УДК 517.583

Об определении эллиптических функций Якоби

К. Н. Анахаев

Федеральная служба по гидрометеорологии и мониторингу окружающей среды
Государственное учреждение «Высокогорный геофизический институт»
пр. Ленина, 2, г. Нальчик, КБР, Россия, 360030

В работе получены упрощённые аналитические зависимости, выраженные элементарными функциями, позволяющие при решении прикладных (инженерных) задач с высокой степенью точности ($\ll 1\%$) определять значения эллиптических функции Якоби, что открывает новые возможности для расширения теоретических методов исследований задач математической физики, механики и др.

Ключевые слова: эллиптические функции Якоби, эллиптический синус (синус амплитуды), эллиптический косинус (косинус амплитуды), дельта амплитуды, комплексная переменная, функция комплексной переменной.

Эллиптические функции Якоби — функции обратные к эллиптическим интегралам, являются двоякопериодичными мероморфными функциями комплексного переменного. Они играют чрезвычайно важную роль в теории функции комплексного переменного и непосредственно используются при аналитических решениях множества задач математической физики, механики, в том числе, в теории фильтрации, гидро- и аэродинамике, теории упругости, механике сплошной среды, термодинамике, электромагнетизме, микроэлектронике и т.д.

В качестве примеров ниже перечислены лишь некоторые из многочисленных расчётных схем фильтрационных потоков в теле и основаниях гидросооружений, решения которых выражаются через эллиптические функции Якоби:

– фильтрация под прямоугольной подошвой бетонной плотины при неограниченной и ограниченной мощности проницаемого основания [1];
– фильтрация через земляные плотины на проницаемом основании при прямолинейном и криволинейном очертании водоупора [2];
– фильтрация из каналов при ограниченной мощности проницаемого основания [1];
– фильтрация через земляные плотины с дренажной призмой на непроницаемом основании [2] и др.

В то же время следует отметить, что эллиптические функции Якоби в общем виде не выражаются через элементарные функции, а потому определение их значений представляет собой весьма сложный и трудоёмкий процесс, связанный, в частности, с использованием вспомогательных более быстросходящихся тэта-функций, понижающего (повышающего) преобразований Ландена, интерполяции (прямой и обратной) табличных данных по двум переменным, разложений в ряды по параметру Якоби и степеням комплексного переменного, метода арифметико-геометрического среднего с итерационным расчётом и др. [3–5]. Кроме этого, трудоёмкость представления эллиптических функций Якоби через элементарные ограничивает возможности аналитического выражения взаимосвязи физических параметров решаемых задач при заданных граничных условиях, рассмотрения более сложных расчётных схем, а также использования их при создании программ для ЭВМ.

Изложенное существенно сдерживает развитие теоретических методов исследований инженерных задач, связанных с движением потенциальных потоков в самых различных областях техники.

В данной работе приводится новый, практически точный, метод определения значений эллиптических функций Якоби путём выражения их через элементарные. Как известно [6, 7], эллиптический синус Якоби (синус амплитуды) $\mathrm{sn}(W, \lambda)$ даёт точное конформное отображение прямоугольника с горизонтальной $2K$ и

Статья поступила в редакцию 3 февраля 2009 г.

вертикальной K' сторонами в комплексной области $W = \phi + i\psi$ на полуплоскость $\zeta = \xi + i\eta$ (рис. 1), т.е.

$$\zeta = \mathrm{sn}(W,\lambda) = \mathrm{sn}W, \tag{1}$$

где φ, ψ и ξ, η — соответственно, координаты областей W и ζ; $K = K(\lambda)$ и $K' = K'(\lambda')$ — полные эллиптические интегралы первого рода при модуле λ и дополнительном модуле λ', равном $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

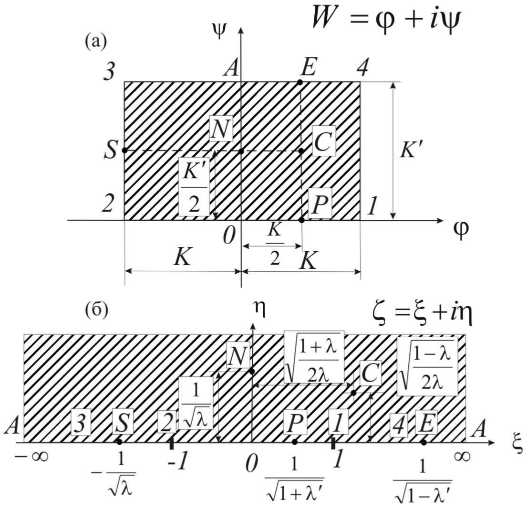

Рис. 1. **Конформное отображение (точное) прямоугольника на полуплоскость эллиптическим синусом Якоби** $\mathrm{sn}(W,\lambda)$**: а) комплексный прямоугольник 1-2-3-4** $W = \varphi + i\psi$**; б) комплексная полуплоскость** $\zeta = \xi + i\eta$; K **и** K′ **— полные эллиптические интегралы первого рода при модуле** λ **и дополнительном модуле** $\lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}$

Для определения функции ζ можно также использовать расчётные зависимости (7) и (12), полученные в [8] в результате конформного отображения элементарными функциями прямоугольника, имеющего сторону с незначительной выпуклостью, на полуплоскость. Причём максимальная погрешность, вносимая этой выпуклостью, соответствует прямоугольнику с равными сторонами — квадрату ($\frac{K'}{2K} = 1$ или $\lambda = 0,171259$) и составляет $0,118\%$. При увеличении же одной из сторон указанная погрешность становится исчезающе малой, например, при отношении сторон прямоугольника, равном $1,35$–$0,01\%$; $1,67$–$0,001\%$; $2,0$–$0,0001\%$ [8].

Подставляя в формулу (1) величину ζ из [8, формулы (7), (12)], получим значения эллиптического синуса Якоби в виде:

$$\begin{cases} \mathrm{sn}W = \dfrac{2}{\lambda R}\cdot\dfrac{\sin\left(\frac{\pi W}{2K}\right)}{1+R^{-2}\sin^2\left(\frac{\pi W}{2K}\right)} \quad \left(\text{при}\quad \dfrac{K'}{2K} \geqslant 1 \text{ или } \lambda \leqslant 0,171259\right); \\ \mathrm{sn}W = \dfrac{(\zeta^* - n)(1-m)}{\zeta^*(1+m-2n)+n(1+m)-2m} \ \left(\text{при } \dfrac{K'}{2K} < 1 \text{ или } \lambda > 0,171259\right), \end{cases} \tag{2}$$

в которых

$$\begin{cases} R = \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi K'}{2K}\right); \quad \zeta^* = \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{ch}\left[\frac{\pi}{K'}(W+K)\right]}{1+r^{-2}\,\mathrm{ch}^2\left[\frac{\pi}{K'}(W+K)\right]}; \\ r = \mathrm{ch}\left(\dfrac{2\pi K}{K'}\right); \quad m = \dfrac{2r}{1+r^2}; \quad n = \dfrac{2}{r}\cdot\dfrac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}{1+r^{-2}\,\mathrm{ch}^2\left(\frac{\pi K}{K'}\right)}. \end{cases} \tag{3}$$

Отделяя в формулах (2) и (3) вещественную и мнимую части, окончательно получим расчётные зависимости для определения эллиптического синуса Якоби $\mathrm{sn}W = \mathrm{sn}(\varphi + i\psi,\lambda)$ в виде:

– для $\lambda \leqslant 0,141259$

$$\begin{cases} \mathrm{sn}W = a_1 + ib_1; \quad a_1 = \dfrac{2}{\lambda R} \cdot \dfrac{a_2a_3 + b_2b_3}{a_2^2 + b_2^2}; \quad b_1 = \dfrac{2}{\lambda R} \cdot \dfrac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \\ a_2 = 1 + (a_3^2 - b_3^2)R^{-2}; \quad a_3 = \sin\left(\dfrac{\pi\varphi}{2K}\right) \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi\psi}{2K}\right); \\ b_2 = 2a_3b_3R^{-2}; \quad b_3 = \cos\left(\dfrac{\pi\varphi}{2K}\right) \mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi\psi}{2K}\right); \end{cases} \tag{4}$$

– для $\lambda > 0,141259$

$$\begin{cases} \mathrm{sn}W = c_1 + id_1; \quad c_1 = \dfrac{c_2c_3 + d_2d_3}{c_3^2 + d_3^2}; \quad d_1 = \dfrac{c_3d_2 - c_2d_3}{c_3^2 + d_3^2}; \\ c_2 = (c_4 - n)(1 - m); \quad c_3 = c_4(1 + m - 2n) + n(1 + m) - 2m; \\ c_4 = \dfrac{2}{r} \cdot \dfrac{c_5c_6 + d_5d_6}{c_5^2 + d_5^2}; \; c_5 = 1 + (c_6^2 - d_6^2)r^{-2}; \; c_6 = \mathrm{ch}\left(\dfrac{\pi\varphi}{K'} + K\right) \cos\left(\dfrac{\pi\psi}{K'}\right); \\ d_2 = d_4(1 - m); \quad d_3 = d_4(1 + m - 2n); \quad d_4 = \dfrac{2}{r} \cdot \dfrac{c_5d_6 - c_6d_5}{c_5^2 + d_5^2}; \\ d_5 = 2c_6d_6r^{-2}; \quad d_6 = \mathrm{sh}\left(\dfrac{\pi\varphi}{K'} + K\right) \sin\left(\dfrac{\pi\psi}{K'}\right). \end{cases} \tag{5}$$

Эллиптический косинус (косинус амплитуды) $\mathrm{cn}W$ и дельта амплитуды $\mathrm{dn}W$ выражаются через $\mathrm{sn}W$ известными соотношениями [5–7, 9]:

$$\begin{cases} \mathrm{cn}W = \sqrt{1 - \mathrm{sn}^2W}; \\ \mathrm{dn}W = \sqrt{1 - \lambda^2\mathrm{sn}^2W}. \end{cases} \tag{6}$$

Парами основных периодов функций $\mathrm{sn}W$, $\mathrm{cn}W$ и $\mathrm{dn}W$ являются [5, 6], соответственно: $4K$ и $i2K'$; $4K$ и $2K + i2K'$; $2K$ и $i4K'$, используя которые аргумент эллиптической функции, взятый в любой точке комплексной области, приводится к значению, расположенному в области прямоугольника.

По найденным значениям функции $\mathrm{sn}W$, $\mathrm{cn}W$ и $\mathrm{dn}W$ могут быть определены и другие девять эллиптических функций Якоби [3]:

$$\begin{cases} \mathrm{sc}W = \dfrac{\mathrm{sn}W}{\mathrm{cn}W}; \quad \mathrm{cs}W = \dfrac{\mathrm{cn}W}{\mathrm{sn}W}; \quad \mathrm{nd}W = \dfrac{1}{\mathrm{dn}W}; \\ \mathrm{sd}W = \dfrac{\mathrm{sn}W}{\mathrm{dn}W}; \quad \mathrm{ds}W = \dfrac{\mathrm{dn}W}{\mathrm{sn}W}; \quad \mathrm{nc}W = \dfrac{1}{\mathrm{cn}W}; \\ \mathrm{cd}W = \dfrac{\mathrm{cn}W}{\mathrm{dn}W}; \quad \mathrm{dc}W = \dfrac{\mathrm{dn}W}{\mathrm{cn}W}; \quad \mathrm{ns}W = \dfrac{1}{\mathrm{sn}W}. \end{cases} \tag{7}$$

В табл. 1 приведено сравнение результатов подсчёта значений различных эллиптических функций Якоби по предлагаемым зависимостям с известными базовыми данными, полученными весьма сложными и трудоёмкими методами расчёта [3–5].

Для определения модуля λ при известных значениях K и K' может быть рекомендована также зависимость [8] $\lambda = 2R/(1 + R^2)$, где R находится по формуле (3).

Таблица 1

Сравнение расчётных значений различных эллиптических функций Якоби с результатами известных базовых решений

№ п/п	**Заданные значения $W = \phi + i\psi$, λ, K и K'**	**Базовые значения эллиптических функций Якоби по [3–5]**	**Значения эллиптических функций Якоби (по автору)**	**Погрешность %**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	$W = 0,20$; $K = 1,654617$; $\lambda = \sqrt{0,19}$; $K' = 2,280549$	$\mathrm{dn}(W,\lambda) = 0,996253$ на основе понижающего преобразования Ландена [3, с. 393]	$\mathrm{dn}(W,\lambda) = 0,996253$	$0,000$
2	$W = 0,20$; $K = 2,280549$; $\lambda = 0,9$; $K' = 1,654617$	$\mathrm{dn}(W,\lambda) = 0,98406$ на основе понижающего преобразования Ландена и аппроксимации гиперболическими функциями [3, с. 393]	$\mathrm{dn}(W,\lambda) = 0,984056$	$0,000$
3	$W = 0,20$; $K = 2,280549$; $\lambda = 0,9$; $K' = 1,654617$	$\mathrm{n}(W,\lambda) = 0,980278$ на основе повторного (двойного) повыш. преобразования Ландена [3, с. 393]	$\mathrm{cn}(W,\lambda) = 0,980278$	$0,000$
4	$W = 0,672$; $K = 1,750754$; $\lambda = 0,6$; $K' = 1,995303$	$\mathrm{dc}(W,\lambda) = 1,1740$ на основе арифметико-геометрического среднего и итерации табличных данных [3, с. 393–394]	$\mathrm{dc}(W,\lambda) = 1,174018$	$+0,001$
5	$W = 0,536016$; $K = 1,608049$; $\lambda = 0,3$; $K' = 2,627773$	$\mathrm{cs}(W,\lambda) = 1,691808$ на основе разложения в ряд по параметру Якоби [3, с. 394]	$\mathrm{cs}(W,\lambda) = 1,692037$	$+0,013$
6	$W = 0,61802$; $K = 1,854075$; $\lambda = \sqrt{0,5}$; $K' = 1,854075$	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,56458$ на основе тета-функций и интерполяции табличных данных [3, с. 394]	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,564575$	$0,000$
7	$W = 0,61802$; $K = 1,854075$; $\lambda = \sqrt{0,5}$; $K' = 1,854075$	$\mathrm{sc}(W,\lambda) = 0,68402$, получено как и в п. 6 [3, с. 394–395]	$\mathrm{sc}(W,\lambda) = 0,684018$	$0,000$

Таблица 1

Сравнение расчётных значений различных эллиптических функций Якоби с результатами известных базовых решений (окончание)

№ п/п	**Заданные значения** $W = \phi + i\psi$, λ, K **и** K'	**Базовые значения эллиптических функций Якоби по [3–5]**	**Значения эллиптических функций Якоби (по автору)**	**Погрешность %**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
8	$W = 0,75342$; $K = 2,075363$; $\lambda = \sqrt{0,7}$; $K' = 1,713889$	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,65137$ на основе прямой и обратной интерполяции данных разных таблиц [3, с. 395], [2, с. 417];	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,651373$	$0,000$
9	$W = 0,247351 + i \cdot 0,153802$; $\lambda = \sqrt{0,5}$; $K = 1,854075$; $K' = 1,854075$	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,247824 + i \cdot 0,147707$ на основе разложения в ряды с определением степеней комплексных чисел рекуррентными формулами [5, с. 672–677]	$\mathrm{sn}(W,\lambda) = 0,247824 + i \cdot 0,147707$	$0,000$
10	$W = 0,247351 + i \cdot 0,153802$; $\lambda = \sqrt{0,5}$; $K = 1,854075$; $K' = 1,854075$	$\mathrm{cn}^2(W,\lambda) = 0,960401 - i \cdot 0,073210$, получено как и в п. 9 [5, с. 677]	$\mathrm{cn}^2(W,\lambda) = 0,960401 - i \cdot 0,073211$	$0,000$
11	$W = 0,247351 + i \cdot 0,153802$; $\lambda = \sqrt{0,5}$; $K = 1,854075$; $K' = 1,854075$	$\mathrm{dn}^2(W,\lambda) = 0,980200 - i \cdot 0,036605$, получено как и в п. 9 [5, с. 677]	$\mathrm{dn}^2(W,\lambda) = 0,980200 - i \cdot 0,036605$	$0,000$

Как видно из таблицы, предлагаемые достаточно простые расчётные зависимости для определения эллиптических функций Якоби, основанные на элементарных функциях, дают весьма близкое совпадение результатов ($\ll 1\%$) с известными базовыми значениями, полученными на основе сложных и трудоёмких методов расчёта. Это позволяет существенно расширить теоретические методы исследований потенциальных потоков и открывает большие возможности для аналитического решения множества прикладных задач математической физики, механики и др.

Заключение

Решение большого количества прикладных задач математической физики и механики определяется через эллиптические функции Якоби, аналитическое выражение которых представляет собой весьма сложный и трудоёмкий процесс. Это существенно затрудняет выявление роли отдельных факторов в структуре полученного общего решения, а также ограничивает возможности развития теоретических исследований для решения более сложных задач и т.д. Для восполнения указанного пробела в работе предложены упрощённые аналитические зависимости на основе элементарных функций, позволяющие при решении прикладных (инженерных) задач с достаточно высокой степенью точности ($\ll 1\%$) определять значения всех (12-ти) эллиптических функции Якоби.

Литература

1. *Павловский Н. Н.* Движение грунтовых вод // Собрание сочинений. — М.-Л.: АН СССР, 1956. — Т. 2. — 771 с.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я.* Теория движения грунтовых вод. — М.: Наука, 1977. — 664 с.
3. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические функции Якоби и тэта-функции // Справочник по специальным функциям (пер. с англ.). — М.: Наука, 1979. — С. 380–400.
4. *Милн-Томсон Л.* Эллиптические интегралы // Справочник по специальным функциям (пер. с англ.). — М.: Наука, 1979. — С. 401–441.
5. *Фильчаков П. Ф.* Справочник по высшей математике. — Киев: Наукова думка, 1973. — 743 с.
6. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функции комплексного переменного. — 4 издание. — М.: Наука, 1973. — 736 с.
7. *Лаврик В. И., Савенков В. Н.* Справочник по конформным отображениям. — Киев: Наукова думка, 1970. — 252 с.
8. *Анахаев К. Н.* О расчёте потенциальных потоков // ДАН. — 2005. — Т. 401, № 3. — С. 337–341.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции (пер. с нем.). — 3 издание. — М.: Наука, 1977. — 342 с.

UDC 517.583

On Definition of Jacobian Elliptic Functions

K. N. Anakhaev

The Federal Service for Hydrometeorology and Environmental Monitoring
State Institution "High-mountain Geophysical Institute"
Lenin's prospectus, 2, Nalchik, KBR, Russia, 360030

Simple analytical approximations of Jacobian elliptic functions by the elementary functions is suggested. The high degree accuracy of the approximation ($\ll 1\%$) permits to apply it to various problems of mathematical physics, mechanics, etc.