Теоретическая механика

УДК 531.31:62–56

О компактной форме выражения динамических уравнений Эйлера при относительном движении тела

И. А. Мухаметзянов

Кафедра теоретической механики
Российского университета дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Получено компактное выражение динамических уравнений Эйлера при относительном движении тела с помощью планарного тензора инерции.

Ключевые слова: тензор инерции, планарный тензор, годограф, эллипсоид энерции.

1. Постановка задачи

Как известно, динамическое уравнение Эйлера для абсолютного движения тела вокруг центра масс c в осях системы координат $cxyz$, связанных с телом, в векторной форме имеет вид

$$J\overline{\varepsilon}_a = J\overline{\omega}_a \times \overline{\omega}_a + \overline{M}_c(\overline{F}), \tag{1}$$

где J – тензор инерции тела в точке c, являющийся известной (3×3)-матрицей с постоянными элементами; $\overline{\omega}_a$, $\overline{\varepsilon}_a$ – векторы абсолютной угловой скорости и углового ускорения тела; $\overline{M}_c^e$, $\overline{M}_c^k$ – главные моменты переносной и кориолисовой сил инерции относительно точки c, $\overline{M}_c(\overline{F})$ – главный момент внешних физических сил относительно c.

Подставляя

$$\overline{\omega}_a = \overline{\omega}_r + \overline{\omega}_e,\ \overline{\varepsilon}_a = \overline{\varepsilon}_r + \overline{\varepsilon}_e + \overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r,$$

где $\overline{\omega}_r$, $\overline{\omega}_e$, $\overline{\varepsilon}_e$, $\overline{\varepsilon}_r$ – относительные и переносные угловая скорость и угловое ускорение тела в уравнение (1), получим

$$J\overline{\varepsilon}_r = -J\overline{\varepsilon}_e + J\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e + J\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_r + J\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_e + J\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r + J[\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_e] + \overline{M}_c(\overline{F}).$$

Так как главный момент переносных сил инерции $\overline{M}_c^e$ выражается лишь через $\overline{\omega}_e$ и $\overline{\varepsilon}_e$, а кориолисовых сил инерции $\overline{M}_c^k$ – через $\overline{\omega}_r$ и $\overline{\omega}_e$, то из этого уравнения следует

$$\overline{M}_c^e = -J\varepsilon_e + J\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e,\ \overline{M}_c^k = J\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_e + J\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_r + J[\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_e]. \tag{2}$$

Из (2) видно, что нет необходимости в приведении вектора $\overline{M}_c^e$ к более компактной форме. По отношению к вектору $\overline{M}_c^k$ такое приведение представляется целесообразным.

Поставим задачу о приведении вектора $\overline{M}_c^k$ к более компактной форме в виде одного векторного произведения двух векторов вместо трех произведений в (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (06-01-00664) и Министерства образования и науки РФ.

2. Решение задачи

Для этого введем понятие планарного кинетического момента инерции тела в точке c от переносного вращения тела

$$\overline{K}'_c = J'_c \overline{\omega}_e, \tag{3}$$

$$J'_c = \begin{Vmatrix} J'_x & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J'_y & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J'_z \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

$$\text{где } J'_x = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu^2, \; J'_y = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu^2, \; J'_z = \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu^2$$

являются планарными моментами инерции тела [1] относительно координатных плоскостей cyz, cxz, cxy. Внедиагональные элементы матрицы (4) являются известными центробежными моментами инерции тела. Матрицу (4) назовем планарным тензором инерции тела в точке c. Если оси системы $cxyz$ являются главными осями инерции тела, то матрица (4) становится диагональной, так как при этом внедиагональные элементы обращаются в нуль.

Имеет место теорема:

Теорема. *Главный момент кориолисовых сил инерции относительно центра масс тела равен удвоенному векторному произведению относительной угловой скорости тела на его планарный кинетический момент от переносного вращения.*

Согласно этой теореме имеет место равенство

$$\overline{M}_c^k = 2[\overline{\omega}_r \times J'_c \overline{\omega}_e]. \tag{5}$$

Заметим, что убедиться в справедливости (5) можно было бы сравнением проекций правых частей $\overline{M}_c^k$ в (2) и в (5) на оси системы $cxyz$. Такой путь, кроме трудоемкости, обладает еще тем недостатком, что при этом невольно возникает вопрос о том, каким образом авору удалось догадаться ввести понятия планарного момента инерции в виде (3) и планарного тензора инерции в виде (4).

Поэтому используем более очевидный путь определения $\overline{M}_c^k$ в виде суммы моментов кориолисовых сил инерции всех частиц тела относительно точки c

$$\overline{M}_c^k = -2 \sum_{\nu=1}^{n} \overline{\rho}_\nu \times m_\nu [\overline{\omega}_e \times \overline{V}_\nu^r], \tag{6}$$

где $\overline{\rho}_\nu$ – радиус-вектор частицы тела массой m_ν относительно c. Вектор (6) разложим по направлениям $\overline{\omega}_e$ и $\overline{V}_\nu^r$

$$\overline{M}_c^k = -2\overline{\omega}_e \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \left(\overline{\rho}_\nu \cdot \overline{V}_\nu^r\right) + 2 \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{V}_\nu^r \left(\overline{\rho}_\nu \cdot \overline{\omega}_e\right). \tag{7}$$

Подставляя в (7) значение $\overline{V}_\nu^r = \overline{V}_c^r + \overline{\omega}_r \times \overline{\rho}_\nu$ и учитывая $\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{\rho}_\nu = 0$, $\overline{\rho}_\nu \cdot [\overline{\omega}_r \times \overline{\rho}_\nu] = 0$, получим

$$\overline{M}_c^k = 2\overline{\omega}_r \times \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{\rho}_\nu (\overline{\omega}_e \cdot \overline{\rho}_\nu). \tag{8}$$

Проектируя $\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{\rho}_\nu (\overline{\omega}_e \cdot \overline{\rho}_\nu)$ на оси cx, cy, cz, соответственно, получим

$$\begin{aligned} &\omega_x^e(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu^2) + \omega_y^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu y_\nu\right) + \omega_z^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu z_\nu\right), \\ &\omega_x^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu x_\nu\right) + \omega_y^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu^2\right) + \omega_z^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu y_\nu z_\nu\right), \\ &\omega_x^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu x_\nu\right) + \omega_y^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu y_\nu\right) + \omega_z^e\left(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu z_\nu^2\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Из (9) следует представление вектора $\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{\rho}_\nu (\overline{\omega}_e \cdot \overline{\rho}_\nu)$ в (8) в виде

$$\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{\rho}_\nu (\overline{\omega}_e \cdot \overline{\rho}_\nu) = J_c' \overline{\omega}_e. \tag{10}$$

Итак, подставляя (10) в (8), получим выражение вектора $\overline{M}_c^k$ в виде (5).

Следовательно, динамические уравнения Эйлера в случае относительного движения тела в компактной форме выражаются в виде

$$J\overline{\varepsilon}_r = J\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_r - J\overline{\varepsilon}_e + J\overline{\omega}_e \times \overline{\omega}_e + 2[\overline{\omega}_r \times J_c'\overline{\omega}_e] + \overline{M}_c(\overline{F}). \tag{11}$$

3. Уравнения относительного движения тела вокруг центра масс в главных осях инерции

Как известно, когда оси системы координат $cxyz$ являются главными осями инерции тела, то центробежные моменты инерции J_{ij} обращаются в нуль. При этом матрицы J и J_c' становятся диагональными. Следуя традиции диагональные элементы J_x, J_y, J_z матрицы J обозначим через A, B, C, а матрицы J_c' через A', B', C'. Проекции вектора $\overline{\omega}_r$ на оси cx, cy, cz обозначим через p, q, r, а вектора $\overline{\omega}_e$ — через p_e, q_e, r_e. Тогда проекции (11) на оси cx, cy, cz выражаются в виде

$$\begin{aligned} A\dot{p} &= (B-C)qr - A\dot{p}_e + (B-C)q_e r_e + 2(C'qr_e - B'rq_e) + M_x(\overline{F}), \\ B\dot{q} &= (C-A)rp - B\dot{q}_e + (C-A)r_e p_e + 2(A'rp_e - C'pr_e) + M_y(\overline{F}), \\ C\dot{r} &= (A-B)qr - C\dot{r}_e + (A-B)p_e q_e + 2(B'pq_e - A'qp_e) + M_z(\overline{F}). \end{aligned} \tag{12}$$

В этих уравнениях A', B', C' можно заменить их выражениями через A, B, C

$$A' = (B+C-A)/2,\ B' = (A+C-B)/2,\ C' = (A+B-C)/2$$

Эти соотношения следуют из $(A+B+C) = 2\sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu (x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2)$. Например, учитывая $A' = \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu x_\nu^2$, $A = \sum\limits_{\nu=1}^{n} m_\nu (y_\nu^2 + z_\nu^2)$, получим $A' = (B+C-A)/2$. Выражения B' и C' получаются аналогично.

Попутно заметим, что по аналогии с известным понятием эллипсоида инерции тела с полуосями $1/\sqrt{A}$,$1/\sqrt{B}$, $1/\sqrt{C}$ напрашивается введение понятия планарного эллипсоида инерции тела с полуосями $1/\sqrt{A'}$,$1/\sqrt{B'}$, $1/\sqrt{C'}$.

В связи с тем, что одними из возможных обобщенных координат, характеризующих относительное движение тела, являются углы Эйлера ψ, θ, φ, определяющие ориентацию системы координат $cxyz$ относительно системы $ox_1y_1z_1$, в уравнения (12) необходимо подставить значения p, q, r, выражаемые следующими кинематическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{gathered} p = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi,\ q = \dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi, \\ r = \dot\varphi + \dot\psi \cos\theta. \end{gathered} \tag{13}$$

Аналогичным образом выражаются проекции $\omega^e_{x_1}$, $\omega^e_{y_1}$, $\omega^e_{z_1}$ вектора $\overline{\omega}_e$ на оси системы координат $ox_1y_1z_1$ через углы Эйлера ψ_e, θ_e, φ_e, определяющие ориентацию $ox_1y_1z_1$ относительно неподвижной (абсолютной) системы координат $o_0x_0y_0z_0$ в виде

$$\begin{gathered} \omega^e_{x_1} = \dot\psi_e \sin\theta_e \sin\varphi_e + \dot\theta_e \cos\varphi_e,\ \omega^e_{y_1} = \dot\psi_e \sin\theta_e \cos\varphi_e - \dot\theta_e \sin\varphi_e, \\ \omega^e_{z_1} = \dot\varphi_e + \dot\psi_e \cos\theta_e. \end{gathered} \tag{14}$$

Проектируя векторы $\overline{\omega}^e_{x_1} = \bar{i}_1\omega^e_{x_1}$, $\overline{\omega}^e_{y_1} = \bar{j}_1\omega^e_{y_1}$, $\overline{\omega}^e_{z_1} = \bar{k}_1\omega^e_{z_1}$, где $\bar{i}_1$, $\bar{j}_1$, $\bar{k}_1$ – орты осей системы $ox_1y_1z_1$, получим

$$\begin{gathered} p_e = \omega^e_{z_1} \sin\theta \sin\varphi + \omega^e_{x_1} \cos\psi \cos\varphi + \omega^e_{y_1} \sin\psi \cos\varphi, \\ q_e = \omega^e_{z_1} \sin\theta \cos\varphi - \omega^e_{x_1} \cos\psi \sin\varphi - \omega^e_{y_1} \sin\psi \sin\theta, \\ r_e = 2\omega^e_{z_1} \cos\theta - \omega^e_{y_1} \cos\psi \sin\theta - \omega^e_{x_1} \sin\psi \sin\theta. \end{gathered} \tag{15}$$

Подставляя (13) и (15) в уравнение (12), получим систему трех уравнений второго порядка относительно искомых переменных ψ, θ, φ.

4. Вращательное движение тела вокруг центра масс с устойчивым геометрическим местом годографа вектора относительной угловой скорости

Рассмотрим случай, когда главный момент физических сил уравновешивает главный момент переносных сил инерции. При этом

$$\overline{M}_c(\overline{F}) = J\overline{\varepsilon}_e + \overline{\omega}_e \times J\overline{\omega}_e, \tag{16}$$

а уравнение (11) принимает вид

$$J\frac{d\overline{\omega}_r}{dt} = J\overline{\omega}_r \times \overline{\omega}_r + 2[\overline{\omega}_r \times J'_c\overline{\omega}_e].$$

Скалярно умножая это уравнение на $\overline{\omega}_r$, получим $d(\overline{\omega}_r J\overline{\omega}_r)/2dt = 0$. Следовательно, при условии (16), независимо от характера движения центра масс тела, кинетическая энергия $(Ap^2+Bq^2+Cr^2)/2$ вращательного движения вокруг центра масс сохраняется, оставаясь равной ее начальному значению $(Ap_0^2+Bq_0^2+Cr_0^2)/2$. Отсюда вытекает, что эллипсоид

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2 \tag{17}$$

с полуосями

$$\sqrt{Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2}/\sqrt{A}, \quad \sqrt{Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2}/\sqrt{B}, \quad \sqrt{Ap_0^2 + Bq_0^2 + Cr_0^2}/\sqrt{C}$$

является геометрическим местом годографа вектора угловой скорости $\overline{\omega}_r$. Следовательно, на полуоси эллипсоида (17), соответствующей наибольшей из величин

A, B, C, имеет место наименьшее значение $|\overline{\omega}_r|$. Например, при $C < B < A$ на полуоси, соответствующей C, имеет место $\max|\overline{\omega}_r|$, а на полуоси, соответствующей A, — $\min|\overline{\omega}_r|$. Следовательно, имеет место соотношение

$$\max|\overline{\omega}_r|/\min|\overline{\omega}_r| = \sqrt{A/C} = \text{const}. \tag{18}$$

Отсюда следует, что при любых начальных значениях $|\overline{\omega}_0(p_0, q_0, r_0)|$ при условии (16), независимо от характера движения тела, отношение $\max|\overline{\omega}_r|/\min|\overline{\omega}_r|$ остается постоянным, зависимым лишь от соотношений максимальной и минимальной из величин A, B, C. Заметим, что при малых p_0, q_0, r_0 значение $|\overline{\omega}_r|$ при всех $t \geqslant t_0$ остается тоже малым, но соотношение (18) при этом сохраняется. Очевидно, что при $A = B = C$ значение $|\overline{\omega}_r|$ остается неизменным и равным $|\overline{\omega}_0^r|$.

Литература

1. *Раус Э. Д.* Динамика системы твердых тел. — М.: Наука, 1983. — Т. 1, 464 с.

UDC 531.31:62–56

On Compact Form of Eulers Dynamic Equations for Relative Motion of Body

I. A. Mukhametzyanov

Department of Theoretical Mechanics
People's Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str. 6, Moscow, Russia, 117198

The compact expression of Eulers equations of dynamics for the relative motion of a body through the planar tensor of inertia is obtained.