2(t) = u_3(t) = 0$ *при* $t < 0$. *Тогда для любого* $T > 0$ *в* Π_T^- *существует обобщённое решение задачи* (1)–(3), *вида*

$$u(t,x) = J(t,x;\breve{u}_1,\breve{u}_2,\breve{u}_3) + w(t,x), \tag{15}$$

где

$$\breve{u}_1(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_1(\lambda)](t), \quad \breve{u}_2(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_2(\lambda)](t),$$

$$\breve{u}_3(t) \equiv \mathcal{F}^{-1}[(1-\chi_{\lambda_0}(\lambda))\widehat{u}_3(\lambda)](t)$$

(χ_{λ_0} — *характеристическая функция интервала* $(-\lambda_0,\lambda_0)$), *а функция* w *бесконечно дифференцируема при* $t \geqslant 0$, $x \leqslant 0$ *и для любых* m, l, $x_0 > 0$ *выполняется неравенство*

$$\left\|\partial_t^m \partial_x^l w\right\|_{C([0,T];C[-x_0,0])} \leqslant c(x_0,m,l)\left(\|u_1\|_{L_2} + \|u_2\|_{L_2} + \|u_3\|_{L_2}\right). \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, u_3 \in C^\infty_{0,+}$, и рассмотрим построенное в предыдущей лемме гладкое решение $u(t,x)$ для задачи (1)–(3). Применим преобразование Лапласа для $p = \varepsilon + i\lambda$, где $\varepsilon > 0$, а именно положим

$$\widetilde{u}(p,x) \equiv \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} u(t,x)\mathrm{d}t.$$

Тогда функция $\widetilde{u}$ для любого p удовлетворяет следующему уравнению (при $x \leqslant 0$) и граничным условиям:

$$p\widetilde{u}(p,x) - P(\partial_x)\widetilde{u}(p,x) = 0, \quad \widetilde{u}(p,0) = \widetilde{u}_1(p), \quad \widetilde{u}_x(p,0) = \widetilde{u}_2(p), \quad \widetilde{u}_{xx}(p,0) = \widetilde{u}_3(p),$$

где $\widetilde{u}_1$, $\widetilde{u}_2$, $\widetilde{u}_3$ – преобразования Лапласа функций u_1, u_2, и u_3 соответственно.

Характеристическое уравнение $r^5 - br^3 - ar - i\lambda - \varepsilon = 0$ имеет ровно три корня $r_1(\lambda,\varepsilon)$, $r_2(\lambda,\varepsilon)$ и $r_3(\lambda,\varepsilon)$ с положительной действительной частью. Поэтому функцию $\widetilde{u}$ можно записать в виде

$$\widetilde{u}(p,x) = R_1(\lambda,\varepsilon,x)\widetilde{u}_1(p) + R_2(\lambda,\varepsilon,x)\widetilde{u}_2(p) +, R_3(\lambda,\varepsilon,x)\widetilde{u}_3(p), \tag{17}$$

где в случае $r_1 \neq r_2 \neq r_3$

$$R_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad R_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad R_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

(смотри Определение 3); в случае равенства двух корней, например, $r_2 = r_3 = r$

$$R_1 = \frac{r_1^2 + rr_1(xr - xr_1 - 2)}{(r-r_1)^2}\, e^{rx} + \frac{r^2}{(r-r_1)^2} e^{r_1 x},$$

$$R_2 = \frac{2r - x(r^2 - r_1^2)}{(r-r_1)^2}\, e^{rx} - \frac{2r}{(r-r_1)^2}\, e^{r_1 x}, \quad R_3 = \frac{-1 + x(r-r_1)}{(r-r_1)^2}\, e^{rx} + \frac{1}{(r-r_1)^2}\, e^{r_1 x};$$

и в случае равенства трёх корней $r_1 = r_2 = r_3 = r$

$$R_1 = (1 - rx + \frac{r^2}{2} x^2)\, e^{rx}, \quad R_2 = (x - rx^2)\, e^{rx}, \quad R_3 = \frac{x^2}{2}\, e^{rx}.$$

Функции R_1, R_2 и R_3 непрерывны (также как и производные любого порядка по x этих функций), более того, их можно по непрерывности продолжить для $\varepsilon = 0$ и равномерно по $\varepsilon \in [0,1]$ при $x \leqslant 0$, для любого натурального l:

$$\begin{gathered}
\left|\partial_x^l R_1\right| \leqslant c\left(|\lambda|^{l/5} + |\lambda|^{(l+1)/5} x + |\lambda|^{(l+2)/5} x^2\right), \\
\left|\partial_x^l R_2\right| \leqslant c\left(|\lambda|^{l/5} + |\lambda|^{l/5} x + |\lambda|^{(l+1)/5} x^2\right), \\
\left|\partial_x^l R_3\right| \leqslant c\left(|\lambda|^{l/5} + |\lambda|^{l/5} x^2\right).
\end{gathered} \tag{18}$$

Для доказательства неравенств (18) воспользуемся следующими вспомогательными неравенствами.

Для любой выпуклого множества D и гладкой функции $f(y) \in H(D)$, $y \in \mathbb{C}$,

A) Если $|f'(y)| \leqslant a$ $(a \geqslant 0)$ и $y, y' \in D$, то выполняется неравенство

$$\left|\frac{f(y) - f(y')}{y - y'}\right| \leqslant a.$$

B) Если $|f''(y)| \leqslant b \quad (a \geqslant 0)$ и $y, y', y_0 \in D$, то выполняется неравенство

$$\left|\left[\frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} - \frac{f(y') - f(y_0)}{y' - y_0}\right] / (y - y')\right| \leqslant 2b.$$

C) Если $|f''(y)| \leqslant b \quad (a \geqslant 0)$ и $y, y' \in D$, то выполняется неравенство

$$\left|\left(\frac{f(y) - f(y')}{y - y'} - f'(y)\right) / (y - y')\right| \leqslant b.$$

Перейдём теперь к доказательству (18). Рассмотрим сначала случай $r_1 \neq r_2 \neq r_3$.

Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant \operatorname{Re} r_1 \leqslant \operatorname{Re} r_2$ и $0 \leqslant \operatorname{Re} r_1 \leqslant \operatorname{Re} r_3$, и, если положить $z_3 = r_3 - r_1$, $z_2 = r_2 - r_1$ ($\operatorname{Re} z_3 \geqslant 0$, $\operatorname{Re} z_3 \geqslant 0$), получим

$$\begin{aligned}
R_1 = \frac{e^{r_1 x} r_2 r_3}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)} - \frac{e^{r_2 x} r_1 r_3}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)} + \frac{e^{r_3 x} r_1 r_2}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} = \\
= e^{r_1 x}\left[1 + r_1\left(\frac{e^{z_3 x} - e^{z_2 x}}{z_3 - z_2} - \frac{e^{z_3 x} - 1}{z_3} - \frac{e^{z_2 x} - 1}{z_2}\right) + \right. \\
\left. + \frac{r_1^2}{z_3 - z_2}\left(\frac{e^{z_3 x} - 1}{z_3} - \frac{e^{z_2 x} - 1}{z_2}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{-e^{r_1 x}(r_2 + r_3)}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_1)} + \frac{e^{r_2 x}(r_1 + r_3)}{(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)} + \frac{-e^{r_3 x}(r_1 + r_2)}{(r_3 - r_1)(r_3 - r_2)} =$$

$$= r_1 e^{r_1 x}\left[\frac{2}{z_3-z_2}\left(\frac{e^{z_2x}-1}{z_2}-\frac{e^{z_3x}-1}{z_3}\right)+\frac{e^{z_3x}-1}{z_3}+\frac{e^{z_2x}-1}{z_2}-\frac{e^{z_3x}-e^{z_2x}}{z_3-z_2}\right],$$

$$R_3 = \frac{e^{r_1x}}{(r_2-r_1)(r_3-r_1)}-\frac{e^{r_2x}}{(r_2-r_1)(r_3-r_2)}+\frac{e^{r_3x}}{(r_3-r_1)(r_3-r_2)} = \\ = \frac{e^{r_1x}}{z_3-z_2}\left[\frac{e^{z_3x}-1}{z_3}-\frac{e^{z_2x}-1}{z_2}\right].$$

Пусть $D=\{z : \mathrm{Re}\ z \geqslant 0\}$. Применим неравенство A) для $f(y)\equiv e^{yx}$, где в разных случаях $y=z_3$, $y'=z_2$ или $y=z_3$, $y'=0$ или $y=z_2$, $y'=0$, а также неравенство B) для $f(y)\equiv e^{yx}$, где $y=z_3$, $y'=z_2$, $y_0=0$. Так как $\mathrm{Re}\ zx\leqslant 0$, то $|f'(z)|\leqslant |x||e^{zx}|\leqslant |x|$, и $|f''(z)|\leqslant |x|^2|e^{zx}|\leqslant |x|^2$. Поэтому выполняется (18) для R_1, R_2, R_3 при $l=0$.

Оценим теперь производную ∂_x^l функций R_1, R_2, R_3:

$$\partial_x^l R_1 = r_1^l R_1 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j\, r_1^{j+1}\left[\frac{z_3^{l-j}e^{z_3x}-z_2^{l-j}e^{z_2x}}{z_3-z_2}+z_3^{l-j-1}e^{z_3x}+\right. \\ \left. + z_2^{l-j-1}e^{z_2x}+r_1\frac{z_3^{l-j-1}e^{z_3x}-z_2^{l-j-1}e^{z_2x}}{z_3-z_2}\right],$$

$$\partial_x^l R_2 = r_1^l R_1 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j\, r_1^{j+1}\left[-2\frac{z_3^{l-j-1}e^{z_3x}-z_2^{l-j-1}e^{z_2x}}{z_3-z_2}+\right. \\ \left. + z_3^{l-j-1}e^{z_3x}+z_2^{l-j-1}e^{z_2x}-\frac{z_3^{l-j}e^{z_3x}-z_2^{l-j}e^{z_2x}}{z_3-z_2}\right],$$

$$\partial_x^l R_3 = r_1^l R_1 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j\, r_1^{j}\left[\frac{z_3^{l-j-1}e^{z_3x}-z_2^{l-j-1}e^{z_2x}}{z_3-z_2}\right].$$

Пусть $D=\{z : \mathrm{Re}\ z \geqslant 0\}$. Слагаемые $r_1^lR_1$, $r_1^lR_2$, $r_1^lR_3$ оцениваются аналогично R_1, R_2, R_3 с учётом множителя r_1^l. Для доказательства оставшейся части суммы применим неравенство A) для $f(y)\equiv y^{l-j}e^{yx}$ и для $f(y)\equiv y^{l-j-1}e^{yx}$, где $y=z_3$, $y'=z_2$. Тогда получим, что для R_1, R_2, R_3 выполняется (18) для $l\geqslant 1$.

Рассмотрим теперь случай равенства двух корней $r_2=r_3=r\neq r_1$.

1) Случай $0\leqslant \mathrm{Re}\, r_1\leqslant \mathrm{Re}\, r$. Если положить $z=r-r_1$ ($\mathrm{Re}\ z\geqslant 0$), получим

$$R_1 = \frac{e^{r_1x}}{z}\left[\frac{r_1^2+r_1(z+r_1)(xz-2)}{z}\,e^{zx}+\frac{(z+r_1)^2}{z}\right] = \\ = e^{r_1x}\left[1-\frac{r_1^2}{z}\left(\frac{e^{zx}-1}{z}-xe^{zx}\right)-2r_1\frac{e^{zx}-1}{z}+xr_1e^{zx}\right],$$

$$R_2 = \frac{e^{r_1x}}{z}\left[\frac{2(z+r_1)-xz(z+2r_1)}{z}\,e^{zx}-\frac{2(z+r_1)}{z}\right] = \\ = e^{r_1x}\left[2\frac{e^{zx}-1}{z}-xe^{zx}+\frac{2r_1}{z}\left(\frac{e^{zx}-1}{z}-xe^{zx}\right)\right],$$

$$R_3 = \frac{e^{r_1x}}{z}\left[\frac{-1+xz}{z}\,e^{zx}+\frac{1}{z}\right] = \frac{e^{r_1x}}{z}\left[xe^{zx}-\frac{e^{zx}-1}{z}\right].$$

Пусть $D = \{z : \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$. Применим неравенство A) для $f(y) \equiv e^{yx}$, где $y = z$, $y' = 0$, а также неравенство C) для $f(y) \equiv e^{yx}$, где $y = z$, $y' = 0$. Так как $\mathrm{Re}\, zx \leqslant 0$, то $|f'(z)| \leqslant |x||e^{zx}| \leqslant |x|$ и $|f''(z)| \leqslant |x|^2|e^{zx}| \leqslant |x|^2$. Поэтому выполняется неравенство (18) для R_1, R_2, R_3 при $l = 0$.

Оценим теперь производную ∂_x^l функций R_1, R_2, R_3:

$$\partial_x^l R_1 = r_1^l R_1 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j r_1^{j+1}\left[xz^{l-j-1}e^{zx}(z+r_1)+\right.$$
$$\left.+(l-j-1)r_1z^{l-j-2}e^{zx}+(l-j-2)z^{l-j-1}e^{zx}\right],$$

$$\partial_x^l R_2 = r_1^l R_2 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j r_1^{j}\left[-(z+2r_1)xz^{l-j-1}e^{zx}+\right.$$
$$\left.+2(l-j-1)r_1z^{l-j-2}e^{zx}-(l-j-2)z^{l-j-1}e^{zx}\right],$$

$$\partial_x^l R_3 = r_1^l R_3 + e^{r_1x}\sum_{j=0}^{l-1} C_l^j r_1^{j}\left[xz^{l-j-1}e^{zx}+(l-j-1)z^{l-j-2}e^{zx}\right].$$

Отсюда видно, что для R_1, R_2, R_3 выполняется (18) для $l \geqslant 1$.

2) Случай $0 \leqslant \mathrm{Re}\, r \leqslant \mathrm{Re}\, r_1$ и, если положить $z = r_1 - r$ ($\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$), то получим

$$R_1 = \frac{e^{rx}}{z}\left[\frac{(r+z)^2 - r(r+z)(xz+2)}{z} + \frac{r^2e^{zx}}{z}\right] = e^{rx}\left[1 - xr + \frac{r^2}{z}\left(\frac{e^{zx}-1}{z} - x\right)\right],$$

$$R_2 = \frac{e^{rx}}{z}\left[\frac{2r + xz(z+2r)}{z} - \frac{2re^{zx}}{z}\right] = e^{rx}\left[x - \frac{2r}{z}\left(\frac{e^{zx}-1}{z} - x\right)\right],$$

$$R_3 = \frac{e^{rx}}{z}\left[-\frac{1+xz}{z} + \frac{e^{zx}}{z}\right] = \frac{e^{rx}}{z}\left[\frac{e^{zx}-1}{z} - x\right].$$

Пусть $D = \{z : \mathrm{Re}\, z \geqslant 0\}$. Применим неравенство C) для $f(y) \equiv e^{yx}$, где $y = 0$, $y' = z$. Так как $\mathrm{Re}\, zx \leqslant 0$, то $|f'(z)| \leqslant |x||e^{zx}| \leqslant |x|$ и $|f''(z)| \leqslant |x|^2|e^{zx}| \leqslant |x|^2$. Поэтому выполняется (18) для R_1, R_2, R_3 при $l = 0$.

Оценим теперь производную ∂_x^l функций R_1, R_2, R_3:

$$\begin{cases} \partial_x R_1 = rR_1 + e^{rx}r\left[r\dfrac{e^{zx}-1}{z} - 1\right], \\ \partial_x^l R_1 = r^l R_1 + e^{rx}\displaystyle\sum_{j=0}^{l-2} C_l^j r^{j+2}\left[z^{l-j-2}e^{zx}\right] + C_l^{l-1}r^{l-1}\left[\partial_x R_1 - rR_1\right], \quad l \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x R_2 = rR_2 + e^{rx}\left[1 - 2r\dfrac{e^{zx}-1}{z}\right], \\ \partial_x^l R_2 = r^l R_2 - e^{rx}\displaystyle\sum_{j=0}^{l-2} C_l^j r^{j+1}\left[2rz^{l-j-2}e^{zx}\right] + C_l^{l-1}r^{l-1}\left[\partial_x R_2 - rR_2\right], \quad l \geqslant 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_x R_3 = rR_3 + e^{rx}\left[\dfrac{e^{zx}-1}{z}\right], \\ \partial_x^l R_3 = r^l R_3 + e^{rx}\displaystyle\sum_{j=0}^{l-2} C_l^j r^j \left[z^{l-j-2}e^{zx}\right] + C_l^{l-1} r^{l-1}\left[\partial_x R_3 - rR_3\right], \qquad l \geqslant 2. \end{cases}$$

Пусть $D = \{z : \mathrm{Re}\ z \geqslant 0\}$. Применим неравенство A) для $f(y) \equiv e^{yx}$, где $y = z$, $y' = 0$. Так как $\mathrm{Re}\ zx \leqslant 0$, то $|f'(z)| \leqslant |x||e^{zx}| \leqslant |x|$. Поэтому выполняется (18) для R_1, R_2, R_3 при $l \geqslant 1$. Неравенства (18) в случае равенства трёх корней $r_1 = r_2 = r_3 = r$ очевидны.

Применяя формулу обращения преобразования Лапласа и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ (что законно в силу (18)), из представления (17) выводим, что

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathcal{F}_t^{-1}[R_1(\lambda,0,x)\widehat{u}_1(\lambda) + R_2(\lambda,0,x)\widehat{u}_2(\lambda) + R_3(\lambda,0,x)\widehat{u}_3(\lambda)](t) = \\ &= J(t,x;\breve{u}_0,\breve{u}_1,\breve{u}_3) + \mathcal{F}_t^{-1}[(R_1(\lambda,0,x)\widehat{u}_1(\lambda) + R_2(\lambda,0,x)\widehat{u}_2(\lambda) + \\ &\qquad + R_3(\lambda,0,x)\widehat{u}_3(\lambda))\chi_{\lambda_0}(\lambda)](t) \equiv J(t,x;\breve{u}_0,\breve{u}_1,\breve{u}_3) + w(t,x). \end{aligned}$$

Изучим свойства функции w. Очевидно, что она бесконечно дифференцируема при $x \leqslant 0$ и для любых m, l справедлива оценка

$$\|\partial_x^l w(\cdot,x)\|_{H^m} \leqslant c(m,l)(1+x^2)(\|u_1\|_{L_2} + \|u_2\|_{L_2} + \|u_3\|_{L_2}).$$

В общем случае утверждение теоремы получается замыканием на основе неравенств (13) и (16). Теорема доказана. □

Литература

1. *Kawahara T.* Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media // J. Phys. Soc. Japan. — 1972. — Vol. 33. — Pp. 260–264.
2. *Марченко А. В.* О длинных волнах в мелкой жидкости под ледяным покровом // Прикл. матем. мех. — 1988. — Т. 52. — С. 230–234.
3. *Ильичев А. Т.* О свойствах одного нелинейного эволюционного уравнения пятого порядка, описывающего волновые процессы в средах со слабой дисперсией // Труды МИАН. — 1989. — Т. 186. — С. 222–226.
4. *Pomeau Y., Ramani A., Grammaticos B.* Structural Stability of the Korteweg–de Vries Solitons under a Singular Perturbation // Physica D. — 1988. — Vol. 31. — Pp. 127–134.
5. *Boyd J. P.* Weakly Non–Local Solitons for Capillary–Gravity Waves: Fifth Degree Korteweg–de Vries Equation // Physica D. — 1991. — Vol. 48. — Pp. 129–146.
6. *Faminskii A. V.* An Initial Boundary-Value Problem in a Half-Strip for the Korteweg–de Vries Equation in Fractional-Order Sobolev Spaces // Comm. Partial Differential Equations. — 2004. — Vol. 29. — Pp. 1653–1695.
7. *Faminskii A. V.* Global Well-Posedness of Two Initial-Boundary-Value Problems for the Korteweg–de Vries Equation // Differential Integral Equations. — 2007. — Vol. 20. — Pp. 601–642.
8. *Кувшинов Р. В., Фаминский А. В.* Смешанная задача в полуполосе для уравнения Кавахары // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45. — С. 391–402.
9. *Сангаре К., Фаминский А. В.* Слабые решения смешанной задачи в полуполосе для обощенного уравнения Кавахары // Математические заметки. — 2009. — Т. 85. — С. 98–109.
10. *Kenig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-Posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg–de Vries Equation // J. Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 4. — Pp. 323–347.
11. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.

12. *Cui S., Tao S.* Stricharts Estimates for Dispersive Equations and Solvability of the Kawahara Equation // J. Math. Anal. Appl. — 2005. — Vol. 304. — Pp. 683–702.
13. *Bona J. L., Sun S., Zhang B.-Y.* A Nonhomogeneous Boundary–Value Problems for the Korteweg-de Vries Equation in a Quarter–Plane // Trans. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 354. — Pp. 427–490.
14. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Смешанная задача для $(2b+1)$-гиперболических уравнений // Труды ММО. — 1981. — Т. 43. — С. 197–259.
15. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.

UDC 517.958

Potentials for a Linearized Kawahara Equation

R. V. Kuvshinov

Department of Nonlinear Analysis and Optimization
Peoples' Friendship University of Russia
6, Miklukho-Maklaya str., Moscow, Russia, 117198

Properties of special solutions of potential type for a linearized Kawahara equation in a half-strip are studied.

Key words and phrases: linearized Kawahara equation, solutions of potential type.